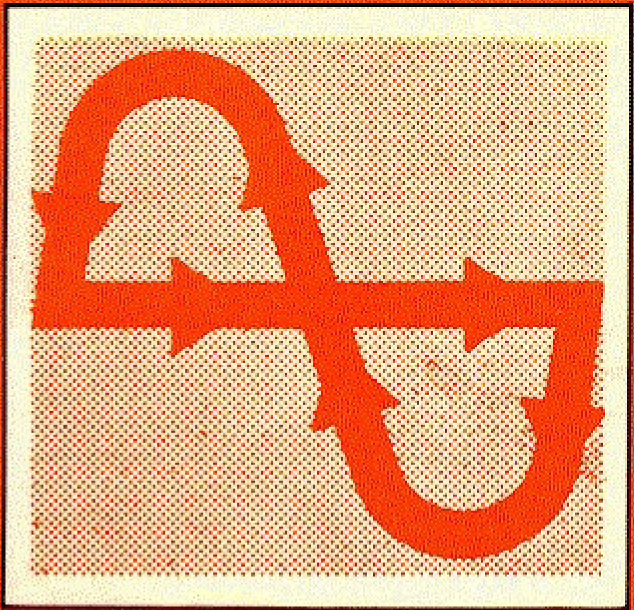
JOSEPH A. EDMINISTER



CIRCUITOS ELÉTRICOS

Resumo da teoria
350 problemas resolvidos
493 problemas propostos

Relançamento da Edição Clássica Totalmente Revisada

COLEÇÃO SCHAUM

EDITORA McGRAW-HILL LTDA.

CIRCUITOS ELÉTRICOS

REEDIÇÃO DA EDIÇÃO CLÁSSICA

C
E

REEDI

3.
4

Pr

Bras

CIRCUITOS ELÉTRICOS

REEDIÇÃO DA EDIÇÃO CLÁSSICA

Resumo da Teoria
350 Problemas Resolvidos
493 Problemas Propostos

Joseph A. Edminister
Professor de Engenharia Elétrica
University of Akron

Tradução:
Sebastião Carlos Feital
Engenheiro de Comunicações
Ex- professor do IME

Revisão e Adaptação da Reedição:
Antonio Pertende Júnior
Engenheiro Eletrônico e de Telecomunicações

Pearson Education

São Paulo

Brasil Argentina Colômbia Costa Rica Chile Espanha
Guatemala México Porto Rico Venezuela

Impressão: São Paulo – SP

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Edminister, Joseph A.
Circuitos elétricos : reedição da edição clássica : resumo da teoria, 350 problemas resolvidos, 493 problemas propostos
Joseph A. Edminister ; tradução: Sebastião Carlos Feital; revisão e adaptação Antônio Pertence Júnior. -- 2. ed
-- São Paulo : Pearson Education do Brasil, 1991. (Coleção Schaum)

1. Circuitos elétricos 2. Circuitos elétricos – Problemas, exercícios etc.
I. Título. II. Série: Schaum.

90-2367 -621.3192
-621.3192076

Índice para catálogo sistemático

1. Circuitos elétricos : Engenharia 621.3192
2. Exercícios : Circuitos elétricos : Engenharia 621.3192076
3. Problemas : Circuitos elétricos : Engenharia 621.3192076

Rua Emílio Goeldi, 747 – Lapa
CEP: 05065-110, São Paulo – SP, Brasil
Tel: (11)3613-1222 – Fax: (11)3611-0851
e-mail: vendas@pearsoned.com.br

MAKRON
Books

Atendendo à
McGraw-Hill decidiu
Professor Edministe

De fato, conf
clássica" adapta-se n
Elétricos na grande
permite que o aluno
condicionante para o
cações e outros.

Na revisão e
gráficas e alguns par
do assunto quanto à

Assim sendo
dos professores e alu
1985. Cada qual assu

Esperamos t
discente da disciplin
necessidade incontes

MAKRON
Books

APRESENTAÇÃO DA EDIÇÃO REVISADA

Atendendo às inúmeras solicitações de professores e alunos, a Editora McGraw-Hill decidiu relançar a edição clássica do texto *Circuitos Elétricos*, do Professor Edminister.

De fato, conforme nos foi colocado por diversos professores, esta "edição clássica" adapta-se muito bem aos planos curriculares da disciplina Circuitos Elétricos na grande maioria das universidades brasileiras. Além disso, o texto permite que o aluno adquira um real domínio desta disciplina tão essencial e condicionante para os cursos de Engenharia Elétrica, Eletrônica, Telecomunicações e outros.

Na revisão efetuada, foram eliminados erros de simbologia e notações gráficas e alguns parágrafos foram reescritos objetivando uma melhor clareza do assunto quanto à solução apresentada na tradução original.

Assim sendo, para a disciplina Circuitos Elétricos teremos à disposição dos professores e alunos a Edição Clássica revisada e a 2ª edição, publicada em 1985. Cada qual assumindo sua função e adequação aos currículos vigentes.

Esperamos ter alcançado nosso objetivo: oferecer ao corpo docente e discente da disciplina dois textos que se adaptam muito bem aos currículos e à necessidade incontestável de um ensino efetivo desta disciplina.

Milton Mira de Assumpção Filho
Diretor Geral

MAKRON
Books

MAKRON
Books

SUMÁRIO

MAKRON
Books

Destir
como livro-tex
especial às leis
encontradas eı

A mat
teoria e estud
juntamente co
de problemas
ilustrar e amp
práticos e foca
com correção e
propostos serv

Os tóp
de formas de c
cuitos em série
de ressonância
se dos método
métodos de ma
mações estrela
superposição e
dosamente exp
dando-se o dev
importantes ap

MAKRON
Books

PREFÁCIO

Destina-se este livro a suplementar os textos existentes ou a servir como livro-texto em curso inicial de análise de circuitos. Deu-se uma ênfase especial às leis básicas, teoremas e técnicas comuns a diferentes apresentações encontradas em outros textos.

A matéria está dividida em capítulos que cobrem áreas essenciais de teoria e estudo. Cada capítulo inicia com definições, princípios e teoremas, juntamente com material ilustrativo e descritivo. Seguem-se séries graduadas de problemas resolvidos e propostos. Os problemas resolvidos servem para ilustrar e ampliar a teoria, apresentar métodos de análise, fornecer exemplos práticos e focalizar os pontos essenciais que possibilitam ao estudante aplicar com correção e segurança os princípios básicos. O grande número de problemas propostos serve para uma revisão completa da matéria de cada capítulo.

Os tópicos tratados incluem respostas de circuito fundamental, análise de formas de ondas, sistemas de números complexos, notação de fasores, circuitos em série e paralelo, potência e correção do fator de potência, fenômenos de ressonância. Considerável uso de matrizes e determinantes é feito ao tratar-se dos métodos de análise das correntes de malha e das tensões nos nós. Os métodos de matriz são também empregados no desenvolvimento das transformações estrela-triângulo e nos teoremas sobre estruturas, tais como os da superposição e da reciprocidade. Os circuitos de acoplamento mútuo são cuidadosamente explicados. Circuitos polifásicos de todos os tipos são considerados, dando-se o devido destaque ao circuito equivalente de uma linha, o qual tem importantes aplicações práticas. As séries de Fourier, exponencial e trigonométrica são tratadas simultaneamente, convertendo-se freqüentemente os coeficientes de uma nos coeficientes de outra, para mostrar as relações que mantêm entre si. Os transientes de correntes contínua e alternada são tratados através do emprego clássico de equações diferenciais, de forma que este tópico pode proceder a notação de fasores do Capítulo 5, o que é recomendado para aqueles que, possuindo os necessários recursos matemáticos, possam acompanhar esta seqüência. O método da transformada de Laplace é introduzido e aplicado em vários dos problemas tratados no Capítulo 16 pelas equações diferenciais, o que permite uma comparação conveniente entre os dois métodos e ressalta os pontos fortes do método de Laplace.

Desejo aproveitar a oportunidade para expressar minha gratidão à equipe da Schaum Publishing Co., especialmente ao Sr. Nicola Miracapillo, por suas valiosas sugestões e útil colaboração. Muitos agradecimentos são devidos à minha esposa, Nina, por sua assistência constante e estímulo neste empreendimento.

Joseph A. Edminister

University of Akron

Ao estudante:

1) Algumas respostas que envolvem números fracionários poderão diferir em algumas casas decimais. Tal fato se deve à precisão com que os cálculos foram realizados e aos recursos da calculadora eletrônica utilizada. (N.R.)

2) Em muitos problemas, ao final dos capítulos, o autor, por uma questão de simplificação, não explicita as unidades; nestes casos, devem ser consideradas as unidades padrões do SI (conforme tabela de unidades dada na página 9). (N.R.)

MAKRON
Books

Unidades

A eng
lizado.*

Nesse
de comprimen
unidade de for
uma aceleraçã

Força

Segue
metro, chama
(1 newton-met

* N. R. Uma ve
qual é, por lei,

MAKRON
Books

DEFINIÇÕES E PARÂMETROS DE CIRCUITOS

Unidades Mecânicas

A engenharia elétrica emprega o sistema de unidades MKS racionalizado.*

Nesse sistema, as unidades mecânicas fundamentais são o metro (m) de comprimento, o quilograma (kg) de massa, e o segundo (s) de tempo. A unidade de força derivada, correspondente, o newton (N), é a força que produz uma aceleração de 1 m/s^2 na massa de 1 kg.

Força (newtons) = massa (quilogramas) × aceleração (m/s^2).

Segue-se daí que a unidade MKS de trabalho e de energia é o newton-metro, chamado joule, e que a unidade de potência é o joule/segundo ou watt (1 newton-metro = 1 joule, 1 joule/segundo = 1 watt).

* N. R. Uma versão mais moderna do sistema MKS é o sistema SI (Sistema Internacional), o qual é, por lei, adotado no Brasil.

Lei de Coulomb

A força F entre duas cargas puntiformes q e q' varia diretamente com a grandeza de cada carga e inversamente com o quadrado da distância r que as separa:

$$F = k\frac{qq'}{r^2}$$

onde k é uma constante de proporcionalidade (dimensional) que depende das unidades usadas para cargas, distância e força. F será dado em newtons (N) se q e q' forem em coulombs, r em metros e

$$k = 9 \times 10^9 \ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}.$$

Se definimos $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, teremos $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq'}{r^2}$, onde $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$ $= 8{,}85 \times 10^{-12} \ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}$.

Quando o meio circundante não é o vácuo, as forças ocasionadas pelas cargas induzidas no meio reduzem a força resultante entre as cargas livres mergulhadas no meio. A força resultante será então dada por $F = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{qq'}{r^2}$. Para o ar, ϵ é apenas ligeiramente maior que ϵ_0 e, para a maioria dos propósitos, é tomado igual a ϵ_0. Para os demais materiais, obtém-se ϵ de

$$\epsilon = K\epsilon_0$$

onde K é uma constante adimensional, chamada *constante dielétrica* ou *capacidade indutiva específica* do material entre as cargas, $\epsilon = K\epsilon_0$ é chamada *permitividade* ou *permissividade* do material e ϵ_0 é a *permissividade do vácuo*. Para o vácuo, $K = 1$ e $\epsilon = \epsilon_0$.

A unidade de carga, o coulomb, pode ser definida como a quantidade de carga que, colocada a um metro de distância de uma carga igual e do mesmo sinal, no vácuo, repele-a com uma força de 9×10^9 newtons. Os submúltiplos mais usados do coulomb são

$$1\ \mu\mathrm{C} = 1 \text{ microcoulomb} = 10^{-6} \text{ coulombs}$$

$$1\ \mathrm{pC} = 1 \text{ picocoulomb} = 10^{-12} \text{ coulombs}$$

A carga transportada por um elétron ($-e$) ou por um próton ($+e$) é $e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ coulombs.

Diferença de Potencial v

A diferença de potencial v entre dois pontos é medida pelo trabalho necessário à transferência da carga unitária de um ponto para o outro. O *volt* é a diferença de potencial (d.d.p.) entre dois pontos quando é necessário o trabalho de 1 joule para a transferência de uma carga de 1 coulomb de um ponto ao outro: 1 volt = 1 joule/coulomb.

Uma carga q que se desloca entre dois pontos de um circuito externo, entre os quais existe uma diferença de potencial v, executa um trabalho medido por qv, ao se deslocar do ponto de potencial mais elevado para o mais baixo.

Um elemento ativo, como, por exemplo, uma bateria ou um gerador, tem uma força eletromotriz (f.e.m.) se ele exerce trabalho sobre uma carga que o atravessa. A carga recebe energia elétrica ao se deslocar do terminal de menor para o de maior potencial. A f.e.m. é medida pela d.d.p. entre os terminais quando o gerador não está debitando ou drenando corrente.

Corrente i

O material que contém elétrons livres, capazes de se deslocarem de um átomo para o seguinte, é um condutor. Aplicando-se nele uma diferença de potencial, os elétrons se deslocam.

Quando uma carga q está sendo transferida de um ponto para outro de um condutor, existe nele uma corrente elétrica. Se a carga é transferida na razão constante de 1 coulomb/s, a corrente constante existente é 1 ampère (ou 1A): 1 ampère = 1 coulomb/s. Em geral, a corrente instantânea i num condutor é:

$$i\ (\text{ampères}) = \frac{dq\ (\text{coulomb})}{dt\ (\text{segundos})}$$

O sentido da corrente positiva é, por convenção, oposto àquele em que se deslocam os elétrons. Ver Fig. 1-1.

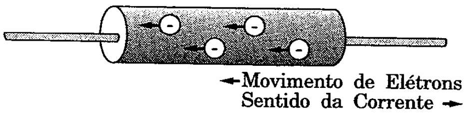


Figura 1-1

Potência p

A potência elétrica p é o produto da tensão aplicada v pela corrente resultante i.

$$p \text{ (watt)} = v \text{ (volts)} \times i \text{ (ampères)}.$$

Por definição, a corrente positiva tem a direção da seta na fonte de tensão; ela sai da fonte pelo terminal +, como mostra a Fig. 1-2. Quando p é positivo, a fonte transfere energia para o circuito.

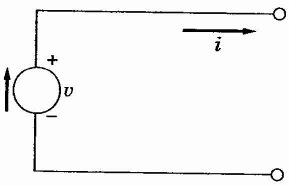


Figura 1-2

Se a potência p é uma função periódica do tempo t, de período T, a *potência média*

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt$$

Energia ω

Como a potência é a taxa de transferência da energia em função do tempo,

$$p = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{e} \quad W = \int_{t_1}^{t_2} p\, dt$$

onde W é a energia transferida durante o intervalo de tempo considerado.

Resistor, Indutor, Capacitor

Ao se fornecer energia elétrica a um elemento de circuito, ele responderá por uma das seguintes formas:

- a energia é consumida – o elemento de circuito é um *resistor* puro;
- a energia é armazenada num campo magnético – o elemento é um *indutor* puro;
- a energia é armazenada num campo elétrico – o elemento é um *capacitor* puro.

Na prática, um elemento de circuito apresenta mais de uma das características acima e, talvez, todas as três, simultaneamente. Uma delas pode predominar, entretanto. Uma bobina pode ser projetada para apresentar elevada indutância, mas o fio com que é enrolada possui alguma resistência; a bobina apresenta, então, ambas as propriedades.

Resistência R

A diferença de potencial $v(t)$ entre os terminais de um resistor puro é diretamente proporcional à corrente $i(t)$ que nele circula. A constante de proporcionalidade R é chamada *resistência* do resistor e é expressa em volts/ampères ou ohms.

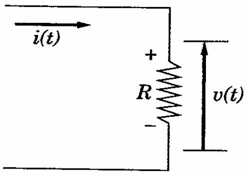


Figura 1-3

$$v(t) = Ri(t) \quad \text{e} \quad i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

Nenhuma restrição existe para $v(t)$ e $i(t)$; podem ser constantes em relação ao tempo, como ocorre nos circuitos de c.c., ou podem ser funções senoidais, co-senoidais etc.

As letras minúsculas (v, i, p) em geral indicam funções do tempo. As maiúsculas (V, I, P) indicam quantidades constantes; os valores máximos ou "picos" recebem um índice (V_m, I_m, P_m).

Indutância L

Quando a corrente em um circuito varia, o fluxo magnético que o envolve também varia. Essa variação de fluxo ocasiona a indução de uma f.e.m.v no circuito. A f.e.m. induzida v é proporcional à taxa de variação da corrente em relação ao tempo, desde que a permeabilidade seja constante. A constante de proporcionalidade é chamada *auto-indutância* ou *indutância do circuito*.

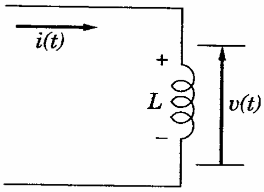


Figura 1-4

Com
henrys. A au
induzida é de

Capacitâ

A dif
cional à carga
capacitância

Com
farads. Um ca
1 coulomb pa
minais. São s

1 µ]

Leis de Ki

1. A soma
que del

$$v(t) = L\frac{di}{dt} \quad \text{donde} \quad i(t) = \frac{1}{L}\int v\,dt$$

Com v em volts e di/dt em ampères/s, L é expressa em volt/ampère ou *henrys*. A auto-indutância de um circuito é de 1 henry (1 H) se a f.e.m. nele induzida é de 1 volt, quando a corrente varia à razão de 1 ampère/segundo.

Capacitância C

A diferença de potencial v entre os terminais de um capacitor é proporcional à carga q nele existente. A constante de proporcionalidade C é chamada *capacitância* do capacitor.

$$q(t) = C\,v(t), \quad i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt}, \quad v(t) = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

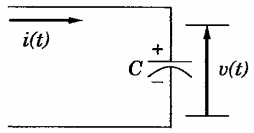


Figura 1-5

Com q em coulombs e v em volts, C é obtida em coulombs/volt ou *farads*. Um capacitor terá a capacitância de 1 farad (1 F) se adquirir a carga de 1 coulomb para cada volt de diferença de potencial aplicada entre seus terminais. São submúltiplos convenientes do farad:

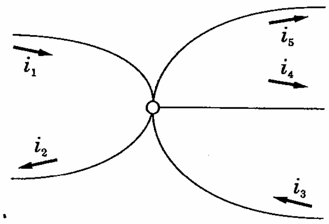
$$1\ \mu F = 1 \text{ microfarad} = 10^{-6}\ F \text{ e } 1\ pF = 1 \text{ picofarad} = 10^{-12}\ F$$

Leis de Kirchhoff

1. A soma das correntes que chegam a um nó é igual à soma das correntes que dele saem. Se as correntes que se dirigem para um nó são conside-

radas positivas, e negativas as que dele se afastam, a lei estabelece que é nula a soma algébrica de todas as correntes que concorrem em um mesmo nó.

2. A soma das elevações de potencial ao longo de qualquer circuito fechado é igual à soma das quedas de potencial nesse mesmo circuito. Em outras palavras, a soma algébrica das diferenças de potencial, ao longo de um circuito fechado, é nula. Se existir mais de uma fonte e os sentidos não forem iguais, será considerada positiva a tensão da fonte cujo sentido coincidir com o admitido para a corrente.

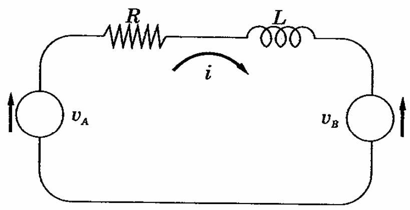


Σ correntes entrando =
= Σ correntes saindo

$$i_1 + i_3 = i_2 + i_4 + i_5$$

$$i_1 + i_3 - i_2 - i_4 - i_5 = 0$$

Figura 1-6



Σ elevações de potencial =
= Σ quedas de potencial

$$v_A - v_B = Ri + L(di/dt)$$

$$v_A - v_B - Ri - L(di/dt) = 0$$

Figura 1-7

Relações Tensão-Corrente nos Elementos Simples

Elemento	***Tensão nos terminais***	***Corrente***
Resistência R	$v(t) = R\, i(t)$	$i(t) = \dfrac{v(t)}{R}$
Indutância L	$v(t) = L\dfrac{di}{dt}$	$i(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int v\, dt$
Capacitância C	$v(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i\, dt$	$i(t) = C\dfrac{dv}{dt}$

Unidades nos Sistemas MKS e SI*

Quantidade		***Unidade***		***Quantidade***		***Unidade***	
Comprimento	l	metro	m	Carga	Q, q	coulomb	C
Massa	m	quilograma	kg	Potencial	V, v	volt	V
Tempo	t	segundo	s	Corrente	I, i	ampère	A
Força	F, f	newton	N	Resistência	R	ohm	Ω
Energia	W, ω	joule	J	Indutância	L	henry	H
Potência	P, p	watt	W	Capacitância	C	farad	F

Problemas Resolvidos

1.1 No circuito da Fig. 1-8, a tensão constante aplicada é $V = 45$ volts. Determinar a corrente, a queda de tensão em cada resistor e a potência em cada um.

A soma das elevações de tensão é igual à soma das quedas, ao longo de qualquer circuito fechado; portanto,

$V = I(2) + I(6) + I(7),\ 45 = 15I,\quad I = 3$ amp

* N. R. A unidade de freqüência (f) é o hertz, o qual simbolizaremos por Hz.

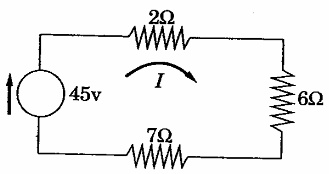


Figura 1-8

A queda de tensão no resistor de 2 ohms é $V_2 = IR_2 = 3(2) = 6$ volts. Da mesma maneira, $V_6 = 3(6) = 18$ volts e $V_7 = 21$ volts.

A potência no resistor de 2 ohms é $P_2 = V_2 I = 6(3) = 18$ watts ou $P_2 = R_2 I^2 = (2)3^2 = 18$ watts. Do mesmo modo, $P_6 = V_7 I = 54$ watts e $P_6 = V_7 I = 63$ watts.

1.2 Uma corrente I_T divide-se entre dois ramos* paralelos de resistências R_2 e R_1, respectivamente, como mostra a Fig. 1-9. Deduzir as expressões das correntes I_1 e I_2, nos ramos paralelos.

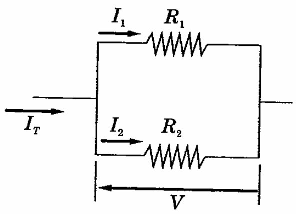


Figura 1-9

$$I_T = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$= R_1\left(\frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}\right)I_1 = \left(\frac{R_2 + R_1}{R_2}\right)I_1$$

* N. R. Os conceitos de "ramos" e "nós" de um circuito são apresentados à página 160, onde o autor faz um pequeno estudo da topologia de um circuito específico.

donde, $I_1 = \left(\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\right) I_T$. Semelhantemente, $I_2 = \left(\dfrac{R_1}{R_1 + R_2}\right)$

1.3 Três resistores R_1, R_2 e R_3 estão em paralelo, como indica a Fig. 1-10. Deduzir uma expressão para a resistência equivalente R_2 da estrutura.

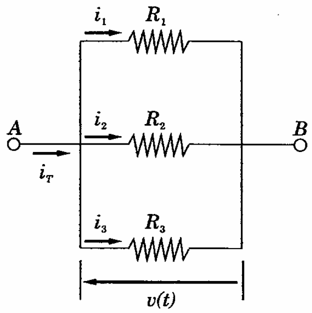


Figura 1-10

Suponhamos uma tensão $v(t)$ entre A e B e chamemos de $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$, respectivamente, as correntes em R_1, R_2 e R_3. A corrente em R_e deverá ser a corrente total $i_T(t)$. Então: $v(t) = R_1\, i_1(t) = R_2\, i_2(t) = R_3\, i_3(t) = R_e\, i_T(t)$

$$i_T(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) \text{ ou } \frac{v(t)}{R_e} = \frac{v(t)}{R_1} + \frac{v(t)}{R_2} + \frac{v(t)}{R_3}$$

$$\text{ou } \frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Para o caso particular de dois braços em paralelo:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ ou } R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

1.4 Duas fontes de tensão constante V_A e V_B atuam no mesmo circuito, como mostra a Fig. 1-11. Qual a potência entregue por cada uma?

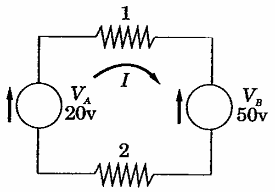


Figura 1-11

A soma das elevações de potencial é igual à soma das quedas ao longo de um circuito fechado; então:

$20 - 50 = I(1) + I(2), I = -10$ amp

Potência entregue por $V_A = V_A I = 20\,(-10) = -200$ W.

Potência entregue por $V_B = V_B I = 50\,(10) = 500$ W.

1.5* No circuito da Fig. 1-12(*a*) a tensão é $v(t) = 150$ sen ωt. Achar a corrente $i\,(t)$, a potência instantânea $p(t)$ e a potência média P.

$$i(t) = \frac{1}{R}\,v(t) = \frac{150}{25}\text{ sen }\omega t = 6\text{ sen }\omega t\ A$$

$$p(t) = v(t)\,i(t) = (150\text{ sen }\omega t)\,(6\text{ sen }\omega t) = 900\text{ sen}^2\,\omega t\ W$$

$$P = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 900\text{ sen}^2\,\omega t\ d(\omega t) = \frac{900}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)\,d(\omega t)$$

$$= \frac{900}{2\pi}\left[\omega t - \frac{1}{2}\text{sen}2\,\omega t\right]_0^{\pi} = 450\text{ W}$$

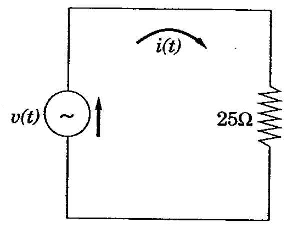


Figura 1-12(*a*)

* N. R. Neste problema o autor introduz o parâmetro ω (freqüência angular), o qual é definido como $\omega = 2\pi f$ e cuja unidade no SI é o rad/s (radiano por segundo).

A corre
represe
produto
Observe
negativ
a noção
fornece

1.6 A funçãc
Supondo
$v(t)$ e da

Como $v($
máximo

Desde qı
valor má

A corrente $i(t)$ está relacionada com a tensão $v(t)$ pela constante R. A representação gráfica da potência instantânea poderia ser obtida pelo produto, ponto a ponto, das curvas de v e i, como mostra a Fig. 1-12(*b*). Observe-se que em um mesmo instante, v e i são ambas positivas ou negativas; o produto, portanto, será sempre positivo, o que concorda com a noção estabelecida de que, ao circular corrente em um resistor, a fonte fornece energia elétrica.

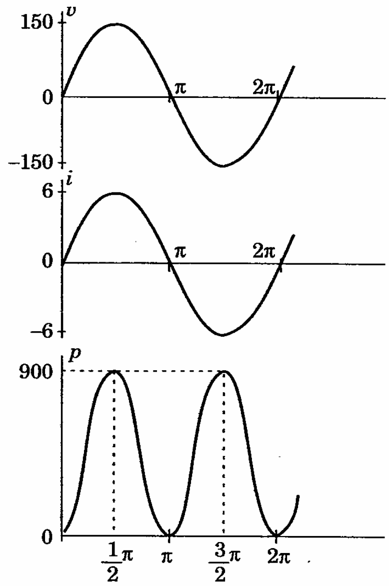


Figura 1-12(*b*)

1.6 A função corrente mostrada na Fig. 1-13 é uma onda quadrada periódica. Supondo-a circulando num resistor puro de 10 ohms, traçar as curvas da tensão $v(t)$ e da potência $p(t)$.

Como $v(t) = R\ i(t)$, a tensão varia diretamente com a corrente. O valor máximo é $Ri_{max} = 5(10) = 50$ volts.

Desde que $p = v\ i$, a potência assinalada é um produto ponto por ponto. O valor máximo é $v_{max}\ i_{max} = 50(5) = 250$ watts.

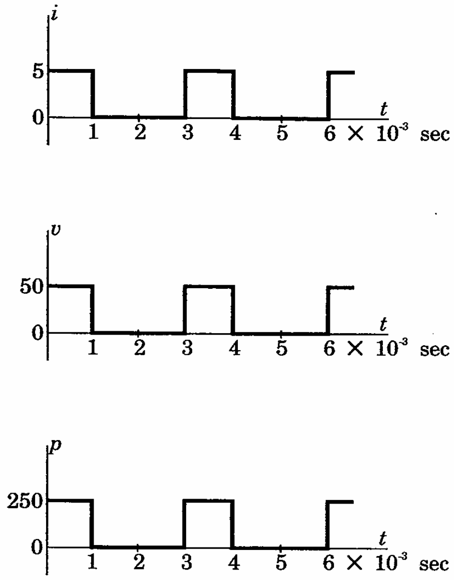


Figura 1-13

1.7 A função corrente representada na Fig. 1-14 é uma onda dente-de-serra que circula em um resistor puro de 5 ohms. Achar $v(t)$, $p(t)$ e a potência média P.

Como $v(t) = R\,i(t)$, $v_{max} = Ri_{max} = (5)(10) = 50$ V

Quando $0 < t < 2 \times 10^{-3}$ s, $i = \dfrac{10}{2 \times 10^{-3}}\,t = 5 \times 10^{3}t$.

Então: $v = Ri = 25 \times 10^{3}t$, $p = vi = 125 \times 10^{6}t^{2}$,

$$P = \frac{1}{2 \times 10^{-3}} \int_{0}^{2 \times 10^{-3}} 125 \times 10^{-6}t^{2}\,dt = 167\ \text{W}$$

1.8 No circu
ampères
tensões
média c

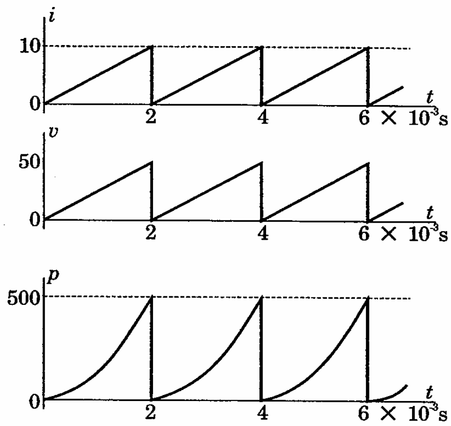


Figura 1-14

1.8 No circuito da Fig. 1-15 a corrente no resistor de 5 ohms é $i(t) = 6 \text{ sen } \omega t$ ampères. (*a*) Determinar a corrente nos resistores de 15 e de 10 ohms e as tensões entre *a* e *b* e entre *b* e *c*. (*b*) Calcular a tensão instantânea e a potência média consumida em cada resistor.

ıte-de-serra que
ıcia média *P*.

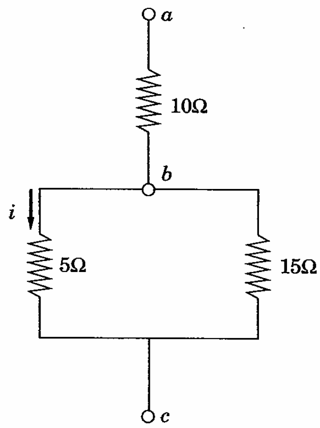


Figura 1-15

V

(*a*) A mesma tensão v_{bc} existe entre os terminais dos resistores de 5 ohms e 15 ohms; então: $v_{bc} = R_5 i_5 = (5)(6 \text{ sen } \omega t) = 30 \text{ sen } \omega t$ e $i_{15} = v_{bc}/R_{15} = 2 \text{ sen } \omega t$

Então: $i_{10} = i_{15} + i_5 = 8 \text{ sen } \omega t,$

e $\quad v_{ab} = R_{10} i_{10} = 80 \text{ sen } \omega t$

(*b*) A potência instantânea $p = vi$. Portanto:

$p_5 = (30 \text{ sen } \omega t)(6 \text{ sen } \omega t) = 180 \text{ sen}^2 \omega t.$

Da mesma maneira:

$p_{15} = 60 \text{ sen}^2 \omega t$ e $p_{10} = 640 \text{ sen}^2 \omega t.$

A potência média no resistor de 5 ohms é

$$p_5 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 180 \text{ sen}^2 \omega t \, d(\omega t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 180\left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)\right] d(\omega t) = 90 \text{ W}$$

Semelhantemente: $p_{15} = 30$ W e $p_{10} = 320$ W.

1.9 Um resistor puro de 2 ohms tem uma tensão aplicada $v(t)$ dada por:

$$v(t) = 50\left[1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} + \dots\right] \text{volts}$$

Determinar a corrente e a potência nesse resistor.

O desenvolvimento de $\cos x$ em série é:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Conseqüentemente: $v(t) = 50 \cos \omega t$, $i(t) = 25 \cos \omega t$, $p(t) = 1250 \cos^2 \omega t$ e $P = 625$ watts.

1.10 Uma indutância para $L = 0{,}02$ henry tem uma tensão aplicada $v(t) = 150$ sen $1000t$. Determinar a corrente $i(t)$, a potência instantânea $p(t)$ e a potência média P.

$$i(t) = \frac{1}{L}\int v(t)\,dt = \frac{1}{0{,}02}\int 150 \text{ sen } 1000t \, dt$$

$$= \frac{150}{0{,}02}\left(\frac{-\cos 1000t}{1000}\right) = -7{,}5 \cos 1000t \text{ A}$$

$$P = vi = -150(7{,}5)\left(\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2000t\right) =$$

$$= -562{,}5\,\text{sen}\,2000\,t\ \text{watts}\qquad \left[\text{sen}\,x\cos x = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2x\right]$$

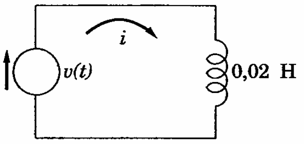


Figura 1-16(*a*)

A potência média P é obviamente nula, como se verifica pela Fig. 1-16(*b*).

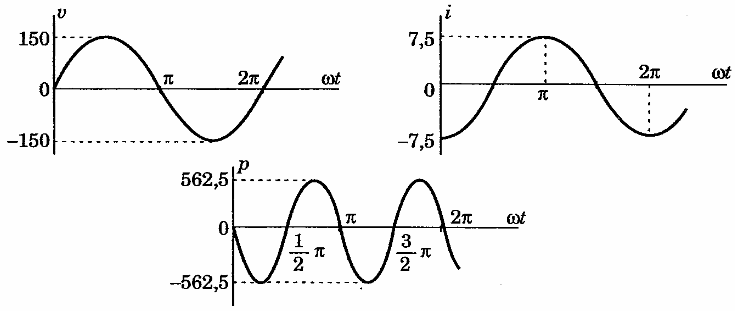


Figura 1-16(*b*)

1.11 A corrente cuja forma de onda é mostrada na Fig. 1-17 circula em uma indutância pura de 3 milihenrys. Determinar e discutir a tensão $v(t)$ e a potência instantânea $p(t)$. Qual a potência média P?

A corrente instantânea $i(t)$ é dada por (ver a Fig. 1-17):

(1) $0 < t < 2$ ms	$i = 5 \times 10^3 t$
(2) $2 < t < 4$ ms	$i = 10$
(3) $4 < t < 6$ ms	$i = 10 - 10 \times 10^3\,(t - 4 \times 10^{-3}) = 50 - 10 \times 10^3 t$
(4) $6 < t < 8$ ms	$i = -10$
(5) $8 < t < 10$ ms	$i = -10 + 5 \times 10^3\,(t - 8 \times 10^{-3}) = -50 + 5 \times 10^3 t$

As tensões correspondentes são:

$$(1)\ v_L = L\frac{di}{dt} = 3 \times 10^{-3}\ \frac{d}{dt}\ (5 \times 10^3 t) = 15\ \text{V}$$

$$(2)\ v_L = L\frac{di}{dt} = 3 \times 10^{-3}\ \frac{d}{dt}(10) = 0$$

$$(3)\ v_L = L\frac{di}{dt} = 3 \times 10^{-3}\ \frac{d}{dt}\ (50 - 10 \times 10^3 t) = -30\text{V etc.}$$

Os correspondentes valores da potência instantânea são:

(1) $p = vi = 15(5 \times 10^3 t) = 75 \times 10^3 t$ W

(2) $p = vi = 0(10) = 0$ W

(3) $p = vi = -30(50 - 10 \times 10^3 t) = -1500 + 300 \times 10^3 t$ W etc.

É, evidentemente, nula a potência média P.

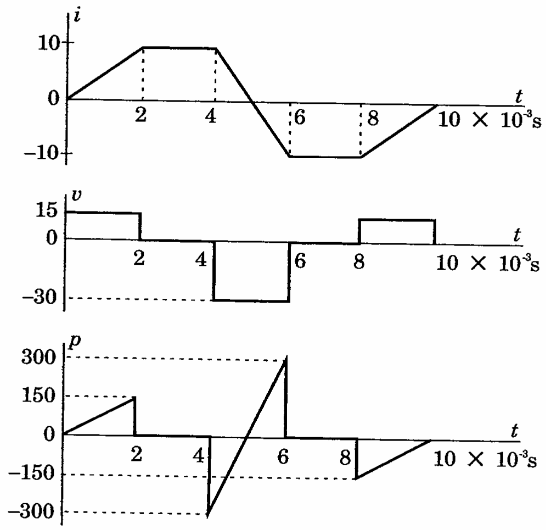


Figura 1-17

1.12 Uma tensão $v(t)$ é aplicada a duas indutâncias em série, L_1 e L_2. Determinar a indutância equivalente L_e que pode substituí-las mantendo a mesma corrente.

Tensão aplicada = queda em L_1 + queda em L_2

$$v(t) = L_e \frac{di}{dt} = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt}$$

donde $\quad L_e = L_1 + L_2.$

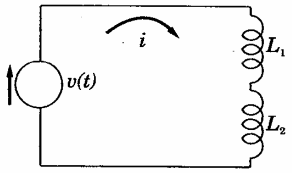


Figura 1-18

1.13 Obter a indutância equivalente, L_e, de duas indutâncias L_1 e L_2 em paralelo, como mostra a Fig. 1-19.

Suponhamos que existe uma tensão $v(t)$ nos terminais da combinação em paralelo e admitamos que i_1 e i_2 sejam as correntes em L_1 e L_2, respectivamente. Como a corrente total i_T é a soma das correntes nos ramos,

$$i_T = i_1 + i_2 \text{ ou } \quad \frac{1}{L_e}\int v\,dt = \frac{1}{L_1}\int v\,dt + \frac{1}{L_2}\int v\,dt$$

Então, $$\frac{1}{L_e} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad \text{ou} \quad L_e = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

O inverso da indutância equivalente de qualquer número de indutores ligados em paralelo é a soma dos inversos das indutâncias individuais em paralelo.

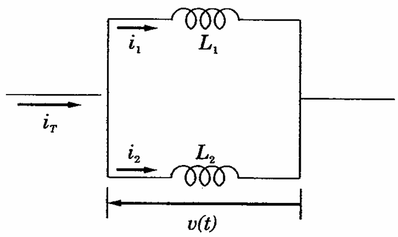


Figura 1-19

1.14 Três indutâncias puras estão ligadas, como mostra a Fig. 1-20. Qual a indutância equivalente ao conjunto?

Indutância equivalente à combinação em paralelo:

$$L_p = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = \frac{(0{,}3)(0{,}6)}{0{,}3 + 0{,}6} = 0{,}2 \text{ H.}$$

Indutância equivalente total pedida: $L_e = 0{,}2 + L_p = 0{,}4$ H.

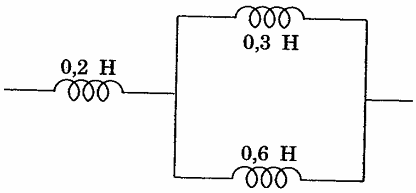


Figura 1-20

1.15 Em um indutor puro a corrente é $i(t) = I_m$ sen $\omega(t)$. Deduzir e discutir a função energia $\omega(t)$, supondo que a energia armazenada no campo magnético seja zero no instante $t = 0$.

$$v(t) = L \frac{d}{dt}(I_m \operatorname{sen} \omega t) = \omega L I_m \cos \omega t$$

$$p(t) = vi = \omega L I_m^2 \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2}\omega L I_m^2 \operatorname{sen} 2\omega t$$

$$\omega(t) = \int_0^t \frac{1}{2}\omega L I_m^2 \operatorname{sen} 2\omega t \, dt = \frac{1}{4} L I_m^2 [-\cos 2\omega t + 1] = \frac{1}{2} L I_m^2 \operatorname{sen}^2 \omega t$$

Em $\omega t = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$ etc., a energia armazenada é máxima e igual a $\frac{1}{2} L I_m^2$. Em $\omega t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ etc., a energia armazenada é nula. Ver Fig. 1-21.

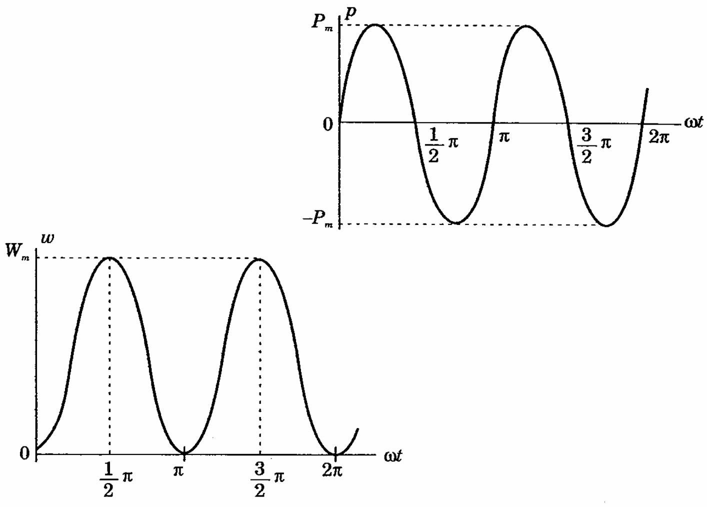


Figura 1-21

Quando $p(t)$ é positiva, o fluxo de energia é dirigido para a carga e a energia armazenada para a fonte aumenta. Quando $p(t)$ é negativa, a energia retorna do campo magnético do indutor para a fonte. Num indutor puro não há consumo de energia. A potência média é zero e não há uma energia transferida resultante.

1.16 Consideremos um capacitor puro ao qual é aplicada uma tensão $v(t) = V_m \operatorname{sen} \omega t$. Obter a corrente $i(t)$, a potência $p(t)$, a carga $q(t)$ e a energia $\omega(t)$, armazenada no campo elétrico, admitindo $\omega(t) = 0$, quando $t = 0$.

$$i(t) = C\,dv/dt = \omega C V_m \cos \omega t \text{ ampères}$$

$$p(t) = vi = \frac{1}{2}\omega C V_m^2 \operatorname{sen} 2\omega t \text{ watts}$$

$$q(t) = Cv = CV_m \operatorname{sen} \omega t \text{ coulombs}$$

$$\omega(t) = \int_0^t p\,dt = \frac{1}{4} C V_m^2 (1 - \cos 2\omega t) = \frac{1}{2} C V_m^2 \operatorname{sen}^2 \omega t$$

Quando $\omega t = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$ etc., a energia armazenada é máxima e igual a $\frac{1}{2}CV_m^2$. Quando $\omega t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ etc., a energia armazenada é nula. Ver Fig. 1-22.

Quando $p(t)$ é positiva, o fluxo de energia se dirige da fonte para o campo elétrico do capacitor e a energia armazenada $\omega(t)$ cresce. Quando $p(t)$ é negativa, a energia armazenada está retornando à fonte. A potência média P é nula e não há energia resultante transferida.

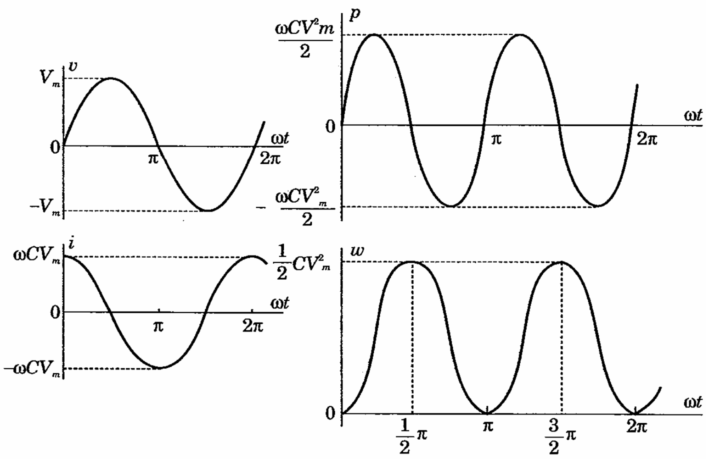


Figura 1-22

1.17 Determinar a capacitância equivalente, C_e, da combinação em paralelo dos dois capacitores C_1 e C_2, como mostra a Fig. 1-23.

Admitimos a tensão $v(t)$ aplicada à combinação em paralelo e que i_1 e i_2 sejam, respectivamente, as correntes em C_1 e C_2. Supondo i_T a corrente total, temos:

$$i_T = i_1 + i_2 \quad \text{ou} \quad C_e \frac{d}{dt} v(t) =$$

$$= C_1 \frac{d}{dt} v(t) + C_2 \frac{d}{dt} v(t)$$

ou $\quad C_e = C_1 + C_2$

A capacitância equivalente à de qualquer número de capacitores ligados em paralelo é a soma de suas capacitâncias individuais.

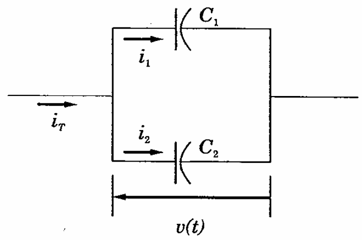


Figura 1-23

1.18 Determinar a capacitância C_e equivalente à combinação em série dos dois capacitores C_1 e C_2, mostrados na Fig. 1-24.

Supondo uma tensão aplicada ao circuito em série, vem:

Tensão aplicada = queda em C_1 + queda C_2

$$\frac{1}{C_e}\int i(t)dt = \frac{1}{C_1}\int i(t)\,dt + \frac{1}{C_2}\int i(t)\,dt$$

Então: $\quad \dfrac{1}{C_e} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} \quad$ ou $\quad C_e = \dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$

O inverso da capacitância equivalente de qualquer número de capacitores associados em série é igual à soma dos inversos das capacitâncias individuais.

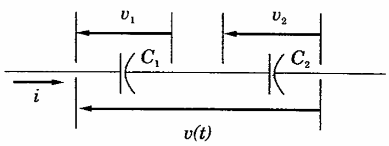


Figura 1-24

1.19 Calcular a capacitância equivalente da combinação de capacitores mostrada na Fig. 1-25.

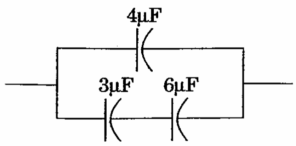


Figura 1-25

Capacitância equivalente do ramo em série:

$$C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{3(6)}{3 + 6} = 2\mu\text{F}$$

A capacitância equivalente total é:

$C_e = 4 + C_s = 6\ \mu\text{F} = 6 \times 10^{-6}$ farads

1.20 No circuito em série da Fig. 1-26 circula a corrente $i(t)$ ali mostrada. Calcular a tensão nos terminais de cada elemento e discutir cada uma, referindo-a à mesma escala de tempo. Discutir também a carga $q(t)$ no capacitor.

No resistor: $v_R = Ri$. A forma de onda de v_R é idêntica à da corrente i com o valor de pico de $2 \times 10 = 20$ volts.

No indutor: $v_L = L\, di/dt$

(1) $0 < t < 1$ ms $\qquad i = 10 \times 10^3 t$

$\qquad v_L = (2 \times 10^{-3})(10 \times 10^3) = 20$

(2) $1 < t < 2$ ms $\qquad i = 10$

$\qquad v_L = (2 \times 10^{-3})(0) = 0$

No capacitor: $v_C = \dfrac{1}{C} \displaystyle\int i\, dt$

(1) $0 < t < 1$ ms $\qquad v_C = \dfrac{1}{500 \times 10^{-6}} \displaystyle\int_0^t (10 \times 10^3 t)\, dt = 10 \times 10^6 t^2$

(2) $1 < t$·

A curva
Observe
a carga
ambas d

ores mostrada na

(2) $1 < t < 2\,\text{ms}$ $\quad v_C = 10 + \dfrac{1}{500 \times 10^{-6}} \displaystyle\int_{10^{-3}}^{t} (10)\, dt = 10 + 20 \times 10^3\,(t - 10^{-3})$

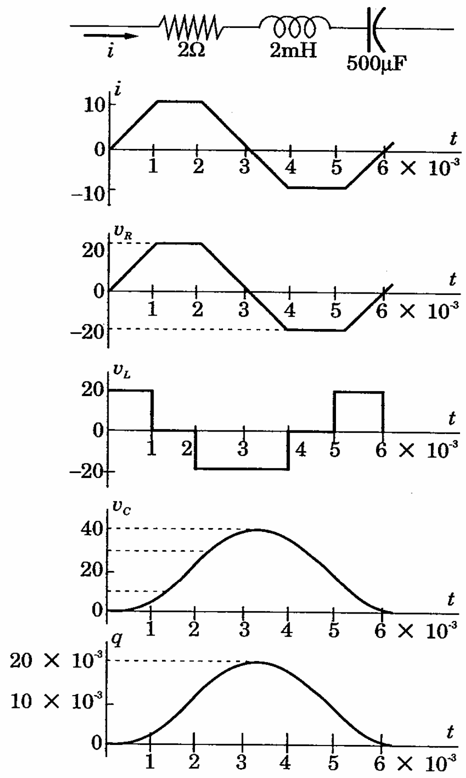


Figura 1-26

strada. Calcular a
na, referindo-a à
citor.

a corrente i com

A curva de q é obtida facilmente com o auxílio da relação $q = C\, v_C$. Observe-se que, quando i é positiva, q e v_C aumentam, isto é, aumentam a carga no capacitor e a tensão nos seus terminais. Quando i é negativa, ambas diminuem.

$= 10 \times 10^6 t^2$

Problemas Propostos

1.21 Três resistores R_1, R_2 e R_3 estão em série com uma tensão constante V. A tensão em R_1 é 20 volts, a potência em R_2 é 25 watts e R_3 é de 2 ohms. Calcular a tensão V, sendo a corrente 5 ampères.
Resp.: 35 volts.

1.22 A resistência equivalente de dois resistores R_1 e R_2 em paralelo é 10/3 ohms. A corrente que penetra no circuito paralelo divide-se entre os dois na proporção de 2 para 1. Determinar R_1 e R_2.
Resp.: R_1 = 5 ohms, R_2 = 10 ohms.

1.23 (*a*) Determinar R_e para os quatro resistores do circuito mostrado na Fig. 1-27. (*b*) Se for aplicada uma tensão V = 100 volts, que resistor consome maior potência?

Resp.: (*a*) R_e = 5,42 ohms; (*b*) O resistor de 5 ohms, sendo P = 957 watts.

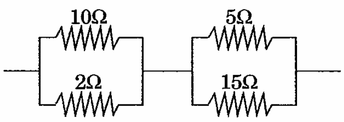


Figura 1-27

1.24 Duas fontes de tensão constante atuam no circuito representado na Fig. 1-28. Determinar a potência P que cada fonte fornece ao circuito.
Resp.: P_{25} = 75 watts, P_5 = 15 watts.

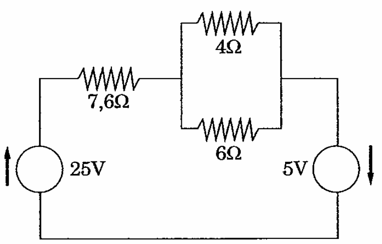


Figura 1-28

1.25 Sendo de 14 ampères a corrente no resistor de 5 ohms da Fig. 1-29, determinar a tensão constante V.
Resp.: 126 volts.

1.26 Qual o va
da Fig. 1-
Resp.: 13

1.27 Determin
queda de
Resp.: 4,

o constante *V*. A
R_3 é de 2 ohms.

lo é 10/3 ohms. A
s na proporção de

o na Fig. 1-27. (*b*)
e maior potência?

= 957 watts.

tado na Fig. 1-28.

j. 1-29, determinar

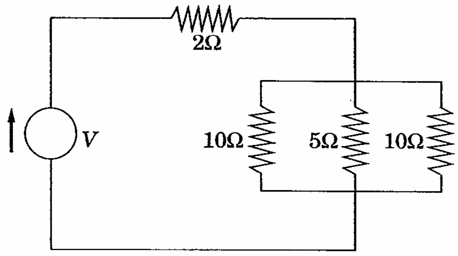


Figura 1-29

1.26 Qual o valor da corrente fornecida pela fonte de 50 volts ao circuito de resistores da Fig. 1-3?
Resp.: 13,7 ampères.

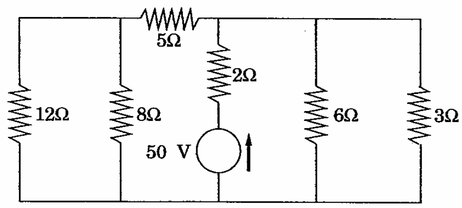


Figura 1-30

1.27 Determinar o valor da resistência *R* da Fig. 1-31, admitindo-se de 25 volts a queda de potencial na mesma.
Resp.: 4,76 ohms.

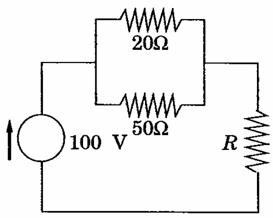


Figura 1-31

1.28 Para que valor em ohms deve estar ajustado o resistor variável mostrado na Fig. 1-32 para que a potência no resistor de 5 ohms seja de 20 watts?
Resp.: 16 ohms.

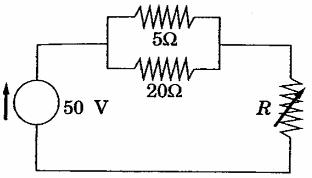


Figura 1-32

1.29 Um resistor de 10 ohms está em série com uma associação paralela de dois resistores de 15 e 5 ohms. Sendo 6 ampères a corrente constante no resistor de 5 ohms, qual a potência total nos três resistores?
Resp.: 880 watts.

1.30 As indutâncias L_1 e L_2 da Fig. 1-33 estão na relação de 2 para 1. Sendo 0,7 H o valor da indutância equivalente ao conjunto das três, quais os valores de L_1 e L_2?
Resp.: L_1 = 0,6 H; L_2 = 0,3 H.

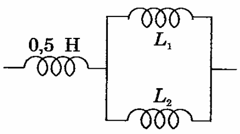


Figura 1-33

1.31 As três indutâncias em paralelo na Fig. 1-34 têm uma indutância equivalente L_e de 0,0755 H.
(*a*) Qual o valor de L? (*b*) Haverá um valor para L que faça L_e igual a 0,5 H? (*c*) Qual é o máximo valor de L_e, na hipótese de que a indutância L seja ajustável sem limite?
Resp.: (*a*) L = 0,1 H; (*b*) não; (*c*) 0,308 H.

1.32 Qual o
da Fig.
Resp.: C

1.33 Uma ten
tores mo
Resp.: q

1.34 Os dois
dos dois
terminais
final em
Resp.: q

mostrado na Fig.
ts?

) paralela de dois
ınte no resistor de

ı 1. Sendo 0,7 H o
/alores de L_1 e L_2?

ıcia equivalente L_e

ıça L_e igual a 0,5
indutância L seja

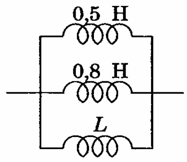


Figura 1-34

1.32 Qual o valor de C que torna a capacitância equivalente dos quatro capacitores da Fig. 1-35 igual a 0,5 µF?
Resp.: 0,4µF.

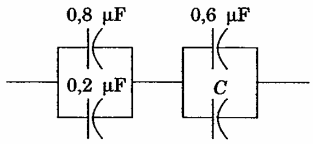


Figura 1-35

1.33 Uma tensão de 100 volts, constante, é aplicada à combinação de quatro capacitores mostrada na Fig. 1-36. Determinar a carga q coulombs em cada capacitor.
Resp.: $q_{0,8}$ 40 µC; $q_{0,2}$ = 10 µC; $q_{0,3}$ = 15 µC; $q_{0,7}$ = 35 µC.

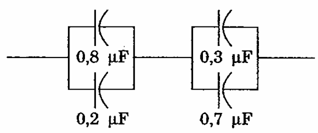


Figura 1-36

1.34 Os dois capacitores da Fig. 1-37 são carregados por uma ligação momentânea dos dois terminais A e B a uma fonte de tensão constante de 50 volts. Os terminais A e B são, então, conectados, depois de retirada a fonte. Qual a carga final em cada capacitor?

Resp.: $q_{20} = 444\frac{1}{3}\mu C$, $q_{40} = 888\frac{2}{3}\mu C$.

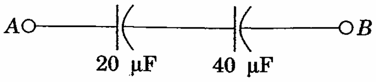


Figura 1-37

1.35 Mostrar que, quando se aplica a uma resistência para R uma tensão $v = V_m \operatorname{sen} \omega t$, a energia é dada por

$$\omega = \frac{V_m^2}{2R}\left(t - \frac{\operatorname{sen} 2\omega t}{2\omega}\right).$$

1.36 A corrente numa indutância L é $i = I_m\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right]$. Mostrar que a energia máxima armazenada no campo magnético, W_m, é dada por $W_m = \frac{1}{2} L I_m^2$. ($i = 0$ para $t < 0$.)

1.37 Se a corrente em um capacitor é $i = \frac{V_m}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$, mostrar que a energia máxima armazenada no campo elétrico é $W_m = \frac{1}{2} C V_m^2$.($i = 0$ para $t < 0$.)

1.38 Ao ser fechado o interruptor do circuito RC da Fig. 1-38, uma energia total de $3{,}6 \times 10^{-3}$ joules é dissipada no resistor de 10 ohms. Qual a carga q inicial existente no capacitor?
Resp.: $q_0 = 120\ \mu C$.

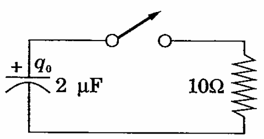


Figura 1-38

1.39 Mostrar que $\frac{1}{2}CV^2$ e $\frac{1}{2}LI^2$ possuem as mesmas unidades que a energia ω.

1.40 A forma de onda de tensão mostrada na Fig. 1-39 é aplicada a um capacitor puro de 60 μF. Discutir $i(t)$, $p(t)$ e determinar I_m e P_m.
Resp.: $I_m = 1{,}5$ A; $P_m = 75$ W.

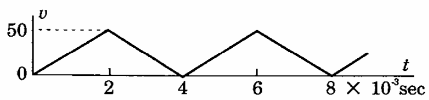
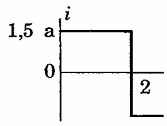


Figura 1-39



1.41 Se a ten

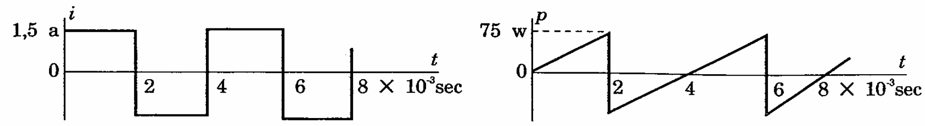
$v = V_m$

Resp.: i

1.42 Uma co
capacitâ
e Q_m.

1.43 A equaç
Determi
Resp.: v

1.44 A forma
1-41. Se
máximo
Resp.: I



1.41 Se a tensão nos terminais de um capacitor puro é dada por

$$v = V_m\left[\omega t - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \frac{(\omega t)^5}{5!} - \frac{(\omega t)^7}{7!} + \ldots\right].$$

Resp.: $i = \omega C V_m\left[1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} + \ldots\right]$ no $i = \omega C V_m \cos \omega t$

1.42 Uma corrente com a forma de onda, mostrada na Fig. 1-40, existe em uma capacitância pura $C = 25\ \mu\text{F}$. Discutir a forma de onda da tensão e determinar V_m e Q_m.

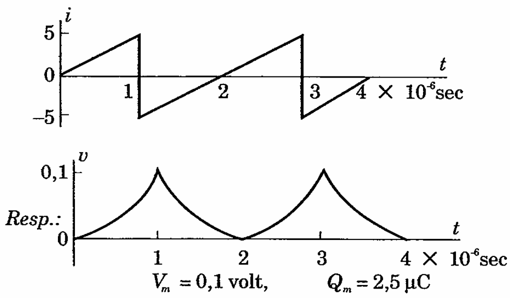


Figura 1-40

1.43 A equação da carga em um capacitor de 2 μF é $q = 100[1 + e^{-5} \times 10^4 t]$ μC. Determinar as expressões da tensão e a corrente.
Resp.: $v = 50[1 + e^{-5} \times 10^4 t]$ volts, $i = -5e^{-5} \times 10^4 t$ amp.

1.44 A forma de onda da corrente em uma indutância pura L é a mostrada na Fig. 1-41. Se a forma de onda da tensão correspondente tem 100 volts para valor máximo, qual o valor de L? Discutir a forma de onda da tensão.
Resp.: $L = 0{,}5$ H.

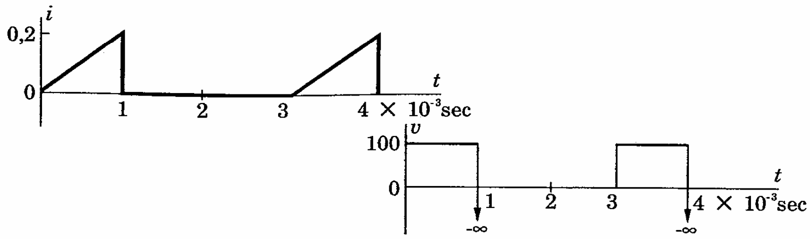


Figura 1-41

Nota. Na realidade, a corrente numa indutância não pode ser uma função descontínua como indica a figura nos instantes t = 1 ms e t = 4 ms. Como a tensão é igual à primeira derivada da função corrente, multiplicada por L, e essa derivada tem valor infinito negativo nos pontos de descontinuidade, haverá picos negativos infinitos, na forma de onda da tensão, nesses pontos.

1.45 A uma indutância pura de 0,05 H foi aplicada uma tensão da forma de onda mostrada na Fig. 1-42. Discutir a forma de onda da corrente correspondente e determinar a expressão de i no primeiro intervalo, isto é, $0 < t < 2$ ms.

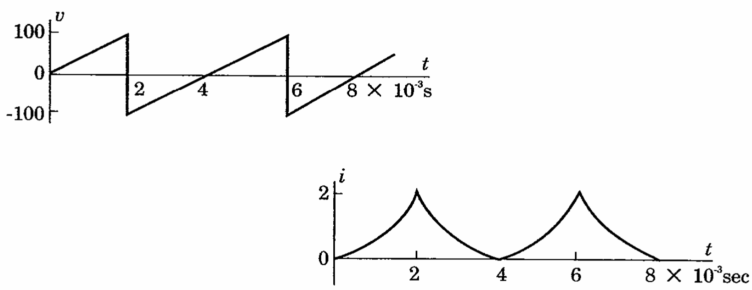


Figura 1-42

1.46 A Fig. 1-43 mostra a corrente num circuito série de R = 20 ohms e L = 0,1 henry. Discutir v_R, v_L e sua soma.
Resp.: Quando $0 < t < 0{,}1$ s: $v_R = 200e^{-200t}$, $v_L = -200e^{-200t}$, $v_T = 0$.

1.47 A forma (
henry é a

1.48 Em um c
senoidal.
Determir

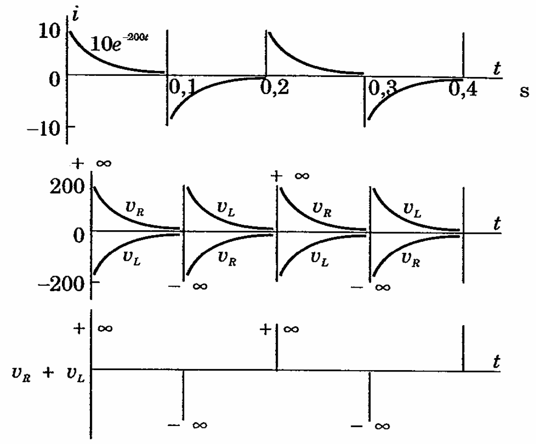


Figura 1-43

1.47 A forma de onda da corrente em um circuito série *RL* com $R = 5$ ohms e $L = 0{,}004$ henry é a da Fig. 1-44. Representar v_R e v_L.

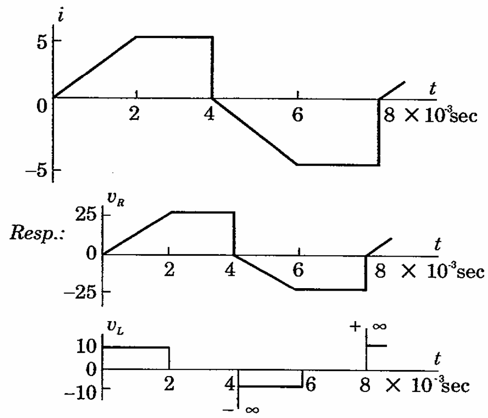


Figura 1-44

1.48 Em um circuito série *RL* com $R = 10$ ohms e $L = 0{,}5$ henry aplica-se uma tensão senoidal. A corrente resultante é $i = 0{,}822\ e^{-20t} + 0{,}822\ \text{sen}\ (377t - 86{,}96°)$. Determinar as tensões correspondentes v_R, v_L e v_T.

Resp.: $v_R = 8{,}22\,e^{-20t} + 8{,}22\,\text{sen}\,(377t - 86{,}96°)$;
$v_L = -8{,}22\,e^{-20t} + 155\cos(377t - 86{,}96°)$;
$v_T = 155\,\text{sen}\,377t$.

1.49 A corrente em um circuito série *RL* com $R = 100$ ohms e $L = 0{,}05$ henry é a função descrita a seguir. Determinar v_R e v_L em cada intervalo.

(1) $0 < t < 10 \times 10^{-3}$ s, $i = 5\,[1 - e^{-2000t}]$.
(2) $10 \times 10^{-3} < t$, $i = 5\,e^{-2000(t - 10 \times 10^{-3})}$.
Resp.: (1) $v_R = 500\,[1 - e^{-2000t}]$, $v_L = 500\,e^{-2000t}$
(2) $v_R = 500\,e^{-2000(t - 10 \times 10^{-3})}$, $v_L = -500\,e^{-2000(t - 10 \times 10^{-3})}$

1.50 A corrente em um circuito série *RC* é $i = 10\,e^{-500t}$. Não tendo havido carga inicial no capacitor, após o regime transitório, a carga no capacitor é 0,02 coulombs. Sendo $V = 100$ volts a tensão aplicada e $v_C = 100[1 - e^{-500t}]$, calcular *C* e v_R.
Resp.: $C = 200\ \mu$F; $v_R = 100\,e^{-500t}$.

1.51 A corrente em um circuito série *LC* com $L = 0{,}02$ H e $C = 30\ \mu$F é $i = 1{,}5\cos 1000t$. Determinar a tensão total v_T.
Resp.: $v_T = 200\,\text{sen}\,1000\,t$.

1.52 A Fig. 1-45 mostra a onda quadrada de tensão que está aplicada ao circuito paralelo *RL* ali apresentado. Determinar a corrente total.

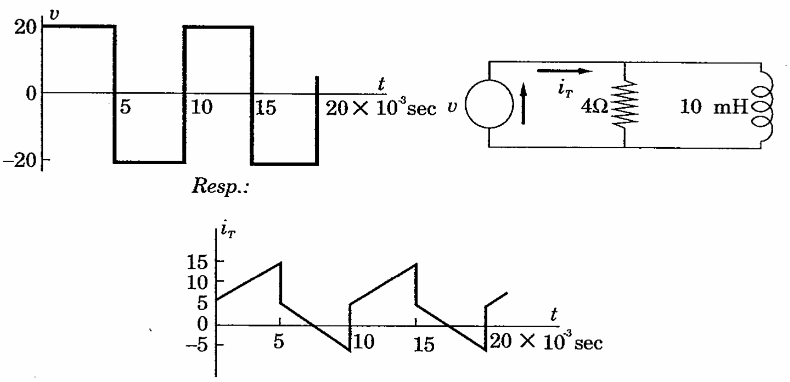


Figura 1-45

1.53 A Fig. 1-46 apresenta a forma de onda de tensão que está aplicada ao circuito paralelo mostrado ali. Determinar a corrente total i_T.

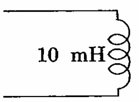
= 0,05 henry é a

$t - 10 \times 10^{-3}$)

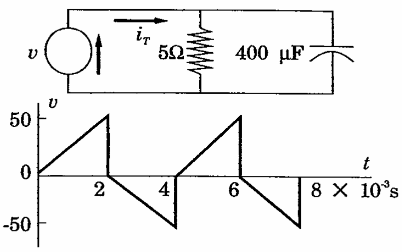
avido carga inicial
é 0,02 coulombs.
:alcular C e v_R.

0 μF é i = 1,5 cos

plicada ao circuito



aplicada ao circuito



Resp.:

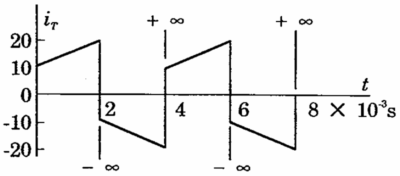


Figura 1-46

MAKRON
Books

VALORES MÉDIO E EFICAZ

Formas de Ondas

As representações gráficas de $v(t)$, $i(t)$, $p(t)$ etc. são, respectivamente, as formas de ondas da tensão, da corrente e da potência. A introdução à análise dos circuitos encara, apenas, as funções periódicas, isto é, aquelas para as quais $f(t) = f(t + nT)$, onde n é um inteiro e T é o período, como mostra a Fig. 2-1*. Se a função for periódica, necessário se torna, pelo menos, a representação de um período para que se possa falar em forma de onda.

As funções tensão e corrente, $v(t)$ e $i(t)$, são expressões matemáticas que podem apresentar-se sob diversos aspectos. Por exemplo, as funções seno e co-seno podem ser expressas por séries infinitas de potências. Deve-se ressaltar que as equações básicas que relacionam tensão e corrente, para os três elementos de circuito, aplicam-se independentemente da forma matemática.

* N.R. O período T é definido como $T = \frac{1}{f}$ e sua unidade é o s (segundo).

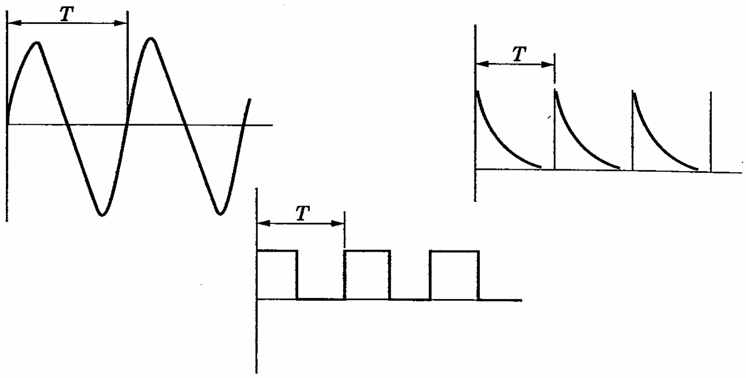


Figura 2-1 Formas de ondas periódicas.

Valor Médio

A função periódica geral $y(t)$, de período T, tem para valor médio

$$Y_{\text{med}} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt$$

Valor Médio Quadrático Eficaz ou Efetivo

Da corrente $i(t)$ em um resistor puro R resulta uma potência $p(t)$ de valor médio P. Esta mesma potência P poderia ser produzida em R por uma corrente constante I. Diz-se, então, que a corrente $i(t)$ tem um valor efetivo ou eficaz I_{ef} (também se usa *rms*, abrev. de *root mean square,* em vez de *ef*), equivalente a essa corrente constante I. O mesmo se aplica a funções tensão, cujo valor eficaz é V_{ef}. A função geral $y(t)$, de período T, tem um valor eficaz Y_{ef} dado por

$$Y_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y(t)^2\,dt}$$

O valor eficaz das funções a sen ωt é $a/\sqrt{2}$. Ver Probl. 2.2.

Valor Eficaz ou Efetivo de Vários Termos Senoidais e Co-Senoidais

A função $y(t) = a_0 + (a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \ldots) + (b_1 \operatorname{sen} \omega t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega t + \ldots)$ tem valor eficaz dado por

$$Y_{\text{rms}} = \sqrt{a_0^2 + (A_1^2 + A_2^2 + \ldots) + (B_1^2 + B_2^2 + \ldots)}$$

Se for o valor eficaz de $a_1 \cos \omega t$, então $A_1 = \dfrac{a_1}{\sqrt{2}}$, $A_1^2 = \dfrac{a_1^2}{2}$, e

$$Y_{\text{rms}} = \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots) + \frac{1}{2}(b_1^2 + b_2^2 + \ldots)}$$

Fator de Forma

A relação entre o valor eficaz e o valor médio é o fator de forma F da onda. Ele é útil na geração de tensão e nos fatores de correção dos instrumentos.

$$\text{Fator de Forma} = \frac{Y_{\text{ef}}}{Y_{\text{med}}} = \frac{\sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \overline{y(t)^2}\, dt}}{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T y(t)\, dt}$$

As ondas com simetria de meia onda, isto é, $f(t) = -f(t + \frac{1}{2}T)$, têm um valor médio nulo, como mostra a Fig. 2-2. Para esses tipos de formas de ondas, das quais a senoidal é um exemplo, o valor médio Y_{med} é calculado sobre a metade positiva do período, razão porque, algumas vezes, é chamado de valor médio de meio ciclo.

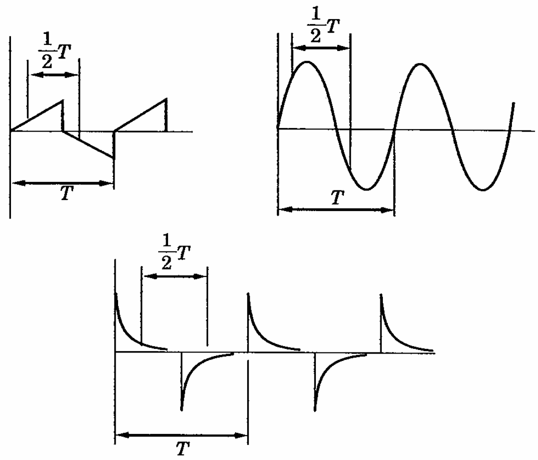


Figura 2-2 Simetria de meia onda.

Outras formas de ondas, como mostra a Fig. 2-3, podem ter valor médio nulo, sem possuírem simetria de meia onda. Nos cálculos de Y_{med}, para a determinação do fator de forma dessas ondas, toma-se meio período, à semelhança do que é feito com as ondas de simetria de meia onda.

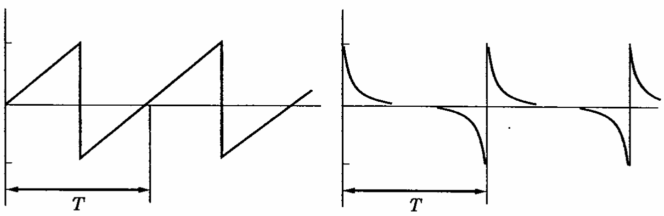


Figura 2-3

Problemas Resolvidos

2.1 Em um resistor circulam (*a*) uma corrente constante I e (*b*) uma corrente periódica $i(t)$ de período T. Ver Fig. 2-4. Mostrar que a potência média P é a mesma, em cada caso, se $I_{ef} = I$.

Para a corrente constante I: $P = VI = RI^2$

Para a corrente periódica $i(t)$: $p = vi = Ri^2$ e $P = \left(\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T i^2\,dt\right) R = RI^2_{ef}$

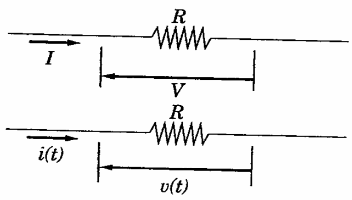


Figura 2-4

2.2 Determinar os valores médio e eficaz da função $y(t) = Y_m$ sen ωt.

O período é 2π. A representação gráfica é obtida com ωt como variável independente, conforme mostra a Fig. 2-5.

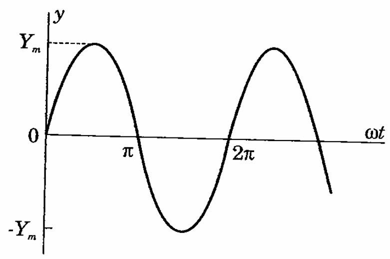


Figura 2-5

$$Y_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Y_m \text{ sen } \omega t\, d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} Y_m\, [-\cos\omega t]_0^{2\pi} = 0$$

$$Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y^2\,dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (Y_m \text{ sen } \omega t)^2\,d(\omega t)} = \frac{Y_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,Y_m$$

O valor eficaz de uma função senoidal ou co-senoidal pura é $1/\sqrt{2}$ ou 0,707 vezes o valor máximo.

2.3 Qual a potência média P em uma resistência pura de 10 ohms, onde circula uma corrente $i(t) = 14{,}14 \cos \omega t$ ampères?

Como $p = vi = Ri^2 = 2000 \cos^2 \omega t$ e o período de p é π, a potência média é

$$P = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2000 \cos^2 \omega t\, d(\omega t) = 1000 \text{ watts}$$

Segundo Método. A potência média, para uma corrente periódica $i(t)$, em um resistor puro R, é

$$P = I_{ef}^2 R = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (14.14 \cos \omega t)^2\, d(\omega t)\right\} 10$$

$$= (14{,}14/\sqrt{2})^2\,(10) = 1000 \text{ watts}$$

2.4 Calcular os valores médio e eficaz da forma de onda em dente-de-serra mostrada na Fig. 2-6.

Pelo exame verifica-se que $Y_{med} = 25$. No intervalo $0 < t < 2$, $y = 25t$, então:

$$Y_{ef}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T y^2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 625t^2\,dt = 834, \text{ donde } Y_{ef} = 28{,}9$$

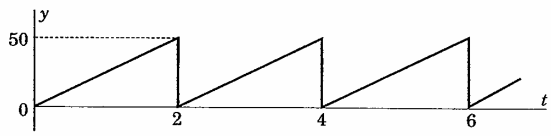


Figura 2-6

2.5 Determinar os valores médio e eficaz da forma de onda mostrada na Fig. 2-7, em cujo primeiro intervalo $y = 10\,e^{-200t}$.

$$Y_{\text{med}} = \frac{1}{T}\int_0^T y\,dt = \frac{1}{0{,}05}\int_0^{0{,}05} 10\,e^{-200t}dt = \frac{10}{0{,}05(-200)}\left[e^{-200t}\right]_0^{0{,}05}$$

$$= -1[e^{-10} - e^{0}] = 1{,}00$$

$$Y_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T y^2\,dt = \frac{1}{0{,}05}\int_0^{0{,}05} 100\,e^{-400t}\,dt = 5{,}00, \text{ donde } Y_{\text{ef}} = 2{,}24$$

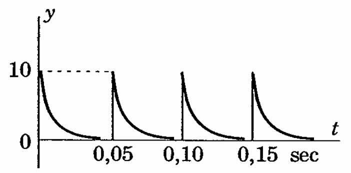


Figura 2-7

2.6 Determinar o fator de forma da onda triangular da Fig. 2-8.

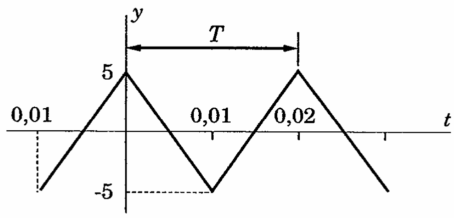


Figura 2-8

$-0{,}01 < t < 0$: $y(t) = 1000t + 5$; $\overline{y(t)}^2 = 10^6t^2 + 10^4t + 25$

$0 < t < -0{,}01$: $y(t) = -1000t + 5$; $\overline{y(t)}^2 = 10^6t^2 - 10^4t + 25$

$$Y_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{0{,}02}\left\{\int_{-0{,}01}^{0}(10^6t^2 + 10^4t + 25)\,dt + \int_0^{0{,}01}(10^6t^2 - 10^4t + 25)\,dt\right\} = 8{,}33$$

$Y_{\text{ef}} = 2{,}89$

Como a
tomado s

$Y_{\text{med}} =$

Fator de

2.7 Determina
mostrada

Para 0 <

$Y_{\text{med}} =$

$Y_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{2\pi}$

2.8 Calcular o
ção de on

$Y_{\text{med}} = \frac{1}{\pi}$

$Y_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{\pi}$

Como a forma de onda tem simetria de maior onda, o valor médio é tomado sobre o meio ciclo positivo:

$$Y_{med} = \frac{1}{0{,}01}\left\{\int_{-0{,}005}^{0} (1000t + 5)\,dt + \int_{0}^{0{,}005} (-1000t + 5)\,dt\right\} = 2{,}5$$

$$\text{Fator de forma} = \frac{Y_{ef}}{Y_{med}} = \frac{2{,}89}{2{,}5} = 1{,}16$$

2.7 Determinar os valores médio e eficaz da forma de onda senoidal retificada mostrada na Fig. 2-9.

Para $0 < \omega t < \pi$, $y = Y_m \operatorname{sen} \omega t$; para $\pi < \omega t < 2\pi, y = 0$. O período é 2π.

$$Y_{med} = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{0}^{\pi} Y_m \operatorname{sen} \omega t\, d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} 0\, d(\omega t)\right\} = 0{,}318\, Y_m$$

$$Y_{ef}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} (Y_m \operatorname{sen} \omega t)^2\, d(\omega t) = \frac{1}{4} Y_m^2, \quad Y_{ef} = \frac{1}{2} Y_m$$

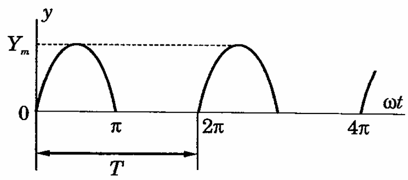


Figura 2-9

2.8 Calcular os valores médio e eficaz da onda senoidal que passa por uma retificação de onda completa (Fig. 2-10). O período é π.

$$Y_{med} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} Y_m \operatorname{sen} \omega t\, d(\omega t) = 0{,}637\, Y_m$$

$$Y_{ef}^2 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (Y_m \operatorname{sen} \omega t)^2\, d(\omega t) = \frac{Y_m^2}{2}, \quad Y_{ef} = 0{,}707\, Y_m$$

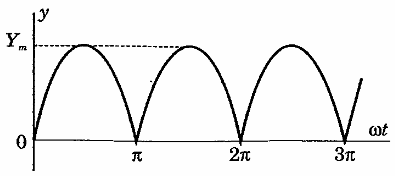


Figura 2-10

2.9 Calcular os valores médio e eficaz da onda quadrada mostrada na Fig. 2.11.

Para $0 < t < 0{,}01, y = 10$; para $0{,}01 < t < 0{,}03, y = 0$. O período é 0,03s.

$$Y_{\text{med}} = \frac{1}{0{,}03}\int_0^{0{,}01} 10\,dt = \frac{10(0{,}01)}{0{,}03} = 3{,}33$$

$$Y_{\text{ef}} = \frac{1}{0{,}03}\int_0^{0{,}01} 10^2\,dt = 33{,}3 = 5{,}77$$

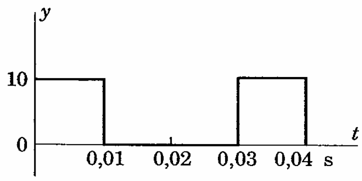


Figura 2-11

2.10 Calcular os valores médio e eficaz da função representada na Fig. 2-12 e descrita como:

$0 < t < 0{,}1 \quad y = 20(1 - e^{-100t});\quad 0{,}1 < t < 0{,}2 \quad y = 20\,e^{-50(t\,-\,0{,}1)}$

$$Y_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{0{,}2}\left\{\int_0^{0{,}1} 400(1 - 2\,e^{-100t} + e^{-200t})\,dt + \int_{0{,}1}^{0{,}2} 400\,e^{-100(t\,-\,0{,}1)}\,dt\right\}$$

$$= 2000\left\{\Big[\,t + 0{,}02\,e^{-100t} - 0{,}005\,e^{-200t}\Big]_0^{0{,}1} + \Big[-0{,}01\,e^{-100(t\,-\,01)}\Big]_{0{,}1}^{0{,}2}\right\}$$

$= 190$, e $Y_{\text{ef}} = 13{,}78$. (Os termos em e^{-10} e e^{-20} não têm significação.)

2.11 Determin

$Y_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{2\pi}$

$= \frac{1}{2\pi}$ [2

Outro m

2.12 Determin

$V_{\text{ef}} = \sqrt{}$

2.13 Uma onc ("clipada' valores m

A funçã

la na Fig. 2.11.

əríodo é 0,03s.

la na Fig. 2-12 e

50(t − 0,1)

$e^{-100(t-0,1)}\,dt\}$

$e^{-100(t-01)}\Big]_{0,1}^{0,2}\ \}$

ɜignificação.)

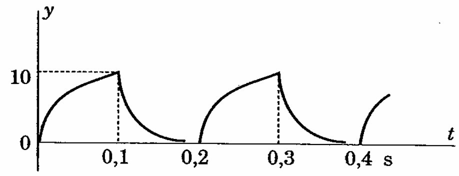


Figura 2-12

2.11 Determinar o valor eficaz da função $y = 50 + 30$ sen ωt.

$$Y_{ef}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (2500 + 3000 \text{ sen } \omega t + 900 \text{ sen}^2\, \omega t)\, d(\omega t)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,[2500(2\pi) + 0 + 900\pi] = 2950, \quad Y_{ef} = 54{,}3$$

Outro método: $Y_{ef} = \sqrt{(50)^2 + \frac{1}{2}(30^2)} = \sqrt{2950} = 54{,}3$

2.12 Determinar o valor eficaz da tensão $v = 50 + 141{,}4$ sen $\omega t + 35{,}5$ sen $3\omega t$.

$$V_{ef} = \sqrt{(50)^2 + \frac{1}{2}(141{,}4)^2 + \frac{1}{2}(35{,}5)^2} = 114{,}6 \text{ volts}$$

2.13 Uma onda senoidal que apresenta retificação de onda completa é cortada ("clipada") a 0,707 de seu valor máximo, como mostra a Fig. 2-13. Calcular os valores médio e eficaz da função.

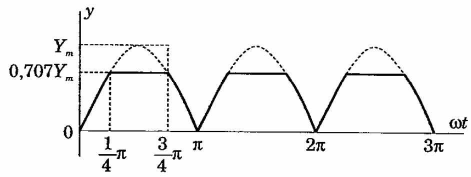


Figura 2-13

A função tem período π e é dada por

$0 < \omega t < \pi/4$	$y = Y_m$ sen ωt
$\pi/4 < \omega t < 3\pi/4$	$y = 0{,}707Y_m$
$3\pi/4 < \omega t < \pi$	$y = Y_m$ sen ωt

$$Y_{\text{med}} = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/4} Y_m \operatorname{sen}\omega t\, d(\omega t) + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 0{,}707\, Y_m\, d(\omega t)\right.$$

$$\left. + \int_{3\pi/4}^{\pi} Y_m \operatorname{sen}\omega t\, d(\omega t)\right\} = 0{,}54\, Y_m$$

$$Y_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/4} (Y_m \operatorname{sen}\omega t)^2\, d(\omega t) + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (0{,}707\, Y_m)^2\, d(\omega t)\right.$$

$$\left. + \int_{3\pi/4}^{\pi} (Y_m \operatorname{sen}\omega t)^2\, d(\omega t)\right\} = 0{,}341\, Y_m^2, \quad Y_{\text{ef}} = 0{,}584\, Y_m$$

2.14 Uma onda senoidal que apresenta retificação de onda completa com um atraso θ tem para valor médio a metade de seu valor máximo, como mostra a Fig. 2-14. Achar o ângulo θ.

$$Y_{\text{med}} = \frac{1}{\pi}\int_{\theta}^{\pi} Y_m \operatorname{sen}\omega t\, d(\omega t)$$

$$= \frac{Y_m}{\pi}(-\cos\pi + \cos\theta)$$

Portanto, $0{,}5\, Y_m = (Y_m/\pi)(1 + \cos\theta)$, $\cos\theta = 0{,}57$, $\theta = 55{,}25°$.

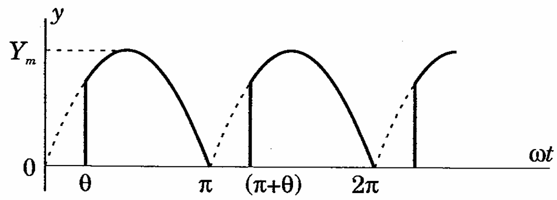


Figura 2-14

2.15 A corrente em um resistor de 2 ohms tem a forma de onda dada no Probl. 2.14, com o valor máximo de 5 ampères. A potência média no resistor é 20 watts. Determinar o ângulo θ.

$P = RI^2_{ef}$, $20 = (2)I^2_{ef}$, I^2_{ef}, $I^2_{ef} = 10$. Portanto,

$$Y^2_{ef} = 10 = \frac{1}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}(5 \text{ sen } \omega t)^2\, d(\omega t) = \frac{25}{\pi}\left[\frac{\omega t}{2} - \frac{\text{sen } 2\omega t}{4}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{25}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\text{sen } 2\pi}{4} - \frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen } 2\theta}{4}\right)$$

donde $\text{sen } 2\theta = 2\theta - 10\pi/25$ $\quad \theta = 60{,}5°$ (solução gráfica).

Problemas Propostos

2.16 Um resistor de 25 ohms tem uma potência média de 400 watts. Determinar o valor máximo da corrente, na hipótese de ela ser (*a*) senoidal, (*b*) triangular.
Resp.: (*a*) 5,66 ampères; (*b*) 6,93 ampères.

2.17 Determinar o valor eficaz V_{ef} da função tensão dada por $v(t) = 1000 + 25 \text{ sen } 3\omega t + 10 \text{ sen } 5\,\omega t$.
Resp.: 101,8 volts.

2.18 Qual a potência média em um resistor de 25 ohms no qual circula uma corrente $i(t) = 2 + 3 \text{ sen } \omega t + 2 \text{ sen } 2\omega t + 1 \text{ sen } 3\omega t$?
Resp.: 275 watts.

2.19 Calcular Y_{ef} para $y(t) = 50 + 40 \text{ sen } \omega t$.
Resp.: 57,4.

2.20 Calcular Y_{ef} para $y(t) = 150 + 50 \text{ sen } \omega t + 25 \text{ sen } 2\omega t$.
Resp.: 155,3.

2.21 O valor eficaz de $y(t) = 100 + A \text{ sen } \omega t$ é conhecido e igual a 103,1. Determinar a amplitude A do termo senoidal.
Resp.: 35,5.

2.22 Uma certa função contém, em termo constante, um fundamental e em terceiro harmônico. O valor máximo do fundamental é 80% do termo constante e o valor máximo do terceiro harmônico é 50% do termo constante. Sendo 180,3 o valor eficaz da função, determinar a amplitude do termo constante e os dois harmônicos.
Resp.: 150, 120, 75.

2.23 Se uma onda senoidal retificada de meia onda tem para valor eficaz 20, qual é seu valor médio?
Resp.: 12,7.

2.24 Calcular Y_{med} e Y_{ef} para a forma de onda mostrada na Fig. 2-15.
Resp.: $Y_{med} = 40$; $Y_{ef} = 72,1$.

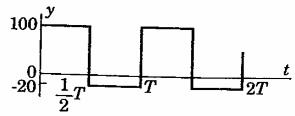


Figura 2-15

2.25 Calcular Y_{med} e Y_{ef} para a forma de onda mostrada na Fig. 2-16.
Resp.: $Y_{med} = 10$; $Y_{ef} = 52,9$.

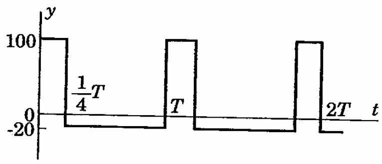


Figura 2-16

2-26 Determinar Y_{ef} para a forma de onda mostrada na Fig. 2-17.
Resp.: $Y_{ef} = 6,67$.

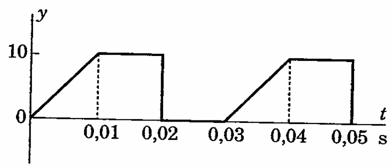


Figura 2-17

2.27 Determinar Y_{ef} para a forma de onda da Fig. 2-18.
Resp.: $Y_{ef} = Y_m/\sqrt{3} = 0,577 Y_m$.

2.28 Determina
Probl. 2.2

2.29 Determina
com o Prol

2.30 Determinar
período *T*,
eficaz mais
Resp.: (*a*)

15.

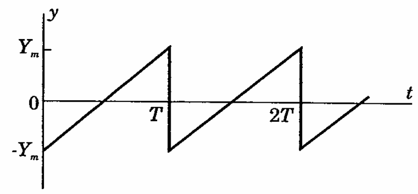


Figura 2-18

16.

2.28 Determinar o valor eficaz da forma de onda da Fig. 2-19 e comparar com o Probl. 2.27.

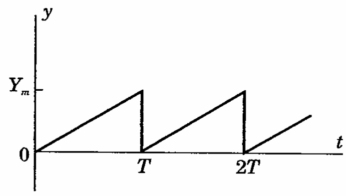


Figura 2-19

2.29 Determinar o valor eficaz da forma de onda triangular da Fig. 2-20 e comparar com o Probl. 2.27.

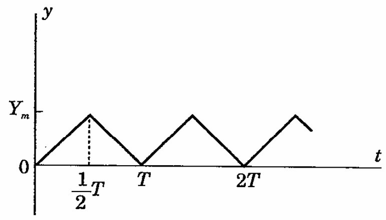


Figura 2-20

2.30 Determinar k na forma de onda mostrada na Fig. 2-21, onde k é uma fração do período T, de modo que o valor eficaz seja (*a*) 2, (*b*) 5. Variando k, qual é o valor eficaz mais elevado possível?
Resp.: (*a*) 0,12; (*b*) 0,75; 5,77 para $k = 1$.

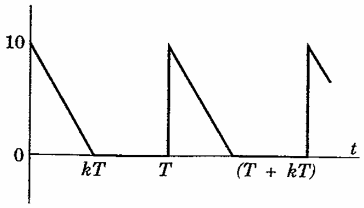


Figura 2-21

2.31 Determinar V_{med} e V_{ef} para a forma de onda da Fig. 2.22.
Resp.: V_{med} = 21,6, V_{ef} = 24,75.

2.32 Se a função do Probl. 2.31 for descrita, no primeiro intervalo, por (*a*) $50e^{-200t}$, (*b*) $50e^{-500t}$, determinar V_{med} e V_{ef}.
Resp.: (*a*) V_{med} = 12,25, V_{ef} = 17,67;
(*b*) V_{med} = 5,0, V_{ef} = 11,18.

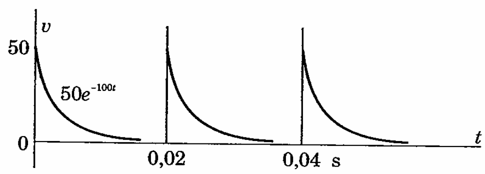


Figura 2-22

2.33 Determinar Y_{med} e Y_{ef} para a forma de onda da Fig. 2-23.
$0 < t < 0,025$ $\quad y(t) = 400t$
$0,025 < t < 0,050$ $\quad y(t) = 10e^{-1000(t - 0,025)}$
Resp.: Y_{med} = 2,7, Y_{ef} = 4,2.

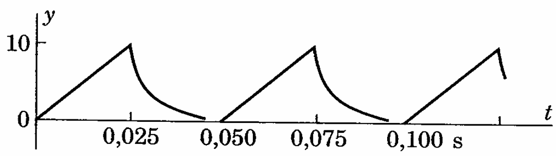


Figura 2-23

2.34 A forma c
menor ter
$0 < t < 0,($
$0,01 < t <$
Resp.: Y_m

2.35 Determina
represent
Resp.: V_{me}

2.36 Com rela
ângulo de

Resp.:

2.37 A onda s
ângulo de
Resp.: V_m

2.34 A forma de onda da Fig. 2-24 é semelhante à do Probl. 2.33, porém com um menor tempo de elevação ("rise rime"). Achar Y_{med} e Y_{ef}.
$0 < t < 0{,}01$ $\quad y(t) = 1000t$
$0{,}01 < t < 0{,}05$ $\quad y(t) = 10e^{-1000(t-0{,}01)}$
Resp.: $Y_{med} = 1{,}2$; $Y_{ef} = 2{,}77$.

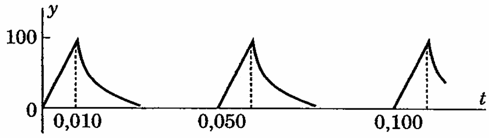


Figura 2-24

ɔor (*a*) $50e^{-200t}$, (*b*)

2.35 Determinar V_{med} e V_{ef} da onda de tensão senoidal retificada de meia onda representada na Fig. 2-25, sendo de 45° o ângulo de atraso.
Resp.: $V_{med} = 27{,}2$ volts; $V_{ef} = 47{,}7$ volts.

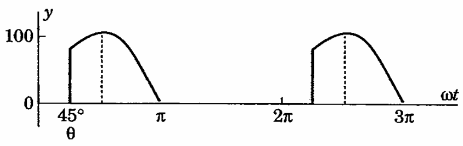


Figura 2-25

2.36 Com relação à forma de onda do Probl. 2.35, determinar V_{med} e V_{ef}, sendo o ângulo de atraso (*a*) $\theta = 90°$, (*b*) $\theta = 135°$.

Resp.: (*a*) $V_{med} = 15{,}95$; $V_{ef} = 35{,}4$;
(*b*) $V_{med} = 4{,}66$; $V_{ef} = 15{,}06$.

2.37 A onda senoidal retificada de onda completa, mostrada na Fig. 2-26, tem um ângulo de atraso de 60°. Calcular V_{med} e V_{ef} em função de V_m.
Resp.: $V_{med} = 0{,}478\ V_m$; $V_{ef} = 0{,}633\ V_m$.

t

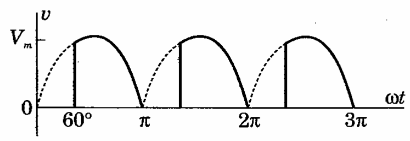


Figura 2-26

2.38 Por meio de um circuito de controle é possível variar o ângulo de atraso da forma de onda de corrente mostrada na Fig. 2-27, de modo que o valor eficaz tenha valores compreendidos entre os limites de 2,13 e 7,01 ampères. Determinar os ângulos.
Resp.: $\theta_1 = 135°$; $\theta_2 = 25°$.

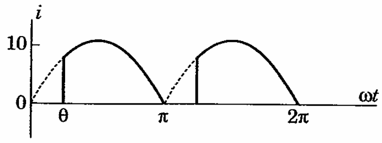


Figura 2-27

2.39 Determinar o valor eficaz da onda senoidal completa, retificada, da Fig. 2-28, cortada ("clipada") na metade de seu valor máximo.
Resp.: $V_{ef} = 0{,}668\ Y_m$.

2.40 Referindo-se à forma de onda do Probl. 2.39, achar o valor eficaz, se a onda é cortada ("clipada") aos 60° ou $\pi/3$ radianos.
Resp.: $Y_{ef} = 0{,}668\ Y_m$.

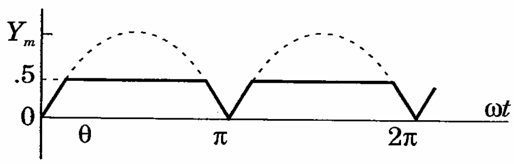


Figura 2-28

2.41 Uma onda senoidal retificada é cortada de modo que seu valor eficaz seja 05 Y_m, como mostra a Fig. 2-29. Determinar em que ordenada é cortada a onda.
Resp.: 0,581 Y_m ou $\theta = 35{,}5°$.

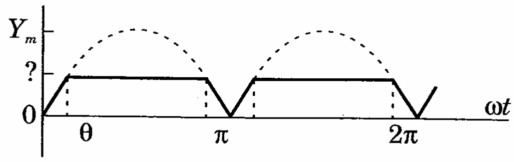


Figura 2-29

2.42 Calcular
trifásico r
Resp.: V_r

2.43 A forma d
é mostrad
Resp.: V_m

de atraso da forma
valor eficaz tenha
res. Determinar os

ada, da Fig. 2-28,

eficaz, se a onda é

r eficaz seja 05 Y_m,
tada a onda.

2.42 Calcular os valores médio e eficaz da forma de onda que resulta de um circuito trifásico retificador de meia onda, como indica a Fig. 2-30.
Resp.: $V_{med} = 0{,}827\ V_m$; $V_{ef} = 0{,}840\ V_m$.

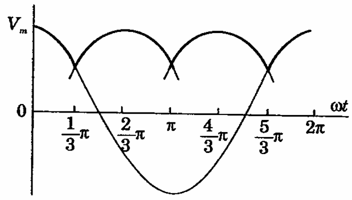


Figura 2-30

2.43 A forma de onda que resulta de um circuito hexafásico retificador de meia onda é mostrada na Fig. 2-31. Calcular V_{med} e V_{ef}.
Resp.: $V_{med} = 0{,}955\ V_m$; $V_{ef} = 0{,}956\ V_m$.

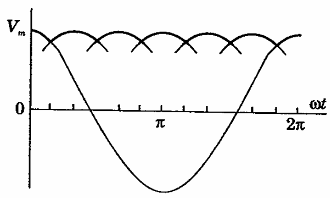


Figura 2-31

MAKRON
Books

CORRENTE E TENSÃO SENOIDAIS

Introdução

Quando se aplicam as leis de Kirchhoff a um circuito, resulta, geralmente, uma equação íntegro-diferencial. Os métodos clássicos de resolução de equações diferenciais darão as soluções. Quando tais métodos são usados na obtenção da corrente devida a uma tensão aplicada, a corrente fica dividida em duas partes. Uma parte transiente, isto é, passageira, transitória, durando, geralmente, apenas uma fração de segundo e uma parte correspondente ao regime estacionário, que permanece até que outra causa seja introduzida.

Como em muitos casos o estudante da análise de circuitos ainda não possui desembaraço nas técnicas de equações diferenciais, procuraremos, neste capítulo, estabelecer a parte correspondente ao regime estacionário da solução, sem fazer menção ao regime transitório. Ao leitor que possua conhecimentos sobre equações diferenciais, seria útil, agora, um estudo de como tais métodos se aplicam à análise de circuitos. O Capítulo 16 estuda as equações diferenciais clássicas e dá alguns exemplos, ilustrando as partes transitória e estacionária das soluções.

Correntes Senoidais

Quando a corrente é senoidal em elementos puros R, L e C, a tensão nos terminais de cada um é dada pela Tabela 3-1.

Tensões Senoidais

Quando as tensões nos três elementos são senoidais, as correntes são dadas pela Tabela 3-2.

Tabela 3-1
Tensão no Elemento Puro para Corrente Senoidal

Elemento	***Tensão para i geral***	***Tensão para $i = I_m$ sen ωt***	***Tensão para $i = I_m$ cos ωt***
Resistência R	$v_R = Ri$	$v_R = RI_m$ sen ωt	$v_R = RI_m$ cos ωt
Indutância L	$v_L = L\dfrac{di}{dt}$	$v_L = \omega LI_m$ cos ωt	$v_L = \omega LI_m$ (− sen ωt)
Capacitância C	$v_C = \dfrac{1}{C}\int i\,dt$	$v_C = \dfrac{I_m}{\omega C}$ (− cos ωt)	$v_C = \dfrac{I_m}{\omega C}$ sen ωt

Tabela 3-2
Corrente no Elemento Puro para tensão Senoidal

Elemento	***Corrente para v geral***	***Corrente para $v = V_m$ sen ωt***	***Corrente para $v = V_m$ cos ωt***
Resistência R	$i_R = \dfrac{v}{R}$	$i_R = \dfrac{V_m}{R}$ sen ωt	$i_R = \dfrac{V_m}{R}$ cos ωt
Indutância L	$i_L = \dfrac{1}{L}\int v\,dt$	$i_L = \dfrac{V_m}{\omega L}$ (− cos ω)	$ti_L = \dfrac{V_m}{\omega L}$ sen ωt
Capacitância C	$i_C = C\dfrac{dv}{dt}$	$i_C = \omega CV_m$ cos ωt	$i_C = \omega CV_m$ (−sen ωt)

Capítulo 3

S

.to, resulta, geral-
ɔs de resolução de
los são usados na
:e fica dividida em
ısitória, durando,
:orrespondente ao
. introduzida.

ircuitos ainda não
ocuraremos, neste
onário da solução,
nhecimentos sobre
nétodos se aplicam
ıciais clássicas e dá
a das soluções.

R, L e C, a tensão

Impedância

A impedância de um elemento, de um ramo ou de um circuito completo é a relação entre a tensão e a corrente:

$$\text{Impedância} = \frac{\text{Função tensão}}{\text{Função corrente}}$$

Para tensão e corrente senoidais esta relação terá uma amplitude (módulo) e um ângulo. No Capítulo 5, a impedância é tratada muito mais minuciosamente e o ângulo será, então, considerado. No momento, apenas o módulo da impedância será considerado. O ângulo entre v e i é discutido, a seguir, como o ângulo de fase.

Ângulo de Fase

Se tensão e corrente forem, ambas, funções senoidais do tempo, a representação gráfica de ambas, sobre a mesma escala de tempo, mostrará um deslocamento entre elas, salvo se for o caso de uma resistência pura. Esse deslocamento é o ângulo de fase e nunca excede 90° ou $\pi/2$ radianos. Por convenção, o ângulo de fase é sempre "o ângulo que a corrente i faz com a tensão v", isto é, i está avançada de 90°, em relação à v, num capacitor puro; i está atrasada de 45° em relação à v, num circuito RL série em que R é igual a ωL; i está em fase com v numa resistência pura etc. O resumo a seguir esclarece a impedância e o ângulo de fase.

Elemento *R*. A corrente e a tensão estão em fase, num resistor puro. Ver Fig. 3-1.

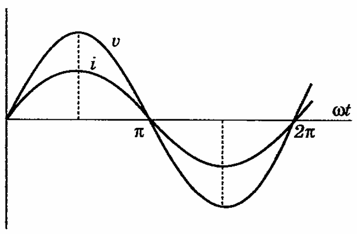


Figura 3-1

O módulo da impedância é R.

Elemento L. Em um indutor puro, a corrente fica atrasada de 90° ou $\pi/2$ em relação à tensão. Ver Fig. 3-2. O módulo da impedância é ωL.

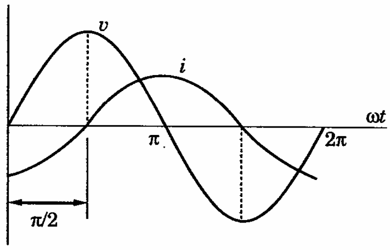


Figura 3-2

Elemento C. No capacitor puro a corrente fica adiantada de 90° ou $\pi/2$ em relação à tensão. Ver Fig. 3-3. O módulo da impedância é $1/\omega C$.

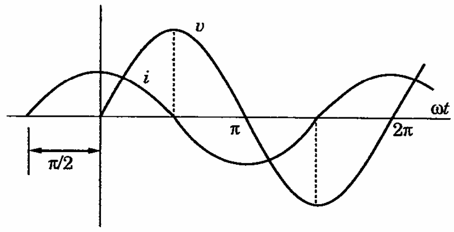


Figura 3-3

***RL* em série.** Corrente atrasada de arc tg $(\omega L/R)$ em relação à tensão. Ver Fig. 3-4. O módulo da impedância é $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$.

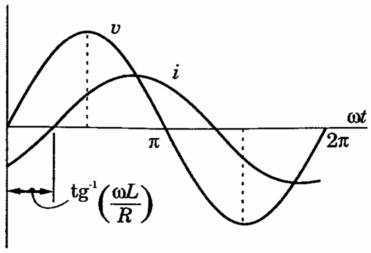


Figura 3-4

***RC* em série**. Corrente avançada de arc tg $(1/\omega CR)$ em relação à tensão em um circuito *RC* em série. Ver Fig. 3-5. O módulo da impedância é $\sqrt{R^2 + (1/\omega CR)^2}$.

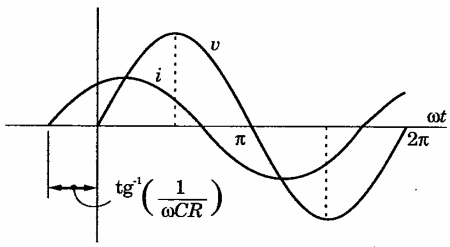


Figura 3-5

Circuitos em Série e em Paralelo

Em um conjunto de elementos de circuito ligados em série, a tensão total é igual à soma das tensões nos terminais de cada elemento. Portanto, na Fig. 3-6(*a*), $v_T = v_1 + v_2 + v_3$.

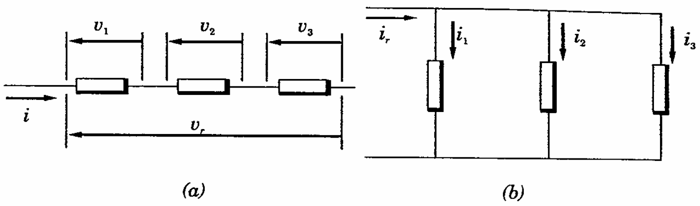


Figura 3-6

Numa ligação de diversos elementos em paralelo, a corrente total solicitada pelo circuito é a soma das correntes de cada ramo. Então, na Fig. 3-6(*b*), $i_T = i_1 + i_2 + i_3$. Verifica-se aí uma aplicação da lei das correntes, de Kirchhoff, pois as quatro correntes têm um nó comum.

Problemas Resolvidos

3.1 A corrente $i = I$ sen ωt passa no circuito série da Fig. 3-7(*a*), que consta da ligação de R ohms e L henrys. Exprimir a tensão total aplicada, v_T, como função senoidal.

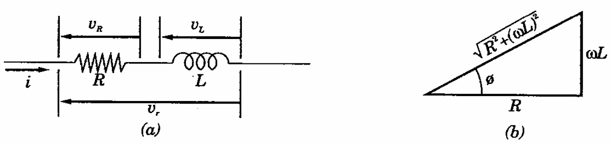


Figura 3-7

$$v_T = v_R + v_L = RI_m \text{ sen } \omega t + \omega L I_m \cos \omega t \qquad (1)$$

Qualquer número de termos senoidais e co-senoidais da mesma freqüência pode ser combinado em um único termo senoidal ou co-senoidal de amplitude A e ângulo de fase ϕ. Podemos, portanto, escrever:

$$v_T = A \text{ sen } (\omega t + \phi) = A \text{ sen } \omega t \cos \phi + A \cos \omega t \text{ sen } \phi \qquad (2)$$

Igualando os coeficientes de sen ωt e de cos ωt em (1) e (2), obtemos:

$$RI_m = A \cos \phi, \quad \omega L I_m = A \text{ sen } \phi$$

Da Fig. 3-7(b):

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos \theta} = \frac{\omega L}{R}, \quad \cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},$$

$$A = \frac{RI_m}{\cos \phi} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\, I_m,$$

Então:

$$v_T = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\, I_m \operatorname{sen}(\omega t + \operatorname{arc\,tg} \omega L/R),$$

o que indica que a corrente está atrasada, em relação à tensão, de um ângulo de fase $\phi = \operatorname{arc\,tg} \omega L/R$.

O módulo da impedância é $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$.

Se $R \gg \omega L$, tem-se $\omega L/R \to 0$ e $\phi \to 0$, isto é, o mesmo resultado que se obtém com resistência pura.

Se $\omega L \gg R$, tem-se $\omega L/R \to \infty$ e $\phi \to \pi/2$, isto é, o mesmo resultado que se obtém com indutância pura.

Numa associação série de R e L, a corrente estará atrasada, em relação à tensão, de um ângulo compreendido entre 0° e 90°, dependendo dos valores relativos de R e ωL.

3.2 A corrente no circuito da Fig. 3-8 é $i = 2$ sen 500 t. Calcular a tensão total aplicada v_T.

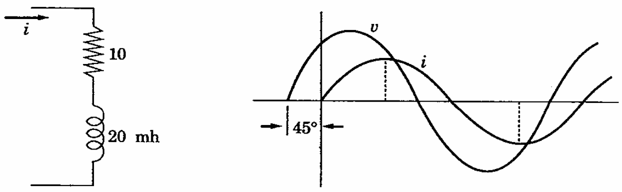


Figura 3-8

$$v_T = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\, I_m\, sen\, (\omega L + \operatorname{arc\,tg} \omega L/R) + 28{,}28 \operatorname{sen}(500t + 45°)$$

onde $R = 10$ ohms; $\omega t = 500\,(0{,}02) = 10$ ohms; arc tg $\omega L/R = 45°$; $I_m = 2$.

Como, no caso, $R = \omega L$, a corrente está atrasada de 45° em relação à tensão.

3.3 Num circuito série com $R = 20$ ohms e $L = 0{,}06$ henrys, a corrente está atrasada de 80° em relação à tensão. Determinar ω.

$\operatorname{tg} \phi = \omega L/R$; $\operatorname{tg} 80° = 5{,}68 = \omega\,(0{,}06)/20 \;\therefore\; \omega = 1893$ rad/s

3.4 Num circuito RL série, $L = 0{,}02$ henrys e a impedância é 17,85 ohms. Aplicada uma tensão senoidal, a corrente resultante está atrasada de 63,4°.

Calcular ω e R.

$\operatorname{tg} \phi = \omega L/R$, $\operatorname{tg} 63{,}4° = 2 = 0{,}02\omega/R$, $R = 0{,}01\,\omega$

$$17{,}85 = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{(0{,}01\omega)^2 + (0{,}02\omega)^2}$$

$\omega = 800$ rad/s e $R = 0{,}01\omega = 8$ ohms

3.5 Em um circuito série constituído de R ohms e C farads, como mostra a Fig. 3-9, a corrente é $i = I_m \cos \omega t$. Exprimir a tensão total aplicada como função co-senoidal simples.

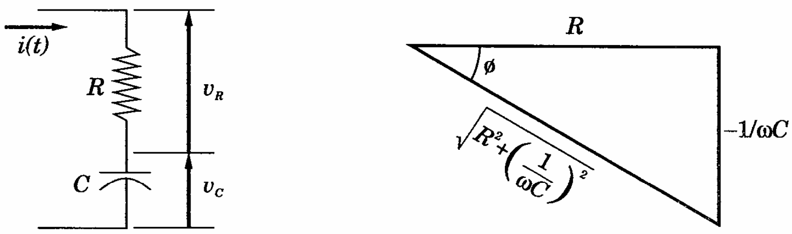


Figura 3-9

$$v_T = v_R + v_C = RI_m \cos \omega t + (1/\omega C)\, I_m \operatorname{sen} \omega t \tag{1}$$

Exprimindo v_T como termo co-senoidal simples de amplitude A e ângulo de fase ϕ,

$$v_T = A \cos(\omega t + \phi) = A \cos \omega t \cos \phi - A \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \phi \tag{2}$$

Igualando os coeficientes de $\cos \omega t$ e de $\operatorname{sen} \omega t$ em (*1*) e (*2*):

$RI_m = A \cos \phi$, $\quad (1/\omega C) I_m = -A \operatorname{sen} \phi$

Então: $\operatorname{tg} \phi = \dfrac{\operatorname{sen} \phi}{\cos \phi} = -\dfrac{1}{\omega CR}$, $\cos \phi = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}$,

$$A = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}\; I_m,$$

e $v_T = A \cos(\omega t + \phi) = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}\; I_m \cos(\omega t = \mathrm{tg}^{-1}\, 1/\omega CR)$

o que significa que a corrente está adiantada sobre a tensão. (Como sen ϕ é negativo e cos ϕ é positivo, ϕ está no quarto quadrante.)

O módulo da impedância é $\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$.

Se $R \gg 1/\omega C$ tem-se $1/\omega CR \to 0$ e $\phi \to 0$, isto é, o mesmo resultado obtido com a resistência pura.

Se $1/\omega C \gg R$ tem-se $1/\omega CR \to \infty$ e $\phi \to \pi/2$, isto é, o mesmo que para a capacitância pura.

Numa associação série de R e C, a corrente estará adiantada, em relação à tensão de um ângulo compreendido entre 0° e 90°, dependendo dos valores relativos de R e $1/\omega C$.

3.6 No circuito série da Fig. 3-10, a corrente é $i = 2 \cos 5000t$. Achar v_T.

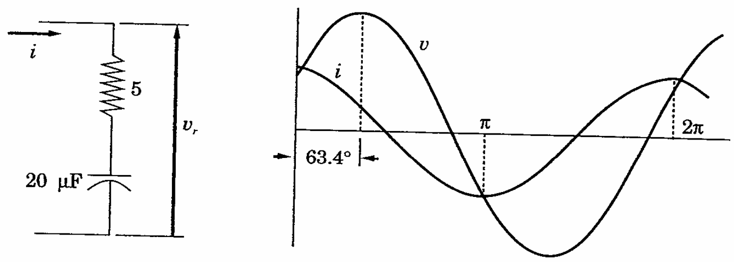


Figura 3-10

$$v_T = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}\; I_m \cos\left(\omega t - \mathrm{arc\ tg}\ \frac{1/\omega C}{R}\right) = 22{,}4 \cos(5000t - 63{,}4°)$$

onde: $R = 5$ ohms; $1/\omega C = 1/5000 \times 20 \times 10^{-6}) = 10$ ohms;

arc tg $1/\omega CR$ = arc tg $10/5 = 63{,}4°$; $I_m = 2$.

A corrente está adiantada de 63,4°em relação à tensão. O valor absoluto da impedância é 11,18 ohms.

3.7 Num circuito série constando de R, L e C a corrente é $i = I_m$ sen ωt. Determinar a tensão nos terminais de cada elemento (Fig. 3-11). Reportar-se à Fig. 3-12.

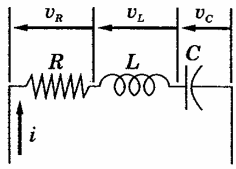


Figura 3-11

$$v_R = Ri = Ri_m \text{ sen } \omega t$$

$$v_L = L \frac{d}{dt}(I_m \text{ sen } \omega t) = \omega L I_m \cos \omega t$$

$$v_C = \frac{1}{C} \int I_m \text{ sen } \omega t \, dt = \frac{1}{\omega C} I_m (-\cos \omega t)$$

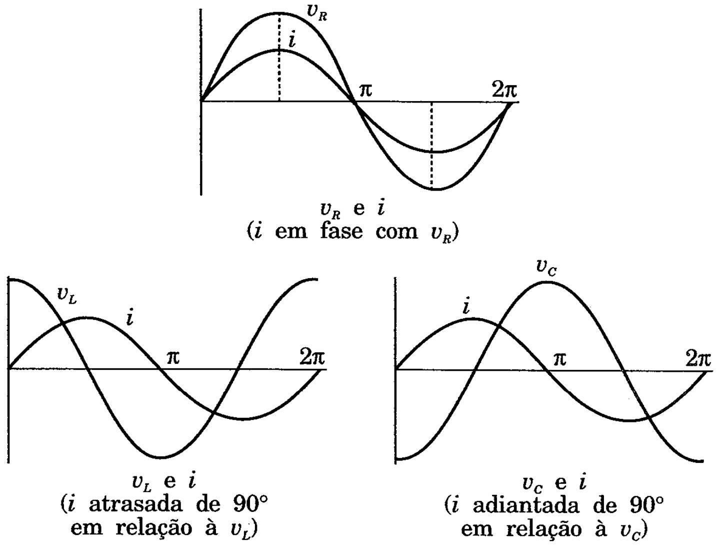


Figura 3-12

3.8 Com relação ao Probl. 3.7, exprimir a tensão total v_T como uma função senoidal simples.

Seja $v_T = v_R + v_L + v_C = RI_m \operatorname{sen} \omega t + (\omega L - 1/\omega C)\, I_m \cos \omega t$ (*1*)

Chamando A a amplitude e ϕ o ângulo de fase de v_T;

$v_T = A \operatorname{sen} (\omega t + \phi)$

$= A \operatorname{sen} \omega t \cos \phi + A \cos \omega t \operatorname{sen} \phi$ (*2*)

Igualando os coeficientes de sen ωt e cos ωt em (*1*) e (*2*), obtemos:

$RI_m = A \cos \phi,\quad I_m (\omega L - 1/\omega C) = A \operatorname{sen} \phi$

Então:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}, \quad \cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \; A \quad A = \frac{RI_m}{\cos \phi}$$

$$= \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}\, I_m,$$

e $v_T = A \operatorname{sen} (\omega t + \phi) =$

$$= \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}\, I_m \operatorname{sen} [\omega t + \operatorname{tg}^{-1} (\omega L - 1/\omega C)/R]$$

onde $\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ é o valor absoluto da impedância e arc tg $(\omega L - 1/\omega C)\, R$ é o ângulo de fase.

Se $\omega L > 1\, \omega C$, o ângulo de fase ϕ é positivo, a corrente está *atrasada* em relação à tensão e o circuito tem um efeito total indutivo.

Se $\omega L > 1/\omega C$, o ângulo de fase ϕ é negativo, a corrente está *avançada* em relação à tensão e o efeito total do circuito é capacitivo.

Se $\omega L = 1/\omega C$, o ângulo de fase ϕ é zero, tensão e corrente estão em fase e a impedância tem como valor R. Chama-se a essa condição *ressonância série*.

3.9 Mostrar que ωL e $1/\omega C$ são dados em ohms quando ω está em rad/s, L em henrys e C em farads.

$$\omega L = \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot \text{henry} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\text{volts}}{\text{ampère}} = \frac{\text{volt}}{\text{ampère}} = \text{ohm}$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{\text{s}}{\text{rad}} \cdot \frac{1}{\text{farad}} = \text{s} \cdot \frac{\text{volt}}{\text{ampère}} = \frac{\text{volt}}{\text{ampère}} = \text{ohm}$$

Notar que a medida de um ângulo em radianos é um número se dimensão.

3.10 Em um circuito série constituído de R = 15 ohms, L = 0,08 henry e C = 30 microfarads, a freqüência da tensão aplicada é 500 rad/s. Qual o valor do ângulo de avanço ou de atraso da corrente sobre a tensão?

$$\omega L = 500(0{,}08) = 40 \text{ ohms}, \quad \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{500(30 \times 10^{-6})} = 66{,}7\text{ohms}$$

$$\text{tg}^{-1}\,\frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \text{tg}^{-1}\,\frac{-26{,}7}{15} = -60{,}65^\circ$$

A reatância capacitiva $1/\omega C$ é maior que a indutiva. A corrente está avançada de 60,65° e o circuito tem um efeito resultante capacitivo. O módulo da impedância é $\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C^2)} = 30{,}6$ ohms.

3.11 A diferença de potencial aplicada à combinação $R - L$ em paralelo da Fig. 3-13 é $v = V_m \cos \omega t$. Calcular a corrente em cada ramo e exprimir a corrente total i_T como função co-senoidal simples.

$$i_T = i_R + i_L = \frac{1}{R}v + \frac{1}{L}\int v\,dt = \frac{V_m}{R}\cos \omega t + \frac{V_m}{\omega L}\text{sen}\,\omega t$$

Então,

$$i_T = \sqrt{(1/R)^2 + (1/\omega L)^2}\;V_m \cos(\omega t - \text{tg}^{-1}\,R/\omega L)$$

A corrente está atrasada de $\phi = \text{arc tg}\,R/\omega L$.

Se $R \gg \omega L$, temos $\phi \to 90^\circ$ e $i_T \approx (V_m/\omega L)\cos(\omega t - 90^\circ)$. Com essa resistência relativamente elevada, o dreno de corrente pelo ramo resistivo é muito baixo. Portanto, i_T é, praticamente, igual a i_L, isto é, a corrente indutiva influi fortemente no estabelecimento da corrente total.

Se $\omega L \gg R$, temos $\phi \to 0^\circ$ e $i_T \approx (V_m/R)\cos \omega t$. Neste caso, a reatância do ramo indutivo é elevada e ele drena uma corrente pequena, comparada com a do ramo resistivo. Neste caso, portanto, a corrente resistiva influi fortemente na corrente total.

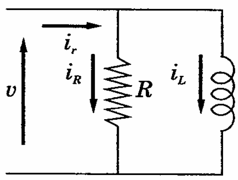


Figura 3-13

3.12 A tensão $v = V_m$ sen ωt está aplicada à associação de R e C em paralelo, mostrada na Fig. 3-14. Achar a corrente em cada ramo e exprimir i_T como função senoidal simples.

$$i_T = i_R + i_C = \frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} = \frac{V_m}{R}\text{ sen }\omega t + \omega C V_m \cos \omega t$$

Então, $i_T = \sqrt{(1/R)^2 + (\omega C)^2}\; V_m \text{ sen } (\omega t + \text{arc tg } \omega CR)$

A corrente está avançada de $\phi = \text{arc tg } \omega CR$.

Se $R \gg 1/\omega C$, temos $\phi \to 90°$ e $i_T \approx i_C = \omega C V_m \text{ sen } (\omega t + 90°)$, isto é, o ramo capacitivo tem a maior contribuição para a corrente total, controlando-a.

Se $1/\omega C \gg R$, temos $\phi \to 0°$ e $i_T \approx i_R = (V_m/R)$ sen ωt, isto é, o ramo resistivo é o de maior influência na corrente total.

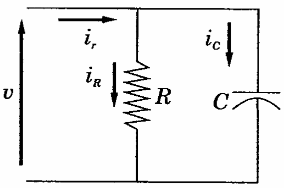


Figura 3-14

3.13 A diferença de potencial $v = V_m$ sen ωt é aplicada à associação paralela de R, L e C, mostrada na Fig. 3-15. Calcular a corrente em cada ramo e exprimir a corrente total i_T como função senoidal simples.

$$i_T = i_R + i_L + i_C = \frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int v\,dt + C\frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{V_m}{R}\text{ sen }\omega t - \frac{V_m}{\omega L}\cos \omega t + \omega C V_m \cos \omega t \qquad (1)$$

Exprimindo v_T como função senoidal de módulo A e ângulo de fase ϕ,

$$i_T = A \text{ sen } (\omega t + \phi) = A \text{ sen } \omega t \cos \phi \; + \; A\,\omega t \text{ sen } \phi \qquad (2)$$

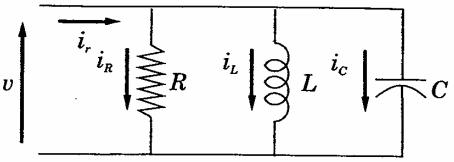


Figura 3-15

Igualando os coeficientes de sen ωt e de cos ωt em (*1*) e (*2*):

$V_m/R = A \cos\phi$, $(\omega C - 1/\omega L)\, V_m = A \operatorname{sen}\phi$

Então, $\operatorname{tg}\phi = \dfrac{\omega C - 1/\omega L}{1/R}$, $\cos\phi = \dfrac{1/R}{\sqrt{(1/R)^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}}$

$A = \sqrt{(1/R)^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}\; V_m$, e

$i_T = \sqrt{(1/R)^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}\; V_m \operatorname{sen}[\omega t + \operatorname{arc\,tg}(\omega C - 1/\omega L)R]$

O sinal do ângulo de fase depende, evidentemente, dos valores relativos de ωC e $1/\omega L$.

O ramo indutivo drena uma corrente atrasada de 90° em relação à tensão. A corrente no ramo capacitivo está avançada de 90° em relação à tensão. Essas duas correntes, combinadas, desde que com igual amplitude, poder-se-iam cancelar mutuamente. Se a corrente indutiva for superior, a corrente total estará atrasada, ao passo que estará adiantada, se a do ramo capacitivo for superior.

3.14 Dois elementos puros de circuito estão associados em série, possuindo a corrente $i = 13{,}42 \operatorname{sen}(500t - 53{,}4°)$ ampères para a tensão aplicada $v = 150 \operatorname{sen}(500t + 10°)$ volts. Determinar os elementos do circuito.

De v e i concluímos que a corrente está atrasada em relação à tensão, de $53{,}4° + 10° = 63{,}4°$; o circuito deve, portanto, conter R e L.

$\operatorname{tg} 63{,}4° = \omega L/R = 2$; $\therefore\ \omega L = 2R$

$V_m/I_m = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, $150/13{,}42 = \sqrt{R^2 + (2R)^2}$, $R = 5$ ohms

Conclusão: o circuito contém um resistor $R = 5$ ohms e um indutor $L = 0{,}02$ henry.

3.15 Um circuito em série constituído de dois elementos puros tem as seguintes corrente e tensão aplicadas:

$v = 200 \text{ sen } (2000t + 50°)V; \quad i = 4 \cos (2000\, t + 13{,}2°)\, A$

Achar os elementos que constituem o circuito.

Como $\cos x = \text{sen } (x + 90°)$, podemos escrever $i = 4 \text{ sen } (2000t + 103{,}2°)$. A corrente, portanto, está adiantada sobre a tensão de $103{,}2° - 50° = 53{,}2°$ e o circuito deve conter R e C.

$\text{tg } 53{,}2° = 1{,}33 = 1/\omega CR; \; 1/\omega C = 1{,}33\, R$

$V_m/I_m = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}; \quad 200/4 = \sqrt{R^2 + (1{,}33R)^2}; \quad R = 30 \text{ ohms}$

e $C = 1/(1{,}33\, \omega R) = 1{,}25 \times 10^{-5}$ farads $= 12{,}5\, \mu F$.

3.16 No circuito série da Fig. 3-16, a tensão e a corrente são:

$v = 353{,}5 \cos (3000t - 10°)$ volts
$i = 12{,}5 \cos (3000t - 55°)$ ampères
e a indutância é 0,01 H. Determinar R e C.

A corrente está atrasada de $55° - 10° = 45°$. Portanto, a reatância indutiva ωL é superior à capacitiva $1/\omega C$.

$\text{tg } 45° = 1 = (\omega L - 1/\omega C)/R, \qquad (\omega L - 1/\omega C) = R$

$V_m/I_m = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}, \quad 353{,}5/12{,}5 = \sqrt{2R^2}$

$R = 20$ ohms

e, de $(\omega L - 1\, \omega C) = R$, encontramos

$C = 3{,}33 \times 10^{-5}$ farads $= 33{,}3\, \mu F$

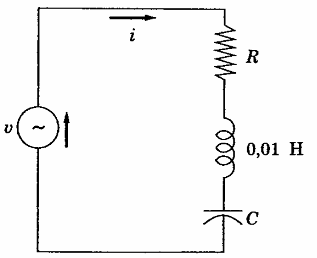


Figura 3-16

3.17 No circuit
a corrente

$i_T = i_R$ +

= 20 sen

= A sen (

donde 20
e A = 20/(

i_T = 20,6

A corrent

3.18 A tensão a
correntes r

3.17 No circuito paralelo da Fig. 3-17, a tensão é $v = 100 \text{ sen } (1000t + 50°)$. Exprimir a corrente total como função senoidal simples.

$$i_T = i_R + i_L = \frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int v\,dt$$

$$= 20 \text{ sen } (1000t + 50°) - 5 \cos (1000t + 50°)$$

$$= A \text{ sen } (1000t + 50°) \cos \phi + A \cos (1000t + 50°) \text{ sen } \phi$$

donde $20 = A \cos \phi$ e $-5 = A \text{ sen } \phi$. Então, $\text{tg } \phi = -5/20$, $\phi = -14{,}05°$; e $A = 20/(\cos \phi) = 20{,}6$. Então,

$$i_T = 20{,}6 \text{ sen } (1000t + 50° - 14{,}05°) = 20{,}6 \text{ sen } (1000t + 35{,}95°)$$

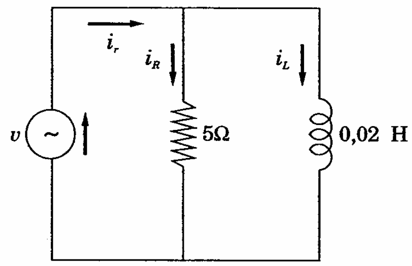


Figura 3-17

A corrente está atrasada de 14,05° em relação à tensão.

3.18 A tensão aplicada no circuito da Fig. 3-18 é $v = 50 \text{ sen } (5000t + 45°)$. Calcular as correntes nos ramos e a total.

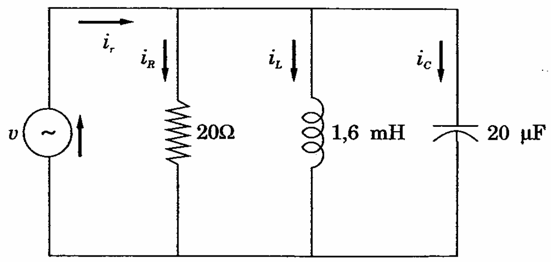


Figura 3-18

$$i_T = i_R + i_L + i_C = \frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int v\,dt + C\,\frac{dv}{dt}$$

$= 2{,}5 \text{ sen } (5000t + 45°) - 6{,}25 \cos (5000t + 45°) + 5 \cos (5000t + 45°)$

$= 2{,}5 \text{ sen } (5000t + 45°) - 1{,}25 \cos (5000t + 45°)$

$= 2{,}8 \text{ sen } (5000t + 18{,}4°)$, usando os métodos deste capítulo.

A corrente está atrasada de 45° – 18,4° = 26,6° em relação à tensão.

Observe-se que a corrente total tem o valor máximo de 2,8 ampères, que é menor do que qualquer dos valores máximos de corrente, tanto no ramo indutivo (6,25 ampères) quanto no capacitivo (5 ampères). A explicação é óbvia quando se representam essas três correntes num mesmo sistema de eixos.

3.19 A corrente na associação *R*, *L*, *C* série, mostrada na Fig. 3-19, é $i = 3 \cos (5000t - 60°)$. Achar a tensão em cada elemento e a total.

$$v_T = v_R + v_L + v_C = Ri + L\,\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt$$

$v_T = 6 \cos (5000t - 60°) - 24 \text{ sen } (5000t - 60°)$

$+ 30 \text{ sen } (5000t - 60°) = 6 \cos (5000t - 60°)$

$+ 6 \text{ sen } (5000t - 60°) = 8{,}49 \cos (5000t - 105°)$,

pelos métodos deste capítulo.

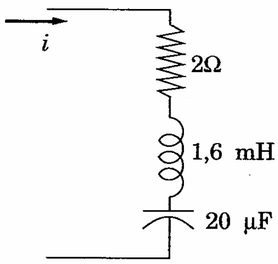


Figura 3-19

A corrente está avançada 105° – 60° = 45° em relação à tensão.

Observe-s
elemento:
será sufic

3.20 A corrente
tensão?
Resp.: 10C

3.21 A corrente
tensão?
Resp.: 20C

3.22 A tensão
e L = 0,06
de atraso
Resp.: i =
V_m/I_m = 13

3.23 A tensão n
tensão tot
impedânci
Resp.: i =

3.24 A tensão t
puros são:
elementos
Resp.: R =

3.25 A tensão t
puros são:
elementos
Resp.: R =

3.26 Dois elem
tensão apl
em paralel
Resp.: Sér
Paralela: i

3.27 Um resisto
tensão no
corrente e
Resp.: v_T =

Observe-se que a tensão máxima aplicada é 8,49 volts. A tensão nos elementos indutivo e capacitivo é maior que isso. A representação gráfica será suficiente para demonstrar o que ocorre.

Problemas Propostos

3.20 A corrente em uma indutância pura de $L = 0{,}01$ H é $i = 5 \cos 2000t$. Qual é a tensão?
Resp.: 100 cos $(2000t + 90°)$.

3.21 A corrente em uma capacitância pura de $C = 30\ \mu$F, e $i = 12$ sen $2000t$. Qual é a tensão?
Resp.: 200 sen $(2000t - 90°)$.

3.22 A tensão nos terminais da indutância, em um circuito série de $R = 5$ ohms e $L = 0{,}06$ henry, é $v_L = 15$ sen $200t$. Achar a tensão total, a corrente, o ângulo de atraso de i em relação v_T e o módulo da impedância.
Resp.: $i = 1{,}25$ sen $(200t - 90°)$; $v_T = 16{,}25$ sen $(200t - 22{,}65°)$; 67,35°; $V_m/I_m = 13$ ohms.

3.23 A tensão na resistência do circuito do Probl. 3.22 é $v_R = 15$ sen $200t$. Calcular a tensão total, a corrente, o ângulo de atraso de i em relação a v_T e o módulo da impedância.
Resp.: $i = 3$ sen $200t$; $v_T = 39$ sen $(200t + 67{,}35°)$; 67,35°; $V_m/I_m = 13$ ohms.

3.24 A tensão total e a corrente resultante em um circuito série de dois elementos puros são: $v_T = 255$ sen $(300t + 45°)$ e $i = 8{,}5$ sen $(300t + 15°)$. Determinar os elementos que constituem o circuito.
Resp.: $R = 26$ ohms; $L = 0{,}05$ henry.

3.25 A tensão total e a corrente resultante em um circuito série de dois elementos puros são: $v_T = 150 \cos(200t - 30°)$ e $i = 4{,}48 \cos(200t - 56{,}6°)$. Determinar os elementos que constituem o circuito.
Resp.: $R = 30$ ohms, $L = 0{,}075$ henry.

3.26 Dois elementos puros, $R = 12$ ohms e $C = 31{,}3\ \mu$F, são ligados em série com uma tensão aplicada $v = 100 \cos(2000t - 20°)$. Os dois elementos são, então, ligados em paralelo com a mesma tensão. Calcular a corrente total em cada ligação.
Resp.: Série: $i = 5 \cos(2000t + 33{,}2°)$;
Paralela: $i = 10{,}4 \cos(2000t + 16{,}8°)$.

3.27 Um resistor de $R = 27{,}5$ ohms e um capacitor de $C = 66{,}7\ \mu$F estão em série. A tensão no capacitor é $v_C = 50 \cos 1500t$. Calcular v_T, o ângulo de avanço da corrente em relação à tensão e o módulo da impedância.
Resp.: $v_T = 146{,}3 \cos(1500t + 70°)$; 20°; $V_m/I_m = 29{,}3$ ohms.

3.28 Um resistor $R = 5$ ohms e um capacitor desconhecido estão em série. A tensão nos terminais do resistor é $v_R = 25$ sen $(2000t + 30°)$. Se a corrente está avançada de 60° em relação à tensão aplicada, qual é a capacitância?
Resp.: 57,7 μF.

3.29 Um circuito série constituído de $L = 0{,}05$ H e um capacitor desconhecido têm a seguinte tensão aplicada e corrente resultante:
$v_T = 100$ sen $5000t$; $i = 2$ sen $(5000t + 90°)$. Achar a capacitância C.
Resp.: $C = 0{,}0667$ μF.

3.30 Em um circuito série *RLC*, a corrente está atrasada de 30° em relação à tensão aplicada. A tensão em L tem para valor máximo o dobro do valor máximo da tensão no capacitor e $v_L = 10$ sen $1000t$. Se o valor de R é 20 ohms, determinar os valores de L e C.
Resp.: $L = 23{,}1$ mH; $C = 86{,}5$ μF.

3.31 Um circuito série constituído de $R = 5$ ohms, $L = 0{,}02$ henry e $C = 80$ μF tem uma tensão senoidal aplicada, de freqüência variável. Achar os valores de ω para os quais a corrente (*a*) esteja avançada de 45° em relação à tensão; (*b*) esteja em fase e (*c*) atrasada de 45°.
Resp.: (*a*) 675; (*b*) 790; (*c*) 925 rad/s.

3.32 Um circuito paralelo de dois ramos é constituído de apenas um resistor de 50 ohms em um dos ramos e um elemento simples desconhecido no outro. Conhece-se a tensão aplicada ao circuito e a corrente total:
$v(t) = 100 \cos (1500t + 45°)$; $i(t) = 12$ sen $(1500t + 135°)$.
Determine o elemento desconhecido.
Resp.: $R = 10$ ohms.

3.33 Determinar a corrente total em um circuito paralelo de $L = 0{,}05$ H e $C = 0{,}667$ μF, sendo $v = 100$ sen $5000t$ a tensão aplicada.
Resp.: $i_T = 0{,}067$ sen $(5000t - 90°)$.

3.34 Um resistor $R = 10$ ohms e um indutor $L = 0{,}005$ henry estão em paralelo. A corrente no ramo indutivo é $i_L = 5$ sen $(2000t - 45°)$. Achar a corrente total e o ângulo entre i_T e a tensão aplicada.
Resp.: $i_T = 7{,}07$ sen $(2000t + 0°)$; 45° (i_T atrasada em relação à v).

3.35 Um circuito paralelo constituído de um ramo de $R = 5$ ohms e um único elemento desconhecido no outro ramo tem para tensão aplicada e para corrente total:
$v = 10 \cos (50t + 60°)$ e $i = 5{,}38 \cos (50t - 8{,}23°)$
Achar o elemento desconhecido.
Resp.: $L = 0{,}04$ henry.

3.36 Dois elementos puros, $R = 10$ ohms e $C = 100$ μF, em uma ligação paralela, têm para tensão aplicada $v = 150 \cos (5000t - 30°)$. Achar a corrente total.
Resp.: $i_T = 76{,}5 \cos (5000t + 48{,}7°)$.

3.37 Um capa
circuito.
v = 150
nhecido.
Resp.: R

3.38 A tensão
corrente t
L é cinco
Resp.: L

3.39 A tensão
elemento
ohms, L =
aplicada e
Resp.: i_T

3.40 No circuito
e $i_T = 2{,}5$
Resp.: L =

3.41 A tensão a
corrente tot
Resp.: i_T =

em série. A tensão
ɜe a corrente está
acitância?

lesconhecido têm a

ncia C.

m relação à tensão
lo valor máximo da
0 ohms, determinar

C = 80 μF tem uma
alores de ω para os
nsão; (*b*) esteja em

ɜ um resistor de 50
ɜcido no outro. Co-

)5 H e C = 0,667 μF,

ɜtão em paralelo. A
a corrente total e o

) à v).

um único elemento
a corrente total:

gação paralela, têm
ente total.

3.37 Um capacitor puro de $C = 35\ \mu F$ está em paralelo com outro elemento simples do circuito. Se a tensão aplicada e a corrente resultante forem, respectivamente, $v = 150$ sen $3000t$ e $i_T = 16{,}5$ sen $(3000t + 72{,}4°)$, achar o elemento desconhecido.
Resp.: $R = 30$ ohms.

3.38 A tensão aplicada em um circuito paralelo LC é $v = 50 \cos(3000t + 45°)$ e a corrente total $i_T = 2 \cos(3000t - 45°)$. Sabe-se, também, que a corrente do ramo L é cinco vezes maior que a do ramo capacitivo. Achar L e C.
Resp.: $L = 6{,}67$ mH e $C = 3{,}33\ \mu F$.

3.39 A tensão aplicada a três ramos em paralelo, em cada um dos quais existe um elemento puro, é $v = 200$ sen $1000t$. Os ramos contêm, respectivamente, $R = 300$ ohms, $L = 0{,}5$ H e $C = 10\ \mu F$. Acha a corrente total, o ângulo entre i_T e a tensão aplicada e o módulo da impedância.
Resp.: $i_T = 1{,}74$ sen $(1000t + 67{,}4°)$; $67{,}4°$ (i_T avançada); $V_m/I_m = 115$ ohms.

3.40 No circuito da Fig. 3-20, a tensão aplicada e a corrente total são $v = 100$ sen $500t$ e $i_T = 2{,}5$ sen $500t$. Achar L.
Resp.: $L = 0{,}08$ H.

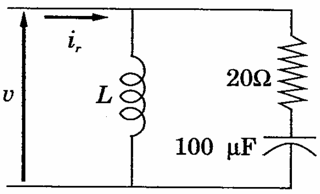


Figura 3-20

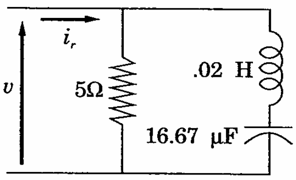


Figura 3-21

3.41 A tensão aplicada ao circuito da Fig. 3-21 é $v = 50$ sen $(2000t - 90°)$. Achar a corrente total.
Resp.: $i_T = 11{,}2$ sen $(2000t - 116{,}6°)$.

3.42 No circuito da Fig. 3-22, a tensão aplicada é v = 100 sen 5000t. Achar as correntes i_1, i_2 e i_T.
Resp.: i_1 = 7,07 sen (5000t – 45°); i_2 = 7,07 sen (5000t + 45°); i_T = 10 sen 5000t.

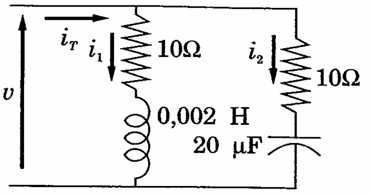


Figura 3-22

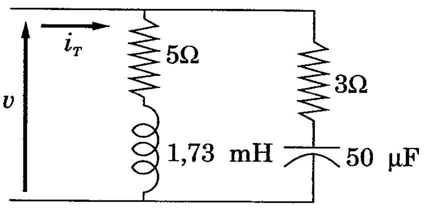


Figura 3-23

3.43 A tensão aplicada no circuito em paralelo da Fig. 3-23 é v = 100 cos (5000t + 45°). (*a*) Achar a corrente total. (*b*) Que dois elementos, em uma associação em série, poderiam ocasionar a mesma corrente e, conseqüentemente, ser equivalentes ao circuito em paralelo, na mesma freqüência?
Resp.: (*a*) i_T = 18,5 cos (5000t + 68,4°); (*b*) circuito em série de R = 4,96 ohms e C = 93 μF.

MAKRON
Books

Números Re

O *conjun*
irracionais. O conj
correspondência u
chamada *linha* (*ei*
único número rea
ponto de linha, cc
multiplicação e di
conjunto. Raízes r
dos números reais,
conjunto dos núme

MAKRON
Books

NÚMEROS COMPLEXOS

Números Reais

O *conjunto dos números reais* consta dos números racionais e dos irracionais. O conjunto de todos os números reais pode ser representado, numa correspondência um a um, pelo conjunto de todos os pontos de uma linha reta, chamada *linha* (*eixo*) *dos números reais*, de modo que cada ponto represente um único número real e que cada número real seja representado por um único ponto de linha, como mostra a Fig. 4-1. As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão podem ser efetuadas com quaisquer números desse conjunto. Raízes reais de números positivos podem ser representadas na linha dos números reais, mas a raiz quadrada de um número negativo não existe no conjunto dos números reais.

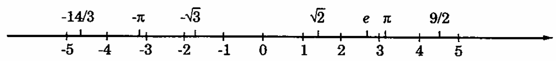


Figura 4-1 Linha dos números reais.

Números Imaginários

A raiz quadrada de um número real negativo é chamada um *número imaginário puro*. Ex: $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-16}$.

Se fizermos $j = \sqrt{-1}$, vem $\sqrt{-2} = j\sqrt{2}$, $\sqrt{-4} = j2$, $\sqrt{-5} = j\sqrt{5}$ etc. Segue-se, também, que $j^2 = -1, j^3 = j^2 \cdot j = (-1)j = -j, j^4 = (j^2)^2 = 1, j^5 = j, \ldots$

Todos os números imaginários puros podem ser representados por pontos de uma linha reta chamada *linha (eixo) dos números imaginários*, como mostra a Fig. 4-2.

A escolha da palavra *imaginário* foi inadequada, pois os números imaginários existem, da mesma maneira que os reais. O termo significa, simplesmente, que tais números não podem ser representados no eixo dos números reais; estão situados em uma segunda linha, o eixo dos números imaginários.

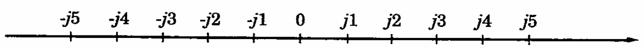


Figura 4-2 Linha dos números imaginários.

Números Complexos

Um número complexo $\mathbf{Z}$ é um número da forma $x + jy$, onde x e y são reais e $j = \sqrt{-1}$. Em um número complexo $x + jy$, o primeiro termo, x, é chamado parte real e o segundo, y, parte imaginária. Quando $x = 0$, o número complexo reduz-se a um imaginário puro e corresponde a um ponto do eixo j. Do mesmo modo, se $y = 0$, o número complexo é um número real e corresponde a um ponto do eixo real. Os números complexos, portanto, compreendem todos os números reais e todos os números imaginários puros.

Dois números complexos, $a + jb$ e $c + jd$, serão iguais, e somente o serão, se $a = c$ e $b = d$.

Se, como na Fig. 4-3, o eixo dos números reais for perpendicular ao dos números imaginários (ou eixo dos j) no ponto de cruzamento 0, cada ponto do

plano complexo re
mente. A Fig. 4-3 r

$\mathbf{Z}_1 = 6$
$\mathbf{Z}_2 = 2 - j3$
$\mathbf{Z}_3 = j4$
$\mathbf{Z}_4 = -3 + j2$
$\mathbf{Z}_5 = -4 - j4$
$\mathbf{Z}_6 = 3 + j3$

Outras Form

Na Fig. 4-

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
tg y/x é chamado *a*

A fórmula
os números comple

plano complexo resultante representa um único número complexo e reciprocamente. A Fig. 4-3 mostra a representação de seis números complexos ($\mathbf{Z}_1$, ..., $\mathbf{Z}_6$).

$\mathbf{Z}_1 = 6$
$\mathbf{Z}_2 = 2 - j3$
$\mathbf{Z}_3 = j4$
$\mathbf{Z}_4 = -3 + j2$
$\mathbf{Z}_5 = -4 - j4$
$\mathbf{Z}_6 = 3 + j3$

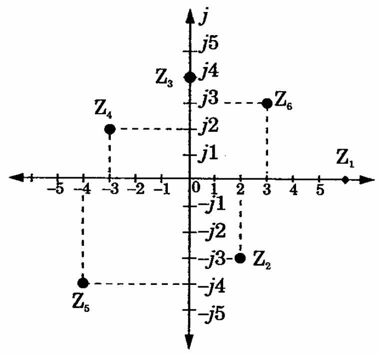


Figura 4-3

Outras Formas de Números Complexos

Na Fig. 4-4, $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$ e o número complexo $\mathbf{Z}$ é

$$\mathbf{Z} = x + jy = r(\cos \theta + j\operatorname{sen} \theta)$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ é chamado *módulo* ou *valor absoluto* de $\mathbf{Z}$ e o ângulo θ = arc tg y/x é chamado *argumento* de $\mathbf{Z}$.

A fórmula de Euler, $e^{j\theta} = (\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta)$, possibilita outra forma para os números complexos, chamada forma exponencial (ver Probl. 4.1):

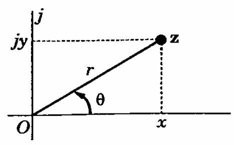


Figura 4-4 Representação polar de um número complexo Z.

$$\mathbf{Z} = r \cos \theta + j\, r \operatorname{sen} \theta = re^{j\theta}$$

A forma polar ou de Steinmetz para um número complexo **Z** é bastante usada em análise de circuitos e escreve-se

$$r \underline{/\theta}$$

onde θ aparece, geralmente, em graus.

Esses quatro meios de se representar um número complexo estão resumidos a seguir. O emprego de um ou de outro depende da operação a ser efetuada.

Forma retangular	$\mathbf{Z} = x + jy$
Forma polar ou de Steinmetz	$\mathbf{Z} = r\underline{/\theta}$
Forma exponencial	$\mathbf{Z} = r\, e^{j\theta}$
Forma trigonométrica	$\mathbf{Z} = r(\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta)$

Conjugado de um Número Complexo

O conjugado $\mathbf{Z}^*$ de um número complexo $\mathbf{Z} = x + jy$ é o número complexo $\mathbf{Z}^* = x - jy$. Por exemplo, $3 - j2$ e $3 + j2$, $-5 + j4$ e $-5 - j4$ são dois pares de números complexos conjugados.

Na forma polar, o conjugado de $\mathbf{Z} = r\underline{/\theta}$ é $\mathbf{Z}^* = r\underline{/-\theta}$. O conjugado de $\mathbf{Z} = r(\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta)$ é $\mathbf{Z}^* = r(\cos \theta - j \operatorname{sen} \theta)$, pois $\cos(-\theta) = \cos \theta$ e $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta$. Por exemplo, o conjugado de $\mathbf{Z} = 7\underline{/30^\circ}$ é $\mathbf{Z}^* = 7\underline{/-30^\circ}$

O conjugado $\mathbf{Z}^*$ de um número complexo **Z** é sempre a imagem de **Z** em relação ao eixo real, como mostra a Fig. 4-5.

Podemos, então, resumir as quatro formas de se escrever o número complexo **Z** e seu conjugado.

$\mathbf{Z} = x + jy$
$\mathbf{Z}^* = x - jy$
$\mathbf{Z} = r\, e^{j\theta}$
$\mathbf{Z}^* = r\, e^{-j\theta}$
$\mathbf{Z} = r\underline{/\theta}$
$\mathbf{Z}^* = r\,\underline{/-\theta}$
$\mathbf{Z} = r(\cos\theta + j \operatorname{sen}\theta)$
$\mathbf{Z}^* = r(\cos\theta - j \operatorname{sen}\theta)$
$z_1 = 3 + j4,\ z_1^* = 3 - j4$
$z_2 = 5\underline{/143{,}1^\circ},\ z_2^* = 5\underline{/-143{,}1^\circ}$

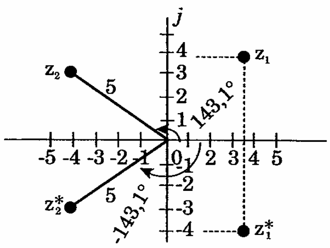


Figura 4-5 Números complexos e seus conjugados.

Soma e Diferença de Números Complexos

Para somar ou subtrair dois números complexos somam-se ou subtraem-se separadamente as partes reais e as partes imaginárias. Do ponto de vista prático, a soma e a subtração de números complexos só podem ser efetuadas, convenientemente, quando ambos estão na forma retangular.

Exemplo 1 Dados $\mathbf{Z}_1 = 5 - j2$ e $\mathbf{Z}_2 = -3 - j8$. Então,

$\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = (5 - 3) + j(-2 - 8) = 2 - j10$

$\mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_1 = (-3 - 5) + j(-8 + 2) = -8 - j6$

Multiplicação de Números Complexos

O produto de dois números complexos, estando ambos na forma exponencial, deduz-se diretamente das leis dos expoentes:

$$\mathbf{Z}_1\,\mathbf{Z}_2 = (r_1\,e^{j\theta_1})(r_2\,e^{j\theta_2}) = r_1\,r_2\,e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

O produto na forma polar ou de Steinmetz segue-se da forma exponencial:

$$\mathbf{Z}_1\,\mathbf{Z}_2 = (r_1\,\underline{/\theta_1})(r_2\,\underline{/\theta_2}) = r_1\,r_2\,\underline{/\theta_1+\theta_2}$$

O produto pode ser obtido na forma retangular, tratando-se os dois números complexos como se fossem binômios.

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 &= (x_1+jy_1)\,(x_2+jy_2) = x_1x_2+jx_1y_2+jy_1x_2+j^2y_1y_2\\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+j(x_1y_2+y_1x_2)\end{aligned}$$

Exemplo 2 Se $\mathbf{Z}_1 = 5e^{j\pi/3}$ e $\mathbf{Z}_2 = 2e^{-j\pi/6}$, então $\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 = (5e^{j\pi/3})\,(2e^{-j\pi/6}) = 10e^{j\pi/6}$.

Exemplo 3 Se $\mathbf{Z}_1 = 2\underline{/30^\circ}$ e $\mathbf{Z}_2 = 5\underline{/-45^\circ}$, então $\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 = (2\underline{/30^\circ})\,(5\underline{/-45^\circ}) =$

$= 10\underline{/-15^\circ}$.

Exemplo 4 Se $\mathbf{Z}_1 = 2+j3$ e $\mathbf{Z}_2 = -1-j3$, então $\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 = (2+j3)(-1-j3) =$

$= 7-j9$.

Divisão de Números Complexos

O quociente de dois números complexos na forma exponencial deduz-se diretamente da lei dos expoentes

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{r_1e^{j\theta_1}}{r_2e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\,e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$

Na forma polar ou de Steinmetz, com referência à forma exponencial:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\angle\theta_1}{r_2\angle\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle\theta_1 - \theta_2$$

A divisão na forma retangular se faz multiplicando-se numerador e denominador pelo conjugado do denominador:

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2}\left(\frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2}\right) = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(y_1x_2 - y_2x_1)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Exemplo 5 Dados $\mathbf{Z}_1 = 4e^{j\pi/3}$ e $\mathbf{Z}_2 = 2e^{j\pi/6}$, vem $\dfrac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} = \dfrac{4e^{j\pi/3}}{2e^{j\pi/6}} = 2e^{j\pi/6}$.

Exemplo 6 Dados $\mathbf{z}_1 = 8\angle -30$ e $\mathbf{z}_2 = 2\angle -60$, vem $\dfrac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \dfrac{8\angle -30^\circ}{2\angle -60^\circ} = 4\angle 30^\circ$.

Exemplo 7 Dados $\mathbf{Z}_1 = 4 - j5$ e $\mathbf{Z}_2 = 1 + j2$, vem $\dfrac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} = \dfrac{4 - j5}{1 + j2}\left(\dfrac{1 - j2}{1 - j2}\right) =$

$= \dfrac{-6 - j13}{5}$.

Raízes de Números Complexos

Qualquer número complexo $\mathbf{Z} = re^{j\theta}$ pode ser escrito $\mathbf{Z} = re^{j(\theta + 2\pi n)}$, onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Da mesma maneira, $\mathbf{Z} = r\angle\theta$ pode ser escrito $\mathbf{Z} = r\angle(\theta + n\,360^\circ)$. Então,

$$\mathbf{Z} = re^{j\theta} = re^{j(\theta + 2\pi n)} \quad \text{e} \quad \sqrt[k]{\mathbf{Z}} = \sqrt[k]{r}\; e^{j(\theta + 2\pi)/k}$$

$$\mathbf{Z} = r\angle\theta = r\angle(\theta + n360^\circ) \quad \text{e} \quad \sqrt[k]{\mathbf{Z}} = \sqrt[k]{r}\angle(\theta + n360^\circ)/k$$

Portanto, as k raízes distintas do número complexo podem ser obtidas atribuindo-se a n os valores $0, 1, 2, 3, \ldots k - 1$.

Exemplo 8 Se $\mathbf{Z} = 8\angle 60^\circ$, tem-se $\sqrt[3]{\mathbf{Z}} = \sqrt[3]{8}\ \angle(60^\circ + n360^\circ)/3 = 2\angle(20^\circ + n120^\circ)$. Fazendo-se n igual a 0,1 e 2, obtêm-se as três raízes cúbicas, que são: $2\angle 20^\circ$, $2\angle 140^\circ$ e $2\angle 260^\circ$.

Exemplo 9 Achar as cinco raízes quintas da unidade.

Como $1 = 1\,e^{j2\pi n}$, vem: $\sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{1}\ e^{j2\pi n/5} = 1\,e^{j2\pi n/5}$.

Atribuindo-se a n os valores 0, 1, 2, 3 e 4, obtêm-se as cinco raízes

$$1\angle 0^\circ \text{ ou } 1;\ 1\angle 72^\circ;\ 1\angle 144^\circ;\ 1\angle 216^\circ \text{ e } 1\angle 288^\circ.$$

Logaritmo de um Número Complexo

O logaritmo neperiano de um número complexo pode ser determinado com facilidade, a partir de sua forma exponencial.

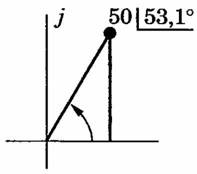
O resultado não é único. Usa-se, mais freqüentemente, o valor principal, quando $n = 0$.

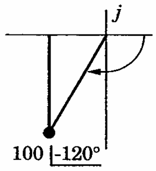
Exemplo 10 Se $\mathbf{Z} = 3e^{j\pi/6}$, tem-se $\ln \mathbf{Z}\, e^{j\pi/6} = \ln 3 + j\pi/6 = 1{,}099 + j0{,}523$.

Forma Polar para Forma Retangular

Exemplo 11 Exprimir $50\angle 53{,}1^\circ$ na forma retangular ou binômica $x + jy$.

1. Faça um esboço exagerando o fato de que o ângulo é superior a 45°.
2. $x = 50 \cos 53{,}1^\circ = 50 \times 0{,}600 = 30$.
3. As partes real e imaginária são ambas positivas.
4. $50\angle 53{,}1^\circ = 30 + j40$.





Exemplo 12 Exprimir $100\angle{-120^\circ}$ em forma retangular $x + jy$.

1. Faça o esboço correspondente. O ângulo de referência é de 60°.
2. $x = 100 \cos 60^\circ = 100 \times 0{,}500 = 50$.
3. As partes real e imaginária são ambas negativas.
4. $100\angle{-120^\circ} = -50 - j\,86{,}6$.

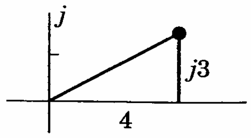
Forma Retangular para Forma Polar

Exemplo 13 Exprimir $4 + j3$ em forma polar, $r\angle\theta$.

1. Faça um esboço exagerando o fato de que a parte real é maior do que a parte imaginária, quer dizer, o ângulo é menor do que 45°.
2. $\theta = \text{arc tg}\,\dfrac{3}{4} = \text{arc tg}\,0{,}75 = 36{,}9^\circ\ (< 45^\circ)$

   sen $36{,}9^\circ = 0{,}600$, donde $r = \dfrac{3}{0{,}600} = 5$ ou $\cos 36{,}9^\circ =$

   $= 0{,}800$ sendo, pois, $r = \dfrac{4}{0{,}800} = 5$.
3. $4 + j3 = 5\angle{36{,}9^\circ}$.



Exemplo 14 Exprimir $-10 + j20$ em forma polar $r\underline{/\theta}$.

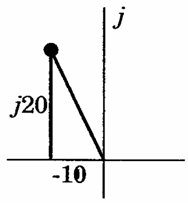
1. Faça o esboço correspondente. O ângulo de referência θ_1 é menor do que 45°.

2. $\theta_1 = \text{arc tg}\,\frac{20}{10} = \text{arc tg}\,2 = 63{,}4°$. Portanto, $= 180° -$

   $- 63{,}4° = 116{,}6°$. sen $63{,}4° = 0{,}895$, donde $r = \frac{20}{0{,}895} = 22{,}4$

   ou então $63{,}4° = 0{,}449$, donde $r = \frac{10}{0{,}449} = 22{,}4$

3. $-10 + j20 = 22{,}4\,\underline{/116{,}6°}$.



Problemas

4.1 Demonstrar a fórmula de Euler.

Admitindo que uma função $f(x)$ pode ser representada por uma série de potências de x, essa série deve ser da forma da série de Maclaurin,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) +$$

$$\dots + \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \dots$$

em que a fur

Os desenvol
Maclaurin sã

$\cos\theta = 1 -$

$e^{j\theta} = 1 + j\theta$

Reagrupand

$e^{j\theta} = \Big(1 -$

$= \cos\theta + j$ se

4.2 Esboçar o pla
ter cada núme
os dois esboç
(a) $2 - j2$ *(b*
(f) $j6$ *(g)* -4

4.3 Exprimir cada
(a) $15e^{j\pi/4}$; *(b)*
Resp.: *(a)* 15
(f) $18\underline{/90°}$

4.4 Efetuar a oper
(a) $z = 3 - j4$.
(b) $z = 10\,\underline{/-4}$
(c) $z = 20\underline{/53{,}1}$
(d) $z = 2{,}5e^{-j\pi/}$
Resp.: *(a)* 25;

4.5 Determinar as
(a) $\sqrt{5} + j^8$; *(b*
Resp.: *(a)* 3,0
2/230°; *(d)* 3e
(f) $2\underline{/0°}$, $2\underline{/18}$

em que a função e todas as suas derivadas existem para $x = 0$.

Os desenvolvimentos de cos θ, sen θ e $e^{j\theta}$ em potências de θ pela série de Maclaurin são

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots \quad \operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots$$

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\,\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + j\,\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - j\,\frac{\theta^7}{7!} + \ldots$$

Reagrupando os termos de $e^{j\theta}$, temos

$$e^{j\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots\right) + j\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots\right)$$

$$= \cos\theta + j\operatorname{sen}\theta$$

4.2 Esboçar o plano complexo e localizar os seguintes números complexos. Converter cada número para a forma polar e repetir o esboço. Uma comparação entre os dois esboços mostrará se a conversão foi feita corretamente.
(a) $2 - j2$ *(b)* $3 + j8$ *(c)* $-5 + j3$ *(d)* $-4 - j4$ *(e)* $5 + j0$
(f) $j6$ *(g)* -4 *(h)* $-j5$

4.3 Exprimir cada um dos números complexos na forma polar
(a) $15e^{j\pi/4}$; *(b)* $5e^{-j2\pi/3}$; *(c)* $-4e^{j5\pi/6}$; *(d)* $-2e^{-j\pi/2}$; *(e)* $10e^{-j\pi 7/6}$; *(f)* $-18e^{-3\pi/2}$
Resp.: *(a)* $15\angle 45^\circ$; *(b)* $5\angle -120^\circ$; *(c)* $4\angle -30^\circ$; *(d)* $2\angle 90^\circ$; *(e)* $10\angle -210^\circ$ ou $10\angle 150^\circ$;
(f) $18\angle 90^\circ$

4.4 Efetuar a operação indicada.
(a) $z = 3 - j4$. Achar zz^*. *(e)* $z = 2 + j8$. Achar $z - z^*$.
(b) $z = 10\angle -40^\circ$. Achar zz^*. *(f)* $z = 10 - j4$. Achar $z + z^*$.
(c) $z = 20\angle 53{,}1^\circ$. Achar $z + z^*$. *(g)* $z = 95\angle 25^\circ$. Achar $z - z^*$.
(d) $z = 2{,}5e^{-j\pi/3}$. Achar zz^*. *(h)* $z = r\angle\theta$. Achar z/z^*.
Resp.: *(a)* 25; *(b)* 100; *(c)* 24; *(d)* 6,25; *(e)* $j16$; *(f)* 20; *(g)* $j80{,}2$; *(h)* $1\angle 2\theta$.

4.5 Determinar as raízes indicadas de cada número complexo.
(a) $\sqrt{5 + j8}$; *(b)* $\sqrt{150\angle -60^\circ}$; *(c)* $\sqrt[3]{6{,}93 - j4}$; *(d)* $\sqrt[3]{27e^{j3\pi/2}}$; *(e)* $\sqrt[4]{1}$; *(f)* $\sqrt{4}$
Resp.: *(a)* $3{,}07\angle 29^\circ$, $3{,}07\angle 209^\circ$; *(b)* $12{,}25\angle -30^\circ$, $12{,}25\angle 150^\circ$; *(c)* $2\angle -10^\circ$, $2\angle 110^\circ$, $2/230^\circ$; *(d)* $3e^{j\pi/2}$, $3e^{j7\pi/6}$, $3e^{j11\pi/6}$; *(e)* $1\angle 0^\circ$, $1\angle 90^\circ$, $1\angle 180^\circ$, $1\angle 270^\circ$;
(f) $2\angle 0^\circ$, $2\angle 180^\circ$, isto é, ± 2.

4.6 Calcular o logaritmo neperiano do complexo.

(a) $20\angle 45^\circ$; *(b)* $6\angle -60^\circ$; *(c)* $0{,}5\angle 120^\circ$; *(d)* $0{,}3\angle 180^\circ$; *(e)* $(0{,}3\angle 180^\circ)\,(20\angle 45^\circ)$

Resp.: (a) $3 + j\pi/4$; *(b)* $1{,}79 - j\pi/3$; *(c)* $- 0{,}693 + j2\pi/3$; *(d)* $-1{,}2 + j\pi$; *(e)* $6\angle 225^\circ$.

4.7 Converter os complexos da forma polar para a retangular.

(a) $12{,}3\angle 30^\circ$
Resp.: $10{,}63 + j6{,}15$.

(b) $53\angle 160^\circ$
Resp.: $- 49{,}8 + j18{,}1$.

(c) $25\angle -45^\circ$
Resp.: $17{,}7 - j17{,}7$.

(d) $86\angle -115^\circ$
Resp.: $-36{,}3 - j\,78$.

(e) $0{,}05\angle -20^\circ$
Resp.: $0{,}047 - \mathrm{j}\,0{,}0171$.

(f) $0{,}003\angle 80^\circ$
Resp.: $0{,}00052 + j0{,}00295$.

(g) $0{,}013\angle 260^\circ$
Resp.: $- 0{,}00226 - j0{,}0128$.

(h) $0{,}156\angle -190^\circ$
Resp.: $- 0{,}1535 + j0{,}0271$.

4.8 Converter os complexos da forma retangular para a polar.

(a) $- 12 + j16$

Resp.: $20\angle 126{,}8^\circ$.

(b) $2 - j4$

Resp.: $4{,}47\angle -63{,}4^\circ$.

(c) $- 59 - j25$

Resp.: $64\angle 203^\circ$.

(d) $700 + j200$

Resp.: $727\angle 16^\circ$.

(e) 0,048 – *j*0

Resp.: 0,160

(f) 0,0171 + *j*

Resp.: 0,05/7

(g) – 69,4 – *j*

Resp.: 80/21

(h) – 2 + *j*2

Resp.: 28,3/1

4.9 Converter os

(a) $10\angle 3^\circ$
Resp.: 10 + *j*0

(b) $25\angle 88^\circ$
Resp.: 0,871 +

(c) $50\ \angle -93^\circ$
Resp.: – 2,62

(d) $45\ \angle 179^\circ$
Resp.: – 45 +

(e) $0{,}02\ \angle 94^\circ$
Resp.: – 0,001

(f) $0{,}70\angle 266^\circ$
Resp.: – 0,048

(g) $0{,}80\angle -5^\circ$
Resp.: 0,8 – *j*0,

(h) $200\angle 181^\circ$
Resp.: – 200 –

4.10 Converter os c

(a) 540 + *j*40

Resp.: 540/4,2

)°) $(20\angle 45^\circ)$
,2 + $j\pi$; *(e)* $6\angle 225^\circ$.

(e) $0{,}048 - j0{,}153$

Resp.: $0{,}160\angle -72{,}55^\circ$.

(f) $0{,}0171 + j0{,}047$

Resp.: $0{,}05\angle 70^\circ$.

(g) $-69{,}4 - j40$

Resp.: $80\angle 210^\circ$.

(h) $-2 + j2$

Resp.: $28{,}3\angle 135^\circ$.

4.9 Converter os complexos da forma polar para a retangular.

(a) $10\angle 3^\circ$
Resp.: $10 + j0{,}523$.

(b) $25\angle 88^\circ$
Resp.: $0{,}871 + j25$.

(c) $50\ \angle -93^\circ$
Resp.: $-2{,}62 - j50$.

(d) $45\ \angle 179^\circ$
Resp.: $-45 + j0{,}785$.

(e) $0{,}02\ \angle 94^\circ$
Resp.: $-0{,}00139 + j0{,}02$.

(f) $0{,}70\angle 266^\circ$
Resp.: $-0{,}0488 - j0{,}70$.

(g) $0{,}80\angle -5^\circ$
Resp.: $0{,}8 - j0{,}0696$.

(h) $200\angle 181^\circ$
Resp.: $-200 - j3{,}49$.

4.10 Converter os complexos da forma retangular para a polar.

(a) $540 + j40$

Resp.: $540\angle 4{,}25^\circ$.

(b) $-10 - j250$
Resp.: $250\angle{-92{,}29^\circ}$.

(c) $8 - j0{,}5$
Resp.: $8\angle{-3{,}58^\circ}$.

(d) $25 + j717$
Resp.: $717\angle{88^\circ}$.

(e) $0{,}8 - j0{,}0696$
Resp.: $0{,}8\angle{-5^\circ}$.

(f) $10 + j0{,}523$
Resp.: $10\angle{3^\circ}$.

(g) $-200 - j3{,}49$
Resp.: $200\angle{181^\circ}$.

(h) $0{,}02 - j0{,}001$
Resp.: $0{,}02\angle{-2{,}87^\circ}$.

4.11 Determinar a soma ou diferença indicada.

(a) $(10\angle{53{,}1^\circ}) + (4 + j2)$
Resp.: $10 + j10$.

(b) $(10\angle{90^\circ}) + (8 - j2)$
Resp.: $8 + j8$.

(c) $(-4 - j6) + (2 + j4)$
Resp.: $-2 - j2$.

(d) $(2{,}83\angle{45^\circ}) - (2 - j8)$
Resp.: $j10$.

(e) $(-5 + j5) - (7{,}07/135^\circ)$
Resp.: 0.

(f) $(2 - j10) - (1 - j10)$
Resp.: 1.

(g) $(10 + j1) + 6 - (13{,}45/-42^\circ)$
Resp.: $6 + j10$.

(h) – (5/53,1
Resp.: – 4 +

4.12 Calcular o pr
convertê-los

(a) (3 – j2) (1
Resp.: – 5 –

(b) (2 + j0) (3
Resp.: 6 – j6

(c) (– 1 – j1)
Resp.: j3 – j

(d) (j2) (4 –3
Resp.: 6 + j8

(e) $(j2)\,(j5)$
Resp.: – 10.

(f) $(-j1)\,(j6)$
Resp.: 6.

(g) (2 + j2) (2
Resp.: 8.

(h) (x + jy) (x
Resp.: x² + y

4.13 Nos problem
denominador
forma polar e

(a) (5 + j5)/(1
Resp.: $j5$.

(b) (4 – j8)/(2
Resp.: – 1 – j

(c) (5 – j10)/(
Resp.: – 1 – j

(d) (8 + j12)/(
Resp.: $6 - j4$.

(e) (3 + j3)/(2
Resp.: 1,5.

(h) $-(5\angle 53{,}1^\circ) - (1 - j6)$
Resp.: $-4 + j2$.

4.12 Calcular o produto dos seguintes números complexos. Como exercício adicional, convertê-los para a forma polar e efetuar novamente o produto, verificando-o.

(a) $(3 - j2)\,(1 - j4)$
Resp.: $-5 - j14$.

(b) $(2 + j0)\,(3 - j3)$
Resp.: $6 - j6$.

(c) $(-1 - j1)\,(1 + j1)$
Resp.: $j3 - j2$.

(d) $(j2)\,(4 - 3)$
Resp.: $6 + j8$.

(e) $(j2)\,(j5)$
Resp.: -10.

(f) $(-j1)\,(j6)$
Resp.: 6.

(g) $(2 + j2)\,(2 - j2)$
Resp.: 8.

(h) $(x + jy)\,(x - jy)$
Resp.: $x^2 + y^2$.

4.13 Nos problemas que se seguem, achar o quociente, multiplicando numerador e denominador pelo conjugado do denominador. Converter os números para a forma polar e determinar o quociente, a partir dessa forma.

(a) $(5 + j5)/(1 - j1)$
Resp.: $j5$.

(b) $(4 - j8)/(2 + j2)$
Resp.: $-1 - j3$.

(c) $(5 - j10)/(3 + j4)$
Resp.: $-1 - j2$.

(d) $(8 + j12)/(j2)$
Resp.: $6 - j4$.

(e) $(3 + j3)/(2 + j2)$
Resp.: 1,5.

(f) $(-5 - j10)/(2 + j4)$
Resp.: $-2{,}5$.

(g) $10/(6 + j8)$
Resp.: $0{,}6 - j0{,}8$.

(h) $j5/(2 - j2)$
Resp.: $-1{,}25 + j1{,}25$.

4.14 Achar cada produto indicado.

(a) $(2{,}5 + j10)\,(-0{,}85 + j4{,}3)$
Resp.: $45\angle 177{,}1^\circ$.

(b) $(3{,}8 - j1{,}5)\,(6 - j2{,}3)$
Resp.: $26{,}2\angle -42{,}6^\circ$.

(c) $(72 - j72)\,(1{,}3 + j4{,}8)$
Resp.: $506\angle 29{,}8^\circ$.

(d) $(3/20^\circ)\,(2/-45^\circ)$
Resp.: $6\angle -25^\circ$.

(e) $(2 + j6)\,(18/21^\circ)$
Resp.: $113{,}5\angle 92{,}5^\circ$.

(f) $1\angle 80^\circ\,(25\angle -45^\circ)(0{,}2\angle -15^\circ)$
Resp.: $5\angle 20^\circ$.

(g) $(12 - j16)\,(0{,}23 + j0{,}75)$
Resp.: $15{,}66\angle 19{,}7^\circ$.

(h) $(j1{,}63)\,(2{,}6 + j1)$
Resp.: $4{,}53\angle 111{,}1^\circ$.

4.15 Exprimir cada relação como um único número complexo.

(a) $(23{,}5 + j8{,}55)/(4{,}53 - j2{,}11)$
Resp.: $5\angle 45^\circ$.

(b) $(21{,}2 - j21{,}2)/(3{,}54 - j3{,}54)$
Resp.: $6\angle 0^\circ$.

(c) (7,07 + j7
Resp.: 2/12

(d) (– j45)/(6
Resp.: 5/–4

(e) (6,88/12
Resp.: 3,08/

(f) (5 + j5)/5/
Resp.: 1,414

(g) $1/(6 + j8)$
Resp.: 0,1/–

(h) (– 10 + j2
Resp.: 10/14

4.16 Calcular, em

(a) z_1 = 10 +
Resp.: 7,18/

(b) z_1 = 5/45°
Resp.: 5,5/1

(c) z_1 = 6 – j
Resp.: 5,52/

(d) z_1 = 20, z
Resp.: 17,9/

(c) $(7{,}07 + j7{,}07)/(4{,}92 + j0{,}868)$

Resp.: $2\angle 125^\circ$.

(d) $(-j45)/(6{,}36 - j6{,}36)$

Resp.: $5\angle -45^\circ$.

(e) $(6{,}88\angle 12^\circ)/(2 + j1)$

Resp.: $3{,}08\angle -14{,}6^\circ$.

(f) $(5 + j5)/5/80^\circ$

Resp.: $1{,}414\angle -35^\circ$.

(g) $1/(6 + j8)$

Resp.: $0{,}1\angle -53{,}1^\circ$.

(h) $(-10 + j20)/(2 - j1)$

Resp.: $10\angle 143{,}2^\circ$.

4.16 Calcular, em cada caso, $z_1 z_2/(z_1 + z_2)$.

(a) $z_1 = 10 + j5$, $z_2 = 20\angle 30^\circ$

Resp.: $7{,}18\angle 27{,}8^\circ$.

(b) $z_1 = 5/45^\circ$, $z_2 = 10\angle -70^\circ$

Resp.: $5{,}5\angle 15{,}2^\circ$.

(c) $z_1 = 6 - j2$, $z_2 = 1 + j8$

Resp.: $5{,}52\angle 23{,}81^\circ$.

(d) $z_1 = 20$, $z_2 = j40$

Resp.: $17{,}9\angle 26{,}6^\circ$.

MAKRON
Books

IMPEDÂNCIA COMPLEXA E NOTAÇÃO DE FASORES

Introdução

A análise de circuito em estado estacionário senoidal é importante porque as tensões fornecidas pelos geradores de corrente alternada são, muito aproximadamente, funções senoidais puras e porque qualquer onda periódica pode ser substituída por um termo constante e uma série de termos senoidais e co-senoidais. Chama-se a isso *Método de Fourier de Análise de Formas de Onda*. Este método será estudado no Capítulo 15.

No Capítulo 3, foram analisados diversos circuitos simples, em que a tensão e a corrente eram funções senoidais. Entretanto, o trabalho se tornou complicado, mesmo quando os circuitos eram relativamente simples. Empregando fasores para representar tensões e correntes, e uma *impedância complexa* para responder pelos elementos de circuito, ficará grandemente simplificada a análise em estado estacionário. É isto que veremos neste capítulo.

Impedância Complexa

Consideremos um circuito *RL* em série com uma tensão aplicada $v(t) = V_m e^{\omega j t}$, como mostra a Fig. 5-1. Pela fórmula de Euler, essa função inclui um termo

co-senoidal e um
as tensões, no cir

Esta equ
particular da forı

onde $K = \dfrac{V_m}{R + j\ldots}$
rente mostra que
uma parte imagiı

Conside
tensão $V_m e^{j\omega t}$ ap

Capítulo 5

XA E
ES

.dal é importante
ɜrnada são, muito
.er onda periódica
ermos senoidais e
:se de Formas de

ɪimples, em que a
:abalho se tornou
simples. Empre-
ɪedância complexa
ɪte simplificada a
'tulo.

aplicada $v(t) = V_m$
ɔ inclui um termo

co-senoidal e um termo senoidal: $V_m \cos \omega t + j\, V_m \operatorname{sen} \omega t$. A lei de Kirchhoff para as tensões, no circuito fechado é:

$$Ri(t) + L\,\frac{di(t)}{dt} = V_m\, e^{j\omega t}$$

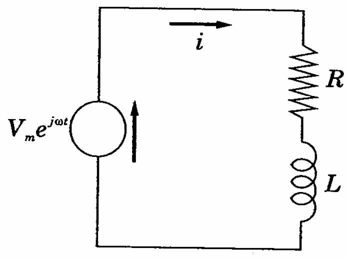


Figura 5-1

Esta equação diferencial linear de primeira ordem tem uma solução particular da forma $i(t) = Ke^{j\omega t}$. Substituindo, temos

$$\mathbf{R}\mathbf{K}e^{j\omega t} + j\omega\mathbf{L}\mathbf{K}e^{j\omega t} = \mathbf{V}_m e^{j\omega t}$$

onde $K = \dfrac{V_m}{R + j\omega L}$ e $i(t) = \dfrac{V_m}{R + j\omega L}\, e^{j\omega t}$. A relação entre a tensão e a corrente mostra que a impedância é um número complexo com uma parte real R e uma parte imaginária ωL:

$$\mathbf{Z} = \frac{v(t)}{i(t)} = \frac{V_m\, e^{j\omega t}}{\dfrac{V_m}{R + j\omega L}\, e^{j\omega t}} = R + j\omega L$$

Consideremos, agora, um circuito RC em série, com a mesma tensão $V_m\, e^{j\omega t}$ aplicada, como mostra a Fig. 5-2. Então,

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\, dt = V_m\, e^{j\omega t}$$

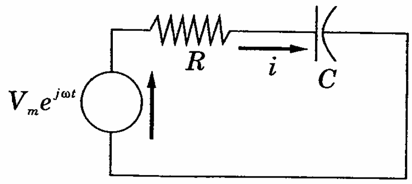


Figura 5-2

Fazendo $i(t) = Ke^{j\omega t}$ e substituindo em (1), obtemos

$$RK\, e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} K\, e^{j\omega t} = V_m\, e^{j\omega t}$$

donde $K = \dfrac{V_m}{R + 1/j\omega C} = \dfrac{V_m}{R - j(1/\omega C)}$ e $i(t) = \dfrac{V_m}{R - j(1/\omega C)} e^{j\omega t}$.

$$\text{Então, } \mathbf{Z} = \frac{V_m\, e^{j\omega t}}{\dfrac{V_m}{R - j(1/\omega C)}\, e^{j\omega t}} = R - j(1/\omega C)$$

Novamente, a impedância é um número complexo com uma parte real R e uma parte imaginária – $(1/\omega C)$.

Isso sugere que os elementos de circuito podem ser expressos em termos de sua impedância complexa **Z**, a qual pode ser colocada no diagrama elétrico, como mostra a Fig. 5-3.

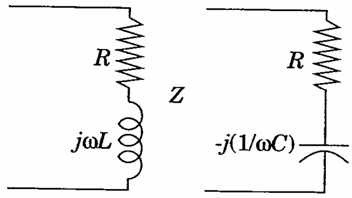


Figura 5-3

Como a impedância é um número complexo, pode ser situada no plano complexo. Entretanto, como a resistência nunca pode ser negativa, somente são utilizados o primeiro e o quarto quadrantes. Sua representação gráfica chama-se *diagrama da impedância*. Ver Fig. 5-4.

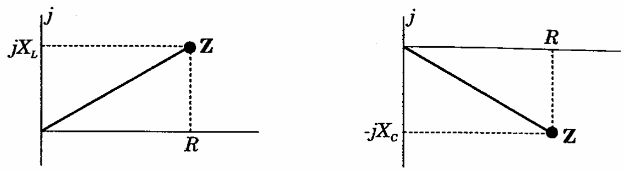


Figura 5-4 Diagrama da impedância.

A resistência R está situada no semi-eixo real positivo. Uma reatância indutiva X_L fica localizada no semi-eixo j positivo e uma reatância capacitiva X_C se localiza no semi-eixo j negativo. Em geral, a impedância complexa **Z** localiza-se ou no primeiro ou no quarto quadrante, dependendo dos elementos que a constituem. Na forma polar, **Z** terá um ângulo compreendido entre + 90° e – 90°.

Exemplo 1 Um circuito RL série com R = 5 ohms e L = 2 mH tem uma tensão aplicada v = 150 sen 5000t. Achar a impedância complexa **Z** (ver Fig. 5-5).

A reatância indutiva $X_L = \omega L = 5000\,(2 \times 10^{-3}) = 10$ ohms. Então, $\mathbf{Z} = 5 + j\,10$.

Na forma polar, $\mathbf{Z} = 11{,}16\,\underline{/63{,}4^\circ}$.

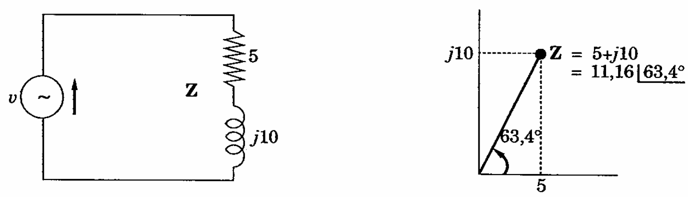


Figura 5-5

Exemplo 2 Em um circuito RC em série, onde R = 20 ohms e C = 5μF, a tensão aplicada é v = 150 cos 10000t. Achar a impedância complexa **Z** (ver Fig. 5-6).

A reatância capacitiva $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{10000\,(5 \times 10^{-6})} = 20$ ohms; então, $\mathbf{Z} = 20 - j20$. Na forma polar, $\mathbf{Z} = 28{,}3\,\underline{/-45^\circ}$.

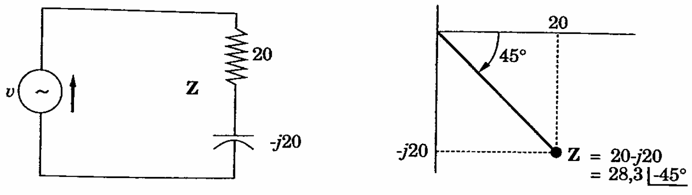


Figura 5-6

Em todos os circuitos, com exceção do resistivo puro, a impedância é função de ω, pois X_L e X_C são funções de ω. Conseqüentemente, uma impedância complexa só é válida para a freqüência em que foi calculada.

Notação de Fasores

Consideremos a função $f(t) = re^{j\omega t}$. Trata-se de um número complexo que inclui a variável t. Seu valor absoluto, entretanto, está fixado em r. Se traçarmos sua representação gráfica, por exemplo, nos instantes $t = 0$, $\pi/4\omega$ e $\pi/2\omega$, como mostra a Fig. 5-7, evidencia-se a natureza da função.

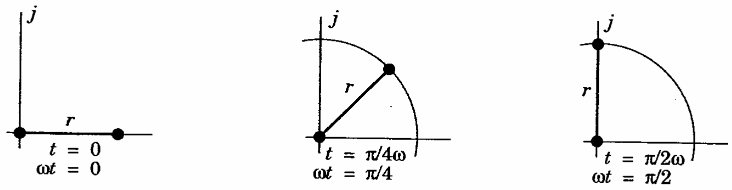


Figura 5-7 A função $r^{j\omega t}$.

Se ω for constante, o segmento de reta girará no sentido anti-horário com velocidade angular constante. As projeções desse segmento rotativo sobre os eixos real e imaginário representam as partes co-senoidal e senoidal de $e^{j\omega t}$, dadas pela fórmula de Euler.

Vimos, no Capítulo 3, que num circuito série RL submetido à tensão $v = V_m$ sen ωt circula uma corrente atrasada θ graus em relação à tensão, onde

$\theta = \text{arc tg } (\omega L/R)$, $i = T_m \text{ sen } (\omega t - \theta)$. O ângulo de fase é função das constantes do circuito e da freqüência da tensão aplicada, mas não pode exceder 90° ou $\pi/4$ radianos. Na Fig. 5-9(*b*) v e i estão representadas em função de ωt. Na Fig. 5-9(*a*) estão representados, no plano complexo, dois segmentos de reta, orientados, que giram no sentido anti-horário, com velocidade angular constante ω. O ângulo de fase entre eles permanece constante, já que ambos giram com a mesma velocidade. Verifica-se, também, pelo sentido da rotação, que a corrente está atrasada de θ graus, em relação à tensão.

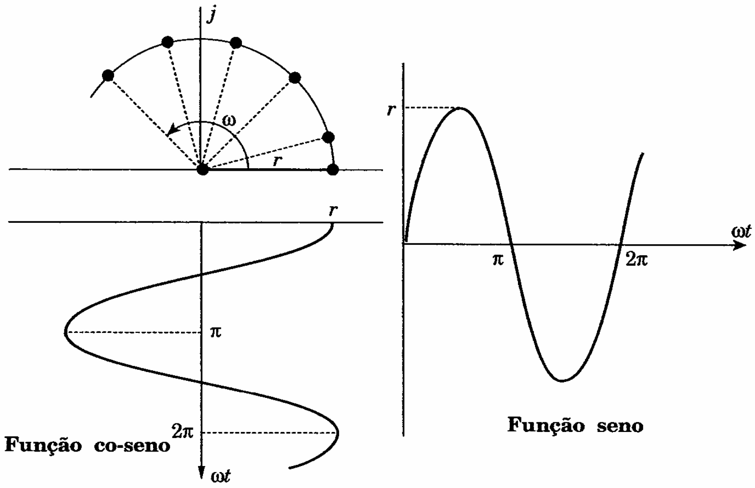


Figura 5-8

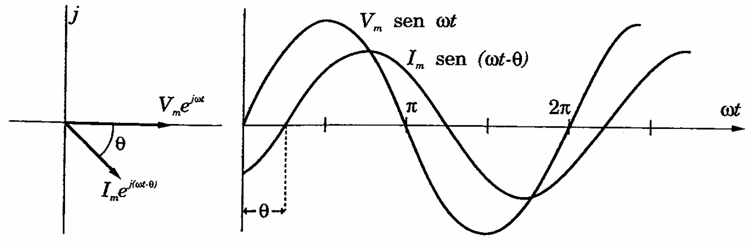
As projeções sobre o eixo j são, exatamente, as funções representadas, conforme a fórmula de Euler, pois a parte imaginária da função exponencial é a função seno.

Seja uma função tensão de forma geral $v = V_m\ e^{j(\omega + \alpha)}$, onde α é um ângulo de desvio inicial que possibilita a tensão estar a um ângulo α, quando $t = 0$. Admitamos, além disso, essa tensão aplicada a um circuito de impedância $\mathbf{Z} = ze^{j\theta}$ $(-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2)$.

A corrente será dada por

$$(V_m\ e^{j(\omega t\ +\ \alpha)})/(z\ e^{j\theta}) = (V_m/z)\ e^{j(\omega t\ +\ \alpha\ -\ \theta)} = I_m\ e^{j(\omega t\ +\ \alpha\ -\ \theta)},$$

isto é, $I_m\, e^{j(\omega t + \alpha - \theta)} = \dfrac{V_m\, e^{j(\omega t + \alpha)}}{z\, e^{j\theta}}$



(a) *(b)*

Figura 5-9

Esta igualdade está no *domínio do tempo*, pois o tempo aparece explicitamente nas expressões da tensão e da corrente. Faremos, agora, duas modificações, para estabelecer os *fasores*. Primeira: multiplicamos a igualdade por $e^{-j\omega t}$ para eliminar a função tempo. Segunda: multiplicamos ambos os membros por $1/\sqrt{2}$ para ficarmos com os valores eficazes da corrente e da tensão:

$$\frac{e^{-j\omega t}}{\sqrt{2}}\left(I_m\, e^{j(\omega t + \alpha - \theta)}\right) = \frac{e^{-j\omega t}}{\sqrt{2}}\left(\frac{V_m\, e^{j(\omega t + \alpha)}}{z\, e^{j\theta}}\right)$$

$$\frac{I_m}{\sqrt{2}}\, e^{j(\alpha - \theta)} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{j\alpha}}{z\, e^{j\theta}} \qquad (2)$$

$$I \angle \alpha - \theta = \frac{V \angle \alpha}{z \angle \theta} \qquad (3)$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} \qquad (4)$$

A equação (2) é uma transformada e aparece, agora, no *domínio da freqüência*. O tempo não aparece nela ou nas seguintes. Deve-se conservar na lembrança, entretanto, a variação da equação (1) com o tempo. I e V em (3), sem índices, indicam os valores eficazes da corrente e da tensão. A equação (4), portanto, relaciona **I**, **V** e **Z** como quantidades complexas e, como tais, devem ser tratadas, levando-se em conta seus valores absolutos e seus argumentos.

Temos, assim, uma *equivalente da lei de Ohm para fasores*, também chamada *forma complexa* da lei de Ohm.

Na Fig. 5-10(*a*) as funções tensão e corrente são mostradas no plano complexo, expressas na forma exponencial. Trata-se de uma representação no *domínio do tempo*, pois *t* aparece explicitamente. Na Fig. 5-10(*b*) aparecem o *fasor tensão* e o *fasor corrente*. Os segmentos representativos, nesse caso, são $1/\sqrt{2}$ vezes os da Fig. 5-10(*a*) e o tempo não aparece. Mas o ângulo θ e o valor absoluto da corrente são funções da freqüência, por isso diz-se que a Fig. 5-10(*b*) está no *domínio da freqüência*.

(*a*) **Domínio do tempo** (*b*) **Domínio da freqüência**

Figura 5-10

Problemas Resolvidos

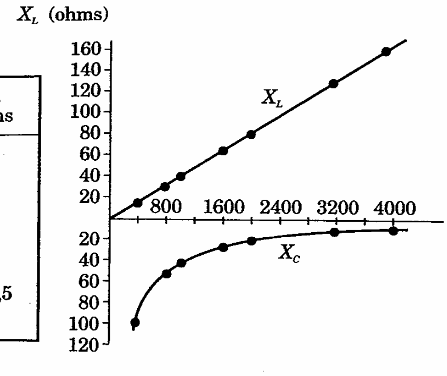
5.1 Mostrar a variação de X_L e X_C com a freqüência, representando graficamente cada uma delas em função de ω, numa faixa de 400 a 4000 radianos por segundo. Supor $L = 40$ mH e $C = 25\ \mu$F.

Nas expressões de $X_L = \omega L$ e $X_C = 1/\omega C$, dando-se a ω valores convenientes na faixa considerada, obtemos os valores de X_L e X_C tabulados na Fig. 5-11(*a*). A Fig. 5-11(*b*) mostra as representações gráficas de X_L e X_C.

Qualquer circuito que contenha L ou C terá uma impedância que é uma função da freqüência. Conseqüentemente, qualquer diagrama de impedância, traçado para uma determinada freqüência, só será válido nessa freqüência específica.

ω rad/sec	X_L ohms	X_C ohms
400	16	100
800	32	50
1000	40	40
1600	64	25
2000	80	20
3200	128	12,5
4000	160	10

(a)



(b)

Figura 5-11

5.2 Dados $v = 150$ sen $(5000t + 45^\circ)$ e $i = 3$ sen $(5000t - 15^\circ)$, construir os diagramas de fasores e da impedância e determinar as constantes do circuito.

Os fasores têm valores absolutos iguais a $1/\sqrt{2}$ vezes os valores máximos. Portanto,

$$\mathbf{V} = \frac{150}{\sqrt{2}}\,\underline{/45^\circ} = 106\,\underline{/45^\circ},\ \mathbf{I} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,\underline{/-15^\circ} = 2{,}12\,\underline{/-15^\circ}$$

e

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{106\,\underline{/45^\circ}}{2{,}12\,\underline{/-15^\circ}} = 50\,\underline{/60^\circ} = 25 + j43{,}3$$

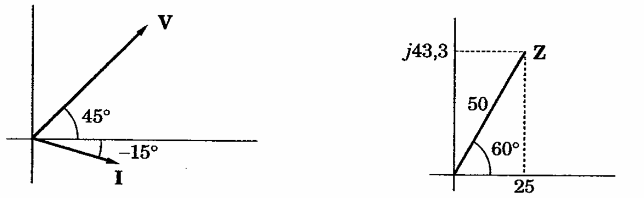


Diagrama de fasores **Diagrama de impedância**

Figura 5-12

A corrente está atrasada 60° em relação à tensão, o que indica um circuito RL em série. Então: ωL = 43,3 ohms e L = 43,3/5000 = 86,6 mH. As constantes do circuito são R = 25 ohms e L = 86,6 mH.

5.3 Dados v = 311 sen (2500t + 170°) e i = 15,5 sen (2500t – 145°), construir os diagramas de fasores e da impedância e determinar as constantes do circuito.

$$\mathbf{V} = \frac{311}{\sqrt{2}} \underline{/170^\circ} = 220 \underline{/170^\circ}, \quad \mathbf{I} = \frac{15{,}5}{\sqrt{2}} \underline{/-145^\circ} = 11 \underline{/-145^\circ}$$

e

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{220 \underline{/170^\circ}}{11 \underline{/-145^\circ}} = 20 \underline{/-45^\circ} = 14{,}14 - j14{,}14$$

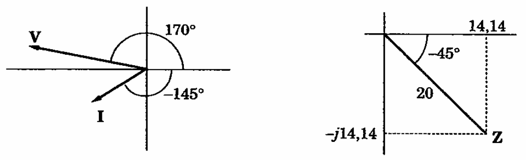


Diagrama de fasores **Diagrama de impedância**

Figura 5-13

A corrente está adiantada 45° em relação à tensão, o que indica um circuito RC. Então, $X_C = 1/\omega C$ = 14,14 ohms e C = 1/(14,14 × 2500) = 28,3μF. As constantes do circuito são R = 14,14 ohms e C = 28,3 μF.

5-4 Um circuito em série de R = 20 ohms e L = 0,02 H tem uma impedância de 40 $\underline{/\phi}$ ohms. Determinar o ângulo ϕ e a freqüência f em hertz.

Impedância do circuito = $20 + jX_L = 40 \underline{/\phi}$

Da Fig. 5-14, ϕ = arc cos 20/40 = 60°; então,

X_L = 40 sen 60° = 34,6 ohms

$$\text{Logo, } X_L = \omega L = 2\pi f L \ \text{ e } f = \frac{X_L}{2\pi L} = \frac{34{,}6}{2\pi\,(0{,}02)} = 275 \text{ Hz}$$

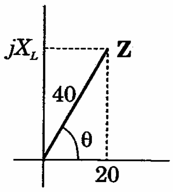


Figura 5-14

5.5 Em um circuito em série de R = 10 ohms e C = 50 μF, a tensão aplicada e a freqüência são tais que a corrente está adiantada de 30°. Qual a mudança de freqüência necessária para que a corrente fique avançada de 70°?

Da Fig. 5-15, arc tg (– 30°) = $-X_{C1}/10$ = – 0,576 ou X_{C1} = 5,76 ohms. Então, $X_{C1} = 1/2\pi f_1 C$ e

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\, CX_{C1}} = \frac{1}{2\pi\,(50\times 10^{-6}\ \mathrm{F})\,(5{,}76\ \mathrm{ohms})} = 553\ \mathrm{Hz}$$

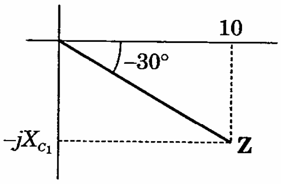


Figura 5-15

Na nova freqüência f_2 a corrente deve estar adiantada 70°. Então, tg (– 70°) = $-X_{C2}/10$ = – 2,74 ou X_{C2} = 27,4 ohms e $f_2/f_1 = X_{C1}/X_{C2}$; $f_2/553$ = 5,76/27,4 e f_2 = 116 Hz.

Como X_C varia inversamente com ω, o circuito RC tem maior ângulo de fase quanto mais baixa a freqüência.

5.6 Sendo f = 500 Hz, determinar o elemento puro que, em série com R + 25 ohms, produza um atraso de 20° da corrente, em relação à tensão. Repetir para um avanço de 20°.

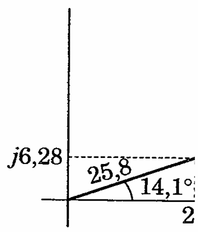
Um ângulo (
em série co
ângulo de av

Para atras(
$L = X_L/2\pi f$ =

Para avanço

5.7 Pretende-se (
freqüências d
freqüências.

Na freqüênc
mesma man
X_L = 62,8 oh



5.8 Uma tensão v
= 10 ohms e C

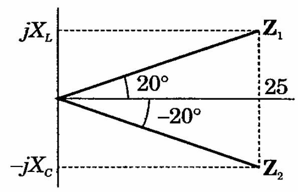


Figura 5-16

Um ângulo de atraso de 20° exige que uma reatância indutiva X_L esteja em série com R. A reatância capacitiva X_C que proporciona o mesmo ângulo de avanço possui o mesmo valor ôhmico que X_L.

Para atraso da corrente: tg 20° $= X_L/25$ ou $X_L = 9{,}1$ ohms. Então: $L = X_L/2\pi f = 9{,}1/2\pi \cdot 500 = 2{,}9$ mH.

Para avanço da corrente: $C = 1\ 2\pi f X_C = 1/2\pi \cdot 500 \cdot\ 9{,}1 = 35\ \mu$F.

5.7 Pretende-se utilizar um circuito em série de R = 25 ohms e L = 0,01H nas freqüências de 100,500 e 1000Hz. Achar a impedância **Z** em cada uma dessas freqüências.

Na freqüência f = 100 Hz $X_L = 2\pi fL = 2\pi \cdot 100 \cdot 0{,}01 = 6{,}28$ ohms. Da mesma maneira, para f = 500 Hz, X_L = 31,4 ohms e para f = 1000 Hz, X_L = 62,8 ohms. Os valores correspondentes de **Z** estão na Fig. 5-17.

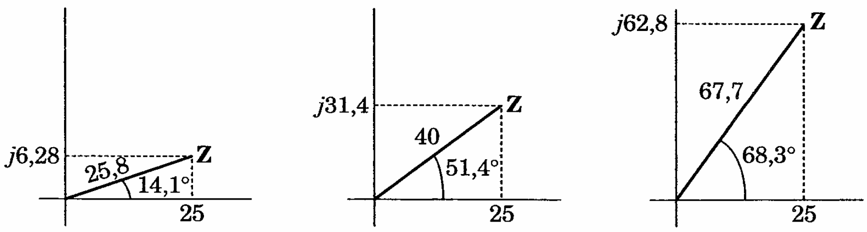


Figura 5-17

5.8 Uma tensão $v = 500 \cos(2500t - 20°)$ está aplicada a um circuito em série de R = 10 ohms e C = 40 µF. Achar a corrente i.

$X_C = 1/\omega C = 1/2\,500\,(40 \times 10^{-6}) = 10$ ohms

e a impedância complexa

$$\mathbf{Z} = 10 - j10 = 10\sqrt{2}\,\underline{/-45^\circ}$$

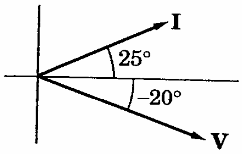


Figura 5-18

Convertendo-se a tensão para a notação de fasores, $\mathbf{V} = (500/\sqrt{2}\,\underline{/-20^\circ}$. Então,

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{(500/\sqrt{2})\,\underline{/-20^\circ}}{(10\sqrt{2})\,\underline{/-45^\circ}} = 25\,\underline{/25^\circ}$$

$$\mathbf{I} = 25\sqrt{2}\cos(2500t + 25^\circ)$$

O diagrama de fasores da Fig. 5-18 mostra que a corrente **I** está avançada de 45° em relação à tensão e esse é o ângulo da impedância.

5.9 Um circuito em série de $R = 8$ ohms e $L = 0{,}02$H tem uma tensão aplicada de $v = 283$ sen $(300t + 90^\circ)$. Achar a corrente i.

$X_L = \omega L = 300(0{,}02) = 6$ ohms, $\mathbf{Z} = 8 + j6 = 10\underline{/36{,}9^\circ}$ e

$\mathbf{V} = (283/\sqrt{2})\underline{/90^\circ} = 200\underline{/90^\circ}$. Então,

$$\mathbf{I} = \frac{200\,\underline{/90^\circ}}{10\,\underline{/36{,}9}} = 20\,\underline{/53{,}1^\circ} \quad \text{e} \quad i = 20\sqrt{2}\,\text{sen}\,(300t + 53{,}1^\circ)$$

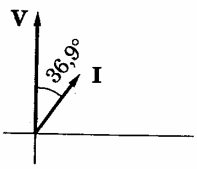


Figura 5-19

5.10 Num circuito
em relação à
plexa, **Z**, do c

Da Fig. 5-2(
28,4/2π(0,03

A impedânci

5.11 Um capacitor
A corrente res
valor de R.

$X_C = 1/2\pi fC$ =

Como o ângu

5.12 A tensão v_1 =
ohms e L = 0,0
30°) é aplicada
diagramas de f

(*a*) Com a ten

5.10 Num circuito em série de $R = 5$ ohms e $L = 0,03$H a corrente está atrasada de 80° em relação à tensão. Determinar a freqüência da fonte e a impedância complexa, **Z**, do circuito.

Da Fig. 5-20, $X_L = 5 \text{ tg } 80° = 28,4$ ohms. Como $X_L = 2\pi fL$, $f = X_L/2\pi L = 28,4/2\pi(0,03) = 151$Hz.

A impedância complexa é $\mathbf{Z} = 5 + j28,4 = 28,8\underline{/80°}$.

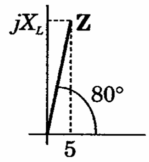


Figura 5-20

5.11 Um capacitor de 25 μF está em série com um resistor R na freqüência de 60 Hz. A corrente resultante está avançada de 45° em relação à tensão. Determinar o valor de R.

$X_C = 1/2\pi fC = 1/2\pi \cdot 60(25 \times 10^{-6}) = 106$ ohms.

Como o ângulo de fase é 45°, $R = X_C = 106$ ohms.

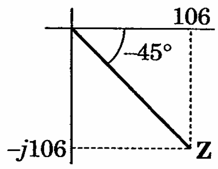


Figura 5-21

5.12 A tensão $v_1 = 70,7$ sen $(200t + 30°)$ é aplicada a um circuito em série de $R = 8$ ohms e $L = 0,06$ H. Posteriormente, uma segunda tensão, $v_2 = 70,7$ sen $(300t + 30°)$ é aplicada no lugar da primeira. Achar i para cada fonte e construir os dois diagramas de fasores.

(*a*) Com a tensão v_1,

$X_L = \omega L = 200(0{,}06) = 12$ e $\mathbf{Z}_1 = R + jX_L = 8 + j12 = 14{,}4\underline{/56{,}3°}$

Como $\mathbf{V}_1 = (70{,}7/\sqrt{2})\underline{/30°} = 50\underline{/30°}$,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_1} = \frac{50\,\underline{/30°}}{14{,}4\,\underline{/56{,}3°}} = 3{,}47\,\underline{/-26{,}3°} \quad \text{e} \quad i_1 = 3{,}47\sqrt{2}\,(\text{sen } 200t - 26{,}3°)$$

(*b*) Com a tensão v_2,

$X_L = \omega L = 300(0{,}06) = 18$ e $\mathbf{Z}_2 = 8 + j18 = 19{,}7\underline{/66°}$

Como $\mathbf{V}_2 = 50\underline{/30°}$,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_2} = \frac{50\,\underline{/30°}}{19{,}7\,\underline{/66°}} = 2{,}54\,\underline{/-36°} \quad \text{e} \quad i_2 = 2{,}54\sqrt{2}\text{ sen }(300t - 36°)$$

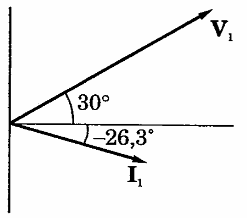


Diagrama de fasor, ω = 200

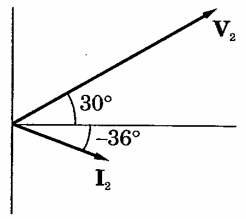


Diagrama de fasor, ω = 300

Figura 5-22

5.13 Determinar a soma das correntes $i_1 = 14{,}14$ sen $(\omega t + 13{,}2°)$ e $i_2 = 8{,}95$ sen $(\omega t + 121{,}6°)$, empregando fasores. Ver Fig. 5-23.

$$\mathbf{I}_1 = (14{,}14/\sqrt{2})\,\underline{/13{,}2°} = 10\,\underline{/13{,}2°} = 9{,}73 + j2{,}28$$

$$\mathbf{I}_2 = (8{,}95/\sqrt{2})\,\underline{/121{,}6°} = 6{,}33\,\underline{/121{,}6°} = 3{,}32 + j5{,}39$$

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 6{,}41 + j\,7{,}67 = 10\,\underline{/50°}$$

Então, $i_1 + i_2 = 10\sqrt{2}$ sen $(\omega t + 50°)$.

5.14 Calcular a dif
120°). Ver Fig.

$\mathbf{I}_1$ = (50 /

$\mathbf{I}_2$ = (35,4

Então, $i_1 - i_2$

5.15 Calcular a som
e $i_3 = 32{,}6$ ser

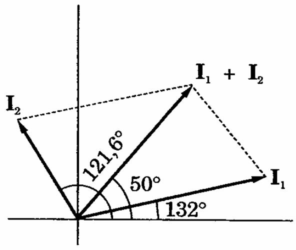


Figura 5-23

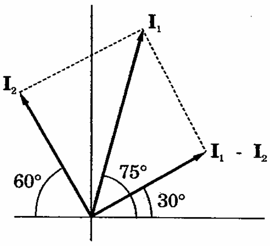


Figura 5-24

5.14 Calcular a diferença $i_1 - i_2$ sendo $i_1 = 50 \cos(\omega t + 75°)$ e $i_2 = 35{,}4 \cos(\omega t + 120°)$. Ver Fig. 5-24.

$$\mathbf{I}_1 = (50/\sqrt{2})\,\underline{/75°} = 35{,}4\,\underline{/75°} = 9{,}16 + j34{,}2$$

$$\mathbf{I}_2 = (35{,}4/\sqrt{2})\,\underline{/120°} = 25\,\underline{/120°} = -12{,}5 + j21{,}7$$

$$\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 = 21{,}7 + j12{,}5 = 25\,\underline{/30°}$$

Então, $i_1 - i_2 = 25\sqrt{2}\cos(\omega t + 30°)$

5.15 Calcular a soma das três correntes $i_1 = 32{,}6 \operatorname{sen}(\omega t - 145°)$, $i_2 = 32{,}6 \operatorname{sen}(\omega t - 25°)$ e $i_3 = 32{,}6 \operatorname{sen}(\omega t + 95°)$.

$$\mathbf{I}_1 = (32{,}6/\sqrt{2})\,\angle{-145^\circ} = 23\angle{-145^\circ} = -18{,}8 - j13{,}19$$

$$\mathbf{I}_2 = (32{,}6/\sqrt{2})\,\angle{-25^\circ} = 23\angle{-25^\circ} = 20{,}8 - j9{,}72$$

$$\mathbf{I}_3 = (32{,}6/\sqrt{2})\,\angle{95^\circ} = 23\angle{95^\circ} = -2 + j22{,}91$$

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = 0 \text{ (zero)}$$

Dentro dos limites de precisão da calculadora, a soma é nula. O diagrama de fasores da Fig. 5-25 mostra que as três correntes estão defasadas de 120° entre si, o que, por serem as amplitudes iguais, anula obviamente a soma.

5.16 Determinar a soma das duas tensões $v_1 = 126{,}5 \text{ sen } (\omega t + 63{,}4^\circ)$ e $v_2 = 44{,}7 \cos (\omega t - 161{,}5^\circ)$. Exprimir a soma como função senoidal e, posteriormente, como função co-senoidal.

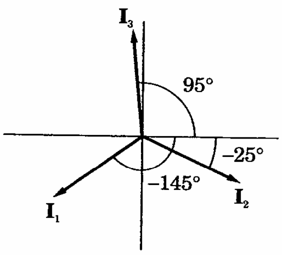


Figura 5-25

Convertendo v_2 em função senoidal,

$v_2 = 44{,}7 \text{ sen } (\omega t - 161{,}5^\circ + 90^\circ) = 44{,}7 \text{ sen } (\omega t - 71{,}5^\circ)$.

Então,

$$\mathbf{V}_1 = (126{,}5/\sqrt{2})\,\angle{63{,}4^\circ} = 89{,}5\,\angle{63{,}4^\circ} = 40 + j80$$

$$\mathbf{V}_2 = (44{,}7/\sqrt{2})\,\angle{-71{,}5^\circ} = 31{,}6\,\angle{-71{,}5^\circ} = 10 - j30$$

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = 50 + j50 = 50\sqrt{2}\,\angle{45^\circ}$$

e

$v_1 + v_2 = 100 \text{ sen } (\omega t + 45°)$.

Como sen $x = \cos (x - 90°)$, $v_1 + v_2 = 100 \cos (\omega t - 45°)$.

5.17 Exprimir cada uma das tensões a seguir em notação de fasores e representar cada uma num diagrama de fasores: $v_1 = 212 \text{ sen } (\omega t + 45°)$, $v_2 = 141{,}4 \text{ sen } (\omega t - 90°)$, $v_3 = 127{,}3 \cos (\omega t + 30°)$, $v_4 = 85 \cos (\omega t - 45°)$ e $v_5 = 141{,}4 \text{ sen } (\omega t + 180°)$.

Para poderem ser expressas como fasores em um mesmo diagrama, as tensões devem, antes, ser expressas todas como funções senoidais ou todas como funções co-senoidais. Passemos V_3 e V_4 para funções senoidais:

$V_3 = 127{,}3 \text{ sen } (\omega t + 120°)$; $V_4 = 85 \text{ sen } (\omega t + 45°)$.

$\mathbf{V}_1 = (212/\sqrt{2})\,\underline{/45°} = 150\underline{/45°}$

$\mathbf{V}_2 = (141{,}4/\sqrt{2}\,\underline{/-90°} = 100\,\underline{/-90°}$

$\mathbf{V}_3 = (127{,}3/\sqrt{2})\,\underline{/120°} = 90\,\underline{/120°}$

$\mathbf{V}_4 = (85/\sqrt{2})\,\underline{/45°} = 60\underline{/45°}$

$\mathbf{V}_5 = (141{,}4/\sqrt{2})\,\underline{/180°} = 100\,\underline{/180°}$

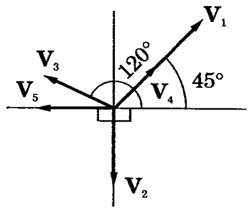


Figura 5-26

Problemas Propostos

Traçar os diagramas de fasores e da impedância em cada um dos problemas 5.18 a 5.22. Determinar, também, as constantes dos circuitos, admitindo circuitos em série de dois elementos.

5.18 $v = 283 \cos(800t + 150°)$, $i = 11{,}3 \cos(800t + 140°)$
Resp.: $R = 24{,}6\ \Omega$; $L = 5{,}43$ mH

5.19 $v = 50 \text{ sen } (2000t - 25°)$, $i = 8 \text{ sen } (2000t + 5°)$.
Resp.: $R = 5{,}41\ \Omega$; $C = 160\ \mu$F

5.20 $v = 10 \cos(5000t - 160°)$, $i = 1{,}333 \cos(5000t - 73{,}82°)$.
Resp.: $R = 0{,}5\ \Omega$; $C = 26{,}7\ \mu$F

5.21 $v = 80 \text{ sen } (1000t + 45°)$, $i = 8 \cos(1000t - 90°)$.
Resp.: $R = 7{,}07\ \Omega$; $L = 7{,}07$ mH

5.22 $v = 424 \cos(2000t + 30°)$, $i = 28{,}3 \cos(2000t + 83{,}2°)$.
Resp.: $R = 9\ \Omega$; $C = 41{,}6\ \mu$F

5.23 Um circuito em série tem $R = 8$ ohms e C 30 μF. Em que freqüência a corrente fica avançada de 30° em relação à tensão?
Resp.: $f = 1155$ Hz.

5.24 Um circuito *RL* em série tem $L = 21{,}2$ mH. Na freqüência de 60 Hz a corrente está atrasada de 53,1° em relação à tensão. Achar R.
Resp.: $R = 6$ ohms.

5.25 Em um circuito em série de dois elementos, a tensão é $\mathbf{V} = 240\angle 0°$ e a corrente $\mathbf{I} = 50\angle -60°$. Determinar o fasor corrente que resultaria da mesma tensão aplicada, caso a resistência fosse reduzida para (*a*) 60%, (*b*) 30% de seu valor inicial.
Resp.: (*a*) $54{,}7\angle -70{,}85°$, (*b*) $57{,}1\angle -80{,}15°$.

5.26 A tensão e a corrente em um circuito série de dois elementos são, respectivamente, $\mathbf{V} = 150\angle -120°$ e $\mathbf{I} = 7{,}5\angle -90°$. Que percentagem de variação da resistência acarretará uma corrente de 12 ampères e qual o ângulo associado a essa corrente?
Resp.: 56,8% de redução; $\angle -66{,}8°$.

5.27 Um circuito em série *RC*, onde $R = 10$ ohms, tem para ângulo da impedância $-45°$, na freqüência $f_1 = 500$ Hz. Achar a freqüência em que o valor absoluto da impedância é (*a*) duas vezes o que tem em f_1, (*b*) metade do que tem em f_1.
Resp.: (*a*) 189 Hz; (*b*) Impossível, pois o limite inferior de $\mathbf{Z}$ é $10 + j0$.

5.28 Um circuito *RL* em série em que $R = 10$ ohms tem 30° para ângulo da impedância, na freqüência $f_1 = 100$ Hz. Qual a freqüência em que o valor absoluto da impedância é o dobro do que tem em f_1?
Resp.: 360 Hz.

5.29 Num circuito
atrasada de
Determinar (
resultaria de
Resp.: (*a*) 0,(

530 Um circuito s
(1000t + 20°
vez. Achar a
Resp.: i_1 = 8

5.31 Em um circu
rad/s, são: **V**
ângulo de 30
Resp.: 385 r

5.32 Com relação
um fasor cor
cia, qual o m
Resp.: 23,6%

5.33 Determinar a
mostradas na
dois terminai
Resp.: 86,6 s

5.34 Determinar a
indicadas na
de v_1.
Resp.: 97 sen

5.29 Num circuito em série de dois elementos em que R = 5 ohms a corrente está atrasada de 75° em relação à tensão aplicada, na freqüência de 60 Hz. (*a*) Determinar o segundo elemento do circuito. (*b*) Achar o ângulo de fase que resultaria de um terceiro harmônico f = 180 Hz.
Resp.: (*a*) 0,0496 H; (*b*) θ = 84,88°.

530 Um circuito série consta de R = 5 ohms e C = 50 μF. As tensões $v_1 = 170 \cos (1000t + 20°)$ e $v_2 = 170 \cos (2000t + 20°)$ são aplicadas nele, uma de cada vez. Achar a corrente proveniente de cada fonte.
Resp.: $i_1 = 8{,}25 \cos (1000t + 95{,}95°)$; $i_2 = 15{,}2 \cos (2000t + 83{,}4°)$.

5.31 Em um circuito série de dois elementos, a tensão e a corrente, para ω = 2000 rad/s, são: $\mathbf{V} = 150 \angle{-45°}$ e $\mathbf{I} = 4{,}74 \angle{-116{,}6°}$. Uma segunda fonte acarreta um ângulo de 30° entre tensão e corrente. Determinar ω para essa segunda fonte.
Resp.: 385 rad/s.

5.32 Com relação ao Probl. 5.31, que variação na freqüência da fonte acarretaria um fasor corrente de 6 ampères? Supondo uma variação ilimitada da freqüência, qual o máximo valor possível para a corrente?
Resp.: 23,6% de redução em f; 15,0 ampères.

5.33 Determinar a soma das tensões $v_1 = 50$ sen $(\omega t + 90°)$ e $v_2 = 50$ sen $(\omega t + 30°)$, mostradas na Fig. 5-27. Que tensão seria lida em um voltímetro colocado nos dois terminais externos?
Resp.: 86,6 sen $(\omega t + 60°)$; 61,2 volts.

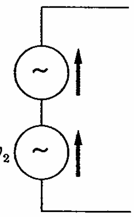


Figura 5-27

5.34 Determinar a soma das tensões $v_1 = 35$ sen $(\omega t + 45°)$ e $v_2 = 100$ sen $(\omega t - 30°)$, indicadas na Fig. 5-28. Supor o sentido positivo da soma coincidindo com o de v_1.
Resp.: 97 sen $(\omega t + 129{,}6°)$.

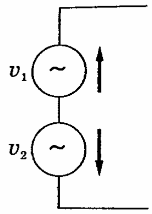


Figura 5-28

5.35 Repetir o Probl. 5.34 para v_2 em sentido oposto.
Resp.: 114 sen (ωt – 12,75°)

5.36 Determinar a leitura do voltímetro sobre o total das impedâncias mostradas na Fig. 5-29, sendo v_1 = 70,7 sen (ωt + 30°), v_2 = 28,3 sen (ωt + 120°) e v_3 = 14,14 cos (ωt + 30°) as tensões nos terminais de cada uma.
Resp.: 58,3 volts.

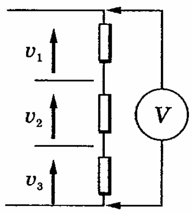


Figura 5-29

5.37 Na Fig. 5-30, sendo v_2 = 31,6 cos (ωt + 73,4°) e v_T = 20 cos (ωt – 35°), achar v_1.
Resp.: v_1 = 42,4 cos (ωt – 80°).

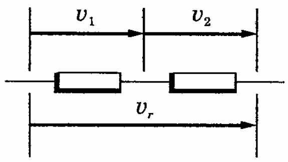


Figura 5-30

5.38 Com relação ao Probl. 5.37, achar as leituras de um voltímetro aplicado a cada uma das impedâncias e ao conjunto. Como explicar esses resultados?
Resp.: V_1 = 30; V_2 = 22,4; V_T = 14,14 volts.

5.39 Determinar
i_1 = 14,14 se
Resp.: 11,9

5.40 Determinar
75°) e i_3 = 1
Resp.: i_T = 0

5.41 Na Fig. 5-33
sentido ali m
Resp.: I_3 = 2

5.39 Determinar a indicação do amperímetro na Fig. 5-31, sendo as duas correntes $i_1 = 14{,}14 \text{ sen } (\omega t - 20^\circ)$ e $i_2 = 7{,}07 \text{ sen } (\omega t + 60^\circ)$.
Resp.: 11,9 ampères.

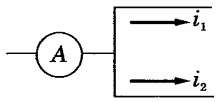


Figura 5-31

5.40 Determinar i_T na Fig. 5-32, sendo $i_1 = 14{,}14 \text{ sen } (\omega t + 45^\circ)$, $i_2 = 14{,}14 \text{ sen } (\omega t - 75^\circ)$ e $i_3 = 14{,}14 \text{ sen } (\omega t - 195^\circ)$.
Resp.: $i_T = 0$.

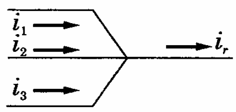


Figura 5-32

5.41 Na Fig. 5-33, sendo $\mathbf{I}_1 = 25\,\angle 70^\circ$ e $\mathbf{I}_2 = 25\,\angle -170^\circ$, achar o fasor corrente $\mathbf{I}_3$ com sentido ali mostrado.
Resp.: $\mathbf{I}_3 = 25\,\angle -50^\circ$.

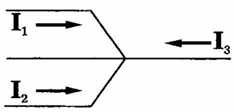


Figura 5-33

MAKRON
Books

CIRCUITOS EM SÉRIE E EM PARALELO

Introdução

Em geral, um circuito contém elementos em série e em paralelo. Neste capítulo, entretanto, os circuitos em série e em paralelo serão considerados separadamente, para que se mostrem os diferentes métodos de análise. Os problemas deste capítulo e de outros incluirão circuitos com combinações em série e em paralelo.

Circuito em Série

A Fig. 6-1 mostra um circuito em série constituído de uma fonte de tensão e três impedâncias. A fonte é suposta constante e é uma *elevação de potencial.* O fasor corrente **I** estabelece uma tensão nos terminais de cada impedância porque passa; são *as quedas de potencial.* A lei de Kirchhoff para as tensões estabelece que *a soma das elevações de potencial é igual à soma das quedas de potencial, ao longo de qualquer circuito fechado.* Com ela, pode ser solucionado o problema do circuito em série.

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = \mathbf{Z}_1\mathbf{I} + \mathbf{Z}_2\mathbf{I} + \mathbf{Z}_3\mathbf{I} = (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)\mathbf{I} =$$
$$= \mathbf{Z}_{eq}\mathbf{I} \text{ donde } \mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_{eq} \text{ e } \mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3$$

v(

Elevação de I

A queda d
corrente **I** pela in
$\mathbf{V}_1 = \mathbf{IZ}_1$, $\mathbf{V}_2 = \mathbf{IZ}_2$
essas tensões e ap

A impedâ
em série, é igual à
Essas impedância
cada impedância e

Exemplo 1.
a soma das q

$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$

$= 4 - j3 = 5\angle$

$\mathbf{I} = \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_{eq}} = \dfrac{}{5}$

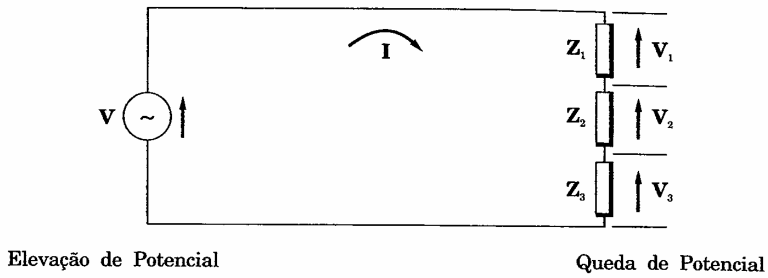


Figura 6-1 Circuito em série.

A queda de tensão em uma impedância é dada pelo produto do fasor corrente **I** pela impedância complexa **Z**. Portanto, no circuito da Fig. 6-1, $\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}\mathbf{Z}_2$ e $\mathbf{V}_3 = \mathbf{I}\mathbf{Z}_3$. A seta estabelece um sentido de referência para essas tensões e aponta para o terminal por onde entra o fasor corrente **I**.

A impedância equivalente $\mathbf{Z}_{eq}$, para qualquer número de impedâncias em série, é igual à soma das impedâncias individuais, $\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \ldots$ Essas impedâncias são números complexos e a soma indicada é efetuada com cada impedância expressa na forma retangular.

Exemplo 1. No circuito em série da Fig. 6-2, achar **I** e $\mathbf{Z}_{eq}$. Mostrar que a soma das quedas de tensão é igual à tensão aplicada (fasor).

$$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 = 4 + j3 - j6$$

$$= 4 - j3 = 5\underline{/-36{,}9^\circ}$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{100\underline{/0^\circ}}{5\underline{/-36{,}9^\circ}} = 20\underline{/36{,}9^\circ}$$

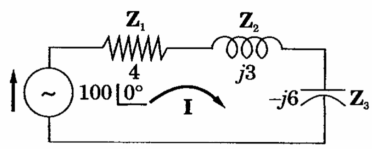
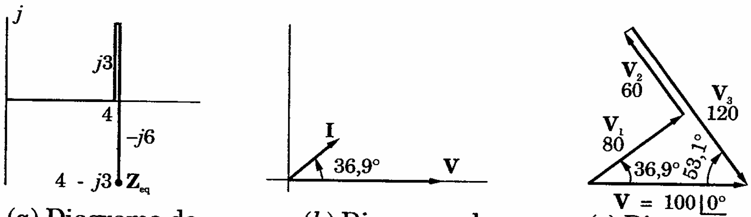


Figura 6-2

Então, $\mathbf{V}_1 = \mathbf{IZ}_1 = 20\angle 36{,}9^\circ\ (4) = 80\angle 36{,}9^\circ$, $\mathbf{V}_2 = 60\angle 126{,}9^\circ$, $\mathbf{V}_3 = 120\angle -53{,}1^\circ$
e $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = (64 + j48) + (-36 + j48) + (72 - j96) = 100 + j0 = \mathbf{V}$

como está demonstrado graficamente no diagrama dos fasores da Fig. 6-3(c).



(a) Diagrama da impedância

(b) Diagrama dos fasores V e I

(c) Diagrama dos fasores de tensão

Figura 6-3

A impedância equivalente é capacitiva, acarretando uma corrente **I** *avançada* de 36,9°, ângulo da impedância, em relação à **V**, como mostra a Fig. 6-3(b). Observe -se que $\mathbf{V}_1$, queda de tensão no resistor puro, está em fase com a corrente. A corrente **I** está atrasada de 90° em relação à $\mathbf{V}_2$ e avançada de 90° em relação à $\mathbf{V}_3$.

Se fosse colocado um voltímetro nos terminais da cada uma das impedâncias $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ e $\mathbf{Z}_3$, suas leituras seriam, respectivamente, 80, 60 e 120 volts.

Poderia parecer que a tensão total era 260 volts; entretanto, o medidor indicaria 100 volts, ao ser colocado nos terminais do conjunto das três. Convém lembrar que, na análise senoidal estacionária, *todas as tensões e correntes são fasores* e, como tais, devem ser somadas *vetorialmente*.

Circuito em Paralelo

Na Fig. 6-4(a) uma única fonte de tensão está aplicada a três impedâncias ligadas em paralelo. O circuito foi representado novamente na Fig. 6-4(b) para salientar o fato de que a fonte e as três impedâncias têm dois terminais comuns (nós). Em um desses nós aplica-se a lei de Kirchhoff para as correntes, ou seja, *a soma das correntes que chegam a um nó é igual à soma das correntes que dele saem.*

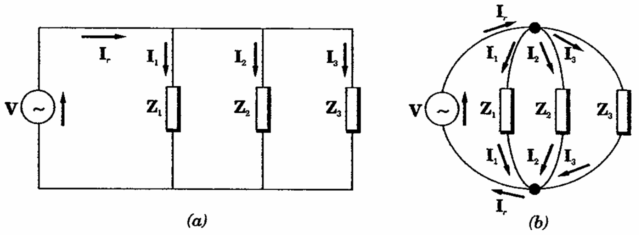


Figura 6-4 Circuito em paralelo.

O potencial constante da fonte aparece diretamente nos terminais de cada uma das impedâncias em paralelo. As correntes de cada braço podem, portanto, ser calculadas independentemente.

$$\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_1 + \mathbf{V}/\mathbf{Z}_2 + \mathbf{V}/\mathbf{Z}_3 = \mathbf{V}(1/\mathbf{Z}_1 + 1/\mathbf{Z}_2 + 1/\mathbf{Z}_3) = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_{eq}$$

Então, $\quad \mathbf{I}_T = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_{eq} \quad$ e $\quad 1/\mathbf{Z}_{eq} = (1/\mathbf{Z}_1 + 1/\mathbf{Z}_2 + 1/\mathbf{Z}_3)$

Portanto, a impedância equivalente a qualquer número de impedâncias em paralelo é

$$1/\mathbf{Z}_{eq} = 1/\mathbf{Z}_1 + 1/\mathbf{Z}_2 + 1/\mathbf{Z}_3 + \ldots$$

Exemplo 2. Achar a corrente total e a impedância equivalente do circuito em paralelo da Fig.6-5, traçando o diagrama de fasores.

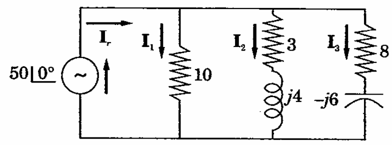


Figura 6-5

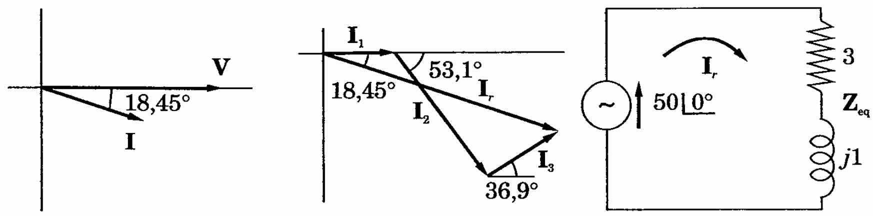
$$\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3$$

$$= \frac{50\angle 0°}{10} + \frac{50\angle 0°}{5\angle 53{,}1°} + \frac{50\angle 0°}{10\angle -36{,}9°}$$

$= 15 - j5 = 15{,}8\angle{-18{,}45^\circ}$

Logo, $\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{V}/\mathbf{I}_T = (50\angle 0^\circ)/(15{,}8\angle{-18{,}45^\circ}) = 3{,}16\angle 18{,}45^\circ = 3 + j1$

$\mathbf{I}_1 = 50\angle 0^\circ/10 = 5\angle 0^\circ,\ \mathbf{I}_2 = 10\angle{-53{,}1^\circ},\ \mathbf{I}_3 = 5\angle 36{,}9^\circ$



(*a*) Diagrama dos fasores V e I

(*b*) Soma dos fasores das correntes

(*c*) Circuito equivalente

Figura 6-6

Circuito Paralelo de Dois Ramos

O caso particular de duas impedâncias em paralelo ocorre freqüentemente na prática e, por isso, será melhor examinando. Na Fig. 6-7(*a*) a tensão **V** está aplicada às impedâncias $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ em paralelo. A impedância equivalente é obtida de $1/\mathbf{Z}_{eq} = 1/\mathbf{Z}_1 + 1/\mathbf{Z}_2$ ou $\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2/(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)$.

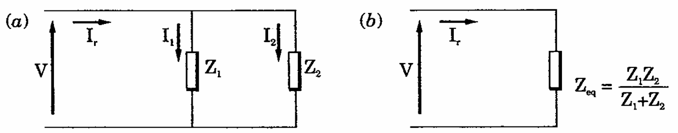


Figura 6-7 Circuito em paralelo de dois ramos.

Substituindo $\mathbf{V} = \mathbf{I}_T\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{I}_T\left(\dfrac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\right)$ em $\mathbf{V} = \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_2$ e $\mathbf{V} = \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_2$

e calculando as du

Admitância

O inverso
Como **Z** = **V/I**, **Y** =
admitância é muit

V

Portanto, a admitâ
paralelo é igual à s

Na forma
indutiva, $X_L = \omega L$,

Da mesma
chama *susceptânci*
quanto o negativo s

* N. R. A condutânci

e calculando as duas correntes nos ramos

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_T\left(\frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\right) \text{e } \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_T\left(\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\right)$$

Admitância

O inverso do complexo impedância é o complexo *admitância* $\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z}$. Como $\mathbf{Z} = \mathbf{V}/\mathbf{I}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{I}/\mathbf{V}$. $\mathbf{Y}$ é expressa em siemens (S) ou mhos. O conceito de admitância é muito conveniente em circuitos paralelos, como mostra a Fig. 6-8.

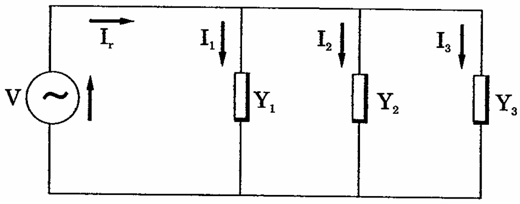


Figura 6-8

$$\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = \mathbf{Y}_1\mathbf{V} + \mathbf{Y}_2\mathbf{V} + \mathbf{Y}_3\mathbf{V}$$
$$= (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3)\,\mathbf{V} = \mathbf{V}_{eq}\mathbf{V}$$
$$\text{e } \mathbf{V}_{eq} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3$$

Portanto, a admitância equivalente de qualquer número de admitâncias em paralelo é igual à soma das admitâncias individuais.

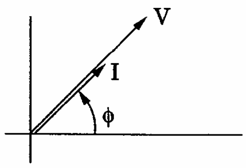
Na forma retangular, $\mathbf{Z} = R \pm jX$. O sinal positivo indica reatância indutiva, $X_L = \omega L$, e o sinal negativo significa reatância capacitiva, $X_C = 1/\omega C$.

Da mesma forma $\mathbf{Y} = G \pm jB$, onde G se chama *condutância* e B se chama *susceptância*. O sinal positivo indica susceptância capacitiva, B_C enquanto o negativo significa susceptância indutiva, B_L.*

* N. R. A condutância e a susceptância são também expressas em siemens ou mhos.

Consideremos um fasor tensão **V**, geral, e a corrente resultante **I**. A corrente **I** pode estar adiantada, atrasada ou em fase com **V**; porém, em nenhuma hipótese o ângulo entre elas pode exceder 90°. Conseqüentemente, três casos podem ocorrer.

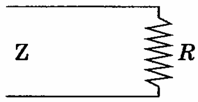
1º Caso. Os fasores tensão e corrente estão em fase (Fig. 6-9).



$V = V\angle\phi$, $I = I\angle\phi$

Impedância

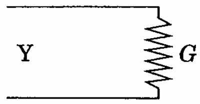
$Z = V\angle\phi / I\angle\phi = Z\angle 0° = R$



A impedância do circuito é uma resistência pura de R ohms.

Admitância

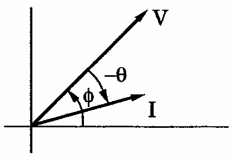
$Y = I\angle\phi / V\angle\phi = Y\angle 0° = G$



A admitância do circuito é uma condutância pura de G mhos.

Figura 6-9a

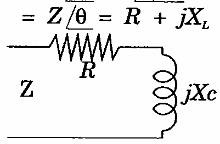
2º Caso. O fasor corrente está atrasado de um ângulo de θ em relação à tensão. (fig.6-10).



$V = V\angle\phi$, $\mathbf{I} = I\angle\phi-\theta$

Impedância

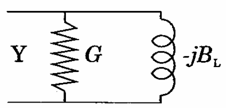
$\mathbf{Z} = V\angle\phi \;/\; I\angle\phi-\theta$
$= Z\angle\theta = R + jX_L$



A impedância do circuito consta de uma resistência e uma reatância indutiva em série.

Admistância

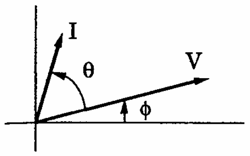
$\mathbf{Y} = I\angle\phi-\theta \;/\; V\angle\phi$
$= Y\angle-\theta = G - jB_L$



A admitância do circuito consta de uma condutância e uma susceptância indutiva em paralelo.

Figura 6-10

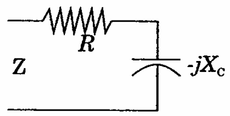
3º Caso. O fasor corrente está avançado de um ângulo de θ em relação à tensão. (Fig.6-11).



$\mathbf{V} = V\angle\phi\,,\ \mathbf{I} = I\angle\phi + \theta$

Impedância

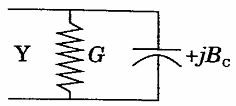
$\mathbf{Z} = V\angle\phi \,/\, I\angle\phi+\theta$
$= Z\angle{-\theta} = R - jX_C$



A impedância do circuito consta de uma resistência e uma reatância capacitiva em série.

Admitância

$\mathbf{Y} = I\angle\phi+\theta \,/\, V\angle\phi$
$= Y\angle\theta = G + jB_C$



A admitância do circuito consta de uma condutância e uma susceptância capacitada em paralelo.

Figura 6-11

Conversão Z — Y

A conversão de **Z** em **Y** e vice-versa torna-se simples com o emprego da forma polar, já que **Y** = 1/**Z**. Entretanto, vez por outra, haverá necessidade de se trabalhar com as relações entre as componentes na forma retangular, como a seguir.

Y = 1/**Z** **Z** = 1/**Y**

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \qquad R + jX = \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{G^2 + B^2}\ \therefore$$

$$\therefore\ G = \frac{R}{R^2 + X^2}\ \text{e}\ B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \qquad R = \frac{G}{G^2 + B^2}\ \text{e}\ X = \frac{-B}{G^2 + B^2}$$

Exemplo 3. Dado **Z** = 3 + *j*4, achar a admitância equivalente **Y**.

Y = 1/**Z** = $1/5\angle 53{,}1^\circ = 0{,}2\angle{-53{,}1^\circ} = 0{,}12 - j0{,}16$

donde a condutância $G = 0{,}12$ mhos e a susceptância indutiva $B = 0{,}16$ mhos.

Outro método

$$G = R/(R^2 + X^2) = 3/(9 + 16) = 0{,}12$$

$$B = -X/(R^2 + X^2) = -4/25 = -0{,}16$$

logo $\qquad \mathbf{Y} = 0{,}12 - j0{,}16.$

Problemas Resolvidos

6.1 As duas impedâncias $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ da Fig. 6-12 estão em série com uma fonte de tensão $\mathbf{V} = 100\underline{/0^\circ}$. Achar a tensão nos terminais de cada impedância e traçar o diagrama dos fasores de tensão.

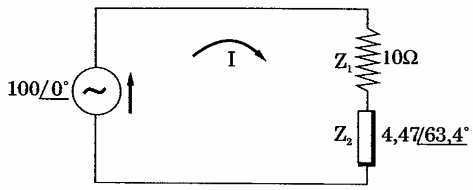


Figura 6-12

$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = 10 + (2 + j4) = 12 + j4 = 12{,}65\underline{/18{,}45^\circ}$ e $\mathbf{I} = \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_{eq}}$

$\dfrac{100\underline{/0^\circ}}{12{,}65\underline{/18{,}45^\circ}} = 7{,}9\underline{/-18{,}45^\circ}$. Então,

$\mathbf{V}_1 = \mathbf{IZ}_1 = 7{,}9\underline{/-18{,}45^\circ}(10) = 79\underline{/-18{,}45^\circ} = 74{,}9 - j25$

$\mathbf{V}_2 = \mathbf{IZ}_2 = (7{,}9\underline{/-18{,}45^\circ})\,(4{,}47\underline{/63{,}4^\circ} = 35{,}3\underline{/45^\circ} = 25 + j25$

Verifica-se que $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = (74{,}9 - j25) + (25 + j25) = 99{,}9 + j0 \approx 100\underline{/0^\circ} = \mathbf{V}$, como mostra graficamente o diagrama da Fig. 6-13.

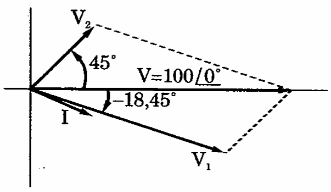


Figura 6-13

6.2 Calcular a impedância $\mathbf{Z}_2$ do circuito em série da Fig. 6-14.

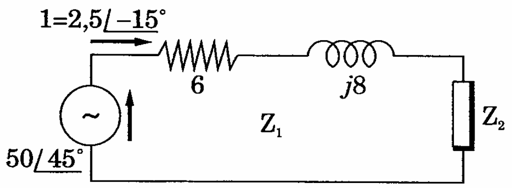


Figura 6-14

No circuito dado, $\mathbf{Z}_{eq} = \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \dfrac{50\angle 45^\circ}{2{,}5\angle -15^\circ} =$

$20\angle 60^\circ = 10 + j17{,}3$. Como $\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$,

$10 + j17{,}3 = (5 + j8) + \mathbf{Z}_2$ e $\mathbf{Z}_2 = 5 + j9{,}3$

6.3 Na freqüência $\omega = 400$ rad/s a corrente está avançada de 63,4°, no circuito da Fig. 6-15. Achar R e a tensão em cada elemento de circuito. Traçar o diagrama dos fasores de tensão.

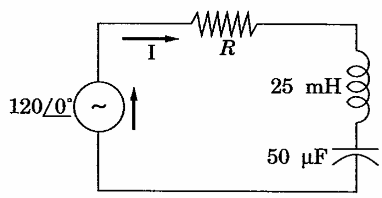


Figura 6-15

$X_L = \omega L = 400(25 \times 10^{-3}) = 10$ ohms, $X_C = 1/\omega C = 1/400(50 \times 10^{-6}) = 50$ ohms e $\mathbf{Z} = R + j(X_L - X_C) = -R - j40$. Também, $\mathbf{Z} = Z\angle -63{,}4^\circ$. Como tg $(-63{,}4^\circ) = (X_L - X_C)/R$, $R = -40(\text{tg} - 63{,}4^\circ) = 20$ ohms.

A impedância $\mathbf{Z} = 20 - j40 = 44{,}7\angle -63{,}4^\circ$ e a corrente

$\mathbf{I} = \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \dfrac{120\angle 0^\circ}{44{,}7\angle -63{,}4^\circ} = 2{,}68\angle 63{,}4^\circ$. Então,

$\mathbf{V}_R = 53{,}6\angle 63{,}4^\circ$, $\mathbf{V}_L = 26{,}8\angle 153{,}4^\circ$ e $\mathbf{V}_C = 134\angle -26{,}6^\circ$

O diagrama de fasores de Fig. 6-16 mostra que $\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C = \mathbf{V}$.

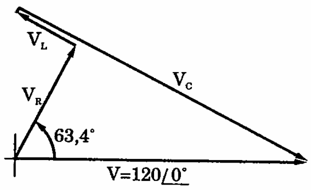


Figura 6-16

6.4 Determinaram-se as constantes R e L de uma bobina colocando-a em série com um resistor padrão de 10 ohms e lendo as tensões nos terminais de R_s, da bobina e do circuito em série completo. Quais os valores de R e L para as seguintes leituras de tensão em 60 Hz: $\mathbf{V}_{Rs} = 20$; $\mathbf{V}_{bob} = 22{,}4$ volts e $\mathbf{V}_T = 36$ volts?

A tensão $\mathbf{V}_{Rs}$ e a corrente $\mathbf{I}$ estão em fase. Seja $V_{Rs} = 20\angle 0^\circ$; então: $\mathbf{I} = V_{Rs}/R_s = 2\angle 0^\circ$.

Na Fig. 6-17, do início de $\mathbf{V}_{Rs}$ traçamos um arco de raio 36 e da extremidade de $\mathbf{V}_{Rs}$ traçamos um arco de raio 22,4. A interseção dos dois arcos é a extremidade dos fasores $\mathbf{V}_T$ e $\mathbf{V}_{bob}$, satisfazendo, portanto a igualdade $\mathbf{V}_T = \mathbf{V}_{Rs} + \mathbf{V}_{bob}$.

Determinamos o ângulo do fasor $\mathbf{V}_T$ aplicando a lei dos co-senos.

$$\cos\alpha = \frac{(36)^2 + (20)^2 - (22{,}4)^2}{2(36)(20)} = 0{,}831, \quad \alpha = 33{,}7^\circ$$

Então, $\mathbf{V}_T = 36\angle 33{,}7^\circ = 30 + j20$ e $\mathbf{V}_{bob} = \mathbf{V}_T - \mathbf{V}_{Rs} = 10 + j20 = 22{,}4\angle 63{,}4^\circ$. A impedância da bobina é

$Z_{bob} = \mathbf{V}_{bob}/\mathbf{I} = (10 + j20)/2 = 5 + j10$, donde $R = 5$ ohms.

Para $f = 60$ Hz, $X_L = 2\pi f L = 2\pi(60)L = 10$ e $L = 26{,}5$ mH.

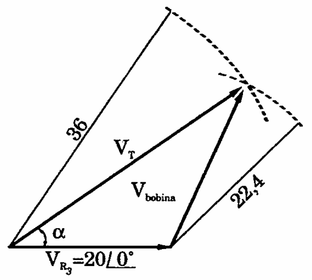


Figura 6-17

6.5 Calcular as correntes nos ramos e a corrente total no circuito paralelo da Fig. 6-18. Traçar o diagrama de fasores. Achar $\mathbf{Z}_{eq}$ a partir de **V**/**I**, e comparar com $\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2/(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)$.

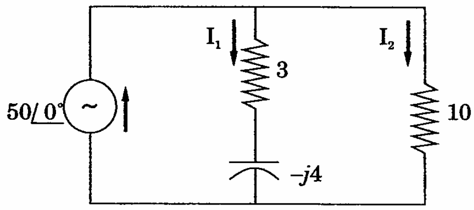


Figura 6-18

$\mathbf{Z}_1 = 3 - j4 = 5\angle{-53{,}1°}$ e $\mathbf{Z}_2 = 10$. Então,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_1} = \frac{50\angle 0°}{5\angle{-53{,}1°}} = 10\angle 53{,}1° = 6 + j8$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_2} = \frac{50\angle 0°}{10} = 5\angle 0° = 5$$

$$\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 11 + j8 = 13{,}6\angle 36°$$

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}_T} = \frac{50\angle 0°}{13{,}6\angle 36°} = 3{,}67\angle{-36°}, \quad \mathbf{Z}_{eq} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{5\angle{-53{,}1°}(10)}{(3 - j4) + 10}$$

$$= \frac{50\,\angle{-53{,}1^\circ}}{13{,}6\,\angle{-17{,}1^\circ}} = 3{,}67\,\angle{-36^\circ} \text{ (resultados idênticos)}$$

O diagrama de fasores está representado na Fig.6-19.

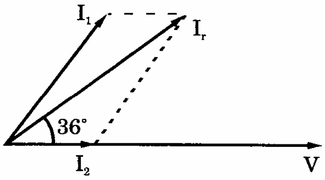


Figura 6-19

6.6 Determinar a corrente em cada elemento do circuito em série-paralelo da Fig. 6-20.

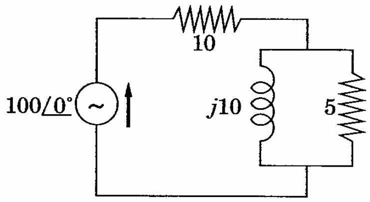


Figura 6-20

$$\mathbf{Z}_{eq} = 10 = \frac{5(j10)}{5 + j10} = 14 + j2 = 14{,}14\,\angle{8{,}14^\circ} \text{ e}$$

$$\mathbf{I}_T = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{100\,\angle{0^\circ}}{14{,}14\,\angle{8{,}14^\circ}} = 7{,}07\,\angle{-8{,}14^\circ}. \text{ Então,}$$

$$\mathbf{I}_{10} = \mathbf{I}_T = 7{,}07\angle{-8{,}14^\circ}$$

$$\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_T = 7{,}07\angle{-8{,}14^\circ}$$

$\mathbf{I}_{j10} = \mathbf{I}_T \Big($

$\mathbf{I}_5 = \mathbf{I}_T \Big(\frac{}{5}$

6.7 Os valores respectivam nhecidas R e

Aplicando a tensão aplic Existindo u aplicada. Er se a Fig. 6-2

$\cos\alpha = \frac{(15}{}$

Do diagram

Então, a ad $j0{,}228$.

$R = \frac{1}{0{,}195}$

$$\mathbf{I}_{j10} = \mathbf{I}_T\left(\frac{5}{5 + j10}\right) = 7{,}07\,\underline{/-8{,}14^\circ}\left(\frac{5}{5 + j10}\right) = 3{,}16\,\underline{/-71{,}54^\circ}$$

$$\mathbf{I}_5 = \mathbf{I}_T\left(\frac{j10}{5 + j10}\right) = 7{,}07\,\underline{/-8{,}14^\circ}\left(\frac{j10}{5 + j10}\right) = 6{,}32\,\underline{/18{,}46^\circ}$$

6.7 Os valores eficazes das correntes I_1, I_2 e I_T do circuito da Fig. 6-21 são, respectivamente, 18, 15 e 30 ampères. Determinar as impedâncias desconhecidas R e X_L.

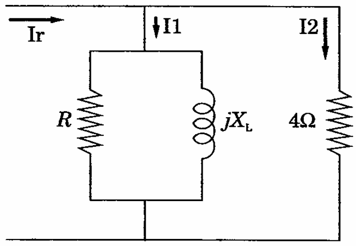


Figura 6-21

Aplicando a lei de Kirchhoff para as correntes, $\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_T$. Em fase com a tensão aplicada **V** está $\mathbf{I}_2$. Seja $\mathbf{I}_2 = 15\underline{/0^\circ}$; então, $\mathbf{V} = 15\underline{/0^\circ}\,(4) = 60\underline{/0^\circ}$. Existindo uma reatância indutiva, $\mathbf{I}_1$ está atrasada em relação à tensão aplicada. Empregando-se a mesma construção usada no Probl. 6.4, traça-se a Fig. 6-22. Então,

$$\cos\alpha = \frac{(15)^2 + (18)^2 - (30)^2}{2(15)(18)} = -0{,}65 \quad \text{e} \quad \alpha = 130{,}5^\circ$$

Do diagrama, $\mathbf{I}_1 = 18\underline{/-49{,}5^\circ}$. Então, $\mathbf{Z}_1 = \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}_1} = \dfrac{60\,\underline{/0^\circ}}{18\,\underline{/-49{,}5^\circ}} = 3{,}33\,\underline{/49{,}5^\circ}$.

Então, a admitância complexa $\mathbf{Y}_1 = 1/R + 1/jX_L = 1/3{,}33\underline{/49{,}5^\circ} = 0{,}195 - j0{,}228$.

$$R = \frac{1}{0{,}195} = 5{,}13 \text{ ohms e } X_L = \frac{1}{0{,}228} = 4{,}39 \text{ ohms}$$

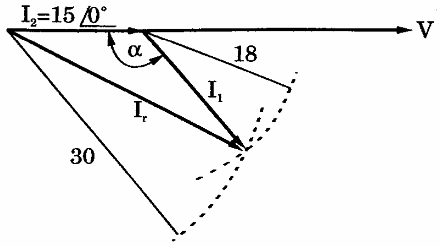


Figura 6-22

6.8 O valor eficaz da corrente no circuito em série da Fig. 6-23 é 5 ampères. Quais são as leituras em um voltímetro ligado, primeiro nos terminais do circuito e, depois, nos terminais de cada elemento?

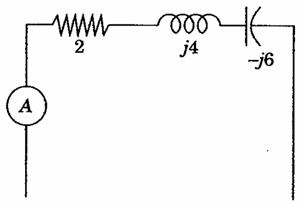


Figura 6-23

$\mathbf{Z}_{eq} = 2 + j4 - j6 = 2{,}83\underline{/-45°}$. Portanto,

$V_T = (2{,}83)(5) = 14{,}14$ V $\qquad V_{j4} = (4)(5) = 20$ V

$V_2 = (2)(5) = 10$ V $\qquad V_{-j6} = (6)(5) = 30$ V

O diagrama dos fasores, Fig. 6-24, mostra a soma dos fasores tensão nos terminais de cada elemento.

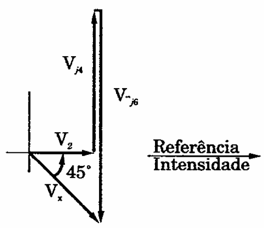


Figura 6-24

6.9 A leitura do
Fig. 6-25 é

$I_2 = 45/3 =$

$\mathbf{I}_2 = 15\underline{/0°}$.

e $\mathbf{I}_1 = 63{,}6\underline{/}$

Então,

$\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$

$= 19{,}65 - j1$

A leitura d

6.10 No circuito
paralelo do

$\mathbf{Z}_p = \frac{(20}{20 +}$

Como

$\mathbf{V} = \mathbf{I}\mathbf{Z}_{eq}$ e
111,5 volts

6.9 A leitura do voltímetro nos terminais do resistor de 3 ohms do circuito paralelo da Fig. 6-25 é 45 volts. Qual é a indicação do amperímetro ?

$I_2 = 45/3 = 15$ amp. Supondo um ângulo de 0°,

$\mathbf{I}_2 = 15\underline{/0^\circ}$. Logo, $\mathbf{V} = 15\underline{/0^\circ}\,(3 - j3) = 63{,}6\underline{/-45^\circ}$

e $\mathbf{I}_1 = 63{,}6\underline{/-45^\circ}/(5 + j2) = 11{,}8\underline{/-66{,}8^\circ} = 4{,}65 - j10{,}85$

Então,

$\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2\,(4{,}65 - j10{,}85) + 15$

$= 19{,}65 - j10{,}85 = 22{,}4\underline{/-29^\circ}$

A leitura do amperímetro é 22,4 ampères.

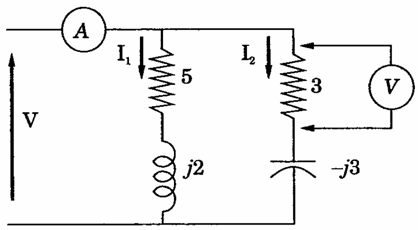


Figura 6-25

6.10 No circuito em série-paralelo da Fig. 6-26 o valor eficaz da tensão, no trecho paralelo do circuito, é 50 volts. Calcular o valor correspondente de **V**.

$$\mathbf{Z}_p = \frac{(20 + j60)j6}{20 + j60 + j6} = 5{,}52\underline{/88{,}45^\circ} = 0{,}149 + j5{,}52$$

Como

$\mathbf{V} = \mathbf{I}\mathbf{Z}_{eq}$ e $\mathbf{V}_p = \mathbf{I}\mathbf{Z}_p, V_p/Z_p = V/Z_{eq}$. Logo, $V = V_p(Z_{eq}/Z_p) = 50(12{,}3/5{,}52) =$ 111,5 volts

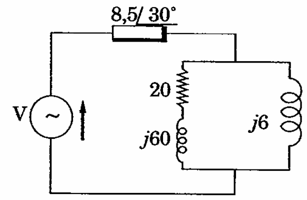


Figura 6-26

6.11 Calcular a impedância equivalente e a corrente total do circuito em paralelo da Fig. 6-27.

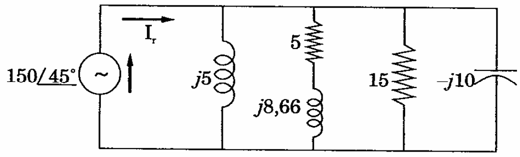


Figura 6-27

$$\mathbf{Y}_1 = 1/j5 \quad = -j0{,}2$$

$$\mathbf{Y}_2 = 1/10\angle 60^\circ \quad = 0{,}05 - j0{,}0866$$

$$\mathbf{Y}_3 = 1/15 \quad = 0{,}067$$

$$\mathbf{Y}_4 = 1/-j10 \quad = j0{,}1$$

$$\mathbf{Y}_{eq} = 0{,}117 - j0{,}1866 = 0{,}22\angle -58^\circ$$

Então, $\mathbf{I}_T = \mathbf{V}\mathbf{Y}_{eq} = (150/45^\circ)(0{,}22\angle -58^\circ) = 33\angle -13^\circ$ e $\mathbf{Z}_{eq} = 1/\mathbf{Y}_{eq} =$

$= 1/(0{,}22\angle -58^\circ) = 4{,}55\angle 58^\circ$

6.12 Determinar a impedância $\mathbf{Z}_1$ do circuito em paralelo da Fig. 6-28.

Admitância do circuito: $\mathbf{Y}_{eq} = \dfrac{\mathbf{I}_T}{\mathbf{V}} = \dfrac{31{,}5\angle 24^\circ}{50\angle 60^\circ} = 0{,}63\angle -36^\circ = 0{,}51 - j0{,}37$.

Como $\mathbf{Y}_{eq} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 = \mathbf{Y}_1 + (0{,}1) + (0{,}16 - j0{,}12) = 0{,}51 - j0{,}37$,

$\mathbf{Y}_1 = 0{,}25$

$\mathbf{Z}_1 = 1/\mathbf{Y}_1$

Outro método

$\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}$

donde $\mathbf{I}_1$

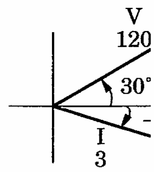
6.13 Dado o dia cia equival

Impedânc

$\mathbf{Z} = \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} =$

$= 4$

$= 2$



$\mathbf{Y}_1 = 0{,}25 - j0{,}25 = 0{,}25\sqrt{2}\,\underline{/45^\circ}$. Logo,

$\mathbf{Z}_1 = 1/\mathbf{Y}_1 = 2\sqrt{2}\,\underline{/45^\circ} = 2 + j2$

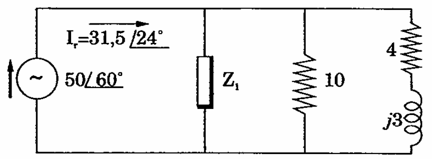


Figura 6-28

Outro método

$$\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_1 + \frac{50\,\underline{/60^\circ}}{10} + \frac{50\,\underline{/60^\circ}}{5\,\underline{/36{,}9^\circ}} = 31{,}5\,\underline{/24^\circ},$$

donde $\mathbf{I}_1 = 17{,}7\underline{/15^\circ}$. Logo,

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}_1} = \frac{50\,\underline{/60^\circ}}{17{,}7\,\underline{/15^\circ}} = 2\sqrt{2}\,\underline{/45^\circ} = 2 + j2.$$

6.13 Dado o diagrama de fasores da Fig. 6-29, determinar a impedância e a admitância equivalentes que a ele correspondem.

Impedância equivalente	*Admitância equivalente*
$\mathbf{Z} = \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \dfrac{120\,\underline{/15^\circ}}{3\,\underline{/-15^\circ}}$	$\mathbf{Z} = \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \dfrac{3\,\underline{/-15^\circ}}{120\,\underline{/30^\circ}}$
$= 40\underline{/45^\circ}$	$= 0{,}025\underline{/-45^\circ}$
$= 28{,}3 + j28{,}3$	$= 0{,}0177 - j0{,}0177$

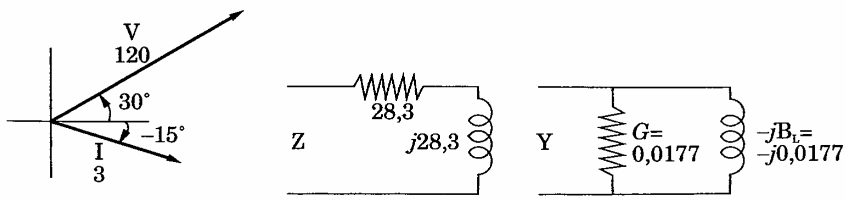


Figura 6-29

6.14 Dado o circuito em série-paralelo da Fig. 6-30, determinar $\mathbf{Z}_{eq}$ e $\mathbf{Y}_{eq}$.

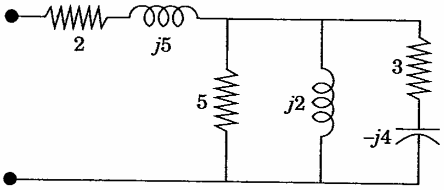


Figura 6-30

Calcula-se, primeiro, a admitância equivalente dos três ramos em paralelo, que, em seguida, é convertida em impedância.

$$\mathbf{Y}_{peq} = \frac{1}{5} + \frac{1}{j2} + \frac{1}{5\angle{-53{,}1^\circ}}$$

$$= 0{,}32 - j0{,}34 = 0{,}467\angle{-46{,}7^\circ}$$

$$\mathbf{Z}_{peq} = 1/\mathbf{Y}_{peq} = 2{,}14\angle{46{,}7^\circ} = 1{,}47 + j1{,}56$$

Logo, $\mathbf{Z}_{eq}\,(2 + j5) + (1{,}47 + j1{,}56) = 3{,}47 + j6{,}56 = 7{,}42\angle{62{,}1^\circ}$

$$\mathbf{Y}_{eq} = 1/(7{,}42\angle{62{,}1^\circ}) = 0{,}135\angle{-62{,}1^\circ} = 0{,}063 - j0{,}119$$

6.15 Converter o circuito em série-paralelo do Probl. 6.14 em dois circuitos equivalentes que contenham, respectivamente, $\mathbf{Z}_{eq}$ e $\mathbf{Y}_{eq}$.

Achar as correntes, supondo-se aplicada uma tensão $\mathbf{V} = 120\angle{0^\circ}$ a cada circuito.

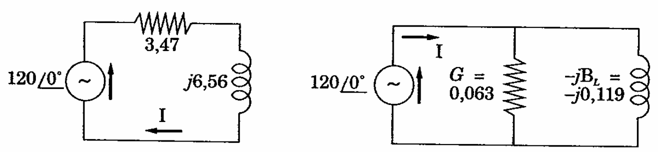


Figura 6-31

(*a*) $\mathbf{Z} = 7{,}42\angle 62{,}1^\circ$ (*b*) $\mathbf{Y} = 0{,}135\angle -62{,}1^\circ$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{120\angle 0^\circ}{7{,}42\angle 62{,}1} = 16{,}2\angle -62{,}1 \qquad \mathbf{I} = \mathbf{VY} = (120\angle 0^\circ)(0{,}135\angle -62{,}1^\circ)$$

$$= 16{,}2\angle -62{,}1^\circ$$

6.16 As correntes de uma bobina são, em série, chamadas de R_s e L_s. Determinar as correntes equivalentes em paralelo, R_p e L_p, em termos de R_s e L_s.

Como as admitâncias dos dois circuitos da Fig. 6-32 devem ser iguais,

$$\mathbf{Y}_p = \mathbf{Y}_s \text{ ou } \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L_p} = \frac{1}{R_s + j\omega L_s} = \frac{R_s - j\omega L_s}{(R_s)^2 + (\omega L_s)^2}$$

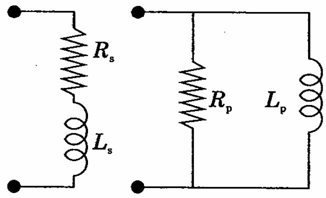


Figura 6-32

Igualando as partes reais e as partes imaginárias:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{R_s}{(R_s)^2 + (\omega L_s)^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{j\omega L_p} = \frac{-j\omega L_s}{(R_s)^2 + (\omega L_s)^2}$$

donde $R_p = R_s + (\omega L_s)^2/R_s$ e $L_p = L_s + R_s^2/\omega^2 L_s$.

6.17 Determinar a impedância equivalente do circuito em série-paralelo da Fig. 6-33.

$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} = R_1 + \frac{(R_2 + j\omega L)R_3}{R_2 + R_3 + j\omega L} = R_1 + \frac{(R_2R_3 + j\omega LR_3)\,[(R_2 + R_3) - j\omega L]}{(R_2 + R_3)^2 + (\omega L)^2}$$

$$= R_1 + \frac{R_2R_3(R_2 + R_3) + \omega^2L^2R_3 + j\omega LR_3(R_2 + R_3) - j\omega L(R_2R_3)}{(R_2 + R_3)^2 + (\omega L)^2}$$

$$= \left[R_1 + \frac{R_3(R_2^2 + R_2R_3 + \omega^2L^2)}{(R_2 + R_3)^2 + (\omega L)^2}\right] + j\left[\frac{\omega L R_3^2}{(R_2 + R_3)^2 + (\omega L)^2}\right]$$

$$= R_{eq} + j\omega L_{eq}$$

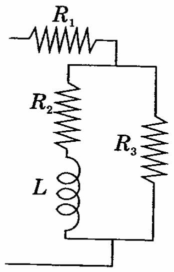


Figura 6-33

6.18 O primeiro ramo do circuito em paralelo da Fig. 6-34 contém dois resistores R iguais, em série, e no segundo existe um resistor R_1 em série com uma indutância variável L. Mostrar como varia, em função de L, a tensão entre A e B.

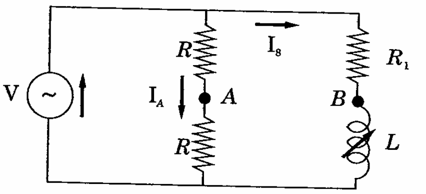


Figura 6-34

No primeiro ramo da corrente $\mathbf{I}_A = \mathbf{V}/2R$ a diferença de potencial do resistor de baixo é $\mathbf{I}_A R = \frac{1}{2}\mathbf{V}$.

No segundo ramo, a corrente $\mathbf{I}_B = \mathbf{V}/(R_1 + j\omega L)$ e a d.d.p. na indutância é

$$\mathbf{I}_B j\omega L = \frac{\mathbf{V}}{(R_1 + j\omega L)}(j\omega L)$$

Como as polaridades são as da Fig. 6-35,

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{I}_A R - \mathbf{I}_B(j\omega L) = \frac{1}{2}\mathbf{V} - \frac{\mathbf{V}}{(R_1 + j\omega L)}\,(j\omega L)$$

Racionalizando e separando os termos real e imaginário, temos:

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2 L^2}{R_1^2 + (\omega L)^2}\right) - j\left(\frac{\omega L R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2}\right)\right]$$

A expressão entre colchetes é um número complexo que, convertido à forma polar, tem valor absoluto r e ângulo ϕ.

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2 L^2}{R_1^2 + (\omega L)^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega L R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\phi = \text{arc tg}\,\frac{[-\omega L R_1/[R_1^2 + (\omega L)^2]}{\frac{1}{2} - \omega^2 L^2/[R_1^2 + (\omega L)^2]} = \text{arc tg}\,\frac{-2\omega L R_1}{R_1^2 - (\omega L)^2} =$$

$$= \text{arc tg}\,\frac{-2(\omega L/R_1)}{1 - (\omega L/R_1)^2}$$

Portanto, o valor absoluto de $\mathbf{V}_{AB}$ é constante, i.e., $\mathbf{V}_{AB} = \frac{1}{2}\mathbf{V}$; e como $\text{tg}\, 2x = (2\ \text{tg}\, x)/(1 - \text{tg}^2 x)$ e $\omega L/R = \text{tg}\,\theta$, $\phi = -2\theta$, onde θ é o ângulo da impedância complexa do segundo ramo.

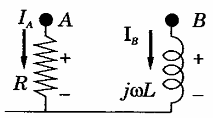


Figura 6-35

6.19 Na Fig. 6-36, duas malhas ativas são ligadas por um resistor de 10 ohms. Achar a diferença de potencial entre *A* e *B*.

Da Fig. 6-36 temos

$$\mathbf{I}_A = \frac{10\angle 30^\circ}{3 - j4} = \frac{10\angle 30^\circ}{5\angle -53{,}1^\circ} = 2\angle 83{,}1^\circ$$

$$\mathbf{I}_B = \frac{10\angle 0^\circ}{3 + j4} = \frac{10\angle 0^\circ}{5\angle 53{,}1^\circ} = 2\angle -53{,}1^\circ$$

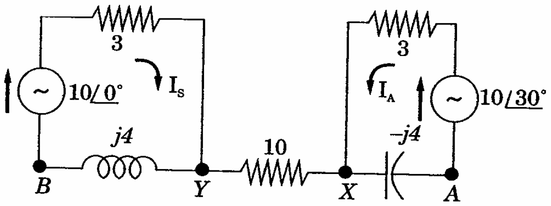


Figura 6-36

Para determinar $\mathbf{V}_{AB}$ é necessário que se conheçam as tensões nos terminais de cada um dos elementos da Fig. 6-37. Considerando as polaridades corretas, temos

$\mathbf{V}_{AX} = -\,\mathbf{I}_A(-j4) = -\,2\angle 83{,}1^\circ\,(-j4) = -\,8\angle -6{,}9^\circ = -\,7{,}94 + j0{,}96$

$\mathbf{V}_{XY}$ 0 (não passa corrente no resistor de 10 ohms)

$\mathbf{V}_{YB} = \mathbf{V}_B(j4) = -\,2\angle -53{,}1^\circ (j4) = 8\angle 36{,}9^\circ = 6{,}4 + j4{,}8$

Logo, $\quad \mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AX} + \mathbf{V}_{XY} + \mathbf{V}_{YB} \quad = -\,1{,}54 + j5{,}76 = 5{,}95/105^\circ$

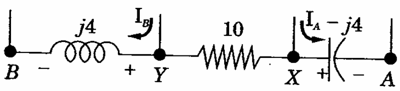


Figura 6-37

6.20 A corrente total do circuito em paralelo da Fig. 6-38 é $\mathbf{I}_T = 18\angle 45^\circ$. Determinar a diferença de potencial entre os pontos *A* e *B*.

Da Fig. 6-38,

$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_T\left(\frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{Z}_A}\right.$

$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_T\left(\frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{Z}_A}\right.$

As tensões na

93,2/120° e V

A Fig. 6-39

polaridades in

$\mathbf{V}_{AB} = (93{,}2/1$

6.21 Determinar a i

ponte da Fig. 6-

A combinação

paralelo de $\mathbf{Z}_2$

$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}}{\mathbf{Z}_1 +}$

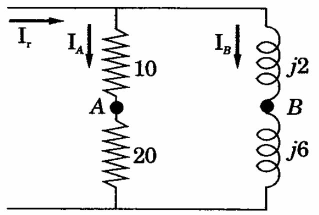


Figura 6-38

Da Fig. 6-38, temos

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_T\left(\frac{\mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B}\right) = 18\,\underline{/45^\circ}\left(\frac{j8}{30 + j8}\right) = 4{,}66\,\underline{/120^\circ}$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_T\left(\frac{\mathbf{Z}_A}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B}\right) = 18\,\underline{/45^\circ}\left(\frac{30}{30 + j8}\right) = 17{,}5\,\underline{/30^\circ}$$

As tensões na resistência de 20 ohms e na reatância $j6$ são $\mathbf{V}_{20} = \mathbf{I}_A(20) = 93{,}2\underline{/120^\circ}$ e $\mathbf{V}_{j6} = \mathbf{I}_B(j6) = 105\underline{/\ 120^\circ}$, respectivamente.

A Fig. 6-39 mostra que as duas tensões podem ser somadas com as polaridades indicadas. Então,

$$\mathbf{V}_{AB} = (93{,}2\underline{/120^\circ}) - (105\underline{/120^\circ}) = 11{,}8\underline{/-60^\circ}$$

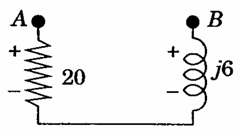


Figura 6-39

6.21 Determinar a impedância equivalente entre os terminais A e B o circuito em ponte da Fig. 6-40.

A combinação de $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_4$ em paralelo está em série com a combinação paralelo de $\mathbf{Z}_2$ e $\mathbf{Z}_3$. Então,

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_4}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_4} + \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}$$

$$= \frac{500\,(2000\,\angle{-30^\circ})}{500 + 2000\,\angle{-30^\circ}} + \frac{250\,\angle{30^\circ}\,(1000)}{250\,\angle{30^\circ} + 1000}$$

$$= 596\,\angle{4{,}05^\circ}$$

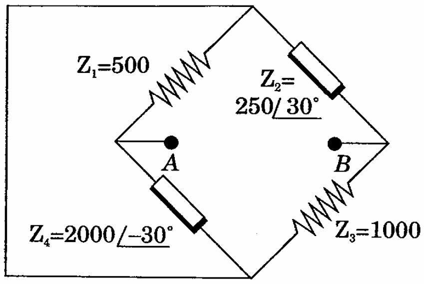


Figura 6-40

Problemas Propostos

6.22 Calcular a tensão em cada impedância do circuito em série da Fig. 6-41. Mostrar num diagrama de fasores que a soma $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3$ é igual à tensão aplicada $\mathbf{V} = 100/0^\circ$.
Resp.: $31{,}4\angle{20{,}8^\circ}$; $25{,}1\angle{50{,}8^\circ}$; $62{,}9\angle{-29{,}2^\circ}$.

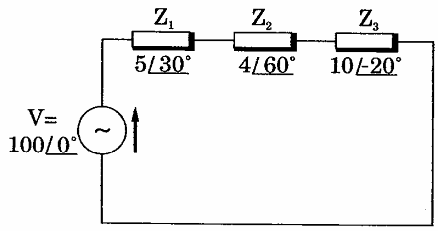


Figura 6-41

6.23 Determinar a tensão **V**, aplicada ao circuito em série da Fig. 6-42, sabendo que é de $27\angle{-10^\circ}$ volts a queda de tensão em $\mathbf{Z}_1$.
Resp.: $126{,}5\angle{-24{,}6^\circ}$.

6.24 Três impedân
de tensão de
de tensão em
Resp.: **I** = 15

6.25 Uma fonte de
de *R* fixo e
corrente é **I**
atrasada de
eficaz da corr
Resp.: 6,25 a

6.26 A queda de te
15°. Determir
Resp.: *R* = 4

6.27 Um circuito
reatância inc
impedância **Z**
resultante?
Resp.: **Z** = 1

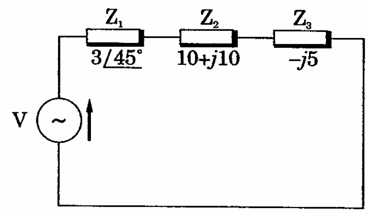


Figura 6-42

6.24 Três impedâncias $\mathbf{Z}_1 = 5 + j$, $\mathbf{Z}_2 = -j8$ e $\mathbf{Z}_3 = 4$ são ligadas em série a uma fonte de tensão desconhecida **V**. Determinar **I** e **V**, sendo $63{,}2\angle 18{,}45^\circ$ volts a queda de tensão em $\mathbf{Z}_3$.
Resp.: $\mathbf{I} = 15{,}8\angle 18{,}45^\circ$; $\mathbf{V} = 150\angle 0^\circ$.

6.25 Uma fonte de tensão $\mathbf{V} = 25\angle 180^\circ$ é ligada a um circuito em série, constituído de R fixo e X_L variável. Colocada a reatância em um valor arbitrário, a corrente é $\mathbf{I} = 11{,}15\angle 153{,}4^\circ$. Então, X_L é ajustada de modo a tornar a corrente atrasada de 60° em relação à tensão. Nessa segunda hipótese, qual é o valor eficaz da corrente?
Resp.: 6,25 ampères.

6.26 A queda de tensão na reatância $j2$ do circuito em série da Fig. 6-43 é $\mathbf{V}_{j2} = 13{,}04\angle 15^\circ$. Determinar **Z**.
Resp.: $R = 4$ ohms; $X_C = 15$ ohms.

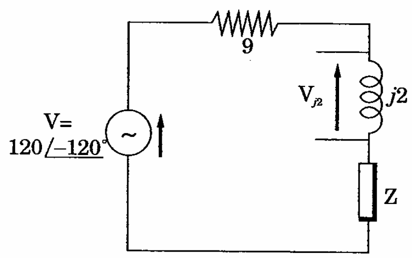


Figura 6-43

6.27 Um circuito em série é constituído de uma resistência $R = 1$ ohm, uma reatância indutiva $jX_L = j4$ ohms e uma terceira impedância **Z**. Qual é a impedância **Z**, sendo $\mathbf{V} = 50\angle 45^\circ$ a tensão aplicada e $\mathbf{I} = 11{,}2\angle 108{,}4^\circ$ a corrente resultante?
Resp.: $\mathbf{Z} = 1 - j8$.

6.28 Um circuito em série de três elementos contém uma impedância $L = 0{,}02$ H. A tensão aplicada e a corrente resultante estão mostradas no diagrama da Fig. 6-44. Quais são os outros dois elementos do circuito, sendo $\omega = 500$ rad/s?
Resp.: $R = 10\ \Omega$; $L = 0{,}04$ H.

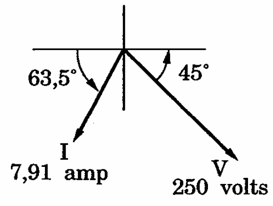


Figura 6-44

6.29 Calcular **Z** e **I** correspondentes ao diagrama de fasores da Fig. 6-45.
Resp.: $\mathbf{Z} = 2 - j0{,}5$; $\mathbf{Y} = 0{,}47 + j0{,}1175$.

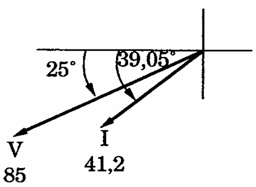


Figura 6-45

6.30 Para determinar a resistência R e a indutância L de uma bobina fazemos a ligação série da bobina com um resistor $r = 25$ ohms e uma fonte de 120 volts, 60 Hz. Em seguida, medimos as tensões no resistor, $V_r = 70{,}8$ volts e nos terminais da bobina $V_{bob} = 86$ volts. Calcule R e L.
Resp.: $R = 5$ ohms, $L = 79{,}6$ mH.

6.31 Uma combinação série de R e C está ligada em série com uma resistência de 15 ohms. Aplicando-se ao conjunto uma fonte de 120 volts, 60 Hz, as tensões eficazes nos terminais do conjunto RC e do resistor puro são, respectivamente, 87,3 e 63,6 volts. Determinar R e C.
Resp.: $R = 5$ ohms; $C = 132{,}5\ \mu$F.

6.32 Determinar $\mathbf{Z}_{eq}$ e $\mathbf{Y}_{eq}$ do circuito em paralelo de dois ramos mostrado na Fig. 6-46. Calcular a corrente para cada circuito equivalente.
Resp.: $\mathbf{Z}_{eq} = 18{,}6\underline{/7{,}15^\circ}$; $\mathbf{Y}_{eq} = 0{,}0538\underline{/-7{,}15^\circ}$; $\mathbf{I}_T = 10{,}75\underline{/-7{,}15^\circ}$.

6.33 Determinar a
da Fig. 6-47.
Resp.: $16\underline{/25}$

6.34 Determinar $\mathbf{I}$
comparar co
Resp.: $\mathbf{I}_T = 1$

6.35 A Fig. 6-49
paralelo de d
Resp.: $\mathbf{Z}_1 = 2$

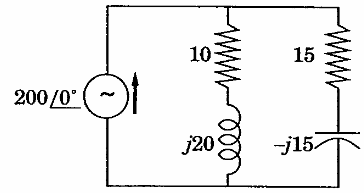


Figura 6-46

6.33 Determinar as correntes dos ramos e a corrente total do circuito em paralelo da Fig. 6-47. Construir o diagrama de fasores, mostrando $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_T$.
Resp.: $16\angle 25^\circ$; $12\angle 0^\circ$; $27{,}4\angle 14{,}3^\circ$.

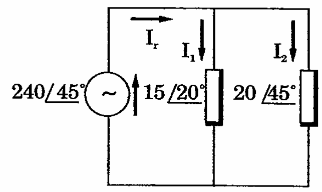


Figura 6-47

6.34 Determinar $\mathbf{I}_T$ no circuito emparalelo da Fig. 6-48. Achar $\mathbf{Z}_{eq}$ da relação $\mathbf{V}/\mathbf{I}_T$ e comparar com $\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2/(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)$.
Resp.: $\mathbf{I}_T = 17{,}9\angle 42{,}4^\circ$; $\mathbf{Z}_{eq} = 5{,}59\angle -12{,}4^\circ$.

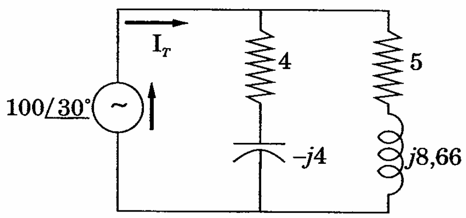


Figura 6-48

6.35 A Fig. 6-49 mostra o diagrama de fasores correspondente a um circuito em paralelo de dois ramos. Determinar as impedâncias dos ramos $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$.
Resp.: $\mathbf{Z}_1 = 2{,}5 + 20$; $\mathbf{Z}_2 = 15\angle -90^\circ$.

ância L = 0,02 H. A
o diagrama da Fig.
ω = 500 rad/s?

g. 6-45.

bobina fazemos a
fonte de 120 volts,
= 70,8 volts e nos

na resistência de 15
60 Hz, as tensões
o, respectivamente,

s mostrado na Fig.

',15°.

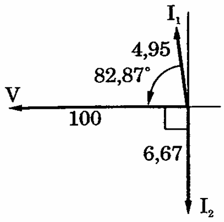


Figura 6-49

6.36 A tensão aplicada e as correntes em um circuito paralelo de dois ramos são as indicadas no diagrama de fasores da Fig. 6-50. Achar as impedâncias dos ramos, $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$.
Resp.: $\mathbf{Z}_1 = 11{,}55 - j20$; $\mathbf{Z}_2 = 27{,}6 + j11{,}75$.

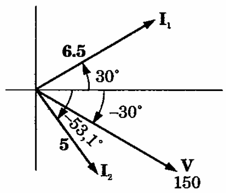


Figura 6-50

6.37 Dados $\mathbf{I}_1 = 2\underline{/-30^\circ}$ e $\mathbf{I}_T = 4{,}47\underline{/33{,}4^\circ}$, achar $\mathbf{Z}_2$ na Fig. 6-51.
Resp.: $\mathbf{Z}_2 = -j5$.

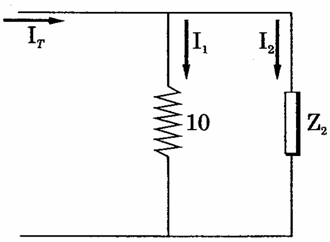


Figura 6-51

6.38 Determinar Y
gando admitâ
Resp.: $\mathbf{Y}_{eq}$ = (

150/45

6.39 Calcular $\mathbf{Z}_{eq}$ e
Resp.: $\mathbf{Z}_{eq}$ = 2

6.40 Dados **V** = 50
Resp.: Z = 5/-

V

6.41 Determinar **Z**,
Resp.: **Z** = 5/4

6.38 Determinar $\mathbf{Y}_{eq}$ e $\mathbf{Z}_{eq}$ do circuito de 4 ramos em paralelo da Fig. 6-52, empregando admitância. Calcular $\mathbf{I}_T$ do circuito equivalente.
Resp.: $\mathbf{Y}_{eq} = 0{,}22\angle{-58^\circ}$; $\mathbf{Z}_{eq} = 4{,}55\angle{58^\circ}$; $\mathbf{I}_T = 33\angle{-13^\circ}$.

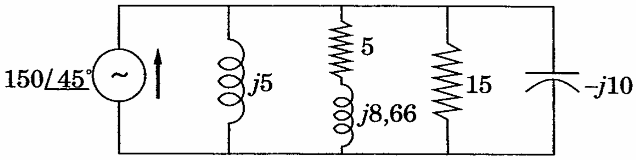


Figura 6-52

6.39 Calcular $\mathbf{Z}_{eq}$ e $\mathbf{Y}_{eq}$ do circuito paralelo mostrado na Fig. 6-53.
Resp.: $\mathbf{Z}_{eq} = 2{,}87\angle{27^\circ}$; $\mathbf{Y}_{eq} = 0{,}348\angle{-27^\circ}$.

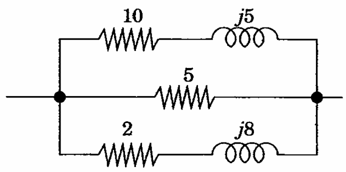


Figura 6-53

6.40 Dados $\mathbf{V} = 50\angle{30^\circ}$ e $\mathbf{I}_T = 27{,}9\angle{57{,}8^\circ}$, determinar $\mathbf{Z}$, na Fig. 6-54.
Resp.: $Z = 5\angle{-30^\circ}$.

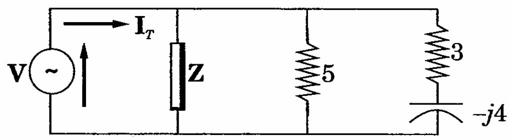


Figura 6-54

6.41 Determinar $\mathbf{Z}$, na Fig. 6-55, conhecidos $\mathbf{V} = 100\angle{90^\circ}$ e $\mathbf{I}_T = 50{,}2\angle{102{,}5^\circ}$.
Resp.: $\mathbf{Z} = 5\angle{45^\circ}$.

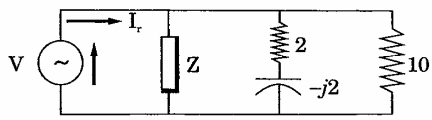


Figura 6-55

dois ramos são as
s impedâncias dos

6.42 Um conjunto série R e C está em paralelo com um resistor de 20 ohms. Aplicada ao circuito uma fonte de 60 Hz, a corrente total é 7,02 ampères, a corrente no resistor de 20 ohms é 6 ampères e no ramo RC é 2,3 ampères. Determinar R e C.
Resp.: R = 15 ohms; C = 53,1 μF.

6.43 Dada a Fig. 6-56, determinar R e X_L sendo 29,9 ampères a corrente eficaz total, 8 ampères a corrente em R e 22,3 ampères a corrente do conjunto RL em paralelo.
Resp.: R = 5,8 ohms; X_L = 14,5 ohms.

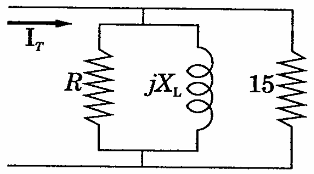


Figura 6-56

6.44 Determinar a tensão $\mathbf{V}_{AB}$ no circuito da Fig. 6-57.
Resp.: $28{,}52\underline{/183{,}68^\circ}$.

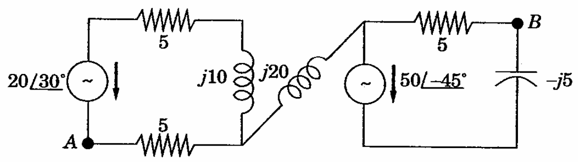


Figura 6-57

6.45 Um voltímetro colocado nos terminais do resistor de 3 ohms da Fig. 6-58 indica 45 volts. Qual é a leitura do amperímetro?
Resp.: 19,4 ampères.

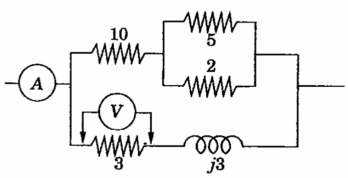


Figura 6-58

6.46 Determinar a
marca 45 volt
Resp.: 18 am

6.47 Calcular a ten
Resp.: 25,2 vc

6.48 O valor eficaz
valores corres
qualquer **V** e c
Resp.: 54,3 vc

6.49 Determinar o
sendo de 50 v
Resp.: 54,6 vo

6.46 Determinar a leitura do amperímetro da Fig. 6-59 sabendo que o voltímetro marca 45 volts nos terminais do resistor de 5 ohms.
Resp.: 18 ampères.

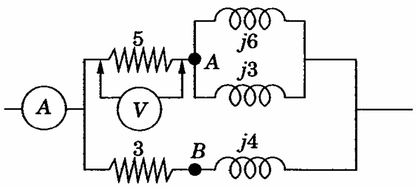


Figura 6-59

6.47 Calcular a tensão eficaz entre os pontos *A* e *B* do circuito do Probl. 6.46.
Resp.: 25,2 volts.

6.48 O valor eficaz da tensão entre os pontos *A* e *B* da Fig. 6-60 é 25 volts. Achar os valores correspondentes de **V** e $\mathbf{I}_T$. *Sugestão:* Supor um valor conveniente para qualquer **V** e determinar $\mathbf{V}'_{AB}$ correspondente. Depois: $\mathbf{V}/25 = \mathbf{V}'/\mathbf{V}'_{AB}$.
Resp.: 54,3 volts; 14,2 ampères.

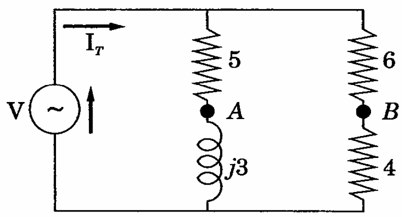


Figura 6-60

6.49 Determinar o valor eficaz da fonte de tensão, no circuito paralelo da Fig. 6-61, sendo de 50 volts a diferença de potencial entre *A* e *B*.
Resp.: 54,6 volts.

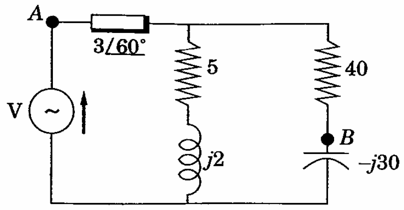


Figura 6-61

6.50 Reportando-se à Fig. 6-62, verificar que, para quaisquer valores de R e X_L, o valor eficaz de $\mathbf{V}_{AB}$ é constante e igual a 50 volts.

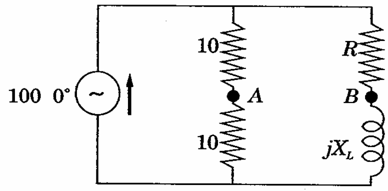


Figura 6-62

POTÊNCIA E CORREÇÃO DO FATOR DE POTÊNCIA

Introdução

Em diversos equipamentos elétricos, o maior interesse reside na potência. Por exemplo, temos interesse na potência gerada por um alternador, na potência à entrada de um motor elétrico ou na potência de saída de um transmissor de rádio ou de televisão.

Se a tensão, na Fig. 7-1, for função do tempo, a corrente resultante será, também, função do tempo e sua amplitude dependerá dos elementos da estrutura passiva. O produto da tensão pela corrente, em qualquer instante, se chama potência instantânea e é dado por:

$$p = vi$$

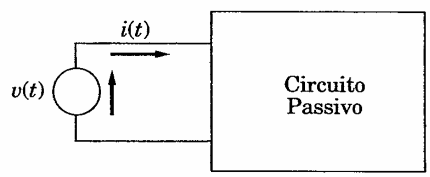


Figura 7-1

A potência p pode tomar valores positivos e negativos, dependendo do instante que se considere. Uma p positiva indica uma transferência de energia da fonte para a estrutura, ao passo que o valor negativo de p corresponde a uma transferência de energia da estrutura para a fonte.

Potência em Regime Estacionário Senoidal – Potência Média (P)

Consideremos o caso ideal em que a estrutura passiva consta apenas de um elemento indutivo e apliquemos a ela uma tensão senoidal da forma $v = V \text{ sen } \omega t$. A corrente resultante terá a forma $i = I \text{ sen } (\omega t - \pi/2)$. A potência em qualquer instante será:

$$p = vi = V_m I_m (\text{sen } \omega t)\, [\text{sen } (\omega t - \pi/2)]$$

Como $\text{sen } (\omega t - \pi/2) = -\cos \omega t$ e $2 \text{ sen } x \cos x = \text{sen } 2x$, temos:

$$p = -\frac{1}{2} V_m \text{ sen } 2\omega t$$

O resultado acima está ilustrado na Fig. 7-2. Quando v e i são positivas, a potência p é positiva e a energia é fornecida da fonte para a indutância. Quando v e i são de sinais opostos, a potência é negativa e a energia retorna da indutância para a fonte. A potência tem uma freqüência dupla da tensão da corrente. O valor médio da potência, indicado por P, é nulo para um ciclo completo.

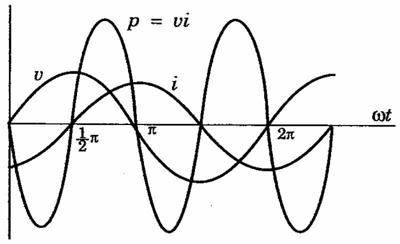


Figura 7-2 Estrutura com L pura.

No caso ideal de uma estrutura capacitiva pura obtêm-se resultados análogos, como mostra a Fig. 7-3.

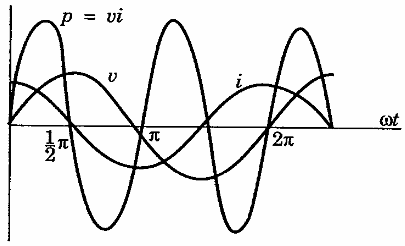


Figura 7-3 Estrutura com C pura.

Se aplicarmos, agora, uma tensão $v = V_m$ sen ωt a uma estrutura que só contenha resistência, a corrente será $i = I_m$ sen ωt e a potência correspondente

$$p = vi = V_m I_m \text{ sen}^2\, \omega t$$

Como $\text{sen}^2\, x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, temos:

$$p = \frac{1}{2} V_m I_m (1 - \cos 2\omega t)$$

A Fig. 7-4 ilustra este resultado. Verifica-se que, também aqui, a potência tem freqüência dupla da tensão ou da corrente. Além disso, a potência é sempre positiva e varia de zero ao valor máximo $V_m\, I_m$. O valor médio da potência é $P = \frac{1}{2} V_m I_m$.

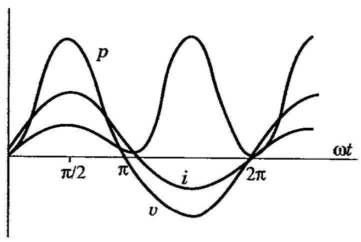


Figura 7-4 Estrutura com R pura.

Finalmente consideremos o caso de um circuito passivo geral. Aplicada uma tensão senoidal $v = V_m$ sen ωt, teremos uma corrente resultante $i = I_m$ sen $(\omega t + \phi)$. O ângulo de fase ϕ será positivo ou negativo, dependendo do caráter capacitivo ou indutivo da estrutura. Então,

$$p = vi = V_m I_m \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} (\omega t + \phi)$$

Como $\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ e $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$:

$$p = \frac{1}{2} V_m I_m [\cos \phi - \cos (2\omega t + \phi)]$$

A potência instantânea p consta de um termo senoidal $-1/2\ V_m I_m \cos (2\omega t + \phi)$, cujo valor médio é zero, e de um termo constante $1/2\ V_m I_m \cos \phi$. Logo, o valor médio de p é

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi = VI \cos \phi$$

onde $V = V_m/\sqrt{2}$ e $I_m/\sqrt{2}$ são os valores eficazes dos fasores V e I, respectivamente.

O termo $\cos \phi$ é chamado *fator de potência*. O ângulo ϕ é o ângulo entre **V** e **I** e seu valor está sempre entre + 90° e –90°. Portanto, $\cos \phi$ e, conseqüentemente, P são sempre positivos. Entretanto, para indicar o sinal de ϕ, diz-se que um *circuito indutivo*, que tem a corrente atrasada em relação à tensão, tem um *fator de potência atrasado*. Num *circuito capacitivo*, a corrente está adiantada em relação à tensão; diz-se que ele tem um *fator de potência adiantado*.

A potência média P pode também ser obtida da expressão

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt$$

O watt (W) e o quilowatt (kW) = 1000 W são unidades usadas para a potência média.

Potência Ap

O produt
N. A unidade N é
ampère (kVA) = 1(

Potência Re

O produto
Q. Sua unidade é
é o quilovolt-ampè

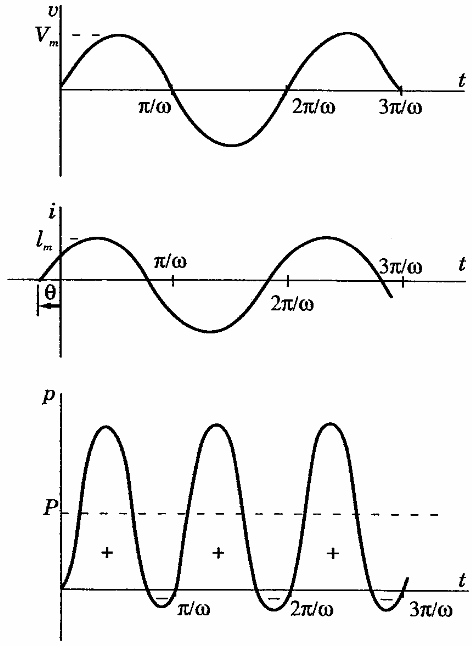


Figura 7-5

Potência Aparente (N)

O produto *VI* chama-se *potência aparente* e representa-se pelo símbolo *N*. A unidade *N* é o volt-ampère (VA) e o seu múltiplo mais usado é o quilovolt-ampère (kVA) = 1000 VA.

Potência Reativa (Q)

O produto *VI* sen ϕ chama-se *potência reativa* e indica-se pelo símbolo *Q*. Sua unidade é o volt-ampère-reativo (VAR) e o seu múltiplo mais empregado é o quilovolt-ampère-reativo (kVAR) = 1000 VAR.

Triângulo das Potências

As equações que exprimem as potências médias, aparente e reativa podem ser desenvolvidas geometricamente em um triângulo retângulo chamado *triângulo das potências*.

Dado um circuito indutivo, representa-se a corrente atrasada e a tensão nos terminais, como mostra a Fig. 7-6(a), tomando **V** como referência. Na Fig. 7-6(b) representou-se a corrente com seus componentes em fase e em quadratura. A componente em fase está em fase com **V** e a componente em quadratura ou reativa é normal a **V** ou 90° fora de fase. Na Fig. 7-6(c) repetiu-se o diagrama, multiplicando **I**, **I** sen ϕ e **I** cos ϕ pelo valor eficaz da tensão, V. Tem-se:

Potência média P = tensão × componente em fase da corrente = $VI \cos \phi$

Potência aparente* N = tensão × corrente = VI

Potência reativa Q = tensão × componente em quadratura da corrente = VI sen ϕ

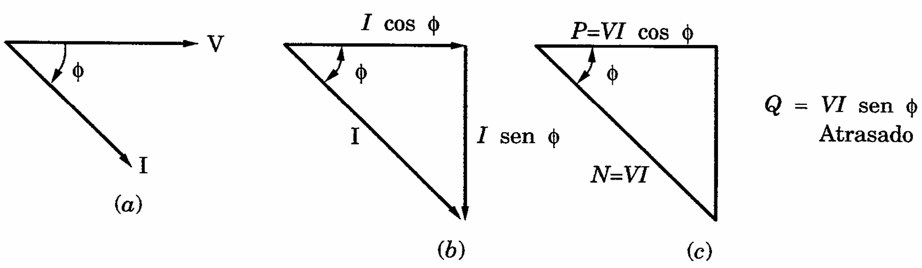


Figura 7-6 Triângulo das potências, carga indutiva.

Procedimento semelhante pode ser aplicado a uma corrente adiantada como na Fig. 7-7. O triângulo das potências, quando a carga é capacitiva, tem o cateto Q acima da horizontal.

* N. R. É muito comum a utilização do símbolo S para indicar potência aparente. A escolha fica a critério do professor.

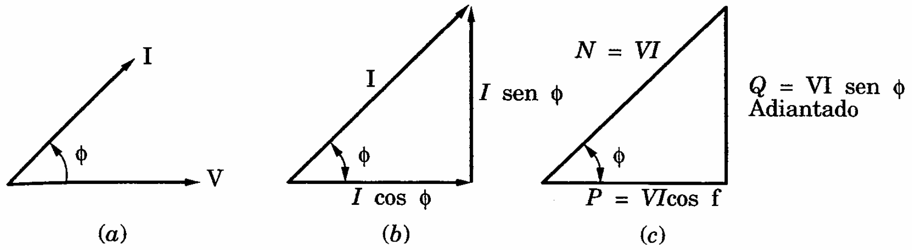


Figura 7-7 Triângulo das potências, carga capacitiva.

Potência Complexa

Os três lados, N, P e Q, do triângulo das potências podem ser obtidos do produto $\mathbf{VI}^*$, cujo resultado é um número complexo, chamado *potência complexa* $\mathbf{N}$. Sua parte real é igual à potência média P e sua parte imaginária igual à potência reativa Q.

Seja $\mathbf{V} = Ve^{j\alpha}$ e $\mathbf{I} = Ie^{j(\alpha+\phi)}$. Então,

$$\mathbf{N} = \mathbf{VI}^* = Ve^{j\alpha}Ie^{-j(\alpha+\phi)} = VIe^{-j\phi} = VI\cos\phi - jVI\,\text{sen}\,\phi = P - jQ$$

O módulo de $\mathbf{N}$ é a potência aparente $N = VI$. Um ângulo de fase adiantado (**I** adiantada em relação à **V**) determina uma potência Q adiantada, ao passo que um ângulo de fase atrasado indica Q atrasada. Deve-se ter isso em mente ao construir-se o triângulo das potências.

A seguir, apresentamos um resumo de equações que podem ser empregadas na determinação das componentes do triângulo das potências.

Potência média $P = VI\cos\phi = I^2R = V_R^2/R = \text{Re }\mathbf{VI}^*$

Potência reativa $Q = VI\,\text{sen}\,\phi = I^2X = V_X^2/X = \text{Im }\mathbf{VI}^*$

Potência aparente $N = VI = I^2Z = V^2/Z$ = valor absoluto de $\mathbf{VI}^*$

Fator de potência fp $= \cos\phi = R/Z = P/N$

Exemplo 1 Dado um circuito de impedância $\mathbf{Z} = 3 + j4$ e uma tensão aplicada $\mathbf{V} = 100\angle 30^\circ$, determine o triângulo das potências.

A corrente é $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z} = (100\angle 30^\circ)/(5\angle 53{,}1^\circ) = 20\angle -23{,}1^\circ$.

Método 1

$$P = I^2R = (20)^2 3 = 1200 \text{ W}$$

$$Q = I^2X = 1600 \text{ VAR atrasada}$$

$$N = I^2Z = 2000 \text{ VA}$$

$$\text{fp} = \cos 53{,}1^\circ = 0{,}6 \text{ atrasado}$$

Método 2

$$N = VI = 100(20) = 2000 \text{ VA}$$

$$P = VI \cos\phi = 2000 \cos 53{,}1^\circ = 1200 \text{ W}$$

$$Q = VI \operatorname{sen}\phi = 2000 \operatorname{sen} 53{,}1^\circ = 1600 \text{ VAR atrasada}$$

$$\text{fp} = \cos\phi = \cos 53{,}1^\circ = 0{,}6 \text{ atrasado}$$

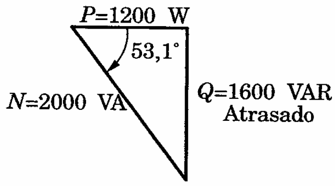


Figura 7-8

Método 3

$$N = \mathbf{VI}^* = (100\angle 30^\circ)(20\angle 23{,}1^\circ) = 2000\angle 53{,}1^\circ = 1200 + j1600, \text{ donde}$$

$P = 1200$ W, $Q = 1600$ VAR atrasada, $N = 2000$ VA e fp $= \cos 53{,}1^\circ = 0{,}6$ atrasado

Método 4

$\mathbf{V}_R = \mathbf{I}R =$

Logo, $P =$

$Q =$

$N =$

fp =

Deve-se t

engano mais freq
apenas, por V, ten

Correção do

Nas aplic
sentam indutivas
potência média P,
de tempo que a ca
por intermédio de

Como um
zado à tensão fix
máxima permitid
fosse a ele ligad
potência média fo

Com relaç
ção da carga no sis
útil fornecida. É,
isto é, que o ângul
se aproxime da un

No caso c
tar o fator de potê
se que, como a te
útil, P, não varia.

Método 4

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{I}R = 20\underline{/-23{,}1^\circ}(3) = 60\underline{/-23{,}1^\circ},\ \mathbf{V}_X = (20\underline{/-23{,}1^\circ})(4\underline{/90^\circ}) = 80\underline{/66{,}9^\circ}$$

Logo, $P = V_R2/R = 60^2 3 = 1200$ W

$Q = V_X2/X = 80^2/4 = 1600$ VAR atrasada

$N = V^2/Z = 100^2/5 = 2000$ VA

fp $= P/N =$ 0,6 atrasado

Deve-se ter cuidado ao substituir os valores na equação $P = V_R2/R$. O engano mais freqüente é substituir-se V_R, tensão nos terminais do resistor apenas, por V, tensão total na impedância $\mathbf{Z}$.

Correção do Fator de Potência

Nas aplicações residenciais e industriais comuns, as cargas se apresentam indutivas e a corrente é atrasada em relação à tensão aplicada. A potência média P, fornecida à carga, é uma medida do trabalho útil por unidade de tempo que a carga pode executar. Essa potência, usualmente, é transmitida por intermédio de linhas de distribuição e transformadores.

Como um transformador, especificado em kVA, é, muitas vezes, utilizado à tensão fixa, os kVA são, simplesmente, uma indicação da corrente máxima permitida. Teoricamente, se uma carga indutiva ou capacitiva pura fosse a ele ligada, o transformador poderia ser plenamente carregado e a potência média fornecida seria nula.

Com relação ao triângulo das potências, a hipotenusa N dá uma indicação da carga no sistema de distribuição, ao passo que o cateto P mede a potência útil fornecida. É, portanto, desejável que N se aproxime o mais possível de P, isto é, que o ângulo ϕ se aproxime de zero, ou seja, que o fator de potência cos ϕ se aproxime da unidade.

No caso comum de uma carga indutiva é quase sempre possível aumentar o fator de potência colocando capacitores em paralelo com a carga. Observe-se que, como a tensão nos terminais da carga permanece a mesma, a potência útil, P, não varia. Como o fator de potência é aumentado, a corrente e a potência aparente diminuem e obtém-se uma utilização mais eficiente do sistema de distribuição. Quando isto não ocorre, torna-se necessário efetuar uma correção do fator de potência do circuito.

Exemplo 2 Corrigir para 0,9 atrasado o fator de potência do circuito do exemplo 1, acrescentando capacitores em paralelo. Achar N', após a correção, e os vários capacitores necessários.

Partimos do triângulo das potências do Exemplo 1. Como cos $\phi' = 0{,}9$, vem $\phi' = 26°$.

$$N' = P/\cos\phi' = 1200/\cos 26° = 1333$$

Então, $Q' = N' \operatorname{sen}\phi' = 1333 \operatorname{sen} 26° = 585$ VAR, atrasado.

A potência reativa dos capacitores será:

$$Q - Q' = 1600 - 585 = 1015, \text{ adiantado}$$

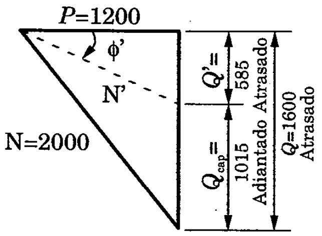


Figura 7-9

Como P permanece invariável, não muda também o trabalho, após a correção do fator de potência. O valor de N, entretanto, foi reduzido de 2000 para 1333 VA.

Problemas Resolvidos

7.1 Dado um circuito em que, aplicada a tensão $\mathbf{V} = 150 \operatorname{sen}(\omega t + 10°)$, a corrente resultante é $i = 5 \operatorname{sen}(\omega t - 50°)$, determinar o triângulo das potências.

$$\mathbf{V} = (150/\sqrt{2})/10° = 106\angle 10° \quad \text{e} \quad \mathbf{I} = (5/\sqrt{2})\angle -50° = 3{,}54\angle -50°.$$

$$\text{Então, } N = \mathbf{VI}^* = (106\angle 10°)(3{,}54\angle 50°) = 375\angle 60° = 187{,}5 + j325.$$

donde:

P = Re V

Q = Im V

N = | VI

fp = cos

7.2 Em um circui
potência é 0,
determinar as

Sob a forma

$P = VI \cos \phi$;

Como o fator

do em relaçã

A impedânci

Por ser $\mathbf{Z}$ =

R = 2,6 ohr

Outro método

Fazendo I =
Então:

$\mathbf{Z} = Z\angle -45°$ =

$C = 1/\omega X_C$ =

donde:

$P = \text{Re}\,\mathbf{VI}^* = 187{,}5$ W

$Q = \text{Im}\,\mathbf{VI}^* = 325$ VAR, atrasado

$N = |\mathbf{VI}^*| = 375$ VA

fp = cos 60° = 0,5 atrasado

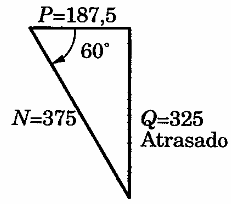


Figura 7-10

7.2 Em um circuito em série de dois elementos, a potência é 940 watts e o fator de potência é 0,707 adiantado. Sendo $v = 99$ sen $(6000t + 30°)$ a tensão aplicada, determinar as constantes do circuito.

Sob a forma de fasor, a tensão aplicada é $\mathbf{V} = (99/\sqrt{2})\,\angle 30^\circ = 70\angle 30^\circ$

$P = VI\cos\phi$; $940 = 70\,\text{I}(0{,}707)\ \therefore\ I = 19$ ampères.

Como o fator de potência é 0,707 adiantado, o fasor corrente está adiantado em relação à tensão do ângulo arc tg 0,707 = 45°. Logo, $\mathbf{I} = 19\angle 75^\circ$.

A impedância do circuito $\mathbf{Z} = \mathbf{V}/\mathbf{I} = (70\angle 30^\circ)/(19\angle 75^\circ) = 3{,}68\angle -45^\circ = 2{,}6 - j2{,}6$

Por ser $\mathbf{Z} = R - jX_C$ e $X_C = 1/\omega C$, temos:

$$R = 2{,}6 \text{ ohms e } C = \frac{1}{6000\,(2{,}6)} = 64{,}1\ \mu F$$

Outro método

Fazendo $I = 19$ ampères em $P = RI^2$ resulta $940 = R(19)^2\ \therefore\ R = 2{,}6$ ohms. Então:

$\mathbf{Z} = Z\angle -45^\circ = 2{,}6 - j \times X_C$ e $X_C = 2{,}6$. Logo,

$C = 1/\omega X_C = 64{,}1\ \mu\text{F}$

7.3 Dado o circuito em série da Fig. 7-11, determinar o triângulo das potências.

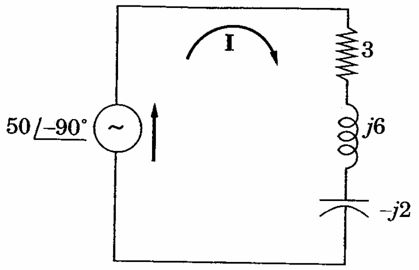


Figura 7-11

Da Fig. 7-11, $\mathbf{Z} = 3 + j6 - j2 = 3/53{,}1^\circ$ e $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z} = (50\angle -90^\circ)/(5\angle 53{,}1^\circ) =$ $= 10\angle -143{,}1^\circ$. Então,

$N = \mathbf{VI}^* = (50\angle -90^\circ)(10\angle 143{,}1^\circ) = 500\angle 53{,}1^\circ = 300 + j400$

As componentes do triângulo das potências estão indicadas na Fig. 7-12.

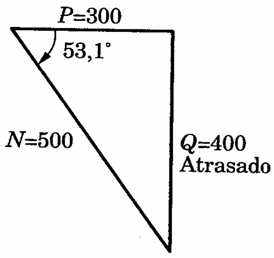


Figura 7-12

Outro método

Substituindo $I = 10$ ampères na equação da potência de cada elemento, $P = I^2R = 10^2(3) = 300$ W, $Q_{j6} = 10^2(6) = 600$ VAR atrasado, $Q_{-j2} = 10^2(2) =$ $= 200$ VAR adiantado e $Q = Q_{j6} + R_{-j2} = 600 - 200 = 400$ VAR atrasado.

7.4 A corrente efi
potências.

Fazendo

$\mathbf{I}_T = 30\angle 0^\circ$,

$18{,}45\angle -12{,}55$

Logo,

$P = \mathbf{I}_2^2 R$

$Q = I_1^2 X$

$N = P -$

$\text{fp} = P/N$

Esses resultad

$\mathbf{Z}_{eq} = \dfrac{(5 - j3}{9 - j}$

$P = I_T^2 R = 30$

7.5 No circuito em
potência em cad

7.4 A corrente eficaz total no circuito da Fig. 7-13 é 30 ampères. Determinar as potências.

Fazendo

$$\mathbf{I}_T = 30\underline{/0^\circ},\ \mathbf{I}_2 = 30\underline{/0^\circ}\left(\frac{5 - j3}{9 - j3}\right) =$$

$$18{,}45\underline{/-12{,}55^\circ} \ \text{ e } \ \mathbf{I}_1 = 30\underline{/0^\circ}\left(\frac{4}{9 - j3}\right) =$$

$$= 12{,}7\underline{/18{,}45^\circ}.$$

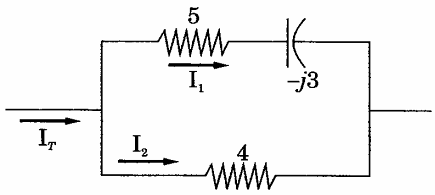


Figura 7-13

Logo,

$$P = \mathbf{I}_2^2 R_4 = I_1^2 R_5 = (18{,}45)^2\ (4) + (12{,}7)^2\ (5) = 2165\ \text{W}$$

$$Q = I_1^2 X = (12{,}7)^2\ (3) = 483\ \text{VAR adiantado}$$

$$N = P - jQ = 2165 - j483 = 2210\underline{/-12{,}6^\circ},\ N = 2210\ \text{VA}$$

$$\text{fp} = P/N = 2165/2210 = 0{,}98\ \text{adiantado}$$

Esses resultados podem ser encontrados calculando-se a impedância

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{(5 - j3)\ 4}{9 - j3} = 2{,}4 - 0{,}533.\ \text{Daí}$$

$$P = I_T 2R = 30^2(2{,}4) = 2160\ \text{W e } Q = 30^2(0{,}533) = 479{,}7\ \text{VAR adiantado}$$

7.5 No circuito em paralelo da Fig. 7-14 a potência total é 1100 watts. Calcular a potência em cada resistor e a leitura do amperímetro.

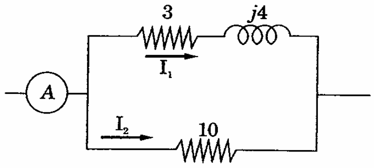


Figura 7-14

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_1} = \frac{\mathbf{V}}{3 + j4} = \frac{\mathbf{V}}{5\,\underline{/53{,}1^\circ}},$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_2} = \frac{\mathbf{V}}{10}$$

A relação entre os módulos das correntes é $\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{V/5}{V/10} = \dfrac{2}{1}$. Partindo de $P = I^2R$, as relações entre as potências dos resistores de 3 e de 10 ohms é

$$\frac{P_3}{P_{10}} = \frac{I_1^2R_1}{I_2^2R_2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$$

Como $P_T = P_3 + P_{10}$, dividindo ambos os termos por P_{10}, $P_T/P_{10} = P_3/P_{10} + 1$ e

$P_{10} = 1100(5/11) = 500$ W, $P_3 = 1100 - 500 = 600$ W

Assim, $P = I^2R$, $I_1 2(3) = 600$ e $I_1 = 14{,}14$. Fazendo $\mathbf{V} = V\underline{/0^\circ}$

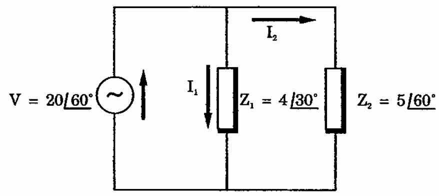
$\mathbf{I}_1 = 14{,}14\underline{/-53{,}1^\circ} = 8{,}48 - j11{,}31$

$\mathbf{I}_2 = 7{,}07\underline{/0^\circ} = 7{,}07$

$\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 15{,}55 - j11{,}31 = 19{,}25\underline{/-36^\circ}$

A leitura do medidor é 19,25 ampères.

7.6 Determinar o triângulo das potências de cada ramo do circuito da Fig. 7-15 e somá-los para obter o triângulo do circuito todo.



Ramo 1. Figura 7-15

$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_1 = (20\angle 60^\circ)/(4\angle 30^\circ) = 5\angle 30^\circ$

$\mathbf{N}_1 = \mathbf{VI}_1^* = (20\angle 60^\circ)(5\angle -30^\circ) = 100\angle 30^\circ$

$= 86{,}6 + j50$

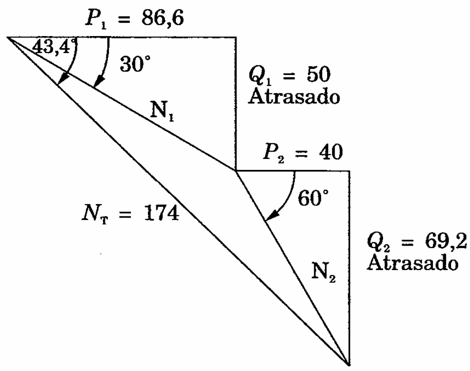
Logo,

$P_1 = \text{Re}\ \mathbf{VI}_1^* = 86{,}6$ W

$Q_1 = \text{Im}\ \mathbf{VI}_1^* = 50$ VARS atrasado

$N_1 = |\mathbf{VI}_1^*| = 100$ VA

$\text{fp}_1 = P_1/N_1 = 0{,}866$ atrasado



Ramo 2. Figura 7-16

$\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_2 \;= (20\angle 60°)/(5\angle 60°) = 4\angle 0°$

$\mathbf{N}_2 = \mathbf{V}\mathbf{I}_2{}^* \;= (20\angle 60°)(4\angle 0°) = 80\angle 60°$

$= 40 + j69{,}2$

Logo,

$P_2 = 40$ W

$Q_2 = 69{,}2$ VAR atrasado

$N_2 = 80$ VA

$\text{fp}_2 = 0{,}5$ atrasado

Dos resultados e pela Fig. 7-16, obtém-se o triângulo das potências totais:

$P_T = P_1 + P_2 = 86{,}6 + 40 = 12{,}6$ W $\quad Q_T = Q_1 + Q_2 = 50 + 69{,}2 = 119{,}2$ VAR atrasado

Como $N_T = P_T + jQ_T = 126{,}6 + j119{,}2 = 174\angle 43{,}4°$,

$N_T = |\mathbf{N}_T| = 174$ VA e $f\text{p}_T = P_T/S_T = 125{,}6/174 = 0{,}727$ atrasado

7.7 Um motor de indução cuja saída é 2HP tem rendimento de 85%. Com essa carga, o fator de potência é 0,8 atrasado. Determinar as potências de entrada.

$S \;= 1755/0{,}8 = 2190$ VA, $\phi = \cos^{-1}(0{,}8) = 36{,}9°$, $Q = 2190 \text{ sen } 36{,}9° =$
$= 1315$ VARS atrasado

7.8 Determinar o triângulo das potências totais do circuito em paralelo da Fig. 7-17, sendo de 20 watts a potência no resistor de 2 ohms.

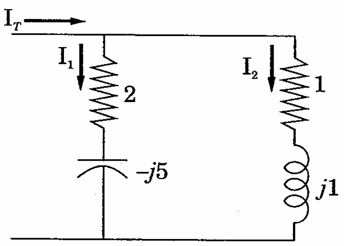


Figura 7-17

De $P = I^2R$
= 3,16 amp
= 17 volts. S
ou $\mathbf{I}_2$ = 12,0
$\mathbf{I}_T$ = 11,16
Para calcul
de N_T. Tem
$\mathbf{N}_T = \mathbf{V}\mathbf{I}_T{}^*$
P_T = 164,5
= 0,867 atr

7.9 Determinar
especificada
fator de potê

Carga 1

Dados N =
$P = N \cos$
sen 60° = 2

Carga 2

Dados P =
$N = P/\cos$
= 135 VA a

Carga 3

Dados N =
ϕ = arc sen
=283 W
Então, P_T
atrasado
Como N_T
N_T

De $P = I^2R$ temos $I^2_1(2) = 20$ e $I_1 =$
$= 3{,}16$ ampères. Como $\mathbf{Z}_1 = 2 - j5 = 5{,}38\angle{-68{,}2^\circ}$, $V = \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_1 = 3{,}16(5{,}38)$
$= 17$ volts. Sendo $\mathbf{V} = 17\angle{0^\circ}$; então, $\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_1$ ou $\mathbf{I}_1 = 3{,}16\angle{68{,}2^\circ}$, $\mathbf{I}_2$,$\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_2$
ou $\mathbf{I}_2 = 12{,}02\angle{-45^\circ}$, $\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 9{,}67 - j5{,}57$ ou
$\mathbf{I}_T = 11{,}16\angle{-29{,}9^\circ}$(A)

Para calcularmos as componentes do triângulo das potências, precisamos de N_T. Temos:

$\mathbf{N}_T = \mathbf{VI}_T^* = 17\angle{0^\circ}(11{,}16\angle{29{,}9^\circ}) = 189{,}72\angle{29{,}9^\circ} = 164{,}5 + j94{,}6$

$P_T = 164{,}5$ W, $Q_T = 94{,}6$ VARS atrasado, $\mathbf{N}_T = 189{,}8$ VA, $\cos\phi = 164{,}5/189{,}8 =$
$= 0{,}867$ atrasado

7.9 Determinar as potências de uma associação de três cargas individuais, assim especificadas: carga 1, 250 VA, fator de potência 0,5 atrasado; carga 2, 180 W, fator de potência 0,8 adiantado; carga 3, 300 VA, 100 VARS atrasados.

Carga 1

Dados $N = 250$ VA, $\cos\phi = 0{,}5$ atrasado.

$P = N\cos\phi = 250(0{,}5) = 125$ W, $\phi =$ arc cos $0{,}5 = 60^\circ$, $Q = N$ sen $\phi = 250$ sen $60^\circ = 216$ VARS atrasado

Carga 2

Dados $P = 180$ W, $\cos\phi = 0{,}8$ adiantado.

$N = P/\cos\mathbf{Z} = 180/0{,}8 = 225$ VA, $\phi =$ arc cos $0{,}8 = 36{,}9^\circ$, $Q = 225$ sen $36{,}9^\circ =$
$= 135$ VA adiantando

Carga 3

Dados $N = 300$ VA, $Q = 100$ VARS atrasado.

$\phi =$ arc sen $(Q/N) =$ arc sen $(100/300) = 19{,}5^\circ$, $P = N\cos\phi = 300\cos 19{,}5^\circ =$
$=283$ W

Então, $P_T = 125 + 180 + 283 = 588$ W, $Q_T = 216 - 135 + 100 = 181$ VARS atrasado

Como $N_T = P_T + jQ_T = 588 + j181 = 616\angle{17{,}1^\circ}$,

$N_T = 616$ VA e $\cos\phi = P/N = 588/616 = 0{,}955$ atrasado

A Fig. 7-18 mostra os triângulos das potências de cada carga e o total.

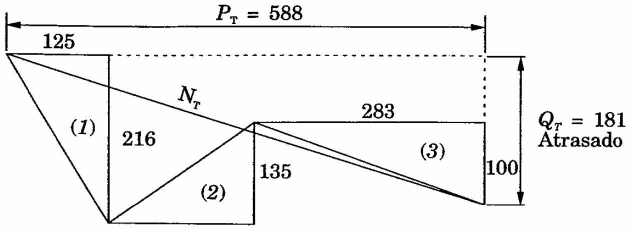


Figura 7-18

7.10 Um transformador de 25 kVA fornece 12 kW a uma carga com fator de potência de 0,6 atrasado. Determinar a porcentagem de plena carga que o transformador alimenta. Desejando-se alimentar cargas de fator de potência unitário com esse mesmo transformador, quantos kW podem ser acrescentados, até que o transformador esteja a plena carga?

Para carga de 12 kW, $N = P/\cos\phi = 12/0{,}6 = 20$ kVA. Então, a porcentagem da plena carga é (20/25) 100 = 80%. Como $\phi = \text{arc cos } 0{,}6 = 53{,}1°$, $Q = N \text{ sen } \phi = 20 \text{ sen } 53{,}1° = 16$ kVAR atrasado. As cargas adicionais têm fator de potência unitário; portanto, a potência reativa Q permanece inalterada. Logo, a plena carga, o ângulo $\phi' = \text{arc/sen } (16/25) = 39{,}8°$ e o fator de potência total $P_T = N' \cos\phi' = 25 \cos 39{,}8° = 19{,}2$ kW. Assim,

Carga adicional $= P_T - P = 19{,}2 - 12 = 7{,}2$ kW.

Esse resultado pode, também, ser obtido graficamente, como mostra a Fig. 7-19.

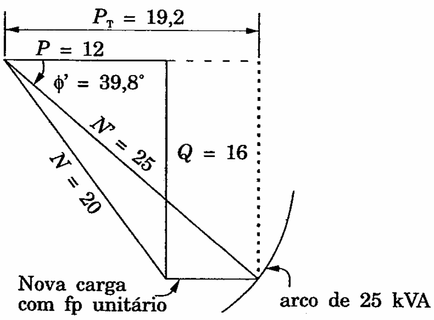


Figura 7-19

Observe-se
fator de potê
atrasado.

7.11 Com referênc
0,866 adiant
transformadc

Do Probl. 7.

N = 20 kVA

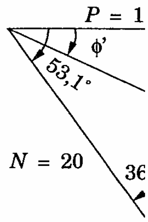
Traça-se o
nando-se N
procura-se

Da Fig. 7-2(

$\frac{25}{\text{sen } 96{,}9°} =$

Logo, γ –

ϕ' =



As potência
e Q_T = 25 se
adicionadas
adiantado.

Observe-se que, com a adição de cargas com fator de potência unitário, o fator de potência do conjunto foi melhorado, pois agora fp = cos 39,8° = 0,768 atrasado.

7.11 Com referência ao Probl. 7.10, se as cargas adicionais tiverem fator de potência 0,866 adiantado, quantos kVA dessas cargas serão necessários para levar o transformador a operar com sua capacidade de plena carga?

Do Probl. 7.10:

$N = 20$ kVA, $\phi = 53{,}1°$ e $Q = 16$ kVAR atrasado.

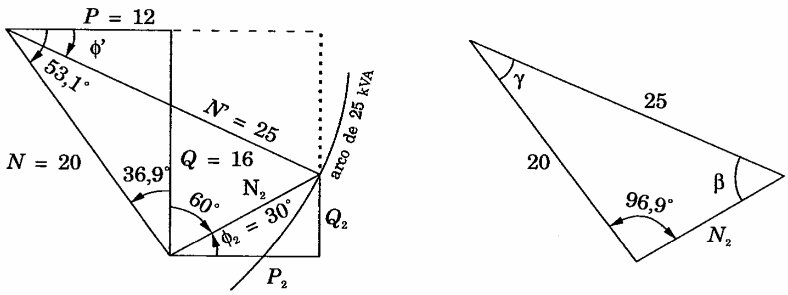
Traça-se o triângulo das potências como mostra a Fig. 7-20(*a*). Adicionando-se N_2 das novas cargas a um ângulo ϕ_2 = arc cos 0,866 = 30°, procura-se o ângulo ϕ' que é necessário.

Da Fig. 7-20(*b*) temos:

$$\frac{25}{\text{sen } 96{,}9°} = \frac{20}{\text{sen } \beta} \quad \therefore \quad \text{sen } \beta = 0{,}795 \quad \therefore \quad \beta = 52{,}6°$$

Logo, $\gamma - = 180° - (96{,}9° + 52{,}6°) = 30{,}5°$ e

$$\phi' = 53{,}1° - 30{,}5° = 22{,}6°$$



(*a*) (*b*)

Figura 7-20

As potências ativa e reativa da carga total são: $P_T = 25 \cos 22{,}6° = 23{,}1$ kW e $Q_T = 25$ sen $22{,}6° = 9{,}6$ kVAR atrasado, respectivamente. Para as cargas adicionadas: $P_2 = 23{,}1 - 12 = 11{,}1$ kW e $Q_2 = 16 - 9{,}6 = 6{,}4$ kVAR adiantado.

Como $N_2 = P_2 + jQ_2 = 11{,}1 - j6{,}4 = 12{,}8\underline{/-30^\circ}$, temos:

$N_2 = 12{,}8$ kVA

Portanto, devem ser adicionados 12,8 kVA de cargas novas com fator de potência 0,866 adiantado para fazer com que o transformador, operando a 12 kW com fator de potência 0,6 atrasado, passe a funcionar na sua potência nominal de 25 kVA.

Outro método

Da Fig. 7-20(a), para um ângulo $\phi_2 = 30^\circ$, tiramos:

$$P_2 = N_2 \cos 30^\circ = (\sqrt{3}/2)N_2 \quad \text{e} \quad Q_2 = N_2 \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}N_2$$

$$(N')^2 = (P + P_2)^2 + (Q - Q_2)^2$$

Substituindo:

$$25^2 = [12 + (\sqrt{3}/2)N_2]^2 + (16 - \frac{1}{2}N_2)^2 \quad \text{e} \quad N_2 = 12{,}8 \text{ kVA}$$

7.12 Um transformador de 500 kVA está operando a plena carga com fator de potência total de 0,6 atrasado. O fator de potência é melhorado acrescentando-se capacitores, até que o novo fator de potência seja 0,9 atrasado. Quantos kVAR capacitivos são necessários? Após a correção do fator de potência, que porcentagem da plena carga o transformador estará alimentando?

Para o transformador a plena carga (ver Fig. 7-21):

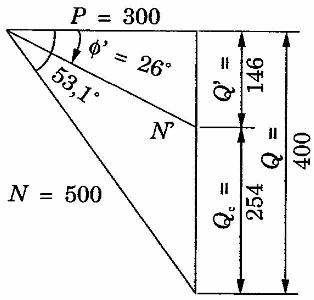


Figura 7-21

$P = VI \cos \phi = 500\ (0{,}6) = 300$ kW

$\phi = \arccos 0{,}6 = 53{,}1°$

$Q = VI\ \text{sen}\ \phi = 500\ \text{sen}\ 53{,}1° = 400$ kVAR atrasado

Quando $\cos \phi = 0{,}9$ atrasado

$\phi' = \arccos 0{,}9 = 26°$, $N' = 300/0{,}9 = 333$ kVA, $Q' = 333\ \text{sen}\ 26° = 146$ kVAR atrasado

Então, a carga capacitiva $= Q - Q' = 400 - 146 = 254$ kVAR adiantado e a percentagem de plena carga $= (333/500)100 = 66{,}7\%$.

7.13 Um conjunto de motores de indução com um total de 500 kW e fator de potência 0,8 atrasado deve ser substituído parcialmente por motores síncronos do mesmo rendimento, porém de fator de potência 0,707 adiantado. À medida que prossegue o programa de substituição, o fator de potência do conjunto é constantemente melhorado. Que porcentagem da carga terá sido substituída quando o fator de potência do conjunto atingir 0,9 atrasado?

Como os motores síncronos têm o mesmo rendimento que os motores de indução, a potência média total permanece constante em 500 kW.

Antes da substituição dos motores:

$N = 500/0{,}8 = 625$ kVA; $\phi = \arccos 0{,}8 = 36{,}9°$;

$Q = 625\ \text{sen}\ 36{,}9° = 375$ kVAR atrasado

Quando o fator de potência do sistema passa a 0,9 atrasado,

$\phi' = \arccos 0{,}9 = 26°$; $N' = 500/0{,}9 = 556$ kVA;

$Q' = 556\ \text{sen}\ 26° = 243$ kVAR atrasado

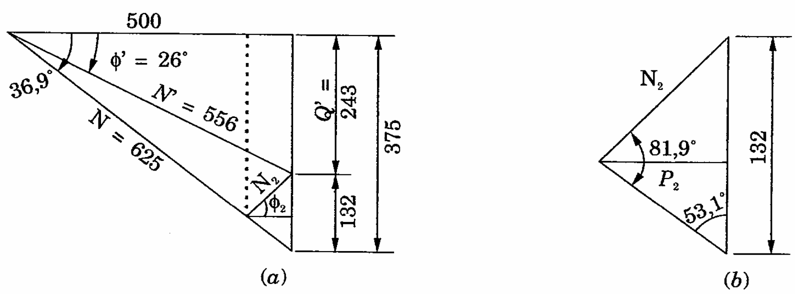


Figura 7-22

Como o fator de potência dos motores substituídos é 0,707 adiantado, $\phi_2 = \text{arc cos } 0{,}707 = 45°$.

Aplicando a lei dos senos à Fig. 7-22(*b*),

$$\frac{N_2}{\text{sen } 53{,}1°} = \frac{132}{\text{sen } 81{,}9°} \quad \therefore \ N_2 = 106{,}5 \text{ kVA}$$

Então, $P_2 = 106{,}5 \cos 45° = 75{,}3$ kW

A percentagem de carga substituída é

$$\frac{75{,}3}{500} \times 100 = 15\%$$

Problemas Propostos

7.14 Dado um circuito com tensão aplicada $v = 200$ sen $(\omega t + 110°)$ e corrente total $i = 5$ sen $(\omega t + 20°)$, determinar os elementos do triângulo das potências.
Resp.: $P = 0$; $Q = 500$ VARS atrasado.

7.15 Dado um circuito em que a tensão aplicada $v = 14{,}14 \cos \omega t$ acarreta uma corrente total $i = 17{,}1 \cos (\omega t - 14{,}05°)$ mA, determinar o triângulo das potências.
Resp.: $P = 117{,}5$ mW; $Q = 29{,}6$ mVAR atrasado; $\cos \phi = 0{,}97$ atrasado.

7.16 Dado um circuito em que a tensão aplicada $v = 340$ sen $(\omega t - 60°)$ acarreta $i = 13{,}3$ sen $(\omega t - 48{,}7°)$, determinar os elementos do triângulo das potências.
Resp.: $P = 2215$ W; $Q = 442$ VARS adiantado; $\cos \phi = 0{,}98$ adiantado.

7.17 Um circuito em série de dois elementos com $R = 10$ ohms e $X_C = 5$ ohms, está submetido a uma tensão eficaz aplicada de 120 volts. Determinar o triângulo das potências.
Resp.: $\mathbf{N} = 1154 - j577$; $\cos \phi = 0{,}894$ adiantado.

7.18 Em um circuito em série de dois elementos, onde $R = 5$ ohms e $X_L = 15$ ohms, a tensão eficaz no resistor é 31,6. Determinar o triângulo das potências.
Resp.: $\mathbf{N} = 200 + j600$; $\cos \phi = 0{,}316$ atrasado.

7.19 O fasor tensão, aplicado a um circuito em série de $R = 8$ ohms e $X_C = 6$ ohms, é $\mathbf{V} = 50\angle{-90°}$. Determinar todas as informações relativas às potências.
Resp.: $\mathbf{N} = 200 - j150$; $\cos \phi = 0{,}8$ adiantado.

7.20 Determinar a impedância do circuito que solicita 5040 volts-ampères, com fator de potência de 0,894 adiantado, de um fasor tensão aplicado $\mathbf{V} = 150\angle{45°}$.
Resp.: $4 - j2$.

7.21 A corrente
volt-ampère
Resp.: 8,21

7.22 Um circuito
sen (5000*t* +
Calcular as
Resp.: $R = 2$

7.23 Uma corrent
$5{,}83\angle{-59°}$ e
potências.
Resp.: $N_T =$

7.24 Duas imped
1920 VARS
Resp.: $P = 2$

7.25 O circuito sé
de 0,856 atr
Resp.: $\mathbf{Z} = 1$

7.26 No circuito em
é 300 watts. D
Resp.: $\mathbf{N} = 30$

7.21 A corrente eficaz em uma dada impedância é 18 ampères e acarreta 3500 volt-ampères com fator de potência 0,76 atrasado. Calcular a impedância.
Resp.: $8{,}21 + j7{,}0$.

7.22 Um circuito em série de dois elementos em que a corrente instantânea é $i = 4{,}24$ sen $(5000t + 45°)$ tem potência de 180 watts e um fator de potência 0,8 atrasado. Calcular as constantes do circuito.
Resp.: $R = 20$ ohms; $L = 3$ mH.

7.23 Uma corrente eficaz de 5 ampères percorre duas impedâncias em série $\mathbf{Z}_1 = 5{,}83\angle{-59°}$ e $\mathbf{Z}_2 = 8{,}95\angle{63{,}4°}$. Determinar todas as informações sobre as potências.
Resp.: $N_T = 175 + j75$; $\cos\phi = 0{,}918$ atrasado.

7.24 Duas impedâncias $\mathbf{Z}_1 = 5\angle{45°}$ e $\mathbf{Z}_2 = 10\angle{30°}$ estão em série e têm Q total de 1920 VARS atrasado. Determinar a potência média P e a potência aparente N.
Resp.: $P = 2745$ W; $N = 3350$ VA.

7.25 O circuito série da Fig. 7-23 solicita 36,4 volt-ampères com fator de potência de 0,856 atrasado. Determinar **Z**.
Resp.: $\mathbf{Z} = 1\angle{90°}$.

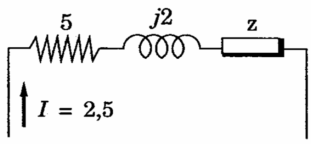


Figura 7-23

7.26 No circuito em série da Fig. 7-24, o fator de potência é 0,6 atrasado e a potência é 300 watts. Determinar o triângulo das potências e a impedância desconhecida.

Resp.: $\mathbf{N} = 300 + j400$ e $\mathbf{Z} = 4\angle{90°}$.

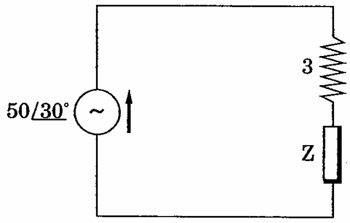


Figura 7-24

7.27 Duas impedâncias $\mathbf{Z}_1 = 4\angle{-30^\circ}$ e $\mathbf{Z}_2 = 5\angle{60^\circ}$ estão em paralelo submetidas ao fasor $\mathbf{V} = 20\angle{0^\circ}$. Determinar o triângulo das potências de cada ramo e combiná-los para obter o triângulo total.
Resp.: $P = 126{,}6$ W; $Q = 19{,}3$ VARS atrasado; $\cos\phi = 0{,}99$ atrasado.

7.28 Em um circuito constituído de $R = 10$ ohms em paralelo com $\mathbf{Z} = 8\angle{-30^\circ}$, a corrente eficaz total é 5 ampères. Determinar os elementos do triângulo das potências.
Resp.: $P = 110$ W; $Q = 33$ VARS adiantado; $\cos\phi = 0{,}957$ adiantado.

7.29 No ramo 1 do circuito em paralelo da Fig. 7-25 a potência é 8 kVAR. Calcular a potência e o fator de potência do circuito completo.
Resp.: 8 kW; $\cos\phi = 0{,}555$ atrasado.

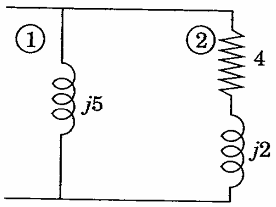


Figura 7-25

7.30 Se, no ramo 2 do circuito em paralelo da Fig. 7-26, tivermos 1490 VA, qual será a indicação do amperímetro? Determinar as informações sobre as potências.
Resp.: 42,4 ampères; $N = 2210 + j3630$; $\cos\phi = 0{,}521$ atrasado.

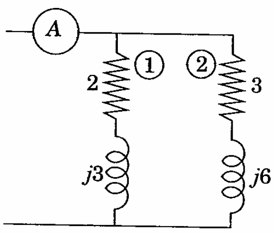


Figura 7-26

7.31 No circuito em paralelo da Fig. 7-27, a potência no resistor de 3 ohms é 666 watts e do circuito completo são solicitados 3370 volt-ampères com um fator de potência de 0,937 adiantado. Calcular **Z**.
Resp.: $\mathbf{Z} = 2 - j2$.

7.32 A potência tota
triângulo das p
Resp.: N = 15(

7.33 Sendo 2000 wa
cada resistor?
Resp.: P_{15} = 72

7.34 *Q* total no circuit
triângulo das po
Resp.: N = 392(

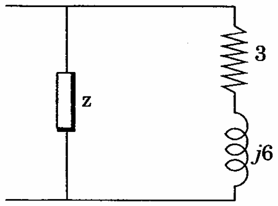


Figura 7-27

7.32 A potência total no circuito em paralelo da Fig. 7-28 é 1500 watts. Determinar o triângulo das potências.
Resp.: $N = 1500 + j2480$, $\cos\phi = 0{,}518$ atrasado.

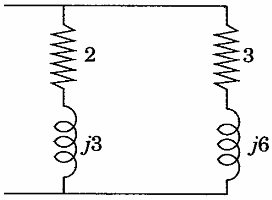


Figura 7-28

7.33 Sendo 2000 watts a potência total no circuito da Fig. 7-29, qual é a potência em cada resistor?
Resp.: $P_{15} = 724$ W; $P_8 = 1276$ W.

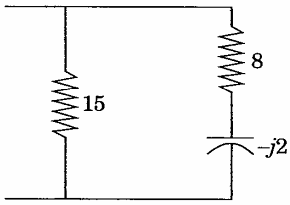


Figura 7-29

7.34 Q total no circuito em paralelo da Fig. 7-30 é 2500 VARS atrasado. Determinar o triângulo das potências.
Resp.: $N = 3920$ VA; $P = 3020$ W; $\cos\phi = 0{,}771$ atrasado.

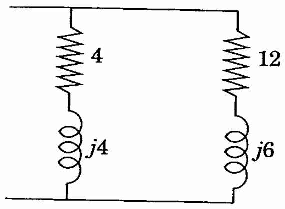


Figura 7-30

7.35 Determinar o fator de potência do circuito em paralelo da Fig. 7-31. Variando-se o resistor de 6 ohms, de modo que o fator de potência total se torne 0,9 atrasado, qual será o seu novo valor em ohms?
Resp.: cos ϕ = 0,8 atrasado; R = 3,22 ohms.

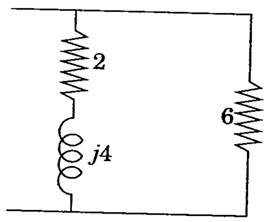


Figura 7-31

7.36 No circuito da Fig. 7-32, a carga original é **Z** = 5 + *j*8,66. Determinar a porcentagem de redução na corrente total, após a melhoria do fator de potência com o acréscimo de um capacitor −*j*20 em paralelo.
Resp.: 38%.

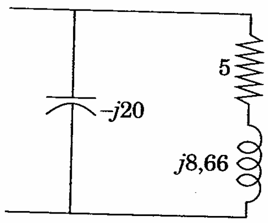


Figura 7-32

7.37 Achar a capaci
atrasado do cir
Resp.: C = 28,!

7.38 Uma fonte de 6
uma carga con
necessária em p
adiantado.
Resp.: (*a*) 61,3

7.39 No Probl. 7.38,
(*a*)? Houve mais
Resp.: 16,7%. N

7.40 Três impedânci
paralelo com un
de cada ramo e
Resp.: P = 190
adiantado.

7.41 No circuito do P
fator de potência
corrente total so
Resp.: 19,2 amp

7.42 Uma fonte de te
$\mathbf{Z}_1 = 25\underline{/15^\circ}$, $\mathbf{Z}_2$ =
de cada ramo e
Resp.: P = 414(
atrasado.

7.43 Determinar o triâ
1, 5 kW com fat
adiantado; carga

7.37 Achar a capacitância C necessária para se corrigir o fator de potência para 0,95 atrasado do circuito da Fig. 7-33.
Resp.: C = 28,9 μF.

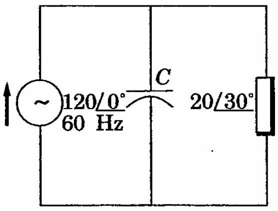


Figura 7-33

7.38 Uma fonte de 60 Hz e tensão eficaz de 240 volts fornece 4500 volt-ampères a uma carga com fator de potência 0,75 atrasado. Determinar a capacitância necessária em paralelo para levar o fator de potência para (*a*) 0,9 atrasado e (*b*) 0,9 adiantado.
Resp.: (*a*) 61,3 μF; (*b*) 212 μF.

7.39 No Probl. 7.38, qual a redução percentual na corrente de linha, ocorrida no item (*a*)? Houve mais alguma redução na corrente, no item (*a*)?
Resp.: 16,7%. Não, as correntes são as mesmas.

7.40 Três impedâncias $\mathbf{Z}_1 = 20\angle 30^\circ$, $\mathbf{Z}_2 = 15\angle -45^\circ$ e $\mathbf{Z}_3 = 10\angle 0^\circ$ são ligadas em paralelo com uma fonte de $\mathbf{V} = 100\angle -45^\circ$. Determinar o triângulo das potências de cada ramo e combiná-los, para obter o triângulo total das potências.
Resp.: P = 1904 W; Q = 221 VARS adiantado; N = 1920 VA; cos ϕ = 0,993 adiantado.

7.41 No circuito do Probl. 7-40, a fonte de 100 volts fornece 1920 volt-ampères com fator de potência 0,993 adiantado ao circuito de três ramos em paralelo. Qual a corrente total solicitada pelo circuito?
Resp.: 19,2 ampères, avançada de 6,62° em relação à **V**.

7.42 Uma fonte de tensão $\mathbf{V} = 240\angle -30^\circ$ alimenta três impedâncias em paralelo $\mathbf{Z}_1 = 25\angle 15^\circ$, $\mathbf{Z}_2 = 15\angle -60^\circ$ e $\mathbf{Z}_3 = 15\angle 90^\circ$. Determinar o triângulo das potências de cada ramo e combiná-los para obter o triângulo total.
Resp.: P = 4140 W; Q = 1115 VARS atrasado; N = 4290 VA; cos ϕ = 0,967 atrasado.

7.43 Determinar o triângulo total das potências para as três cargas seguintes: carga 1, 5 kW com fator de potência 0,8 atrasado; carga 2, 4 VA com Q de 2 kVAR adiantado; carga 3, 6 kVA com fator de potência 0,9 atrasado.

Resp.: P = 13,86 kW; W = 4,38 kVAR atrasado; N = 14,55 kVA; cos ϕ = 0,965 atrasado.

7.44 Calcular o triângulo total das potências para as três cargas seguintes: carga 1, 200 VA com fator de potência 0,7 atrasado; carga 2, 350 VA com fator de potência 0,5 atrasado; carga 3, 275 VA com fator de potência unitário.
Resp.: P = 590 W; Q = 446 VAR atrasado; N = 740 VA; cos ϕ = 0,798 atrasado.

7.45 Uma carga de 300 kW e fator de potência 0,65 atrasado tem seu fator de potência melhorado para 0,9 atrasado com a adição de capacitores em paralelo. Quantos kVAR de capacitores são necessários e qual a redução percentual de k VA que daí resulta?
Resp.: 204 kVAR; 28%.

7.46 Uma carga industrial de 25 kVA tem fator de potência total de 0,8 atrasado. Instala-se um grupo de resistências de aquecimento corretoras com fator de potência unitário e o fator da instalação passa a 0,85 atrasado. Quantos kW resistivos foram instalados?
Resp.: 4,3 kW.

7.47 A carga de um motor de indução de 1500 watts, com fator de potência 0,75 atrasado, está combinada com motores síncronos de 500 volt-ampères, cos ϕ = 0,65 adiantado. Quantos kVAR capacitivos são necessários para corrigir-se para 0,95 atrasado o fator de potência total dos dois grupos de motores? Qual a redução percentual nos volt-ampères?
Resp.: 347 VAR; 6,3%.

7.48 Com a introdução de 20 kVAR de capacitores o fator de potência de uma certa carga é corrigido para 0,9 atrasado. Tendo-se, no final, 185 kVA, pede-se o triângulo das potências da carga, antes da correção.
Resp.: P = 166,5 kW; Q = 101,0 kVAR atrasado; cos ϕ = 0,856 atrasado.

7.49 A carga de 2000 volt-ampères de um motor de indução com cos ϕ = 0,80 atrasado é combinada com 500 volt-ampères de motores síncronos. Sendo o fator de potência total 0,90 atrasado, determinar o fator de potência dos motores síncronos.
Resp.: 0,92 adiantado.

7.50 Uma carga de 65 kVA com um fator de potência atrasado é adicionada a um grupo de motores síncronos de 25 kVA com fator de potência 0,6 adiantado. Sendo 0,85 atrasado o fator de potência do conjunto, determinar o fator de potência da carga 65 kVA.
Resp.: 0,585.

7.51 Um transformador de 100 kVA está operando a 80% da plena carga com fator de potência 0,85 atrasado. Quantos kVA de carga com cos ϕ = 0,6 atrasado podem

ser acrescentε
formador?
Resp.: 21,3 kV

7.52 Um transforma
atrasado. O fa
capacitores em
Quantos kW d
agora, sem qu
Resp.: 52,5 kV

7.53 Acrescenta-se
Probl. 7.52, d
carga podem s
dor?
Resp.: 32 kVA.

ser acrescentados, sem que se exceda o regime de plena carga do transformador?
Resp.: 21,3 kVA.

7.52 Um transformador de 250 kVA funciona a plena carga com fator de potência 0,8 atrasado. O fator de potência deve ser corrigido para 0,9 atrasado, por meio de capacitores em paralelo. (*a*) Quantos kVAR de capacitores são necessários? (*b*) Quantos kW de carga com fator de potência unitário podem ser acrescentados, agora, sem que se exceda o regime dos kVA do transformador?
Resp.: 52,5 kVAR; 30,0 kW.

7.53 Acrescenta-se uma nova carga com fator de potência 0,5 atrasado ao sistema do Probl. 7.52, depois da instalação dos capacitores. Quantos kVA dessa nova carga podem ser acrescentados, respeitando-se o regime de kVA do transformador?
Resp.: 32 kVA.

MAKRON
Books

RESSONÂNCIA EM SÉRIE E EM PARALELO

Introdução

Diz-se que um circuito de corrente alternada está em ressonância quando a tensão aplicada **V** e a corrente resultante **I** estão em fase. Na ressonância, portanto, a impedância complexa equivalente do circuito consiste em resistência R, apenas.

Como **V** e **I** estão em fase, o fator de potência de um circuito ressonante é unitário.

Ressonância em Série

O circuito RLC em série da Fig. 8-1 tem uma impedância complexa $\mathbf{Z} = R + j(\omega L - 1/\omega C) = R + jX$. O circuito está em ressonância quando $X = 0$, isto é quando $\omega L = 1/\omega C$ ou $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$.

Como $\omega = 2\pi f$, a freqüência de ressonância é:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ Hz}$$

Capítulo 8

RIE

i em ressonância
stão em fase. Na
o circuito consiste

ircuito ressonante

ncia complexa **Z** =
ando X = 0, isto é

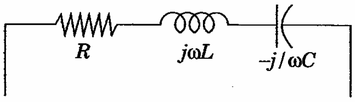


Figura 8-1

Na Fig. 8-2(a) representaram-se, em função de ω, o valor absoluto de **Z** e suas três componentes R, X_L e X_L. Quando $\omega = \omega_0$ as reatâncias indutiva e capacitiva se igualam e, como $|\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$, temos $\mathbf{Z} = R$. Na ressonância, portanto, a impedância Z é mínima. Como $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z}$, a corrente é máxima.

Nas freqüências inferiores a ω, a reatância capacitiva é maior que a indutiva e o ângulo da impedância é negativo. Se a resistência for baixa, o ângulo varia mais rapidamente com a freqüência, como indica a Fig. 8-2(b). Quando ω tende para zero, o ângulo de Z tende para −90°.

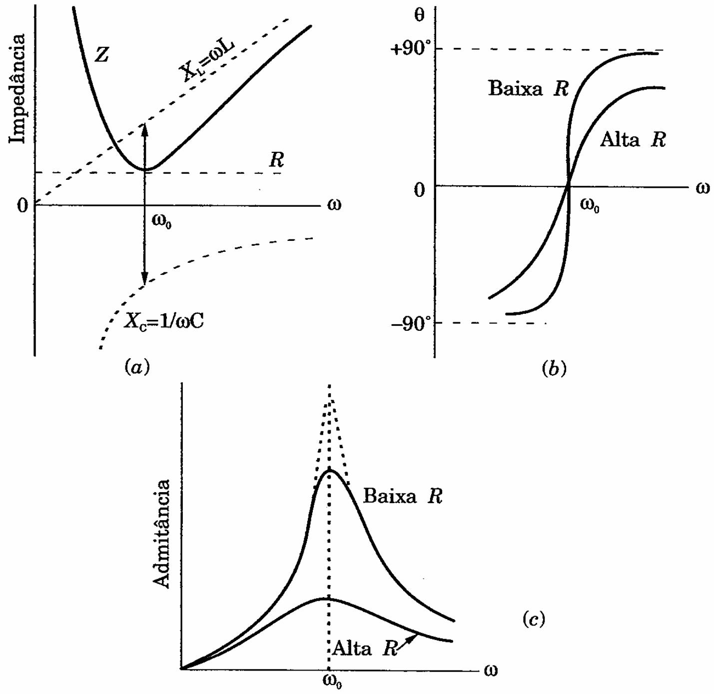


Figura 8-2 Circuito em série — $Z(\omega)$, $\theta(\omega)$, e $Y(\omega)$.

Nas freqüências ilustradas na Figura 8-2 de ω_0, a resistência indutiva excede a capacitiva e o ângulo de Z é positivo, tendendo para + 90° quando $\omega \gg \omega_0$.

Na Fig. 8-2(*c*), a admitância do circuito em série $\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z}$ está representada em função de ω. Como $\mathbf{I} = \mathbf{VY}$, essa representação vale também como indicação da variação da corrente em função de ω. A Fig. 8-2(*c*), portanto, indica que a corrente máxima ocorre em ω_0 e que uma resistência baixa acarreta uma corrente maior. A curva tracejada indica o caso limite, quando $R = 0$. O ângulo de admitância (não representado é o negativo do ângulo de impedância, visto na Fig. 8-2(*b*).

Ressonância em Paralelo Circuito RLC Puro

O circuito em paralelo da Fig. 8-3 é um circuito ideal, constituído de ramos com elementos puros R, L, C. O comportamento desse circuito, entretanto, é de interesse para o objetivo geral da ressonância. Esse circuito paralelo ideal pode ser comparado com o circuito em série visto acima, constatando-se que se pode estabelecer uma dualidade entre os dois circuitos.

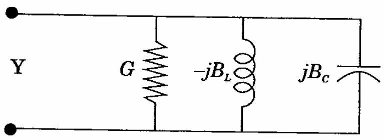
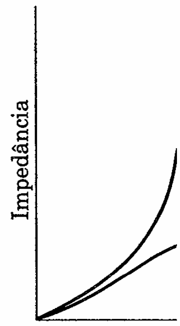


Figura 8-3

A admitância dos três elementos é $\mathbf{Y} = G + j(\omega C - 1/\omega L) = G + jB$, onde $B = B_C - B_L$, $B_C = \omega C$ e $B_L = 1/\omega L$. O circuito está em ressonância quando $B = 0$, isto é, quando $\omega C = 1/\omega L$ ou $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$.

Como no circuito RLC em série, a freqüência de ressonância é:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ Hz}$$



Fig

Na Fig. 8-
e suas três compon
e indutiva são igu
mínima e, como I =

Nas freqü
capacitiva e o âng
positivo e tende pa

Nas freqü
em função de ω é t

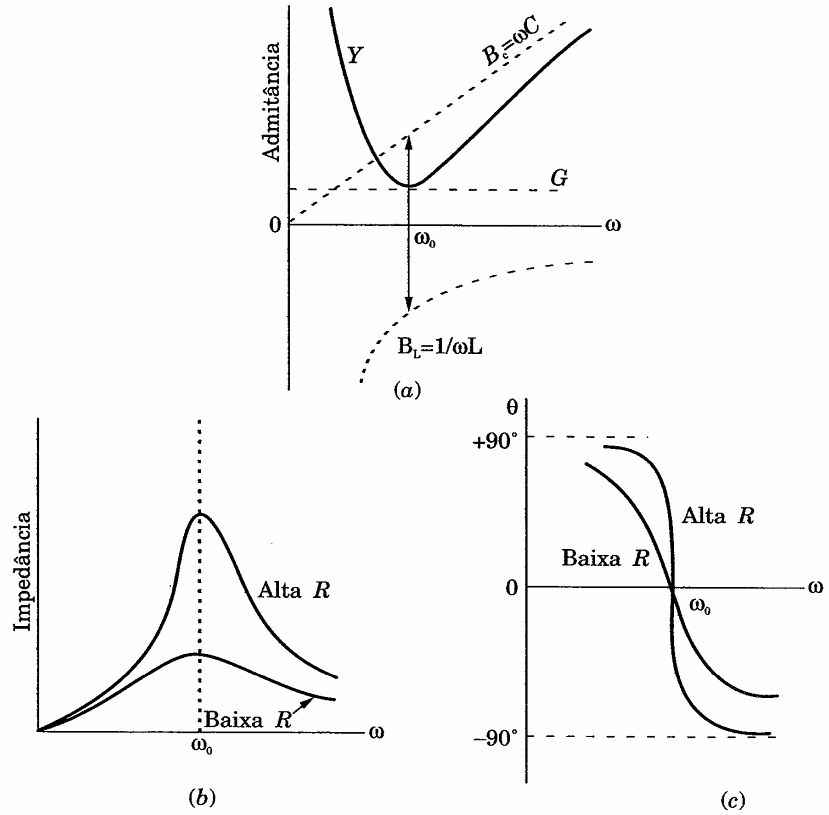


Figura 8-4 Circuito em paralelo — $Y(\omega)$, $Z(\omega)$ e $\theta(\omega)$.

Na Fig. 8-4(*a*) representaram-se, em função de ω, o valor absoluto de **Y** e suas três componentes G, B_C e B_L. Quando $\omega = \omega_0$, as susceptâncias capacitiva e indutiva são iguais e tem-se **Y** = **G**. Portanto, na ressonância, a admitância é mínima e, como **I** = **VY**, também a corrente é mínima.

Nas freqüências inferiores a ω_0 a susceptância indutiva é superior à capacitiva e o ângulo de **Y** é negativo. O ângulo da impedância é, portanto, positivo e tende para + 90°, à medida que ω tende para zero. Ver a Fig. 8-4(*c*).

Nas freqüências acima de ω_0, o ângulo de Z é negativo e sua variação em função de ω é tanto mais rápida quanto maior R.

Ressonância de um Circuito em Paralelo de Dois Ramos

No circuito de dois ramos em paralelo da Fig. 8-5, a admitância **Y** é a soma das admitâncias de cada ramo:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_L + \mathbf{Y}_C = \frac{1}{R_L + jX_L} + \frac{1}{R_C - jX_C}$$

$$= \left(\frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + X_C^2}\right) + j\left(\frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} - \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2}\right)$$

O circuito está em ressonância quando a admitância complexa é um número real. Então $X_C/(R_C^2 + X_C^2) = X_L/(R_L^2 + X_L^2)$ e

$$\frac{1}{\omega_0 C}(R_L^2 + \omega_0^2 L^2) = \omega_0 L(R_C^2 + 1/\omega_0^2 C^2) \qquad (1)$$

Cada uma das cinco quantidades em (*1*) pode tornar-se variável para se obter a ressonância.

Tirando em (*1*) o valor de ω_0,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}} \qquad (2)$$

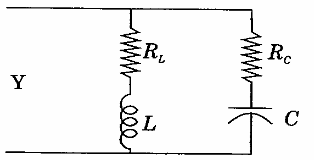


Figura 8-5

Assim, a freqüência de ressonância ω_0 do circuito em paralelo de dois ramos difere de R, L e C puros em paralelo pelo fator:

$$\sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}}$$

A freqüên
uma freqüência de
e $R_C^2 < L/C$. Quan
freqüências. Ver o
Tirando er
$L =$
ou, como $Z_C = \sqrt{R_C^2}$
Se, em (*3*),
circuito é ressonar
$L = \frac{1}{2}CZ_C^2$. Quanc
ressonante.
Tirando em
Se $Z_L^4 > 4$
nante.
Tirando em
e tirando R_C, R_C =
Se o radical
ou para R_C para o q

A freqüência deve ser um número real positivo; portanto, o circuito terá uma freqüência de ressonância ω_0 quando $R_L^2 > L/C$ e $R_C^2 > L/C$ ou $R_L^2 < L/C$ e $R_C^2 < L/C$. Quando $R_L^2 = R_C^2 = L/C$, o circuito é ressonante para todas as freqüências. Ver o Probl. 8.12 para este caso especial.

Tirando em *(1)* o valor de L, obtemos:

$$L = \frac{1}{2} C \left[(R_C^2 + X_C^2) \pm \sqrt{(R_C^2 + X_C^2)^2 - 4R_L^2 X_C^2} \right]$$

ou, como $Z_C = \sqrt{R_C^2 + X_C^2}$,

$$L = \frac{1}{2} C \left[Z_C^2 \pm \sqrt{Z_C^4 - 4R_L^2 X_C^2} \right] \qquad (3)$$

Se, em *(3)*, $Z_C^4 > 4R_L^2 X_C^2$, obtemos dois valores de L para os quais o circuito é ressonante. Se $Z_C^4 = 4R_L^2 X_C^2$, o circuito está em ressonância com $L = \frac{1}{2} C Z_C^2$. Quando $Z_C^4 < 4R_L^2 X_C^2$, não há valor de L que torne o circuito ressonante.

Tirando em *(1)* o valor de C, temos:

$$C = 2L \left[\frac{1}{Z_L^2 \pm \sqrt{Z_L^4 - 4R_C^2 X_L^2}} \right] \qquad (4)$$

Se $Z_L^4 > 4R_C^2 X_L^2$, temos valores de C para os quais o circuito é ressonante.

Tirando em *(1)* o valor de R_L, temos:

$$R_L = \sqrt{\omega^2 LC R_C^2 - \omega^2 L^2 + L/C} \qquad (5)$$

e tirando R_C, $R_C = \sqrt{R_L^2/(\omega^2 LC) - 1/\omega^2 C^2 + L/C}$ $\qquad (6)$

Se o radicando, em *(5)* ou em *(6)*, for positivo, teremos um valor para R_L ou para R_C para o qual o circuito de dois ramos está em ressonância.

Fator de Qualidade Q

O fator de qualidade de bobinas, capacitores e circuitos é definido por:

$$Q = 2\pi \frac{\text{máxima energia armazenada}}{\text{energia dissipada por ciclo}}$$

Nos circuitos das Figs. 8-6 e 8-7, a energia dissipada por ciclo é dada pelo produto da potência média no resistor $(I_{max}/\sqrt{2})^2R$ pelo período T ou $1/f$.

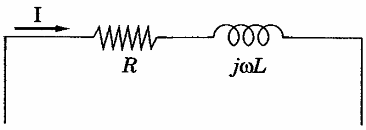


Figura 8-6

No circuito RL em série da Fig. 8-6 a energia armazenada máxima é $\frac{1}{2}LI^2_{max}$. Então,

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}LI^2_{max}}{(I^2_{max}/2)R(1/f)} = \frac{2\pi fL}{R} = \frac{\omega L}{R}$$

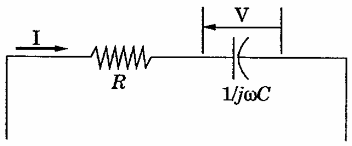


Figura 8-7

No circuito RC em série da Fig. 8-7, a energia armazenada máxima é $\frac{1}{2}CV^2_{max}$ ou $\frac{1}{2}I^2_{max}/\omega^2C$. Então,

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}I^2_{max}/\omega^2C}{(I^2_{max}/2)R(1/f)} = \frac{1}{\omega CR}$$

Num circuito RLC em série ressonante, a energia armazenada é constante. Uma vez que, quando a tensão no capacitor é máxima, a corrente no indutor é nula e vice-versa, $\frac{1}{2}CV^2_{max} = \frac{1}{2}LI^2_{max}$. Então,

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR}$$

A corrente de um circuito RLC em série tem variação, em função da freqüência, semelhante à da admitância na Fig. 8-2(*c*). Na Fig. 8-8, representou-se a corrente do circuito RLC em função de ω ou após conveniente troca de escala, em função de f. Em ω_0 a corrente $\mathbf{I}_0$ é máxima. Estão indicados os pontos em que a corrente é 0,707 do valor máximo. As freqüências correspondentes são ω_1 e ω_2.

Como a potência fornecida ao circuito é I^2R, quando $I = 0{,}707\ I_0$ a potência é igual à metade do valor máximo, obtido em ω_0. Os pontos correspondentes a ω_1 e ω_2 são chamados pontos de meia potência. A distância entre esses pontos, medida em Hz (Hertz), é chamada largura de faixa B (em alguns textos a largura de faixa é indicada por BW pois, em inglês, largura de faixa é "BANDWIDTH").

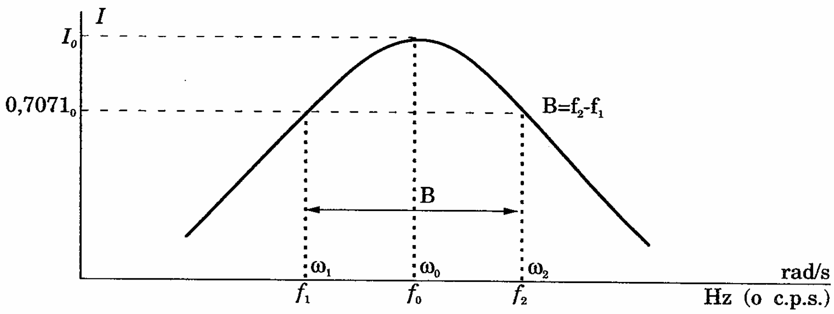


Figura 8-8

O fator de qualidade pode, agora, ser definido em função da freqüência de ressonância e da largura de faixa, assim (ver Probl. 8.13):

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{f_0}{B}$$

A freqüência de ressonância ω_0 é a média geométrica entre ω_1 e ω_2 (ver Probl. 8.6):

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad \text{e} \quad f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$$

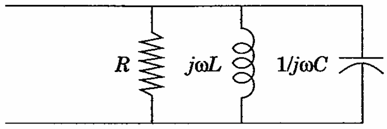


Figura 8-9

O circuito em paralelo da Fig. 8-9 armazena energia constante na ressonância. Uma vez que, quando a corrente no indutor é máxima, a tensão no capacitor é nula, e vice-versa, $\frac{1}{2}LI^2_{max} = \frac{1}{2}CV^2_{max}$. Então,

$$Q_0 = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 CR$$

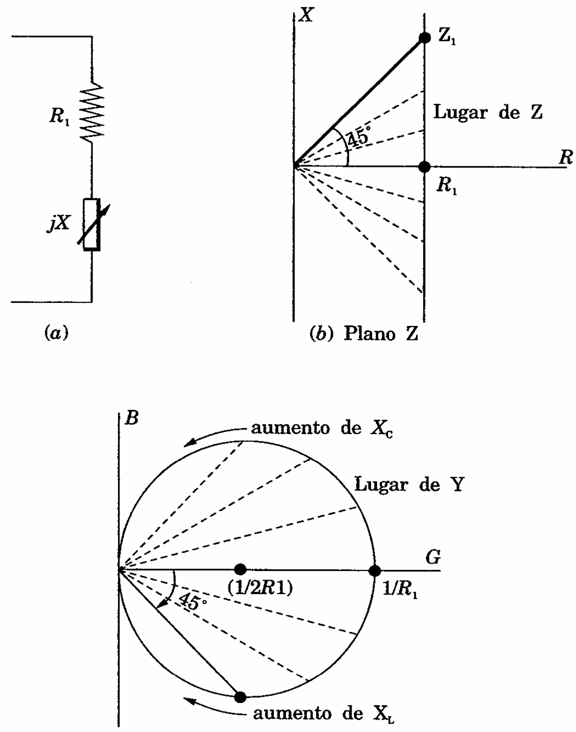
Lugares Geométricos de Impedâncias

Os circuitos com um elemento variável são analisados convenientemente pelo emprego dos diagramas dos lugares geométricos de impedância. Como $\mathbf{I} = \mathbf{VY}$ e $\mathbf{V}$ é geralmente constante, o lugar geométrico de $\mathbf{Y}$ descreve a variação de I em função do elemento variável do circuito.

O circuito série da Fig. 8-10(*a*) tem uma resistência fixa e uma reatância variável que pode tomar valores positivos e negativos. Se admitirmos o plano da impedância $\mathbf{Z}$ formado por um par de eixos cartesianos R e X, o lugar da impedância $\mathbf{Z}$ para o circuito dado será uma linha reta, paralela ao eixo X e cortando o eixo R em R_L, como mostra a Fig. 8-10(*b*).

Podemos determinar o lugar da admitância $\mathbf{Y}$ para o circuito dado no plano Y, formado por um par de eixos cartesianos G e B.

$$\text{Sendo } \mathbf{Z} = 1/\mathbf{Y}, \quad R_1 + jX = \frac{1}{G + jB} \qquad (1)$$



(*a*) (*b*) Plano Z

(*c*) Plano Y

Figura 8-10

Racionalizando e igualando as partes reais em (*1*), obtemos

$$R_1 = \frac{G}{G^2 + B^2}$$

ou $$G^2 - G/R_1 + B^2 = 0 \qquad (2)$$

Somando $1/4\,R_1 2$ a ambos os membros de (*2*) e simplificando,

$$\left(G - \frac{1}{2R_1}\right)^2 + B^2 = \left(\frac{1}{2R_1}\right)^2 \qquad (3)$$

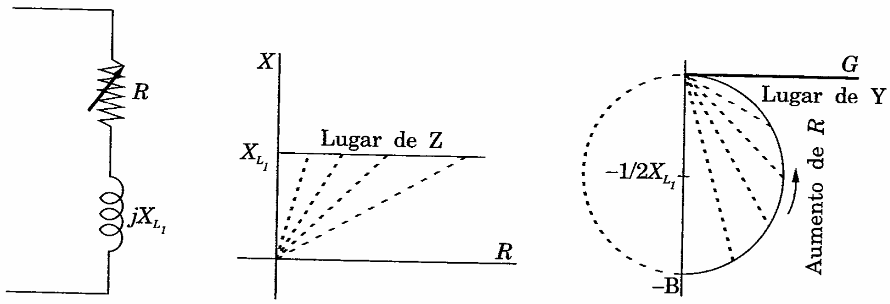
Se compararmos a equação (*3*) com a forma padrão da equação de um círculo, conforme nos ensina a Geometria Analítica, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, verificaremos que o lugar de **Y** no plano é um círculo com centro em $(1/2R_1, 0)$ e de raio $1/2R_1$. Ver Fig. 8-10(*c*).

Cada ponto no lugar geométrico de **Z** tem um ponto no lugar de **Y**. A cada ponto do lugar de **Z**, acima do eixo *R* corresponde um ponto do semicírculo, abaixo do eixo *G*, no plano **Y**. E + ∞ do lugar de **Z** está na origem, no plano **Y**. Semelhantemente, a cada ponto abaixo do eixo *R*, no lugar de Z, corresponde um ponto do semicírculo, acima do eixo *G*, no plano **Z**. E – ∞ no lugar de **Z** fica na origem no plano **Y**. Observem-se as posições relativas de $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Y}_1$. As distâncias de $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Y}_1$ às respectivas origens são diferentes, enquanto os ângulos com os eixos horizontais são iguais, porém de sinais contrários.

Para reatância indutiva fixa e resistência variável, como na Fig. 8-11(*a*), o lugar geométrico de **Z** é uma linha horizontal em $X = X_{L1}$ no primeiro quadrante do plano **Z**. Empregando o mesmo método acima, a equação do lugar de **Z** é

$$G^2 + (B + 1/2X_{L_1})^2 = (1/2X_{L_1})^2 \qquad (4)$$

Comparando essa equação com a forma padrão da equação de um círculo, verifica-se que o lugar geométrico de **Y** é um círculo de centro em $(0, - 1/2X_{L1})$ e raio $1/2X_{L1}$, no plano **Y**. Ver Fig. 8-11(*c*). Entretanto, como o lugar geométrico de **Z**, na Fig. 8-11(*b*), é uma linha reta no primeiro quadrante do plano **Z**, somente o semicírculo do quarto quadrante do plano **Y** é a transformação do lugar de **Z** para esse circuito.



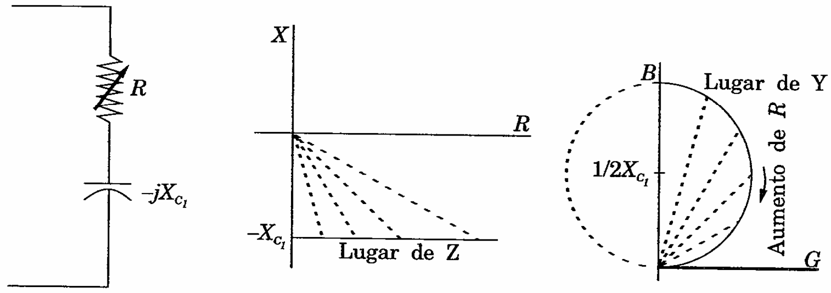
(*a*) (*b*) plano Z (*c*) plano Y

Figura 8-11

Quando uma reatância capacitiva pura está em série com uma resistência variável, como mostra a Fig. 8-12(*a*), o lugar geométrico de **Z** é uma linha horizontal para $X = -X_{C1}$, no quarto quadrante do plano **Z**. Ver Fig. 8-12(*b*). Empregando os mesmos métodos anteriores, a equação do lugar geométrico de **Y** é

$$G^2 + (B - 1/2X_{C_1})^2 = (1/2X_{C_1})^2 \qquad (5)$$

Comparando a equação (*5*) com a forma padrão da equação do círculo, verifica-se que o lugar geométrico de **Y** é um semicírculo de centro em $(0,\ 1/2X_{C1})$ e raio $1/2X_{C1}$, no primeiro quadrante do plano **Y**. Ver Fig. 8-12(*c*).



(*a*) (*b*) plano Z (*c*) plano Y

Figura 8-12

Lugar Geométrico da Corrente

Consideremos o circuito em paralelo da Fig. 8-13(*a*), contendo, no primeiro ramo R_1 fixo em série com jX_L e, no segundo ramo, R_2 fixo em série com $-jX_C$ variável. A admitância total dos dois ramos em paralelo é

$$\mathbf{Y}_T = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2$$

Na Fig. 8-13(*b*), somando o lugar geométrico de $\mathbf{Y}_2$ do segundo ramo com o ponto fixo $\mathbf{Y}_1$, obtemos o lugar total de $\mathbf{Y}_T$.

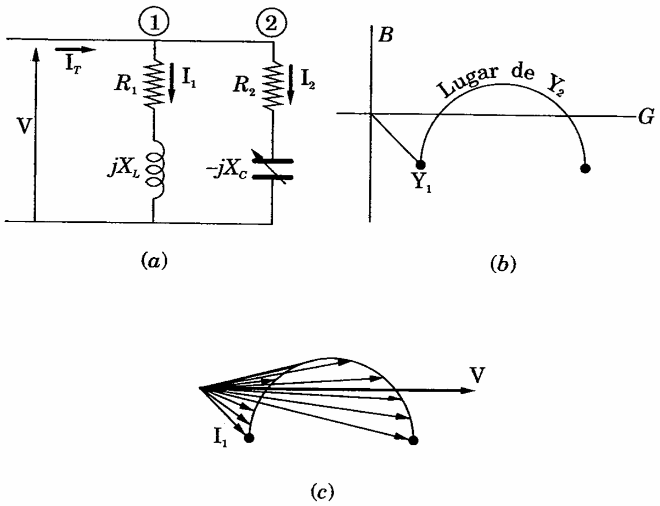


Figura 8-13

A corrente é obtida por $\mathbf{I} = \mathbf{VX}$ e a Fig. 8-13(*c*) mostra que, à medida que a corrente fixa $\mathbf{I}_1$ vai sendo somada aos diversos valores de $\mathbf{I}_2$, vai-se obtendo o lugar geométrico da corrente total. O diagrama mostra, também, que existem dois valores de C para os quais a corrente total está em fase com $\mathbf{V}$.

A Fig. 8-13(*c*) mostra, também, porque, sob certas condições, não se consegue um valor de C que acarrete ressonância. Se o raio, $1/2R_2$, for reduzido a tal ponto que a curva não corte o eixo $\mathbf{V}$, não haverá valor de C que produza ressonância. Nos problemas que se seguem são examinadas outras aplicações dos diagramas dos lugares geométricos.

Problemas Resolvidos

8.1 Num circuito *RLC* em série, R = 10 ohms, L = 5 mH e C = 12,5 μF. Representar graficamente o módulo e o ângulo da impedância em função de ω, com ω variando de $0{,}8\omega_0$ a $1{,}2\omega_0$.

Na ressonância,

$$\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{(5 \times 10^{-3})(12{,}5 \times 10^{-6})} = 4000 \text{ rad/sec}$$

$X_{L_0} = \omega_0 L$

$X_{C_0} = 1/\omega$

Logo $\mathbf{Z}_0$

Como X_L =
outros valo

Na Fig. 8-1
é a represe

ω	
3200	
3600	
4000	
4400	
4800	

8.2 Aplica-se un
a tensão er
diagrama do

$$X_{L_0} = \omega_0 L = 4000(5 \times 10^{-3}) = 20 \text{ ohms}$$

$$X_{C_0} = 1/\omega_0 C = 1/(4000 \times 12{,}5 \times 10^{-6}) = 20 \text{ ohms}$$

Logo $\quad \mathbf{Z}_0 = R + j(X_{L_0} - X_{C_0}) = 10 + j(20 - 20) = 10\underline{/0^\circ}$

Como $X_L = \omega L$ e $X_C = 1/\omega C$, então $X_L/X_{L0} = \omega/\omega_0$ e $X_C/Z_{C0} = \omega_0/\omega$. Portanto, outros valores de X, X_C e $\mathbf{Z}$ podem ser calculados, em outras freqüências.

Na Fig. 8-14(*a*) vão tabeladas as reatâncias e impedâncias e a Fig. 8-14(*b*) é a representação gráfica pedida.

ω	X_L	X_C	$\mathbf{Z}$	
3200	16	25	$10 - j9$	$13{,}4\underline{/-42^\circ}$
3600	18	22,2	$10 - j4{,}2$	$10{,}8\underline{/-22{,}8^\circ}$
4000	20	20	10	$10\underline{/0^\circ}$
4400	22	18,2	$10 + j3{,}8$	$10{,}7\underline{/20{,}8^\circ}$
4800	24	16,7	$10 + j7{,}3$	$12{,}4\underline{/36{,}2^\circ}$

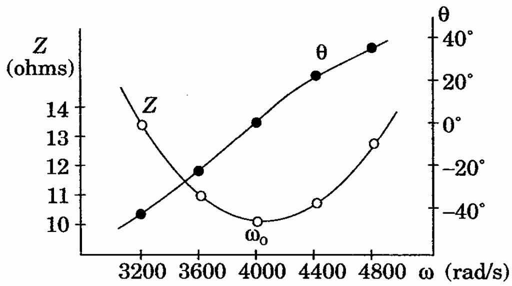


Figura 8-14

8.2 Aplica-se uma tensão $\mathbf{V} = 100\underline{/0^\circ}$ ao circuito em série do Probl. 8.1. Determinar a tensão em cada elemento para $\omega = 3600$, 4000 e 4400 rad/s. Traçar o diagrama do fasor tensão em cada freqüência.

Para $\omega = 3600$ rad/s, $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z} = (100\angle 0^\circ)/(10{,}8\angle -22{,}8^\circ) = 9{,}26\angle 22{,}8^\circ$. Então,

$$\mathbf{V}_R = 9{,}26\angle 22{,}8\ (10) = 92{,}6\angle 22{,}8^\circ,\ \mathbf{V}_L = 9{,}26\angle 22{,}8^\circ(18\angle 90^\circ) = 167\angle 112{,}8^\circ,$$

$$\mathbf{V}_C = 206\angle -67{,}2^\circ$$

Para $\omega = 4000$ rad/s, $\mathbf{I}\ (100\angle 0^\circ)/(10\angle 0^\circ) = 10\angle 0^\circ$. Então,

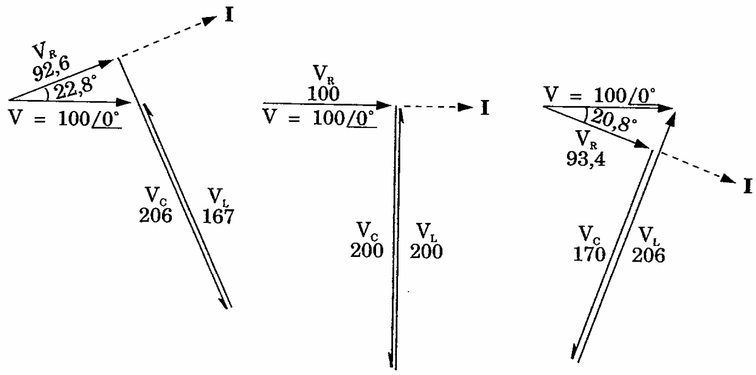
$$\mathbf{V}_R = 100\angle 0^\circ,\ \mathbf{V}_L = 10\angle 0^\circ(20\angle 90^\circ) = 200\angle 90^\circ,\ \mathbf{V}_C = 200\angle -90^\circ$$

Para $\omega = 4400$ rad/s, $\mathbf{I} = (100\angle 0^\circ)/(10{,}7\angle 20{,}8^\circ) = 9{,}34\angle -20{,}8^\circ$. Então,

$$\mathbf{V}_R = 9{,}34\angle -20{,}8^\circ\ (10) = 93{,}4\angle -20{,}8^\circ,\ \mathbf{V}_L = 9{,}34\angle -20{,}8^\circ(22\angle 90^\circ) = 206\angle 69{,}2^\circ,$$

$$\mathbf{V}_C = 170\angle -110{,}8^\circ$$

Os três diagramas dos fasores tensão estão representados na Fig. 8-15. Observe-se que o módulo da tensão em cada elemento reativo de um circuito em série pode ser superior ao módulo da tensão aplicada, próximo da ressonância.



(*a*) ω=3600 (*b*) ω=4000 (*c*) ω=4400

Figura 8-15

8.3 Em um circuito em série $R = 5$ ohms, $L = 20$ mH e numa capacitância variável aplica-se uma tensão de freqüência $f = 1000$ Hz. Determinar C para se obter ressonância em série.

Na ressonân

$C = \dfrac{1}{L(2\pi f)^2}$

8.4 Uma tensão
série constituí
L até que a te

Como $\mathbf{V}_R =$
máxima a co
temente,

$X_C = \dfrac{1}{\omega C} =$

e $\mathbf{Z} = R = 5\angle$

$\mathbf{V}_R = 2\angle 0^\circ =$

8.5 Dado um circu
freqüência de

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

e $f_0 = \omega_0/2\pi$

Na freqüênc
maior que a
$\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z}$, /**Z**/ é

temos /**Z**/ = 1
que cos θ = R

$X_C - X_L = R$

Substituindo
$f_1 = 145/2\pi =$

Em ω_2, freq
maior que a

$X_L - X_C = R$

Substituindo
rad/s e $f_2 = 5$

Na ressonância, as reatâncias são iguais, $2\pi f L = 1/2\pi f C$. Então,

$$C = \frac{1}{L(2\pi f)^2} = \frac{1}{(20 \times 10^{-3})(2\pi \times 1000)^2} = 1{,}27\ \mu F$$

8.4 Uma tensão $\mathbf{V} = 10\underline{/0^\circ}$ de freqüência 1000 rad/s é aplicada a um circuito em série constituído de $R = 5$ ohms, $C = 20\ \mu F$ e uma indutância variável L. Ajusta-se L até que a tensão no resistor seja máxima. Achar a tensão em cada elemento.

Como $\mathbf{V}_R = R\mathbf{I}$, a tensão no resistor é máxima na ressonância, quando é máxima a corrente. Na ressonância, as reatâncias são iguais; conseqüentemente,

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000(20 \times 10^{-6})} = 50\ \Omega \qquad X_L = 50\ \Omega$$

e $\mathbf{Z} = R = 5\underline{/0^\circ}$. $\quad \mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z} = (10\underline{/0^\circ})/(5\underline{/0^\circ}) = 2\underline{/0^\circ}$ e

$\mathbf{V}_R = 2\underline{/0^\circ} = 10\underline{/0^\circ}$, $\mathbf{V}_L = (2\underline{/0^\circ})(50\underline{/90^\circ}) = 100\underline{/90^\circ}$ e $\mathbf{V}_C = 100\underline{/-90^\circ}$

8.5 Dado um circuito em série em que $R = 100$ ohms, $L = 0{,}5$ H e $C = 40\ \mu F$, calcular a freqüência de ressonância e as freqüências inferior e superior de meia-potência.

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{0{,}5(40 \times 10^{-6})} = 224\ \text{rad/s}$$

e $f_0 = \omega_0/2\pi = 35{,}7$ Hz

Na freqüência de meia potência inferior, ω_1, a reatância capacitiva é maior que a indutiva, a corrente é 0,707 do seu valor máximo e, como $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z}$, $/\mathbf{Z}/$ é 1,414 vezes o seu valor em ω_0. Já que, em ω_0, $\mathbf{Z} = 100$, em ω_1 temos $/\mathbf{Z}/ = 141{,}4$ ohms. Por ser $\mathbf{Z} = 100 - j(X_C - X_L) = 141{,}4\underline{/\theta}$, segue-se que $\cos\theta = R/Z = 100/141{,}4 = 0{,}707$ e $\theta = -45^\circ$. Então,

$$X_C - X_L = R \quad \text{ou} \quad 1/\omega_1 C - \omega_1 L = R \tag{1}$$

Substituindo em (*1*) os valores dados e tirando ω_1, obtemos $\omega_1 = 145$ rad/s, $f_1 = 145/2\pi = 23{,}1$ Hz.

Em ω_2, freqüência superior de meia potência, a reatância indutiva é maior que a capacitiva, $/\mathbf{Z}/$ é também 141,4 ohms e $\theta = 45^\circ$. Então,

$$X_L - X_C = R \quad \text{ou} \quad \omega_2 L - 1/\omega_2 C = R \tag{2}$$

Substituindo em (*2*) os valores e tirando o valor de ω_2, temos $\omega_2 = 345$ rad/s e $f_2 = 55$ Hz.

Como ω_0 é a média geométrica de ω_1 e ω_2,

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2} = \sqrt{145 \times 345} = 224 \text{ rad/sec}$$

8.6 Mostrar que ω_0, freqüência de ressonância de um circuito *RLC* em série, é a média geométrica de ω_1 e ω_2, freqüências de meia potência inferior e superior, respectivamente.

Como no Probl. 8.5, $1/\omega_1C = \omega_1L = R$ em ω_1, e $\omega_2L - 1/\omega_2C = R$ em ω_2. Logo,

$$1/\omega_1C - \omega_1L = \omega_2L - 1/\omega_2C \qquad (1)$$

Multiplicando por C e substituindo $\omega_0^2 = 1/LC$ em (*1*), obtemos:

$$1/\omega_1 - \omega_1/\omega_0^2 = \omega_2/\omega_0^2 - 1/\omega_2 \text{ ou } 1\omega_1 + 1/\omega_2 = (\omega_1 + \omega_2)/\omega_0^2$$

onde $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$.

8.7 Aplica-se uma tensão $\mathbf{V} = 100\angle 0°$, de freqüência variável, a um circuito em série com R = 50 ohms, L = 0,05 H e C = 20 µF. Achar a tensão máxima no indutor, variando-se a freqüência.

O módulo da impedância em função de ω é $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$. Logo, o módulo da corrente é $I = V/\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$.

O módulo da tensão em L é

$$V_L = \omega LI = \omega LV/\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

Igualando a zero a derivada $dV_L/d\omega$ e tirando o valor de ω, obtém-se o valor de ω quando V_L é máximo

$$\frac{dV_L}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\omega LV(R^2 + \omega^2L^2 - 2L/C + 1/\omega^2C^2)^{-1/2}$$

$$= \frac{(R^2 + \omega^2L^2 - 2L/C + 1/\omega^2C^2)^{1/2}LV - \omega LV\frac{1}{2}(R^2 + \omega^2L^2 - 2L/C + 1/\omega^2C^2)^{-1/2}(2\omega L^2 - 2/\omega^3C^2)}{R^2 + \omega^2L^2 - 2L/C + 1/\omega^2C^2}$$

Fatorando $LV(R^2 + \omega^2L^2 - 2L/C + 1/\omega^2C^2)^{-1/2}$ em (*2*) e fazendo o numerador igual a zero, temos

$$R^2 - 2L/C + 2/\omega^2C^2 = 0$$

onde

$\omega = \sqrt{\frac{}{2L}}$

Como Q_0 anterior, t

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Substitui

$\omega = \sqrt{\frac{}{2(}}$

Assim, X_L = 35,4 oh $I = V/Z =$

A equaçã em ω_O = bém em R ocorre aci

8.8 O circuito indutor, on circuito.

A admitân

$\mathbf{Y}_T = \frac{}{R_L}$

$= \frac{R_L}{R_L^2 + \omega}$

onde

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{2LC - R^2C^2}} = 1/\sqrt{LC}\ \sqrt{\frac{2}{2 - R^2C/L}}$$

Como $Q_0 = \omega_0 L/R = 1/\omega_O CR$, $Q_0^2 = L/R^2C$; substituindo no resultado anterior, temos:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{2Q_0^2}{2Q_0^2 - 1}}$$

Substituindo os dados, obtém-se:

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{2(0{,}05)(20 \times 10^{-6}) - (50 \times 20 \times 10^{-6})^2}} \quad 1414 \text{ rad/s}$$

Assim, $X_L = \omega L = 1414\,(0{,}05) = 70{,}7$ ohms, $X_C = 1/\omega C = 1/(1414 \times 20 \times 10^{-6}) = 35{,}4$ ohms e $\mathbf{Z} = 50 + j(70{,}7 - 35{,}4) = 50 + j35{,}4 = 61{,}2\underline{/35{,}3^\circ}$. Logo, $I = V/Z = 100/61{,}2 = 1{,}635$ ampères e $V_{L\max} = 1{,}635\,(70{,}7) = 115{,}5$ volts.

A equação de ω mostra que, para Q elevado, a máxima tensão em L ocorre em $\omega_O = 1/\sqrt{LC}$. Com Q elevado, em ω obtêm-se tensões máximas também em R e C. Para Q baixo, V_C máximo ocorre abaixo de ω_0 e V_L máximo ocorre acima. Ver o Probl. 8.28.

8.8 O circuito da Fig. 8-16 representa a ligação em paralelo de um capacitor e um indutor, onde a resistência da bobina é R_L. Achar a freqüência de ressonância do circuito.

A admitância total do circuito é

$$\mathbf{Y}_T = \frac{1}{R_L + j\omega L} + j\omega C$$

$$= \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2}\right)$$

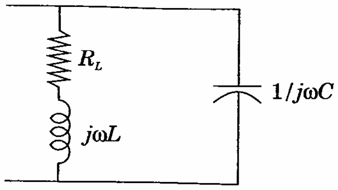


Figura 8-16

Na ressonância o termo em j é nulo, ou

$$\frac{\omega_0 L}{R_L^2 + \omega_0^2 L^2} = \omega_0 C \qquad \text{onde} \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R_L^2 C}{L}}$$

Se a resistência do indutor for pequena, comparada com $\omega_0 L$, a freqüência de ressonância será dada por $1/\sqrt{LC}$.

8.9 Calcular a freqüência de ressonância, ω_0, do circuito da Fig. 8-17. Se o resistor do ramo RC aumentar, qual o seu valor máximo para o qual existe, ainda, uma freqüência de ressonância?

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \times 20 \times 10^{-6}}} \sqrt{\frac{6^2 - 10^{-3}/(20 \times 10^{-6})}{4^2 - 10^{-3}/(20 \times 10^{-6})}}$$

$$= 4540 \text{ rad/s}$$

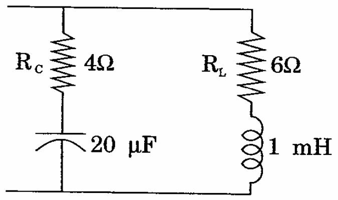


Figura 8-17

O numerador dentro do radical tem para valor 36 – 50 = –14. Portanto, para que exista uma raiz real, o denominador deverá ser negativo, isto é, R_C^2 L/C ou $R_C < 7{,}07$ ohms. À medida que o valor de R_C se aproxima de 7,07 ohms, a freqüência ω_0 se aproxima do infinito.

Se o valor
aproximar

8.10 Determinar
freqüência

A admitânc

$\mathbf{Y} = \frac{1}{2 + j}$

$= \left(\frac{2}{4 + X_L^2}\right.$

Fazendo o

10/125 = X

As raízes d
equação X_L
ressonante

8.11 Determinar
rad/s.

$\mathbf{Y} = \frac{1}{8 + j}$

$= \left(\frac{8}{100} + \right.$

Na resson

$X_C/(69{,}5 +$

Se o valor de R_L aumentar, ω_0 tenderá para zero, à medida que R_L se aproximar de 7,07 ohms.

8.10 Determinar os valores de L para os quais o circuito da Fig. 8-18 é ressonante na freqüência $\omega = 5000$ rad/s.

A admitância total é

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{2 + jX_L} + \frac{1}{5 - j10}$$

$$= \left(\frac{2}{4 + X_L^2} + \frac{5}{125}\right) + j\left(\frac{10}{125} - \frac{X_L}{4 + X_L^2}\right)$$

Fazendo o termo em j igual a zero,

$$10/125 = X_L/(4 + X_L^2) \quad \text{ou} \quad X_L^2 - 12{,}5X_L + 4 = 0 \qquad (1)$$

As raízes de (*1*) são $X_L = 12{,}17$ e $X_L = 0{,}33$. Substituindo esses valores na equação $X_L = \omega L$, encontramos os valores de L para os quais o circuito é ressonante: $L_1 = 2{,}43$ mH e $L_2 = 0{,}066$ mH.

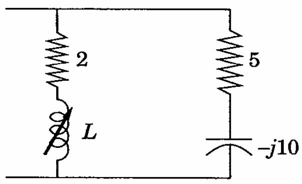


Figura 8-18

8.11 Determinar o valor de C que torna o circuito da Fig. 8-19 ressonante em $\omega = 5000$ rad/s.

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{8 + j6} + \frac{1}{8{,}34 - jX_C}$$

$$= \left(\frac{8}{100} + \frac{8{,}34}{69{,}5 + X_C^2}\right) + j\left(\frac{X_C}{69{,}5 + X_C^2} - \frac{6}{100}\right)$$

Na ressonância a admitância complexa é um número real. Então,

$X_C/(69{,}5 + X_C^2) = 6/100$ e $X_C^2 - 16{,}7X_C + 69{,}5 = 0$

donde X_C = 8,35 ohms. Substituindo em $X_C = 1/\ \omega_C$ e resolvendo, temos $C = 24\ \mu F$.

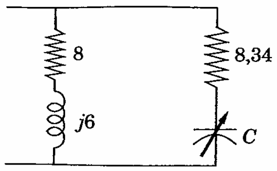


Figura 8-19

8.12 Determinar os valores de R_L e R_C que tornam o circuito da Fig. 8-20 ressonante em todas as freqüências.

O circuito é ressonante na freqüência

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}}$$

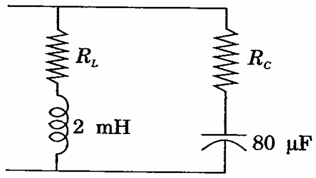


Figura 8-20

ω_0 pode ter qualquer valor s$R_L^2 = R_C2 = L/C$. Se $L/C = (2 \times 10^{-3})/(80 \times 10^{-6}) = 25$, temos $R_L = R_C = \sqrt{25} = 5$ ohms.

Deixa-se como exercício para o estudante verificar este resultado para ω = 2500 rad/s e ω = 5000 rad/s.

8-13 Mostrar que, num circuito *RLC* em série, $Q_0 = \omega_0\ L/R = f_0/B$.

Nas freqüências de meia potência a reatância total é igual à resistência.

Na inferior, f_1, a reatância capacitiva é maior que a indutiva. Então,

$1/2\pi f_1 C - 2\pi f_1 L = R$, donde se obtém f_1.

Na superior, f_2, a reatância indutiva é maior. Logo,

$2\pi f_2L - 1/2\pi f_2C = R$, donde se obtém f_2.

Como $B = f_2 - f_1$, $B = R/2\pi L$. Então,

$Q_0 = f_0/B = 2\pi f_0L/R = \omega_0L/R$.

8.14 Calcular Q de um circuito em série constituído de R = 20 ohms, L = 0,05H e C = 1 μF, empregando cada uma das três expressões equivalentes para Q_0: ω_0L/R, $1/\omega_0CR$ e f_0/B.

A freqüência de ressonância é
$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{0{,}05 \times 10^{-6}} = 4470$ rad/s e $f_0 = \omega_0/2\pi = 712$ Hz. Então,

$Q_0 = \omega_0L/R = 4470(0{,}05)/20 = 11{,}2$

ou $\quad Q_0 = 1/\omega_0CR = 1/(4470 \times 10^{-6} \times 20) = 11{,}2$

Do Probl. 8.13 na freqüência inferior de meia potência, $1/2\pi f_1C - 2\pi f_1L =$ $= R$. Substituindo:

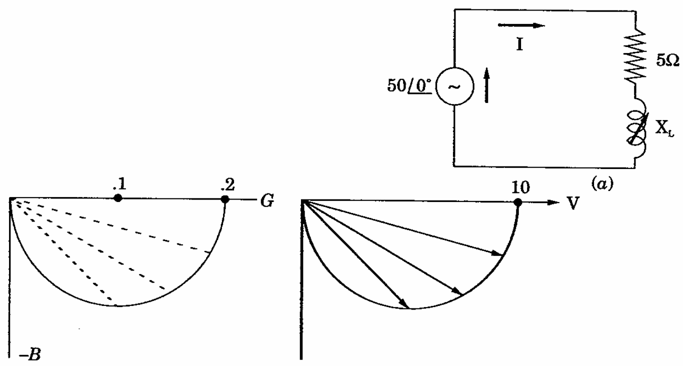
$1/(2\pi f_1 \times 10^{-6}) - 2\pi f_1(0{,}05) = 20$ e $f_1 = 681$ Hz

Na superior, f_2, $2\pi f_2L - 1/2\pi f_2C = R$. Substituindo, $f_2 = 745$ Hz. Então,

$B = (745 - 681) = 64$ Hz. Assim:

$Q_0 = f_0/B = 712/64 = 11{,}12$

8.15 Representar o diagrama do lugar geométrico da corrente, no circuito da Fig. 8-21(*a*), em que X_L é uma reatância indutiva variável.



(*b*) Plano **Y** (*c*) Lugar de **I**

Figura 8-21

O lugar geométrico de **Y** é um semicírculo de raio $r = 1/2R = 0{,}1$, como mostra a Fig. 8-21(*b*).

O lugar geométrico da corrente é determinado por $\mathbf{I} = \mathbf{VY}$, onde $\mathbf{V} = 50\angle 0^\circ$. Esse lugar é, portanto, semelhante ao de **Y** e tem valor máximo de 10 ampères, quando $X_L = 0$. Ver Fig. 8-21(*c*).

8.16 Representar o diagrama do lugar geométrico da corrente, no circuito da Fig. 8-22(*a*), em que *R* é uma resistência variável e a reatância capacitiva é fixa.

O lugar geométrico de **Y** é um semicírculo de raio $r = 1/2X_C = 0{,}1$. Ver Fig. 8-22(*b*).

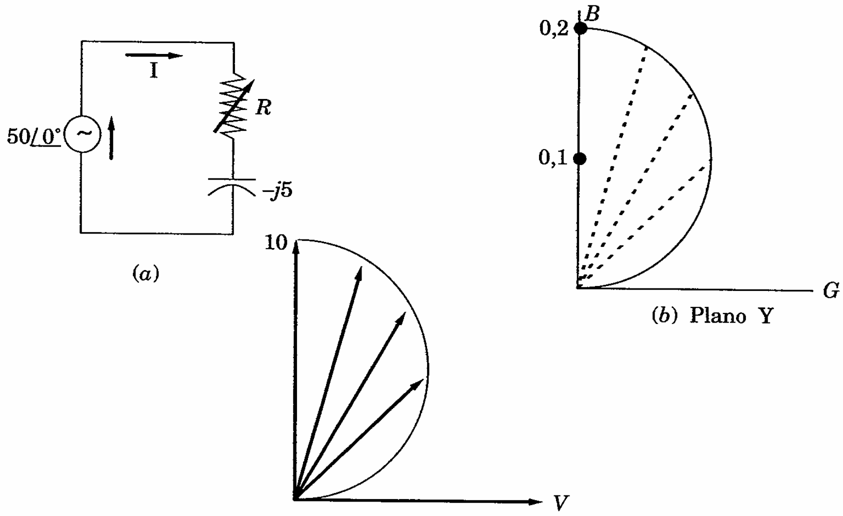


Figura 8-22

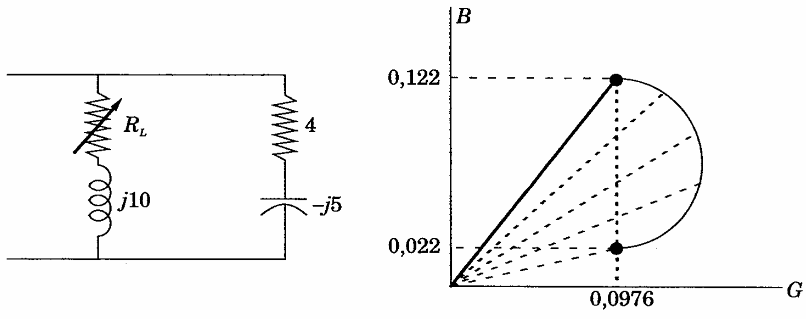
O lugar geométrico da corrente é determinado por $\mathbf{I} = -\mathbf{VY}$, onde $\mathbf{V} = 50\angle 0^\circ$. Portanto, a corrente tem um valor máximo de 10 ampères, quando $R = 0$. Ver Fig. 8-22(*c*).

8.17 Determinar o valor de R_L que acarreta ressonância no circuito da Fig. 8-23(*a*). Representar o lugar geométrico de **Y**, para explicar os resultados.

A admitância total é

$$\mathbf{Y}_T = \frac{1}{R_L + j10} + \frac{1}{4 - j5} = \left(\frac{R_L}{R_L^2 + 100} + \frac{4}{41}\right) + j\left(\frac{5}{41} - \frac{10}{R_L^2 + 100}\right)$$

Para que haja ressonância, o termo em j de $\mathbf{Y}$ deve ser nulo, isto é, $5/41 = 10/(R_L 2 + 100)$, donde $R_L 2 = -18$. Não há, portanto, um valor de R_L que produza ressonância.



(*a*) (*b*) Lugar de Y_{eq}

Figura 8-23

A admitância do ramo constante é $1/(4 - j5) = 0{,}0976 + j0{,}122$. O raio do semicírculo é $r = 1/2X_L = 1/20 = 0{,}05$. O diâmetro, portanto, é 0,10. Como a susceptância capacitiva do ramo constante é 0,122, o lugar geométrico do ramo variável não corta o eixo real; logo, não há ressonância possível.

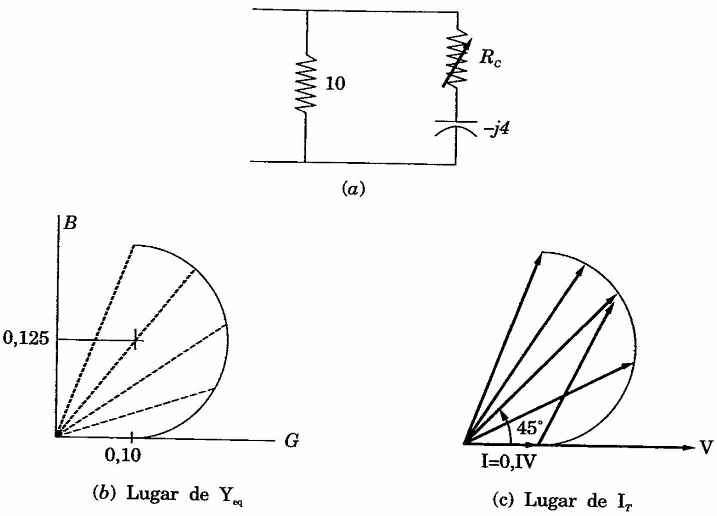
8.18 Determinar o lugar geométrico da corrente no circuito da Fig. 8-24(*a*) e determinar o valor de R_C que acarreta um ângulo de fase de 45° entre **V** e **I**.

A admitância do ramo constante é $1/R = 0{,}1$ ohms. O raio do lugar geométrico semicircular do ramo RC é $r = 1/2X_C = 1/8 = 0{,}125$. Ver Fig. 8-24(*b*).

No ponto indicado na Fig. 8-24(*c*), a corrente está avançada de 45° em relação à tensão. Segue-se que devem ser iguais as partes real e imaginária de $\mathbf{Y}_T$. Como

$$\mathbf{Y}_T = \left(0{,}1 + \frac{R_C}{R_C^2 + 16}\right) + j\left(\frac{4}{R_C^2 + 16}\right),$$ segue-se que

$$0{,}1 + \frac{R_C}{R_C^2 + 16} = \frac{4}{R_C^2 + 16} \quad \text{de onde } R_C = 2\ \Omega$$



(a)

(b) Lugar de Y_{eq}

(c) Lugar de I_T

Figura 8-24

8.19 O circuito da Fig. 8-25 foi examinado no Probl. 6.18. Verificou-se, então, que o valor absoluto de $\mathbf{V}_{AB}$ era constante, isto é, $V_{AB} = \frac{1}{2}V$ e que o fasor $\mathbf{V}_{AB}$ estava atrasado de 2θ em relação à tensão aplicada $\mathbf{V}$, sendo $\theta = \text{arc tg } \omega L/R$. Mostrar, graficamente, esses resultados.

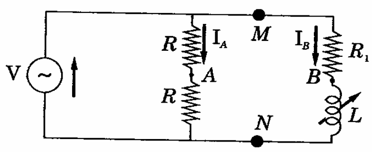


Figura 8-25

No primeiro ramo, $\mathbf{Z} = 2R$, $\mathbf{Y} = 1/2R$ e a corrente $\mathbf{I}_A = \mathbf{V}/2R$. A tensão em cada resistor é, então,

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{I}R = \mathbf{V}/2$$

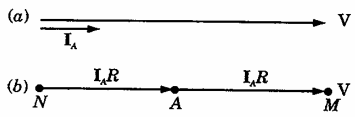
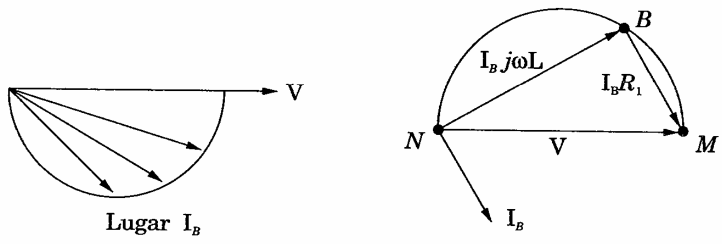


Figura 8-26

O diagrama de fasores da Fig. 8-26 mostra as tensões $\mathbf{V}_{NA}$ e $\mathbf{V}_{MA}$, sendo A o ponto médio de $\mathbf{V}$.

O segundo ramo tem um semicírculo como lugar geométrico de $\mathbf{Y}$. O lugar da corrente é, portanto, também um semicírculo, como mostra a Fig. 8-27(a). O diagrama dos fasores de tensão consta da tensão na indutância, $\mathbf{V}_{BN}$, e da tensão em R_1 $\mathbf{V}_{MB}$. As duas tensões se somam, obtendo-se a tensão $\mathbf{V}$. Observe-se que $\mathbf{I}_B$ está atrasada de 90° em relação a $\mathbf{V}_{BN}$.



(a) (b)

Figura 8-27

As tensões $\mathbf{V}_{BN}$ e $\mathbf{V}_{MB}$ são perpendiculares para todos os valores de L. Quando L varia de 0 a ∞, B se desloca de M a N no percurso semicircular.

Na Fig. 8-28, os dois diagramas fasoriais das Figs. 8-26(b) e 8-27(b) foram superpostos. Pode-se verificar que $\mathbf{V}_{AB}$ é o raio $\frac{1}{2}$ $\mathbf{V}$ do semicírculo e, portanto, de amplitude constante. Além disso, o ângulo ϕ de atraso de $\mathbf{V}_{AB}$ em relação a $\mathbf{V}$ é igual a 2θ, sendo $\theta = \text{arc tg } \omega L\ R$.

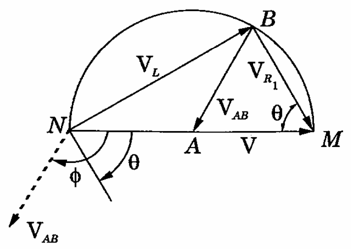


Figura 8-28

8.20 O lugar geométrico da corrente total de um circuito em paralelo de dois ramos é o indicado pela Fig. 8-29. Determinar os elementos nos ramos e especificar qual o elemento variável.

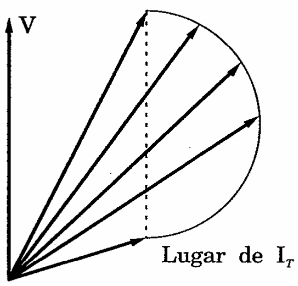


Figura 8-29

O ponto inferior do semicírculo corresponde à condição de corrente nula, no ramo variável. A corrente total nesse mesmo ponto, portanto, é inteiramente devida ao ramo constante 1. Como essa corrente está atrasada em relação à tensão, o ramo constante deve conter R_1 e L_1.

O lugar geométrico semicircular da corrente no ramo 2 mostra que a corrente está em fase com a tensão em seu valor máximo. Em todos os demais pontos, $\mathbf{I}_2$ está atrasada em relação à $\mathbf{V}$. O ramo 2, portanto, contém R_2 e L_2, sendo L_2 uma indutância variável, como mostra a Fig. 8-30.

8.21 No circuito
são $v = 70,7$
Resp.: $R = 2$

8.22 A fonte do ci
Hz. Para que
Resp.: $C = 2$

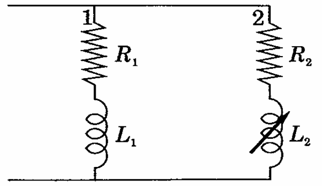


Figura 8-30

Problemas Propostos

8.21 No circuito RLC em série da Fig. 8-31, a tensão e a corrente instantâneas são $v = 70{,}7 \text{ sen } (500t + 30°)$ e $i = 2{,}83 \text{ sen } (500t + 30°)$. Determinar R e C.
Resp.: $R = 25$ ohms; $C = 8\ \mu$F.

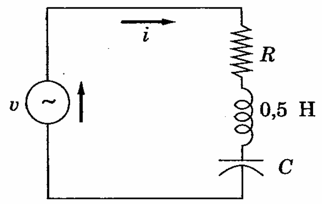


Figura 8-31

8.22 A fonte do circuito em série da Fig. 8-32 tem impedância $5 + j3$ e freqüência 2000 Hz. Para que valor de C será máxima a potência no resistor de 10 ohms?
Resp.: $C = 26{,}6\ \mu$F; $P = 111$ watts.

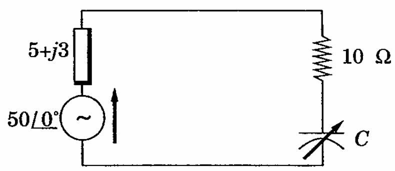


Figura 8-32

8.23 Um circuito *RLC* em série em que $L = 25$ mH e $C = 75\ \mu$F tem um ângulo de fase de 25° atrasado para $\omega = 2000$ rad/s. Para que freqüência o ângulo de fase será adiantado? Determinar ω_0.
Resp.: $\omega = 267$ rad/s; $\omega_0 = 730$ rad/s.

8.24 Em um circuito *RLC* em série com $L = 0{,}5$ H a tensão instantânea é $v = 70{,}7$ sen $(500t + 30°)$ e a corrente instantânea é $i = 1{,}5$ sen $(500t)$. Determinar os valores de R e C. Para que valor de ω_0 o circuito será ressonante?
Resp.: $R = 40{,}8$ ohms; $C = 8{,}83\ \mu$F; $\omega_0 = 476$ rad/s.

8.25 Uma tensão de freqüência variável é aplicada a um circuito em série, onde $R = 10$ ohms, $L = 0{,}2$ H e $C = 40\ \mu$F. Calcular as freqüências f_1, f_0 e f_2 para as quais a corrente tem, respectivamente, as seguintes situações, em relação à tensão aplicada: avançada de 30°, em fase e atrasada de 30°.
Resp.: $f_1 = 54{,}0$ Hz; $f_0 = 56{,}3$ Hz; $f_2 = 58{,}6$ Hz.

8.26 O ângulo de fase em um circuito *RLC* em série em que $R = 25$ ohms e $L = 0{,}6$ H é 60° adiantado, sendo a freqüência 40 Hz. Em que freqüência o circuito será ressonante?
Resp.: $f_0 = 45{,}4$ Hz.

8.27 Varia-se a freqüência, no circuito em série da Fig. 8-33, até que a tensão no capacitor seja máxima. Sendo 100 volts a tensão eficaz aplicada, determinar a tensão máxima no capacitor e a freqüência em que ela ocorre.
Resp.: $\omega = 707$ rad/s; $V_C = 115{,}5$ volts.

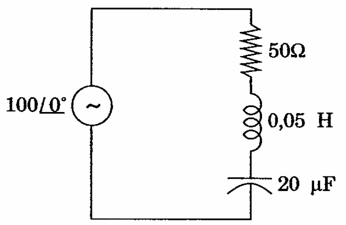


Figura 8-33

8.28 O fator de qualidade do circuito do Probl. 8.27 era $Q_0 = \omega_0 L/R = 1$. Suponha $R = 10$ ohms, o que acarreta $Q_0 = 5$. Determine a freqüência em que a tensão no capacitor é máxima. Repita para $R = 5$ ohms.
Resp.: $\omega = 990$ rad/s; 998 rad/s. **Nota**. Para $Q_0 \geqslant 10$ pode-se admitir que as tensões máximas em R, L e C ocorrem todas na freqüência de ressonância ω_0 ou f_0.

8.29 Para mostrar o efeito de Q na amplitude da corrente, próximo da freqüência de ressonância, represente o valor absoluto de **Y** em função de ω, para os dois

seguintes
$L = 0{,}05$ H

8.30 No circuit
freqüênci
ressonân
Resp.: ω_0

8.31 Determin
Resp.: f_0

8-32 No mesm
acarreta
Resp.: R

8.33 Determin
te.
Resp.: R

seguintes conjuntos de valores das constantes do circuito. Circuito 1: $R = 5$ ohms, $L = 0{,}05$ H e $C = 20$ μF. Circuito 2: $R = 10$ ohms, $L = 0{,}05$ H e $C = 20$ μF.

8.30 No circuito em paralelo da Fig. 8-34, L = 0,2 H e C = 30 μF. Determinar a freqüência de ressonância, supondo $R_l = 0$, e compará-la com a freqüência de ressonância quando $R = 50$ ohms.
Resp.: $\omega_0 = 408$ rad/s; $\omega_0 = 323$ rad/s.

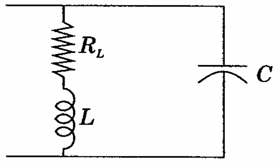


Figura 8-34

8.31 Determinar a freqüência de ressonância, f_0, do circuito em paralelo da Fig. 8-35.
Resp.: $f_0 = 159$ Hz.

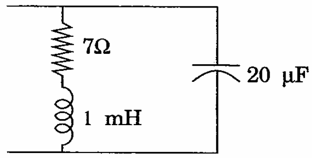


Figura 8-35

8-32 No mesmo Probl. 8.31, qual o valor de resistência que, em série com o capacitor, acarreta uma freqüência de ressonância de 300 Hz?
Resp.: $R_C = 6$ ohms.

8.33 Determinar o valor de R_L para o qual o circuito em paralelo da Fig. 8-36 é ressonante.
Resp.: $R_L = 12{,}25$ ohms.

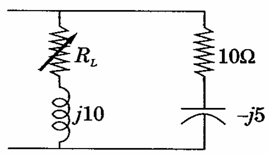


Figura 8-36

8.34 Para que valores de X_L será ressonante o circuito em paralelo da Fig. 8-37? Representar o lugar geométrico de **Y** para explicar o resultado.

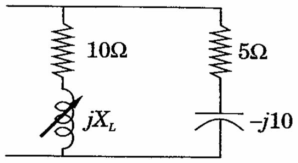


Figura 8-37

8.35 Qual o valor de R_0 para o qual o circuito da Fig. 8-38 é ressonante? Representar o lugar geométrico de **Y** que explica o resultado.
Resp.: $R_C = 0$.

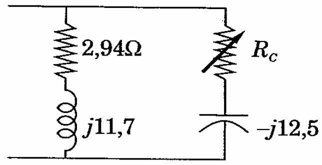


Figura 8-38

8.36 O circuito em paralelo da Fig. 8-39 é ressonante quando X_C = 9,68 ohms ou X_C = 1,65 ohms Determinar o fasor corrente total para cada valor da reatância capacitiva.
Resp.: $1{,}83\angle 0°$; $3{,}61\angle 0°$.

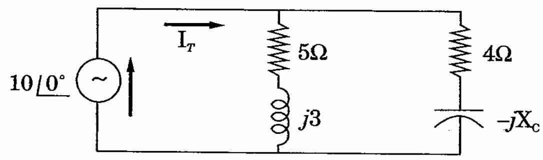


Figura 8-39

8.37 Qual o valor de R_C que proporciona ressonância no circuito da Fig. 8-40?
Resp.: R_C = 6 ohms.

8.38 Aplica-se
reatância
diagrama:

8.39 Aplica-se
resistênc
gramas d

8.40 No circuit
ção. Traç
não se pc

8.41 O circuitc
ω = 500(
geométri
Resp.: 2(

8.38 Aplica-se uma tensão **V** = $50\underline{/0°}$ a um circuito em série constituído de uma reatância indutiva fixa X_L = 5 ohms e uma resistência variável R. Discutir os diagramas dos lugares geométricos da admitância e da corrente.

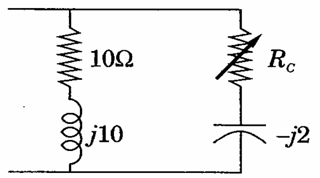


Figura 8-40

8.39 Aplica-se uma tensão **V** = $50\underline{/0°}$ a um circuito em série constituído de uma resistência fixa R = 5 ohms e uma capacitância variável C. Discutir os diagramas dos lugares geométricos da admitância e da corrente.

8.40 No circuito em paralelo da Fig. 8-41, a indutância pode ser variada sem limitação. Traçar o diagrama do lugar geométrico da admitância, para mostrar por que não se pode obter ressonância.

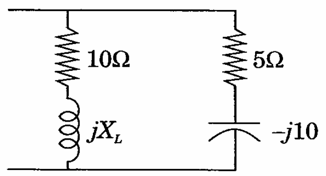


Figura 8-41

8.41 O circuito da Fig. 8-42 é ressonante para dois valores da capacitância C, quando ω = 5000 rad/s. Determinar esses valores de C e traçar o diagrama do lugar geométrico da admitância.
Resp.: 20,6 μF; 121 μF.

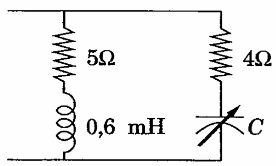


Figura 8-42

8-42 Na Fig. 8-43, $\mathbf{I}_T$ é atrasada de 53,1° em relação à tensão aplicada, quando R = 0. Se $R = \infty$ (circuito aberto), $\mathbf{I}_T$ é avançada do mesmo ângulo. Construir o diagrama do lugar geométrico da admitância para ilustrar esta condição. Para que valor de R o circuito é ressonante?
Resp.: R = 6,25 ohms.

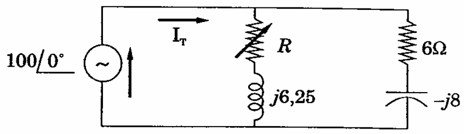


Figura 8-43

8.43 Determinar o valor de R que torna ressonante o circuito paralelo da Fig. 8-44 e construir o diagrama da admitância para explicar o resultado.

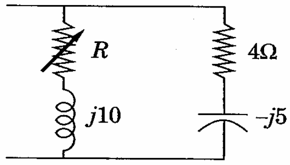


Figura 8-44

8.44 Qual a variação na reatância indutiva do Probl. 8.43, que torna possível obter-se ressonância com algum valor do resistor variável R?
Resp.: $X_L \leqslant 8{,}2$ ohms.

8.45 Determinar o valor de R que acarreta ressonância em paralelo no circuito da Fig. 8-45 e traçar o diagrama do lugar geométrico.
Resp.: R = 5,34 ohms.

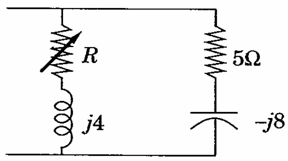


Figura 8-45

8.46 No Probl. 8.11 desejava-se tornar ressonante o circuito em paralelo, variando-se a capacitância C. Empregar o diagrama do lugar geométrico da admitância para mostrar por que só foi obtida ressonância com um valor de C e não com os dois valores usuais.

8.47 O circuito em paralelo da Fig. 8-46 deve ser tornado ressonante pela variação de L. Construir o diagrama da admitância e determinar os valores de L que proporcionam ressonância com $\omega = 5000$ rad/s.
Resp.: $L = 2{,}43$ mH; $L = 0{,}066$ mH.

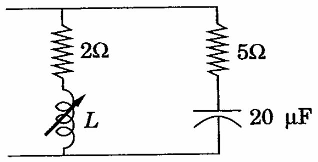


Figura 8-46

8.48 No lugar geométrico da admitância do problema 8.47, determinar o valor de L que acarreta corrente total mínima. Qual seria o módulo dessa corrente com uma tensão eficaz de 100 volts aplicada?
Resp.: $L = 2{,}95$ mH; $\mathbf{I}_T = 5{,}1$ ampères.

8.49 No Probl. 8.47 aplicar uma tensão $\mathbf{V} = 150\angle 75^\circ$ e calcular $\mathbf{I}_T$ para cada valor de L que tornou ressonante o circuito.
Resp.: $\mathbf{I}_T = 7{,}98\angle 75^\circ$; $\mathbf{I}_T = 78{,}9\angle 75^\circ$.

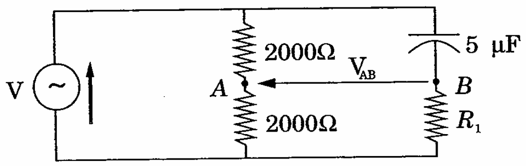


Figura 8-47

8.50 No circuito defasador da Fig. 8-47, a tensão $\mathbf{V}_{AB}$ deve ser atrasada de 10° a 170° em relação à tensão aplicada $\mathbf{V}$. Na freqüência de 60 Hz, qual a gama de variação de R_1 que satisfaz ao desvio de tensão?
Resp.: 46,4 a 6080 ohms.

8.51 Em cada uma das Figs. 8-48(*a*), (*b*) e (*c*) é fornecido um diagrama da corrente total solicitada pelo circuito que contém um elemento variável. Descrever o circuito que corresponde a cada caso.
Resp.: (*a*) Um circuito de dois ramos em paralelo. Ramo 1: R e X_C fixos; ramo 2: R fixo e X_C variável.

(*b*) Um circuito paralelo de três ramos. Ramo 1: R e X_C fixos; ramo 2: X_C fixo; ramo 3: R fixo e X_L variável.

(*c*) Um circuito paralelo de dois ramos. Ramo 1: R e X_C fixos; ramo 2: X_L fixo e R variável.

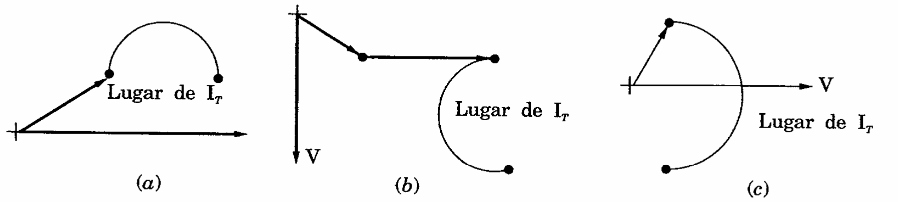


Figura 8-48

8.52 Determinar as constantes do circuito e suas ligações, correspondentes ao lugar geométrico da corrente indicado na Fig. 8-49, para $\omega = 2000$ rad/s.
Resp.: Ramo 1: $R = 7{,}07\ \Omega$; $L = 3{,}54$ mH. Ramo 2: $R = 7{,}07\ \Omega$; C variável.

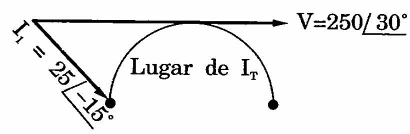


Figura 8-49

8.53 Um circuito em paralelo de dois ramos tem o diagrama da corrente mostrado na Fig. 8-50. Qual a variação no ramo RL que faz com que o ponto A caia sobre o fasor tensão?
Resp.: Fazer $X_L = 5{,}78$ ohms.

8.54 Um circui
na Fig. 8-
Resp.: Ra
Ramo 2: *I*
Ramo 3: *L*

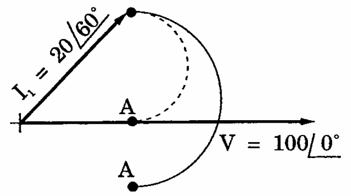


Figura 8-50

8.54 Um circuito em paralelo de três ramos tem o diagrama das correntes mostrado na Fig. 8-51. Determinar todas as correntes do circuito, sendo $\omega = 5000$ rad/s.
Resp.: Ramo 1: $R = 8{,}05\ \Omega$; $L = 0{,}423$mH.
Ramo 2: $R = 4{,}16\ \Omega$; $C = 27{,}7\ \mu$F.
Ramo 3: $L = 2{,}74$ mH; R variável.

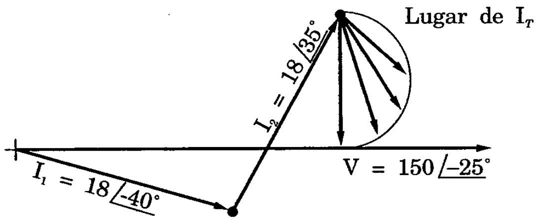


Figura 8-51

MAKRON Books

ANÁLISE DE CIRCUITOS PELAS CORRENTES DE MALHA

Introdução

As fontes de tensão em um circuito elétrico ou estrutura produzem correntes em cada um dos ramos e conseqüentes tensões nos elementos do circuito. A solução da estrutura consiste em determinarem-se as correntes nos ramos ou as tensões nos elementos.

Correntes de Malha

Para aplicação do *método das correntes de malha* escolhem-se percursos fechados simples para as chamadas *correntes de malha*, como mostra a Fig. 9-1. Escrevem-se, então, no caso, três equações em função das incógnitas $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$ e resolve-se o sistema. A corrente em cada braço é então determinada diretamente por uma das correntes de malha ou por uma combinação das mesmas.

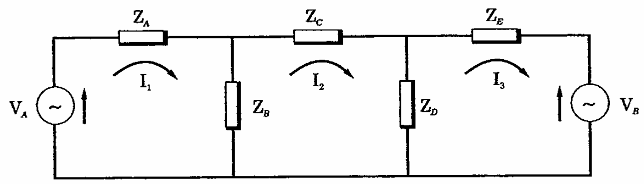


Figura 9-1 Correntes de malha em um circuito.

Assim, a corrente em $\mathbf{Z}_A$ é $\mathbf{I}_1$ e a corrente em $\mathbf{Z}_B$, admitindo-se positivo o sentido para baixo, através da impedância, é $\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2$. A corrente em qualquer ramo da estrutura é obtida de forma semelhante. A tensão em qualquer elemento de circuito será, então, o produto do fasor corrente no elemento pela impedância complexa.

Para se obter o conjunto de três equações, aplica-se a lei de Kirchhoff para as tensões a cada corrente de malha. Na Fig. 9-2 foi destacada a malha de $\mathbf{I}_1$ e escreve-se, então, a equação que iguala a soma das quedas de tensão, ao longo da malha, às "elevações" de tensão.

$$\mathbf{I}_1\mathbf{Z}_A + (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2)\mathbf{Z}_B = \mathbf{V}_A \qquad (1)$$

A segunda malha não contém fonte; portanto, a soma das quedas de tensão é nula.

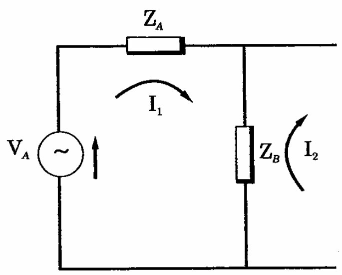


Figura 9-2

$$\mathbf{I}_2\mathbf{Z}_C + (\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3)\mathbf{Z}_D + (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1)\mathbf{Z}_B = 0 \qquad (2)$$

Aplicando a lei de Kirchhoff para as tensões à terceira malha,

$$\mathbf{I}_3\mathbf{Z}_E + (\mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_2)\mathbf{Z}_D = \mathbf{V}_B \qquad (3)$$

Reunindo e reagrupando,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B)\mathbf{I}_1 - \mathbf{Z}_B\mathbf{I}_2 &= \mathbf{V}_A & (1')\\
-\mathbf{Z}_B\mathbf{I}_1 + (\mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_D)\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_D\mathbf{I}_3 &= 0 & (2')\\
\mathbf{Z}_D\mathbf{I}_2 + (\mathbf{Z}_D + \mathbf{Z}_E)\mathbf{I}_3 &= \mathbf{V}_B & (3')
\end{aligned}$$

Pode-se deduzir diretamente esse conjunto de equações. Consideremos a primeira malha da Fig. 9-2. Toma-se o sentido horário para a corrente $\mathbf{I}_1$ e todas as quedas de tensões nos elementos dessa malha, produzidas por $\mathbf{I}_1$, são positivas. A corrente de malha $\mathbf{I}_2$ da segunda malha também circula em $\mathbf{Z}_B$, porém em sentido oposto a $\mathbf{I}_1$; assim, a queda de tensão em $\mathbf{Z}_B$, produzida por $\mathbf{I}_2$ é $-\mathbf{Z}_B\mathbf{I}_2$. A tensão $\mathbf{V}_A$ é positiva porque tem o mesmo sentido de $\mathbf{I}_1$. Feitas estas considerações, aplicando-se a lei de Kirchhoff à malha um, obtém-se a equação *(1')*. As equações *(2')* e *(3')* são obtidas de maneira semelhante.

As expressões *elevação de tensão* e *queda de tensão* são mais adequadas aos circuitos de corrente contínua, onde seu significado é mais claro do que nos circuitos com excitações senoidais, nos quais tensões e correntes instantâneas assumem valores positivos e negativos. Em regime estacionário senoidal, segundo a 2ª lei de Kirchhoff para as tensões, aplicada a um circuito fechado, resulta uma igualdade com fasores, em que a *soma dos fasores das tensões nas impedâncias da malha é igual à soma dos fasores de todas as fontes de tensão agindo na malha.*

Escolha das Correntes de Malha

Aplicando o método das correntes de malha, é possível simplificar-se a solução de um dado problema pela escolha conveniente das malhas no circuito. Se, na Fig. 9-1, desejássemos apenas determinar a corrente no ramo que contém $\mathbf{Z}_B$, seria conveniente deixar apenas uma malha passar em $\mathbf{Z}_B$. Precisamos, assim, determinar apenas $\mathbf{I}_1$. A Fig. 9-3 mostra as novas malhas escolhidas.

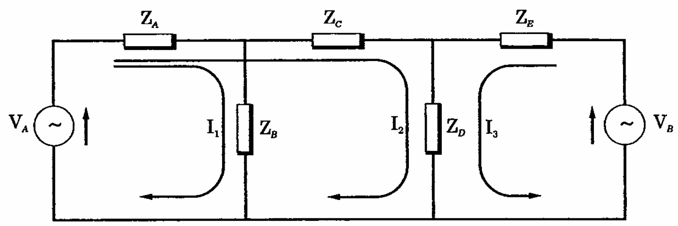


Figura 9-3

O conjunto de equações das correntes de malha é

$$\begin{array}{rcrcrcl}
(\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B)\mathbf{I}_1 & + & \mathbf{Z}_A\mathbf{I}_2 & & & = & \mathbf{V}_A \\
\mathbf{Z}_A\mathbf{I}_1 & + & (\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_D)\mathbf{I}_2 & + & \mathbf{Z}_D\mathbf{I}_3 & = & \mathbf{V}_A \\
 & & \mathbf{Z}_D\mathbf{I}_2 & + & (\mathbf{Z}_D + \mathbf{Z}_E)\mathbf{I}_3 & = & \mathbf{V}_B
\end{array}$$

Quaisquer que sejam as correntes de malha escolhidas, cada elemento de circuito deverá ser percorrido pelo menos por uma corrente, e não tem como haver dois ramos com a mesma corrente ou igual combinação algébrica de correntes. No parágrafo seguinte, são apresentadas regras que indicam o número de correntes de malha necessário para a resolução de um circuito; um número inferior de correntes não será suficiente.

Número Necessário de Correntes de Malha

Para um circuito simples e plano, o número de correntes de malha necessário é evidente. As estruturas mais elaboradas exigirão um método que forneça o número necessário de equações. Um estudo aprofundado desta questão nos conduz à uma bonita área no estudo de Circuitos Elétricos, denominada Topologia de Redes Elétricas. Veremos a seguir um pouco deste assunto.

A Fig. 9-4(b) mostra o gráfico da estrutura, onde os nós são pequenos círculos e os ramos foram substituídos por linhas. A seguir, a Fig. 9-4(c) mostra a *árvore* da estrutura, obtida com a inclusão apenas de ramos que não formam percursos fechados. A árvore da estrutura não é única. As linhas cheias da Fig. 9-4(c) chamam-se *ramos da árvore* e as tracejadas, *ramos de ligação*. Cada ramo de ligação completa um percurso fechado. O número de correntes de malha exigido pela estrutura é igual ao número de ramos de ligação, 4.

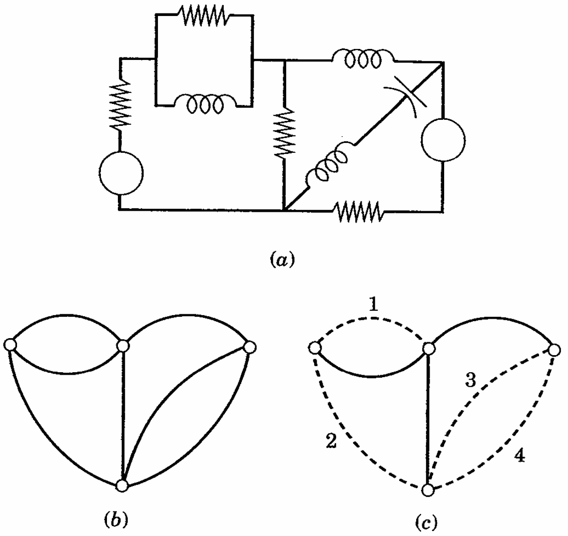


Figura 9-4 Estrutura, gráfico e árvore.

Obtém-se o mesmo resultado "cortando" os ramos do circuito original, de modo que cada corte "abra" um percurso fechado. Quando não houver mais percursos fechados a abrir, o número de cortes feitos indicará o número necessário de correntes de malha.

Um terceiro método consiste em contarem-se os ramos e nós da estrutura. O número necessário de correntes de malha é dado por

Número de equações = ramos – (nós – 1)

A estrutura da Fig. 9-4(a) contém sete ramos e quatro nós. O número de correntes de malha é $7 - (4 - 1) = 4$.

Equações das Malhas

Em notação geral as equações de um circuito de três malhas são:

$$\mathbf{Z}_{11}\mathbf{I}_1 \pm \mathbf{Z}_{12}\mathbf{I}_2 \pm \mathbf{Z}_{13}\mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_1$$

$$\pm \mathbf{Z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{22}\mathbf{I}_2 \pm \mathbf{Z}_{23}\mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_2$$

$$\pm \mathbf{Z}_{31}\mathbf{I}_1 \pm \mathbf{Z}_{32}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{33}\mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_3$$

$\mathbf{Z}_{11}$ é a impedância da malha um, igual à soma de todas as impedâncias que $\mathbf{I}_1$ percorre. $\mathbf{Z}_{22}$ e $\mathbf{Z}_{33}$ são as impedâncias das malhas dois e três, dadas pelas somas das impedâncias das respectivas malhas.

$\mathbf{Z}_{12}$ é a soma das impedâncias comuns às correntes de malha $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$.

Segue-se que $\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21}$. As impedâncias $\mathbf{Z}_{13}$, $\mathbf{Z}_{31}$, $\mathbf{Z}_{23}$ e $\mathbf{Z}_{32}$ são as somas das impedâncias comuns às correntes de malha indicadas por seus índices. O sinal positivo aplica-se caso as duas correntes percorram a impedância comum no mesmo sentido. Caso contrário, o sinal é o negativo.

$\mathbf{V}_1$ é a soma de todas as tensões de geradores na malha um. O sinal será positivo se a fonte debitar no sentido da corrente de malha e negativo se em sentido contrário. $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{V}_3$ são as somas das tensões das fontes das respectivas malhas.

Exemplo 1 Escrever as equações das correntes de malha do circuito da Fig. 9-5.

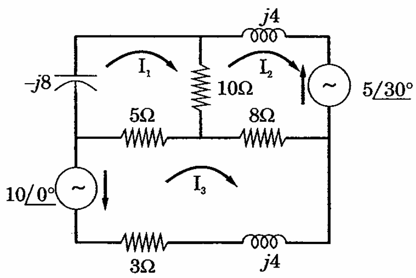


Figura 9 5

As correntes de malha estão traçadas no diagrama do circuito. Como não existe gerador na malha um, a soma das quedas de tensão é igual a zero.

$$\mathbf{I}_1(-j8) + (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2)10 + (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3)5 = 0$$

A fonte de $5\angle 30^\circ$ volts da malha dois debita em sentido contrário ao da corrente de malha; seu sinal é, portanto, negativo.

$$\mathbf{I}_2(j4) + (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)8 + (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1)10 = -\,(5\angle 30^\circ)$$

Aplicando à terceira malha a lei de Kirchhoff para as tensões, obtemos

$$\mathbf{I}_3(3 + j4) + (\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1)5 + (\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2)8 = -(10\angle 0^\circ)$$

Reagrupando os termos, o conjunto das três equações fica sendo:

$$\begin{aligned}
(15 - j8)\mathbf{I}_1 - \quad 10\mathbf{I}_2 - \quad 5\mathbf{I}_3 &= 0\\
-10\mathbf{I}_1 + (18 + j4)\mathbf{I}_2 - \quad 8\mathbf{I}_3 &= -(5\angle 30^\circ)\\
-5\mathbf{I}_1 - \quad 8\mathbf{I}_2 + (16 + j4)\,\mathbf{I}_3 &= -(10\angle 0^\circ)
\end{aligned}$$

Compare-se o grupo de equações acima com as equações do circuito de três malhas, dadas em notação geral. A impedância da malha um é $\mathbf{Z}_{11}$ $(5 + 10 - j8) = 15 - j8$. A impedância comum às malhas um e dois é $\mathbf{Z}_{12} = 10$. Entretanto, o sentido de $\mathbf{I}_2$ é oposto ao de $\mathbf{I}_1$; então, o sinal de $\mathbf{Z}_{12}$ é negativo. Da mesma maneira, a impedância comum às malhas um e três é $\mathbf{Z}_{13} = -5$. Observe-se que $\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21}$, $\mathbf{Z}_{13} = \mathbf{Z}_{31}$ e $\mathbf{Z}_{23} = \mathbf{Z}_{32}$.

A tensão do gerador na malha dois é $5\angle 30^\circ$, porém seu sentido é contrário ao da corrente na malha; portanto, seu sinal é negativo. Cada termo do conjunto de equações acima pode ser comparado com a notação geral.

Matrizes

Matriz é um arranjo de números ou de funções, dispostos em forma retangular (linhas e colunas), encerrados em um par de colchetes e sujeitos a determinadas regras de operação. Na matriz,

os números oı
na coluna j. I
"$m \times n$" e é cl
$m \times n$".

Duas

Soma de ı

Duas
as ordens fore

A son
matriz C de r
corresponden

Exemp

A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

os números ou funções a_{ij} são seus elementos. Um elemento a_{ij} está na linha i e na coluna j. Esta matriz, de m linhas e n colunas, é de ordem "m por n" ou "$m \times n$" e é chamada "matriz A" ou "matriz A de $m \times n$" ou matriz "$[a_{ij}]$ de $m \times n$".

Duas matrizes só serão iguais se uma for a exata reprodução da outra.

Soma de Matrizes

Duas matrizes de mesma ordem podem ser somadas ou subtraídas; se as ordens forem diferentes, essas operações não poderão ser efetuadas.

A soma (diferença) de duas matrizes $m \times n$, $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, é uma matriz C de $m \times n$ em que cada elemento é a soma (diferença) dos elementos correspondentes de A e B. Assim,

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$$

Exemplo 2 Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, então,

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 4+2 & 0+6 \\ 2+0 & 7+1 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes

O produto $A \times B$, nessa ordem, da matriz A de $1 \times m = [a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots a_1m]$ pela

$$\text{matriz } B \text{ de } m \times 1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \ldots. \\ b_{m1} \end{bmatrix} \text{ é a matriz } C \text{ de } 1 \times 1$$

$$C = [a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1m}] \times \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \ldots. \\ b_{m1} \end{bmatrix} = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1m}b_{m1}] =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{m} a_{1k}\, b_{k1} \right]$$

Observe-se que cada elemento da linha é multiplicado pelo elemento correspondente da coluna e os produtos são somados.

Exemplo 3 $[1\ \ 3\ \ 5]\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = [1(2) + 3(4) + 5(-2)] = [4]$

O produto AB, nessa ordem, da matriz A de $m \times s = [a_{ij}]$ pela matriz B de $s \times n = [b_{ij}]$ é a matriz C de $m \times n = [c_{ij}]$, onde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}\, b_{kj}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Exemplo 4 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$

Exemp

Exemp

$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$

Duas
só é definido c
B. Portanto, s
produto AB é
for, também,

Inversão

Num
algarismo ma

Por e
inversão. Em
inversões, po
portanto, há
algarismo 2 p

Determin

Tome

Exemplo 5 $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3I_1 + 5I_2 - 8I_3 \\ 2I_1 + 1I_2 + 6I_3 \\ 4I_1 - 6I_2 + 7I_3 \end{bmatrix}$

Exemplo 6

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(8) + (-3)(7) & 5(-2) + (-3)(0) & 5(6) + (-3)(9) \\ 4(8) + 2(7) & 4(-2) + (2)(0) & 4(6) + 2(9) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & -10 & 3 \\ 46 & -8 & 42 \end{bmatrix}$$

Duas matrizes A e B só podem ser multiplicadas, isto é, o produto AB só é definido quando o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Portanto, se A for, por exemplo, uma matriz 3×2 e B for uma matriz 2×5, o produto AB é definido, mas não o é o produto BA. Se D for uma matriz 3×3 e E for, também, 3×3, ambos os produtos, AB e BA, serão definidos.

Inversão

Num arranjo de algarismos positivos existirá uma inversão quando um algarismo maior preceder um menor.

Por exemplo, em 132, o algarismo 3 precede 2; há, portanto, uma inversão. Em 321 o algarismo 3 precede 2 e 1, e o algarismo 2 precede 1; há três inversões, portanto. Em 4213, 4 precede 2, 1 e 3 e o algarismo 2 precede 1; portanto, há quatro inversões. Em 3421, 3 precede 2 e 1, 4 precede 2 e 1 e o algarismo 2 precede 1; há, portanto, cinco inversões.

Determinante de uma Matriz

Tomemos n elementos da matriz n quadrada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e formemos um produto $a_{1j1}\ a_{2j2}\ a_{3j3}\ \dots\ a_{njn}$, de modo que um, e apenas um, elemento pertença a uma linha e um, e apenas um, elemento pertença a uma coluna. Observe-se que a seqüência dos primeiros índices é, por conveniência, na ordem 1, 2, ..., n; portanto, a seqüência j_1, j_2, ..., j_n dos segundos índices é uma das $n!$ permutações dos algarismos 1, 2, ..., n. Dá-se ao produto o sinal + ou –, conforme seja par ou ímpar o número de inversões dos segundos índices.

Portanto, o determinante de uma matriz n quadrada, escrito $|A|$, é a soma de todos os $n!$ produtos de sinal diferente que podem ser formados com os elementos de A.

O determinante de uma matriz quadrada de ordem n chama-se determinante de ordem n.

Exemplo 7 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Exemplo 8 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

$$+\ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Menores e Cofatores

O menor de um elemento a_{ij} de um determinante de ordem n é o determinante de ordem $(n - 1)$ obtido quando se eliminam a linha e a coluna que contêm esse elemento. O menor de um elemento a_{ij} se designa por $|M_{ij}|$.

O menor com seu sinal, $(-1)^{i+j}\ |M_{ij}|$, chama-se cofator de a_{ij} e se designa por Δ_{ij}.

Exemplo 9

Para o determinante de 3ª ordem $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

$$|M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Valor de um Determinante

O valor de um determinante $|A|$ de ordem n é a soma dos n produtos obtidos, multiplicando-se cada elemento de qualquer linha ou coluna escolhida pelo seu cofator. Assim,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$$

$$= -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

é a expansão de $|A|$ pela segunda coluna.

Exemplo 10

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & -6 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\{4(-6) - 7(1)\} - 5\{1(-6) - 7(2)\} + 0 = 7$$

Exemplo 11 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5\{1(3) - 2(4)\} = 25$

Exemplo 12 $\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = 5\{4(-3) - (-2)(8)\} = 20$

Propriedades dos Determinantes

1. Se duas linhas ou colunas de um determinante são idênticas, o valor do determinante é zero. Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & -4 \\ 6 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

2. Multiplicando-se cada elemento de uma linha ou coluna de um determinante por qualquer número k, o determinante fica multiplicado por k. Por exemplo,

$$2\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 14 \end{vmatrix}$$

3. Trocando-se as posições de duas linhas ou colunas de um determinante, troca-se o sinal deste. Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & 8 \\ -6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

4. Se cada elemento de uma linha ou coluna for expresso como a soma de dois ou mais números, o determinante poderá ser escrito como a soma de dois ou mais determinantes. Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -9+2 & 5 \\ 2 & 4+0 & -5 \\ 1 & 8-2 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -9 & 5 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & 8 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

5. Somando-se aos elementos de qualquer linha (coluna) k vezes o elemento correspondente de qualquer outra linha (coluna), o valor do determinante não se altera. Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9+3(-3) & -3 \\ 4 & 6+3(-2) & -2 \\ -3 & 1+3(5) & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 16 & 5 \end{vmatrix}$$

Resolução
Regra de (

O siste

pode ser escrit

O valo
do por x_1 se ca
dade 2).

Δ_a

Agora,
somemos x_2 ve
elemento corre

$x_1\Delta_a$ =

ou

Resolução de Equações Lineares por Determinantes – Regra de Cramer

O sistema de três equações lineares a três incógnitas x_1, x_2 e x_3

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= k_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= k_3 \end{aligned}$$

pode ser escrito sob a forma de matrizes

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

O valor numérico do determinante dos coeficientes, Δ_a, fica multiplicado por x_1 se cada elemento da primeira coluna for multiplicado por x_1 (propriedade 2).

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad x_1\Delta_a = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Agora, a cada elemento da primeira coluna deste último determinante, somemos x_2 vezes o elemento correspondente da segunda coluna e x_3 vezes o elemento correspondente da terceira coluna (propriedade 5). Então,

$$x_1\Delta_a = \begin{vmatrix} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) & a_{22} & a_{23} \\ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ou

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_a}$$

desde que $\Delta_a \neq 0$. Da mesma maneira, tem-se:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 & a_{13} \\ a_{21} & k_2 & a_{23} \\ a_{31} & k_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_a} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \\ a_{31} & a_{32} & k_3 \end{vmatrix}}{\Delta_a}$$

Este método, chamado *Regra de Cramer*, pode ser aplicado a qualquer sistema de n equações lineares a n incógnitas, desde que o determinante dos coeficientes seja diferente de zero.

O Método das Matrizes e a Análise de Circuitos

As equações das correntes de três malhas

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{11}\mathbf{I}_1 \pm \mathbf{Z}_{12}\mathbf{I}_2 \pm \mathbf{Z}_{13}\mathbf{I}_3 &= \mathbf{V}_1 \\ \pm \mathbf{Z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{22}\mathbf{I}_2 \pm \mathbf{Z}_{23}\mathbf{I}_3 &= \mathbf{V}_2 \\ \pm \mathbf{Z}_{31}\mathbf{I}_1 \pm \mathbf{Z}_{32}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{33}\mathbf{I}_3 &= \mathbf{V}_3 \end{aligned}$$

são escritas agora sob a forma de matrizes

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \pm \mathbf{Z}_{12} & \pm \mathbf{Z}_{13} \\ \pm \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \pm \mathbf{Z}_{23} \\ \pm \mathbf{Z}_{31} & \pm \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix}$$

ou

$$[\mathbf{Z}]\ [\mathbf{I}] = [\mathbf{V}]$$

que se designa como lei de Ohm sob a forma de matrizes, onde $[\mathbf{Z}]$ é a matriz impedância, $[\mathbf{I}]$ a matriz corrente e $[\mathbf{V}]$ a matriz tensão.

As correntes de malha $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$ são encontradas pelas relações de dois determinantes.

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{V}_1 & \pm\,\mathbf{Z}_{12} & \pm\,\mathbf{Z}_{13} \\ \mathbf{V}_2 & \mathbf{Z}_{22} & \pm\,\mathbf{Z}_{23} \\ \mathbf{V}_3 & \pm\,\mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_z} \qquad \mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{V}_1 & \pm\,\mathbf{Z}_{13} \\ \pm\,\mathbf{Z}_{21} & \mathbf{V}_2 & \pm\,\mathbf{Z}_{23} \\ \pm\,\mathbf{Z}_{31} & \mathbf{V}_3 & \mathbf{Z}_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_z}$$

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \pm\,\mathbf{Z}_{12} & \mathbf{V}_1 \\ \pm\,\mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{V}_2 \\ \pm\,\mathbf{Z}_{31} & \pm\,\mathbf{Z}_{32} & \mathbf{V}_3 \end{vmatrix}}{\Delta_z}$$

Se o determinante numerador de cada uma for desenvolvido pelos elementos da coluna que contém as tensões, obteremos o seguinte conjunto de equações para as correntes de malha:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_z}\right) + \mathbf{V}_2\left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_z}\right) + \mathbf{V}_3\left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_z}\right) \tag{1}$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1\left(\frac{\Delta_{12}}{\Delta_z}\right) + \mathbf{V}_2\left(\frac{\Delta_{22}}{\Delta_z}\right) + \mathbf{V}_3\left(\frac{\Delta_{32}}{\Delta_z}\right) \tag{2}$$

$$\mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_1\left(\frac{\Delta_{13}}{\Delta_z}\right) + \mathbf{V}_2\left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta_z}\right) + \mathbf{V}_3\left(\frac{\Delta_{33}}{\Delta_z}\right) \tag{3}$$

Os termos dos segundos membros das equações (*1*), (*2*) e (*3*) são componentes fasores que resultam das várias tensões de excitação. Assim, em (*1*), a corrente de malha $\mathbf{I}_1$ consta de três partes: $\mathbf{V}_1(\Delta_{11}/\Delta_z)$ devida à tensão $\mathbf{V}_1$; $\mathbf{V}_2(\Delta_{21}/\Delta_z)$ devida à tensão $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{V}_3(\Delta_{31}/\Delta_z)$ devida à tensão $\mathbf{V}_3$.

Impedância no Ponto de Excitação

Seja um circuito passivo, ou isento de fontes de alimentação, com dois terminais externos, como mostra a Fig. 9-6. Apliquemos aí uma fonte de tensão $\mathbf{V}_1$ e chamemos $\mathbf{I}_1$ a corrente de malha resultante.

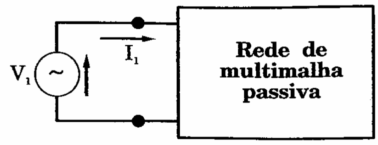


Figura 9-6

Como não há outras fontes no circuito, a equação da corrente de malha $\mathbf{I}_1$ é

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_z}\right) + (0)\left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_z}\right) + (0)\left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_z}\right) + \ldots = \mathbf{V}_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_z}\right)$$

A *impedância de entrada* ou *impedância no ponto de excitação* é a relação entre a tensão aplicada $\mathbf{V}_1$ e a corrente resultante $\mathbf{I}_1$. Assim,

$$\mathbf{Z}_{e1} = \mathbf{V}_1/\mathbf{I}_1 = \Delta_z/\Delta_{11}$$

Define-se a impedância de entrada de um circuito (com elementos *passivos* e *ativos*) como sendo a impedância apresentada pelo circuito nos terminais especificados, quando *todas as fontes são substituídas por suas respectivas impedâncias internas*. Assim, a relação Δ_z/Δ_{11} é a impedância no ponto de excitação da malha um (independentemente de ser a estrutura passiva ou ativa) e sua unidade é o ohm.

Impedância de Transferência

Uma fonte de tensão que excita uma malha produzirá uma corrente em cada uma das outras malhas da estrutura. *Impedância de transferência* é a relação entre uma tensão de excitação em uma malha e a corrente resultante em outra malha, anuladas todas as demais fontes.

Figura 9-7

Seja o circuito da Fig. 9-7, onde $\mathbf{V}_r$ é a tensão de excitação da malha r e $\mathbf{I}_s$ é a corrente produzida na malha s. Então,

$$\mathbf{I}_s = (0)\left(\frac{\Delta_{1s}}{\Delta_z}\right) + \ldots + \mathbf{V}_r\left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta_z}\right) + \ldots + (0)\left(\frac{\Delta_{ns}}{\Delta_z}\right) = \mathbf{V}_r\left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta_z}\right)$$

e

$$\mathbf{Z}_{\text{transf }(rs)} = \mathbf{V}_r/\mathbf{I}_s = \Delta_z\Delta_{rs}(\Omega)$$

O índice duplo na impedância de transferência, rs, indica o sentido da ação, isto é, a fonte está na malha r e a corrente resultante está na malha s. O determinante do denominador é o cofator da posição rs, Δ_{rs}, com os mesmos índices que a impedância de transferência.

*Problemas Resolvidos**

9.1 Escolhidas as correntes de malha indicadas na Fig. 9-8, escrever as equações correspondentes a essas correntes e colocá-las sob a forma de matrizes.

Aplicando a lei de Kirchhoff para as tensões, a cada uma das três malhas,

$$\mathbf{I}_1(2 - j2) + (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2)(j5) + (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3)5 = 10\,\underline{/0^\circ}$$

$$\mathbf{I}_2(10) + (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)(2 - j2) + (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1)(j5) = -(5\,\underline{/30^\circ})$$

$$\mathbf{I}_3(10) + (\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1)(5) + (\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2)(2 - j2) = -(10\,\underline{/90^\circ})$$

Reagrupando os termos,

$$\begin{aligned}(7 + j3)\mathbf{I}_1 - (j5)\mathbf{I}_2 - (5)\mathbf{I}_3 &= 10\,\underline{/0^\circ}\\ -(j5)\mathbf{I}_1 + (12 + j3)\mathbf{I}_2 - (2 - j2)\mathbf{I}_3 &= -(5\,\underline{/30^\circ})\\ -(5)\mathbf{I}_1 - (2 - j2)\mathbf{I}_2 + (17 - j2)\mathbf{I}_3 &= -(10\,\underline{/90^\circ})\end{aligned}$$

que, sob a forma de matriz, dão

* N. R. Nos problemas que se seguem os elementos são dados em ohms e as fontes de tensão em volts.

$$\begin{bmatrix} 7 + j3 & -j5 & -5 \\ -j5 & 12 + j3 & -(2 - j2) \\ -5 & -(2 - j2) & 17 - j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\,\underline{/0^\circ} \\ -(5\,\underline{/30^\circ}) \\ -(10\,\underline{/90^\circ}) \end{bmatrix}$$

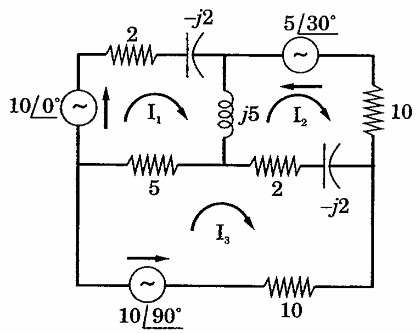


Figura 9-8

9.2 Pela inspeção do circuito da Fig. 9-9, escrever as equações das correntes de malha, sob a forma de matrizes.

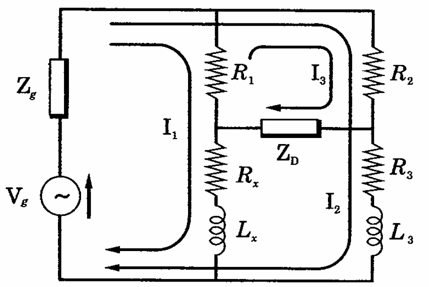


Figura 9-9

Os termos da matriz impedância são determinados a partir de suas definições. A impedância da malha um, $\mathbf{Z}_{11}$, é a soma de todas as impedâncias na malha, $(R_1 + R_x + j\omega L_x + \mathbf{Z}_g)$. O elemento $\mathbf{Z}_{12}$, impedância comum às correntes de malha um e dois, é $\mathbf{Z}_g$ com sinal positivo, já que as duas correntes de malha passam por ela no mesmo sentido. A matriz corrente consta simplesmente de $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$. A matriz tensão é, portanto, constituída pelas tensões excitadoras das malhas. A equação pedida das matrizes é, então,

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_x + j\omega L_x + \mathbf{Z}_g) & \mathbf{Z}_g & -R_1 \\ \mathbf{Z}_g & (R_2 + R_3 + j\omega L_3 + \mathbf{Z}_g) & R_2 \\ -R_1 & R_2 & (R_1 + R_2 + \mathbf{Z}_D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_g \\ \mathbf{V}_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

9.3 Achar a potência de saída da fonte da Fig. 9-10 e a potência nos resistores do circuito.

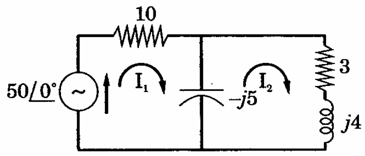


Figura 9-10

Escolhemos as correntes de malha como mostra o diagrama, de modo que pela fonte circula apenas uma corrente. Então, temos:

$$\begin{bmatrix} 10 - j5 & j5 \\ j5 & 3 - j1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50\angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50\angle 0^\circ & j5 \\ 0 & 3 - j1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 - j5 & j5 \\ j5 & 3 - j1 \end{vmatrix}} \qquad \mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 - j5 & 50\angle 0^\circ \\ j5 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_z}$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{150 - j50}{50 - j25} = 2{,}83\angle 8{,}14^\circ \qquad \mathbf{I}_2 = \frac{-j250}{50 - j25} = 4{,}47\angle -63{,}4^\circ$$

A potência da fonte é $P = VI \cos \theta = 50\,(2{,}83) \cos (8{,}14^\circ) = 140$ watts. A potência no resistor de 10 ohms é $P_{10} = (I_1)^2\, 10 = (2{,}83)^2\, 10 = 80$ watts, e, no resistor de 3 ohms, $P_3 = (I_2)^2\, 3 = 60$ watts; sua soma, $80 + 60 = 140$ watts, é igual à potência de saída da fonte.

9.4 Para o mesmo circuito do Probl. 9.3, escolhendo as correntes de malha como indica a Fig. 9-11, determinar a potência de saída da fonte.

As equações das correntes de malha sob a forma de matrizes são

$$\begin{bmatrix} 10 - j5 & 10 \\ 10 & 13 + j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50\angle 0^\circ \\ 50\angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

Então,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50\underline{/0^\circ} & 10 \\ 50\underline{/0^\circ} & 13 + j4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 - j5 & 10 \\ 10 & 13 + j4 \end{vmatrix}} = \frac{150 + j200}{50 - j25} = 4{,}47\underline{/79{,}7^\circ}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 - j5 & 50\underline{/0^\circ} \\ 10 & 50\underline{/0^\circ} \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{-j250}{50 - j25} = 4{,}47\underline{/-63{,}4^\circ}$$

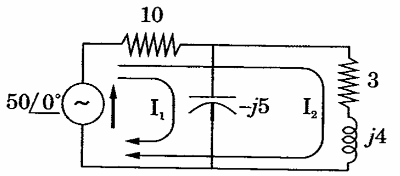


Figura 9-11

No ramo da fonte circulam as duas correntes de malha. Então,

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = \left(\frac{150 + j200}{50 - j25}\right) + \left(\frac{-j250}{50 - j25}\right) = 2{,}83\underline{/8{,}14^\circ}$$

e a potência da fonte é $P = VI\cos\theta = 50(2{,}83)\cos 8{,}14^\circ = 140$ W.

9.5 O circuito da Fig. 9-12 tem as tensões indicadas entre cada par das três linhas. Determinar as correntes $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$.

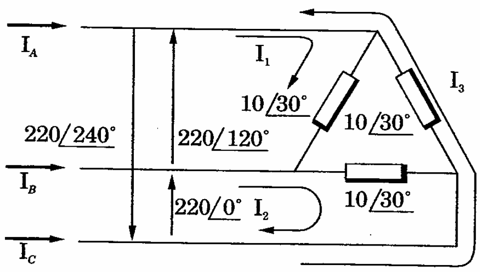


Figura 9-12

Escolhidas as correntes de malha indicadas no diagrama, as correntes são independentes. Isso se verifica quando se escreve a matriz:

$$\begin{bmatrix} 10\angle 30^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 10\angle 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 10\angle 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220\angle 120^\circ \\ 220\angle 0^\circ \\ 220\angle 240^\circ \end{bmatrix}$$

donde se tiram as três correntes:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{220\angle 120^\circ}{10\angle 30^\circ} = 22\angle 90^\circ, \quad \mathbf{I}_2 = \frac{220\angle 0^\circ}{10\angle 30^\circ} = 22\angle -30^\circ,$$

$$\mathbf{I}_3 = \frac{220\angle 240^\circ}{10\angle 30^\circ} = 22\angle 210^\circ$$

Então,

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3 = (22\angle 90^\circ - 22\angle 210^\circ) = 38{,}1\angle 60^\circ$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1 = (22\angle -30^\circ - 22\angle 90^\circ) = 38{,}1\angle -60^\circ$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2 = (22\angle 210^\circ - 22\angle -30^\circ) = 38{,}1\angle 180^\circ$$

9.6 Na estrutura de quatro malhas da Fig. 9-13, as correntes de malha são as representadas. R e os dois capacitores iguais de C farads são ajustados até que se anule a corrente em $\mathbf{Z}_D$. Nessa situação mostre que as incógnitas R_x e L_x podem ser expressas em termos de R, C e da freqüência da fonte, ω rad/s.

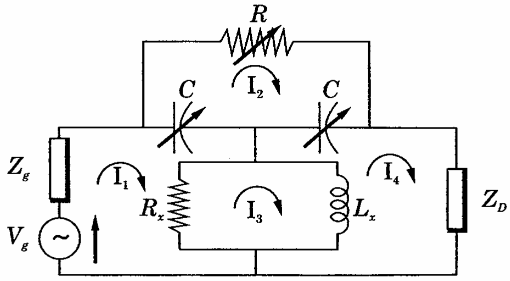


Figura 9-13

As equações de malha sob a forma matricial são:

$$\begin{bmatrix} \left(R_x+\frac{1}{j\omega C}+Z_g\right) & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -R_x & 0 \\ -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & \left(R+\frac{1}{j\omega C}+\frac{1}{j\omega C}\right) & 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) \\ -R_x & 0 & (R_x+j\omega L_x) & -(j\omega L_x) \\ 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -(j\omega L_x) & \left(\frac{1}{j\omega C}+j\omega L_x+Z_D\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exprimimos $\mathbf{I}_4$, corrente em $\mathbf{Z}_D$ sob a forma de determinante e tornâmo-la igual a zero.

$$\mathbf{I}_4 = \frac{\begin{vmatrix} \left(R_z+\frac{1}{j\omega C}+\mathbf{Z}_g\right) & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -R_x & V_g \\ -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & \left(R+\frac{1}{j\omega C}+\frac{1}{j\omega C}\right) & 0 & 0 \\ -R_x & 0 & (R_x+j\omega L_x) & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -(j\omega L_x) & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 0$$

Desenvolvendo o numerador pelos elementos da quarta coluna, temos:

$$-\mathbf{V}_g \begin{vmatrix} -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & \left(\boldsymbol{R}+\frac{1}{j\omega C}+\frac{1}{j\omega C}\right) & 0 \\ -\boldsymbol{R}_x & 0 & (\boldsymbol{R}_x+j\omega L_x) \\ 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -(j\omega L_x) \end{vmatrix} = 0$$

Como esse determinante deve ser nulo,

$$-(-R_x)(R+1/j\omega C+1/j\omega C)(-j\omega L_x) - (-1/j\omega C)(-1/j\omega C)(R_x+j\omega L_x) = 0$$

donde $\quad R_x = 1/(\omega^2 C^2 R) \qquad$ e $L_x = 1/(2\omega^2 C)$

9.7 Determinar as correntes $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$ do circuito da Fig. 9-14.

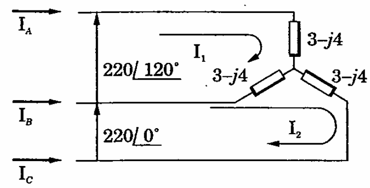


Figura 9-14

Escolhemos as duas correntes de malha indicadas no diagrama. As equações correspondentes sob a forma matricial são:

$$\begin{bmatrix} 6 - j8 & -(3 - j4) \\ -(3 - j4) & 6 - j8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220\,\underline{/120^\circ} \\ 220\,\underline{/0^\circ} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 220\,\underline{/120^\circ} & -(3 - j4) \\ 220\,\underline{/0^\circ} & 6 - j8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 - j8 & -(3 - j4) \\ -(3 - j4) & 6 - j8 \end{vmatrix}} = \frac{2200\,\underline{/66{,}9^\circ} + 1100\,\underline{/-53{,}1^\circ}}{100\,\underline{/-106{,}2^\circ} - 25\,\underline{/-106{,}2^\circ}} = \frac{1905\,\underline{/36{,}9^\circ}}{75\,\underline{/-106{,}2^\circ}}$$

$$= 25{,}4\underline{/143{,}1^\circ}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 - j8 & 220\,\underline{/120^\circ} \\ -(3 - j4) & 220\,\underline{/0^\circ} \end{vmatrix}}{\Delta_x} = \frac{2200\,\underline{/-53{,}1^\circ} + 1100\,\underline{/66{,}9^\circ}}{75\,\underline{/-106{,}2^\circ}} = \frac{1905\,\underline{/-23{,}2^\circ}}{75\,\underline{/-106{,}2^\circ}} = 25{,}4\,\underline{/83^\circ}$$

As correntes de linha pedidas são $\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_1 = 25{,}4\underline{/143{,}1^\circ}$, $\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1 =$ $= (25{,}4\underline{/83^\circ} - 25{,}4\underline{/143{,}1^\circ} = 25{,}4\underline{/23{,}1^\circ}$, e $\mathbf{I}_C = -\mathbf{I}_2 = 25{,}4\underline{/-97^\circ}$.

9.8 Empregar o método matricial para determinar a impedância de entrada da estrutura da Fig. 9-15, vista da fonte de 50 volts. Calcular $\mathbf{I}_1$ usando essa impedância.

A impedância de entrada da malha um ou impedância no ponto de excitação é:

$$\mathbf{Z}_{i1} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -5 & 0 \\ -5 & 27 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 27 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{2000}{200} = 10\Omega$$

Então, $\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1/\mathbf{Z}_{i1} = 50/10 = 5$ ampères.

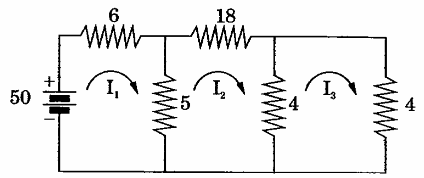


Figura 9-15

9.9 Determinar a corrente de malha $\mathbf{I}_3$ da Fig. 9.15 usando a impedância de transferência.

A fonte se encontra na malha um e a corrente pedida na malha três. A impedância de transferência pedida é

$$\mathbf{Z}_{\text{transf}(13)} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{13}} = \frac{2000}{\begin{vmatrix} -5 & 27 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{2000}{20} = 100\Omega$$

e a corrente de malha $\mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_1/\mathbf{Z}_{\text{transf}(13)} = 50/100 = 0{,}5$ ampères.

9.10 Calcular a corrente de malha $\mathbf{I}_2$ do circuito da Fig. 9-15, empregando a impedância de transferência.

Como a fonte está na malha um e a corrente pedida na malha dois, a impedância de transferência necessária é

$$\mathbf{Z}_{\text{transf}(12)} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{12}} = \frac{2000}{(-1)\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{2000}{40} = 50\,\Omega$$

e $\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1/\mathbf{Z}_{\text{transf}(12)} = 50/50 = 1$ ampère.

9.11 Calcular as tensões $\mathbf{V}_{AB}$ e $\mathbf{V}_{BC}$ da estrutura da Fig. 9-16.

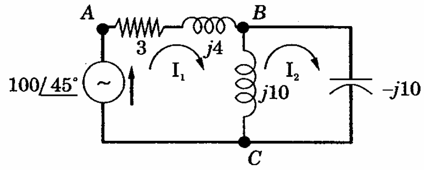


Figura 9-16

As equações das correntes de malha sob a forma matricial são:

$$\begin{bmatrix} 3 + j14 & -j10 \\ -j10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100\,\underline{/45^\circ} \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 100\,\underline{/45^\circ} & -j10 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 + j14 & -j10 \\ -j10 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{0}{100} = 0, \quad \mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 + j14 & 100\,\underline{/45^\circ} \\ -j10 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_z} =$$

$$= \frac{1000\,\underline{/135^\circ}}{100} = 10\,\underline{/135^\circ}$$

Assim, $\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{I}_1(3 + j4) = 0$ e $\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{I}_2(-j10) = (10\underline{/135^\circ})(10\underline{/-90^\circ}) = 100\underline{/45^\circ}$. A soma $(\mathbf{V}_{AB} + \mathbf{V}_{BC}) = 100\,\underline{/45^\circ}$, valor do fasor tensão aplicado.

9.12 Determinar as três componentes do triângulo das potências da fonte de $10\underline{/30^\circ}$ volts no circuito da Fig. 9-17.

As correntes de malha são escolhidas conforme indica a figura, circulando no ramo que contém a fonte apenas a corrente $\mathbf{I}_1$. Uma vez que só existe uma fonte no circuito, a impedância no ponto de excitação pode ser utilizada para a determinação de $\mathbf{I}_1$.

$$\mathbf{Z}_{e1} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 8 - j2 & -3 & 0 \\ -3 & 8 + j5 & -5 \\ 0 & -5 & 7 - j2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 + j5 & -5 \\ -5 & 7 - j2 \end{vmatrix}} = \frac{315\,\underline{/16{,}2^\circ}}{45{,}1\,\underline{/24{,}9^\circ}} = 6{,}98\,\underline{/-8{,}7^\circ}$$

e $\quad \mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1/\mathbf{Z}_{i1} = (10\,\underline{/30^\circ})/(6{,}98\,\underline{/-8{,}7^\circ}) = 1{,}43\,\underline{/38{,}7^\circ}$

A potência de saída da fonte é $P = V_1 I_1 \cos\theta = 10(1{,}43)\cos 8{,}7 = 14{,}1$ W. A potência reativa $Q = V_1 I_1$ sen $8{,}7^\circ = 2{,}16$ VAR adiantada. A potência aparente $N = V_1 I_1 = 14{,}3$ VA.

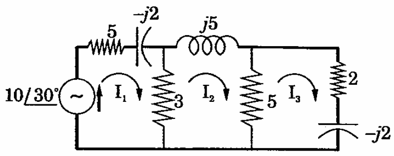


Figura 9-17

9.13 Determinar $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$ no circuito da Fig. 9-17, empregando as impedâncias de transferência.

A fonte está na malha um e a corrente pedida é a da malha dois: usa-se a impedância de transferência $\mathbf{Z}_{\text{transf}(12)}$:

$$\mathbf{Z}_{\text{transf}(12)} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{12}} = \frac{315\,\underline{/16{,}2^\circ}}{(-1)\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 7-j2 \end{vmatrix}} = \frac{315\,\underline{/16{,}2^\circ}}{21{,}8\,\underline{/-16^\circ}} = 14{,}45\,\underline{/32{,}2^\circ}$$

Logo, $\quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1/\mathbf{Z}_{\text{transf}(12)} = (10\,\underline{/30^\circ})/(14{,}45\,\underline{/32{,}2^\circ}) = 0{,}693\,\underline{/-2{,}2^\circ}$

Da mesma maneira,

$$\mathbf{Z}_{\text{transf}(13)} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{13}} = \frac{315\,\underline{/16{,}2^\circ}}{\begin{vmatrix} -3 & 8+j5 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{315\,\underline{/16{,}2^\circ}}{15} = 21\,\underline{/16{,}2^\circ}$$

e $\quad \mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_1/\mathbf{Z}_{\text{transf}(13)} = (10\,\underline{/30^\circ})/(21\,\underline{/16{,}1^\circ}) = 0{,}476\,\underline{/13{,}8^\circ}$

9.14 Calcular a potência no circuito resistivo da Fig. 9-17 e compará-la com a potência de saída da fonte.

Dos Probls. 9-12 e 9-13: $\mathbf{I}_1 = 1{,}43\underline{/38{,}7^\circ}$; $\mathbf{I}_2 = 0{,}693\underline{/-2{,}2^\circ}$; $\mathbf{I}_3 = 0{,}476\underline{/13{,}8^\circ}$.

A potência no primeiro resistor de 5 ohms é $P = 5(I_1)^2 = 5(1{,}43)^2 = 10{,}2$ watts. No resistor de 3 ohms, duas correntes de malha se combinam para dar a corrente no ramo $(I_1 - I_2) = (1{,}115 + j0{,}895) - (0{,}693 - j0{,}027) =$

=0,422 +
também,
= (0,693
potência
é $P = 2($

A potênc
igual à p

9.15 A fonte V
Determin

A corren

$\mathbf{I}_3 = \frac{\mathbf{V}}{2-}$

mos:

$\mathbf{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 8-j \\ -3 \\ 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8-j2 \\ -3 \\ 0 \end{vmatrix}}$

Então:

$\mathbf{V}_1 = \frac{}{0,}$

$=0{,}422 + j0{,}922 = 1{,}01\underline{/65{,}4^\circ}$; logo, $P = 3(1{,}01)^2 = 3{,}06$ watts. Assim, também, a corrente no ramo que contém o resistor de 5 ohms é $(I_2 - I_3) =$ $= (0{,}693 - j0{,}027) - (0{,}462 + j0{,}113) = (0{,}231 - j0{,}140) = 0{,}271\underline{/-31{,}2^\circ}$ e a potência $P = 5(0{,}271)^2 = 0{,}367$ watts. A potência no resistor de 2 ohms é $P = 2\,(I_3)^2 = 2(0{,}476)^2 = 0{,}543$ watts.

A potência total no circuito é $P_T = 10{,}2 + 3{,}06 + 0{,}367 + 0{,}453 + 14{,}1$ watts, igual à potência de saída do Probl. 9-12.

9.15 A fonte $\mathbf{V}_1$ do circuito da Fig. 9-18 acarreta uma tensão $\mathbf{V}_0$ na impedância $2 - j2$. Determinar a fonte $\mathbf{V}_1$, que corresponde a $\mathbf{V}_0 = 5\underline{/0^\circ}$.

A corrente de malha $\mathbf{I}_3$, com a tensão dada$\mathbf{V}_0$ é:

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\mathbf{V}_0}{2 - j2} = \frac{5\underline{/0^\circ}}{2\sqrt{2}\,\underline{/-45^\circ}} = 1{,}76\,\underline{/45^\circ}.$$ Sob a forma de determinante, temos:

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 8 - j2 & -3 & \mathbf{V}_1 \\ -3 & 8 + j5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 - j2 & -3 & 0 \\ -3 & 8 + j5 & -5 \\ 0 & -5 & 7 - j2 \end{vmatrix}} = \mathbf{V}_1 \frac{\begin{vmatrix} -3 & 8 + j5 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}}{315\,\underline{/16{,}2^\circ}} = \mathbf{V}_1(0{,}0476\,\underline{/-16{,}2^\circ})$$

Então:

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{I}_3}{0{,}0476\,\underline{/-16{,}2^\circ}} = \frac{1{,}76\,\underline{/45^\circ}}{0{,}0476\,\underline{/-16{,}2^\circ}} = 36{,}9\,\underline{/61{,}2^\circ}$$

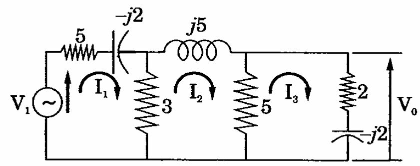


Figura 9-18

9.16 Quando o circuito da Fig. 9-19 é ligado a uma carga de alta impedância, a tensão de saída $\mathbf{V}_0$ é dada pela queda de tensão na impedância $5 - j5$. Determinar a função de transferência de tensão, $\mathbf{V}_0/\mathbf{V}_i$, do circuito.

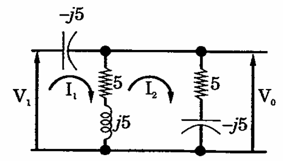


Figura 9-19

Para as duas correntes de malha escolhidas, as equações correspondentes, sob a forma matricial, são

$$\begin{bmatrix} 5 & -(5+j5) \\ -(5+j5) & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

A tensão de saída $\mathbf{V}_0$ é

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{I}_2(5-j5) = (5-j5)\frac{\begin{vmatrix} 5 & \mathbf{V}_i \\ -(5+j5) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -(5+j5) \\ -(5+j5) & 10 \end{vmatrix}} = \frac{(5-j5)(5+j5)\mathbf{V}_i}{(50-j50)} =$$

$$= \frac{50\mathbf{V}_i}{50\sqrt{2}\,\underline{/-45^\circ}}$$

onde $$\frac{\mathbf{V}_0}{\mathbf{V}_i} = \frac{50}{50\sqrt{2}\,\underline{/-45^\circ}} = 0{,}707\,\underline{/45^\circ}$$

9.17 O circuito da Fig. 9-20 contém duas fontes. Achar a corrente devida a cada fonte, na impedância $2 + j3$.

As correntes de malha estão escolhidas de modo que a corrente na impedância pedida é dada diretamente pela corrente de malha $\mathbf{I}_2$. Assim, sob a forma matricial, as equações são:

$$\begin{bmatrix} 5+j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 8+j8 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30\,\underline{/0^\circ} \\ 0 \\ -20\,\underline{/0^\circ} \end{bmatrix}$$

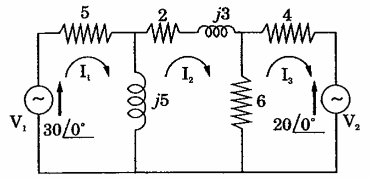


Figura 9-20

O determinante da impedância é:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 5 + j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 8 + j8 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 70 + j620 = 624\,\underline{/83{,}55^\circ}.$$

O determinante do numerador de $\mathbf{I}_2$ é desenvolvido pelos elementos da segunda coluna

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & 30\,\underline{/0^\circ} & 0 \\ -j5 & 0 & -6 \\ 0 & -20\,\underline{/0^\circ} & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = (30\,\underline{/0^\circ})\,(-)\,\frac{\begin{vmatrix} -j5 & -6 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_z} + 0 +$$

$$+ (-20\,\underline{/0^\circ})(-)\,\frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & 0 \\ -j5 & -6 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = (-30\,\underline{/0^\circ})\left(\frac{50\,\underline{/-90^\circ}}{624\,\underline{/83{,}55^\circ}}\right) +$$

$$(20\,\underline{/0^\circ})\left(\frac{42{,}4\,\underline{/-135^\circ}}{624\,\underline{/83{,}55^\circ}}\right) = 2{,}41\,\underline{/6{,}45^\circ} + 1{,}36\,\underline{/141{,}45^\circ}$$

A corrente que origina a fonte $\mathbf{V}_1$ pela impedância $2 + j3$ é $2{,}41\underline{/6{,}45^\circ}$ e a que origina $\mathbf{V}_2$ é $1{,}36\underline{/141{,}45^\circ}$. A soma destas intensidades é o valor da corrente $\mathbf{I}_2$; quer dizer, $\mathbf{I}_2 = 2{,}41\underline{/6{,}45^\circ} + 1{,}36\underline{/141{,}45^\circ} = 1{,}74\underline{/40{,}1^\circ}$.

9.18 Com relação ao circuito da Fig. 9-20, determinar (*a*) a potência fornecida por cada uma das fontes de tensão e (*b*) a potência em cada resistor.

(a) A corrente no ramo que contém a fonte $\mathbf{V}_1$ é:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 30\underline{/0^\circ} & -j5 & 0 \\ 0 & 8+j8 & -6 \\ -20\underline{/0^\circ} & -6 & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{2240\underline{/53{,}8^\circ}}{624\underline{/83{,}55^\circ}} = 3{,}59\underline{/-29{,}75^\circ}$$

Potência de saída dessa fonte: $P_1 = \mathbf{V}_1\mathbf{I}_1 \cos\theta = 30(3{,}59)\cos 29{,}75^\circ = 93{,}5$ watts.

A potência no ramo que contém $\mathbf{V}_2$ é:

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & -j5 & 30\underline{/0^\circ} \\ -j5 & 8+j8 & 0 \\ 0 & -6 & -20\underline{/0^\circ} \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{860\underline{/-125{,}6^\circ}}{624\underline{/83{,}55^\circ}} = 1{,}38\underline{/-209{,}15^\circ}$$

Observe-se que $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I}_3$ não são do mesmo sentido. A potência de saída é $P_2 = \mathbf{V}_2(\mathbf{I}_3)\cos\theta = (20)(1{,}38)\cos(-209{,}15^\circ) = 24{,}1$ watts. Logo, a potência total é

$P_T = P_1 + P_2 = 93{,}5 + 24{,}1 = 117{,}6$ watts.

(b) A potência no resistor de 5 ohms é $P_5 = 5(\mathbf{I}_1)^2 = 5(3{,}59)^2 = 64{,}5$ watts. No resistor de 2 ohms, $P_2 = 2(\mathbf{I}_2)^2 = 2(1{,}74)^2 = 6{,}05$ watts. A corrente no ramo do resistor de 6 ohms é $(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) = (1{,}33 + j1{,}12) - (-1{,}205 + j0{,}672) = 2{,}535 + j0{,}45 = 2{,}57\underline{/10{,}1^\circ}$; então, $P_6 = 6(2{,}57)^2 = 39{,}6$ watts. A potência no resistor de 4 ohms é $P_4 = 4(\mathbf{I}_3)^2 = 4(1{,}38)^2 = 7{,}61$ watts. Logo, a potência total é:

$P_T = 64{,}5 + 6{,}05 + 39{,}6 + 7{,}61 = 117{,}76$ watts.

9.19 O circuito da Fig. 9-21 contém duas fontes de tensão $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$. Supondo $\mathbf{V}_1 = 30\underline{/0^\circ}$, determinar $\mathbf{V}_2$, de modo que seja nula a corrente na impedância $2 + j3$.

Escolhem-se as correntes de malha, conforme a figura indica, passando apenas uma corrente pela impedância $2 + j3$. O conjunto de equações correspondentes, na forma matricial, é:

$$\begin{bmatrix} 5+j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 8+j8 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30\angle 0^\circ \\ 0 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

onde

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & 30\angle 0^\circ & 0 \\ -j5 & 0 & 6 \\ 0 & \mathbf{V}_2 & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 0$$

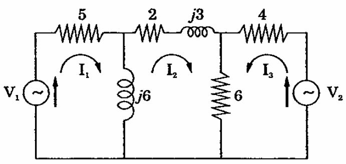


Figura 9-21

Desenvolvendo, temos:

$$-30\angle 0^\circ \begin{vmatrix} -j5 & 6 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} - \mathbf{V}_2 \begin{vmatrix} 5+j5 & 0 \\ -j5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$-30\angle 0^\circ(50\angle -90^\circ) - \mathbf{V}_2(6)(5\sqrt{2}\angle 45^\circ) = 0$$

e $\quad \mathbf{V}_2 = \dfrac{-30\angle 0^\circ(50\angle -90^\circ)}{6(5\sqrt{2}\angle 45^\circ)} = 35{,}4\angle 45^\circ$

Outra solução Se não passa corrente no ramo $2 + j3$, $\mathbf{I}_2 = 0$ e devem ser iguais as quedas de tensão na reatância $j5$ e na resistência de 6 ohms, isto é,

$\mathbf{I}_1(j5) = \mathbf{I}_3(6)$

Substituindo, $\mathbf{I}_1 = 30\angle 0^\circ/(5 + j5)$ e $\mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_2/10$,

$$\frac{30\angle 0^\circ}{5+j5}(j5) = \frac{\mathbf{V}_2}{10}(6) \quad \text{donde} \quad \mathbf{V}_2 = \frac{30\angle 90^\circ}{\sqrt{2}\angle 45^\circ}\left(\frac{10}{6}\right) = 35{,}4\angle 45^\circ$$

9.20 Na Fig. 9-21 tem-se $\mathbf{V}_2 = 20\angle 0^\circ$. Determinar a fonte de tensão $\mathbf{V}_1$, de modo que seja nula a corrente no ramo que contém $\mathbf{V}_2$.

Empregando-se as correntes de malha escolhidas no Probl. 9-19, escreve-se a expressão de $\mathbf{I}_3$, sob a forma de determinante, e iguala-se seu valor a zero:

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & -j5 & \mathbf{V}_1 \\ -j5 & 8+j8 & 0 \\ 0 & 6 & 20\underline{/0^\circ} \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 0$$

Desenvolvendo, temos:

$$\mathbf{V}_1\begin{vmatrix} -j5 & 8+j8 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 20\underline{/0^\circ}\begin{vmatrix} 5+j5 & -j5 \\ -j5 & 8+j8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbf{V}_1(30\underline{/-90^\circ}) + 20\underline{/0^\circ}(25+j80) = 0$$

e

$$\mathbf{V}_1 = \frac{-20\underline{/0^\circ}(25+j80)}{30\underline{/-90^\circ}} = 55{,}8\underline{/-17{,}4^\circ}$$

Problemas Propostos

9.21 Determinar o número de correntes de malha necessário à solução de cada um dos circuitos apresentados nas Figs. 9-22(*a-f*). Empregar dois métodos diferentes em cada circuito.
Resp.: (*a*) 5; (*b*) 4; (*c*) 3; (*d*) 4; (*e*) 4; (*f*) 5.

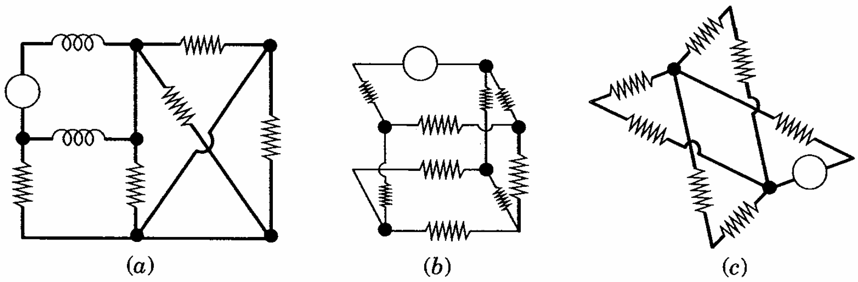


Figura 9-22

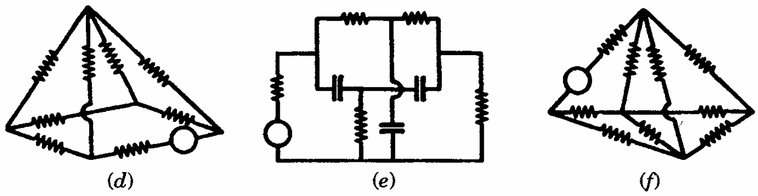


Figura 9-22

9.22 Determinar a corrente no resistor de 3 ohms do circuito da Fig. 9-23. O diagrama mostra o sentido positivo.
Resp.: $4{,}47\angle{-63{,}4^\circ}$.

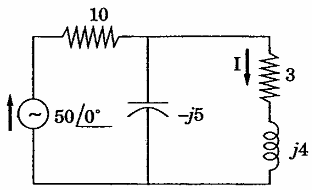


Figura 9-23

9.23 Determinar as correntes $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$ no circuito da Fig. 9-24.
Resp.: $\mathbf{I}_A = 12{,}1\angle{46{,}4^\circ}$; $\mathbf{I}_B = 19{,}1\angle{-47{,}1^\circ}$; $\mathbf{I}_C = 22{,}1\angle{166{,}4^\circ}$.

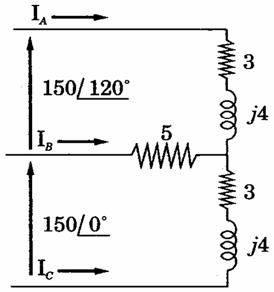


Figura 9-24

9.24 Achar as correntes $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$ da Fig. 9-25.
Resp.: $26\angle{45^\circ}$; $26\angle{-75^\circ}$; $26\angle{-195^\circ}$.

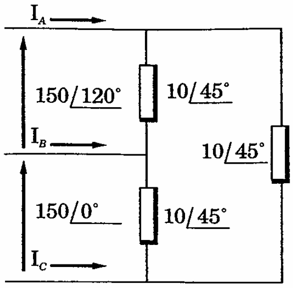


Figura 9-25

9.25 Determinar a tensão $\mathbf{V}_{AB}$ do circuito da Fig. 9-26, por meio das correntes de malha.
Resp.: $\mathbf{V}_{AB} = 75{,}4\underline{/55{,}2^\circ}$.

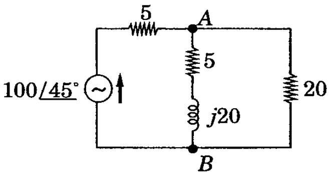


Figura 9-26

9.26 Calcular a tensão eficaz da fonte **V** da Fig. 9-27, de modo que seja de 100 watts a potência no resistor de 5 ohms.
Resp.: 40,3 volts.

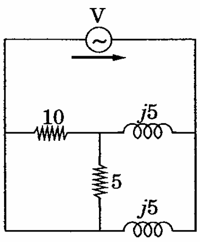


Figura 9-27

9.27 Escolher cc
segunda es
Resp.: (61 ·

9.28 No circuito
cada uma
Resp.: P_1 =
P_1 =

9.29 Determinai
circuito de
Resp.: P =

9.30 Na Fig. 9-
indicados
circuito.
Resp.: P_1

9.27 Escolher correntes de malha para o circuito da Fig. 9-28 e calcular Δ_z. Fazer uma segunda escolha de correntes e, novamente, calcular Δ_z.
Resp.: $(61 - j15)$.

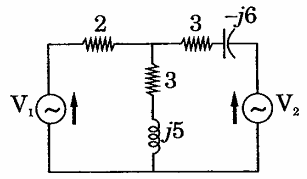


Figura 9-28

9.28 No circuito da Fig. 9-28, $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ são, ambas, de $50\underline{/0^\circ}$. Qual a potência que cada uma fornece ao circuito? Repetir, invertendo o sentido da fonte $\mathbf{V}_2$.
Resp.: $P_1 = 191$ W; $P_2 = 77{,}1$ W.
$P_1 = 327$ W; $P_2 = 214$ W.

9.29 Determinar a potência fornecida pela fonte e a potência em cada resistor do circuito de duas malhas da Fig. 9-29.
Resp.: $P = 36{,}7$ W; $P_1 = 2{,}22$ W; $P_2 = 27{,}8$ W e $P_3 = 6{,}66$ W.

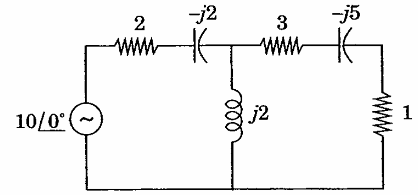


Figura 9-29

9.30 Na Fig. 9-30, $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ são fontes idênticas, de $10\underline{/90^\circ}$ volts, com os sentidos indicados no diagrama. Determinar a potência que cada fonte fornece ao circuito.
Resp.: $P_1 = 11{,}0$ W; $P_2 = 9{,}34$ W.

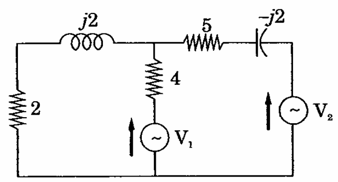


Figura 9-30

9.31 Determinar a corrente na impedância $3 + j4$ do circuito da Fig. 9-31.

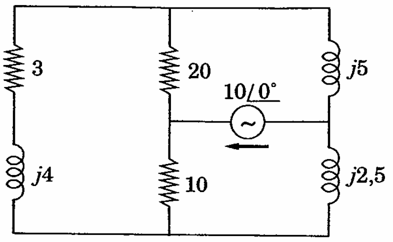


Figura 9-31

9.32 O circuito da Fig. 9-32 é chamado ponte de Hay. Escolher as correntes de malha, de modo que apenas uma circule em $\mathbf{Z}_D$ e escrever as equações sob a forma matricial. Exprimir a corrente em $\mathbf{Z}_D$ sob a forma de determinante e igualá-la a zero. Achar R_x e L_x em função das outras constantes da ponte.

Resp.: $R_x = \dfrac{\omega^2 C_1^2 R_1 R_2 R_4}{1 + (\omega R_1 C_1)^2}$, $L_x = \dfrac{C_1 R_2 R_4}{1 + (\omega R_1 C_1)^2}$.

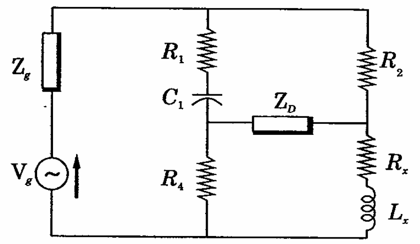


Figura 9-32

9.33 A Fig. 9-33 apresenta o circuito da ponte de Owen. Determinar R_x e L_x em termos das demais constantes da ponte, quando é nula a corrente em $\mathbf{Z}_D$.

Resp.: $R_x = \dfrac{C_1}{C_4} R_2$, $L_x = C_1 R_2 R_4$.

9.34 O circuito da Fig. 9-34 é o de uma ponte de comparação de indutâncias. Escolher as correntes de malha e escrever as equações sob a forma matricial. Determinar R_x e L_x, sendo nula a corrente $\mathbf{Z}_D$.

Resp.: $R_x = \dfrac{R_2}{R_1} R_4$, $L_x = \dfrac{R_2}{R_1} R_4$.

9.35 Determina
Resp.: 0,1

9.36 Determina
Resp.: 0,1

9.37 Calcular **V**
Resp.: 1,5

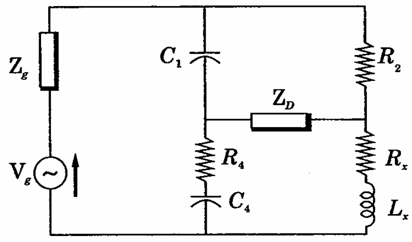


Figura 9-33

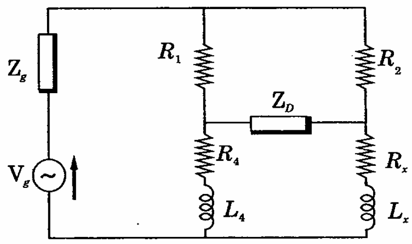


Figura 9-34

9.35 Determinar a função de transferência da tensão $\mathbf{V}_0/\mathbf{V}_i$, no circuito da Fig. 9-35.
Resp.: $0{,}139\angle 90^\circ$.

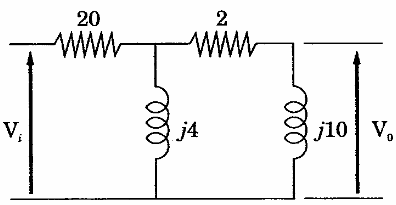


Figura 9-35

9.36 Determinar a função de transferência da tensão $\mathbf{V}_0/\mathbf{V}_i$ no circuito da Fig. 9-36.
Resp.: $0{,}159\angle -61{,}4^\circ$.

9.37 Calcular $\mathbf{V}_0$ com a polaridade indicada, no circuito da Fig. 9-37.
Resp.: $1{,}56\angle 128{,}7^\circ$.

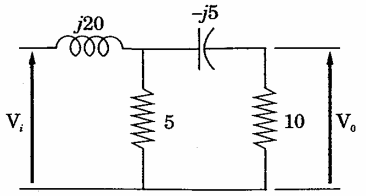


Figura 9-36

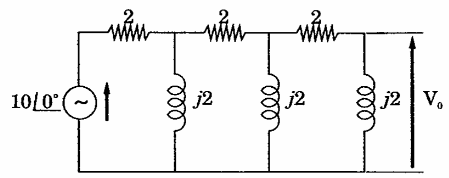


Figura 9-37

9.38 Determinar a potência em cada um dos três resistores do circuito da Fig. 9-38.
Resp.: 471 W; 47,1 W; 471 W.

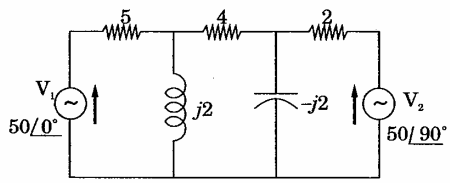


Figura 9-38

9.39 Calcular a potência fornecida por cada uma das fontes do circuito da Fig. 9-38.
Resp.: P_1 = 422 W; P_2 = 565 W.

9.40 Achar a corrente $\mathbf{I}_3$ no circuito da Fig. 9-39.
Resp.: $1{,}38\angle{-209{,}15^\circ}$.

9.41 Determinar a corrente $\mathbf{I}_3$ no circuito da Fig. 9-40.
Resp.: $11{,}6\angle{113{,}2^\circ}$.

9.42 No circuit
Resp.: –j

9.43 As três
principais
Resp.: 4,

9.44 Escolhid
$\mathbf{Z}_{\text{transf}(12)}$
Resp.: 20

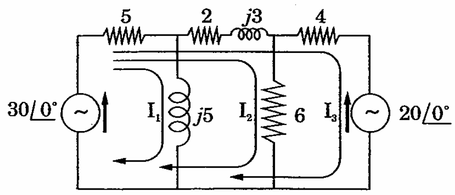


Figura 9-39

9.42 No circuito da Fig. 9-40, determinar a razão de correntes $\mathbf{I}_1/\mathbf{I}_3$.
Resp.: $-j3{,}3$.

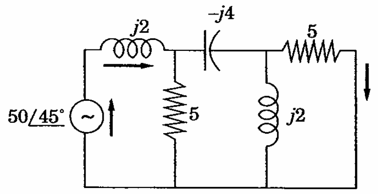


Figura 9-40

ito da Fig. 9-38.

9.43 As três correntes de malha do circuito da Fig. 9-41 pertencem às malhas principais. Calcular $\mathbf{Z}_{\text{transf}(13)}$ e $\mathbf{Z}_{\text{transf}(31)}$.

Resp.: $4{,}3\underline{/-68{,}2°}$ para ambas.

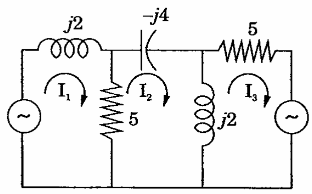


Figura 9-41

ıito da Fig. 9-38.

9.44 Escolhidas as correntes indicadas nas três malhas da Fig. 9-42, determinar $\mathbf{Z}_{i1}$, $\mathbf{Z}_{\text{transf}(12)}$ e $\mathbf{Z}_{\text{transf}(13)}$.

Resp.: $20{,}2\underline{/-36{,}1°}$; $17{,}4\underline{/-71{,}6°}$; $6{,}82\underline{/-82{,}9°}$.

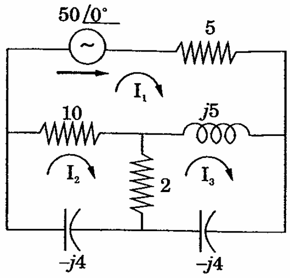


Figura 9-42

9.45 Na Fig. 9-43, acrescentou-se uma fonte $\mathbf{V}_3$ ao circuito da Fig. 9-42. Determinar $\mathbf{V}_3$ de modo que $\mathbf{I}_1$ seja nula.
Resp.: $16{,}8\angle 133{,}2^\circ$.

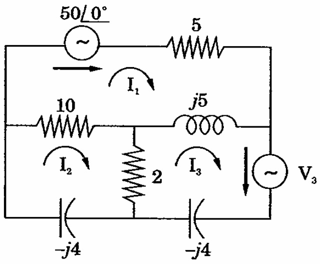


Figura 9-43

9.46 Na Fig. 9-44, acrescentou-se uma fonte $\mathbf{V}_2$ ao circuito da Fig. 9-42. Calcular $\mathbf{V}_2$ para ter $\mathbf{I}_1$ igual a zero.
Resp.: $42{,}9\angle 144{,}5^\circ$.

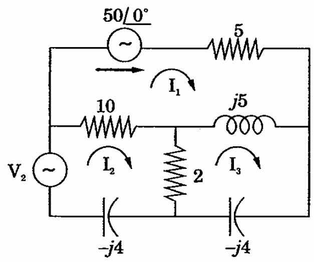


Figura 9-44

9.47 Determin
resistor d
Resp.: 26

9.48 Supondo
Resp.: **V**

9.49 Dadas as
com o au
Resp.: 12

9.50 Determin
fonte $\mathbf{V}_2$.
Resp.: **V**

9.47 Determinar $\mathbf{V}_2$ no circuito da Fig. 9-45, de modo que seja nula a corrente no resistor de 4 ohms.
Resp.: $26{,}3\angle 113{,}2^\circ$.

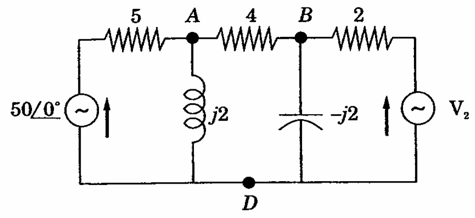


Figura 9-45

9.48 Supondo, na Fig. 9-45, $\mathbf{V}_2 = 26{,}3\angle 113{,}2^\circ$ volts, determinar $\mathbf{V}_{AD}$ e $\mathbf{V}_{BD}$.
Resp.: $\mathbf{V}_{AD} = \mathbf{V}_{BD} = 18{,}5\angle 68{,}1^\circ$.

9.49 Dadas as correntes de malha da Fig. 9-46, determinar $\mathbf{Z}_{\text{transf}(13)}$ e calcular $\mathbf{I}_3$ com o auxílio dessa impedância de transferência.
Resp.: $12{,}8\angle -38{,}7^\circ$ ohms; $0{,}782\angle 38{,}7^\circ$ ampères.

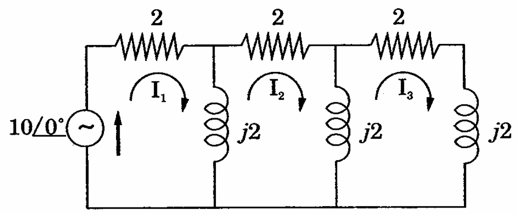


Figura 9-46

9.50 Determinar $\mathbf{V}_2$, no circuito da Fig. 9-47, de modo que seja nula a corrente nessa fonte $\mathbf{V}_2$.

Resp.: $\mathbf{V}_2 = 4\angle 180^\circ$.

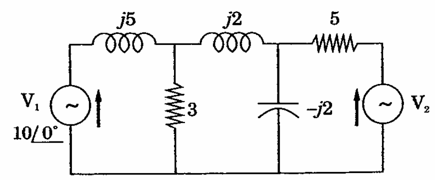


Figura 9-47

9.51 Determinar o módulo da tensão da fonte $\mathbf{V}_1$ da Fig. 9-48, de modo que seja de 20 volts o valor eficaz da tensão no resistor de 5 ohms.
Resp.: 60,1 volts.

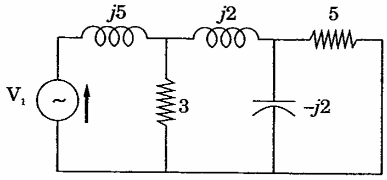


Figura 9-48

MAKRON
Books

Introduçã

No Ca
resolução de e
a aplicação da
mesma soluçã
lei de Kirchhof

Tensões d

Um *n*
de circuito. Se
principal ou *ju*
Fig. 10-1, *A, B,*
no nó é a tensã
nó de referênci

* N. T. É com
circuito.

ɔ que seja de 20

MAKRON
Books

ANÁLISE DE ESTRUTURAS PELAS TENSÕES DOS NÓS

Introdução

No Capítulo 9, estabeleceu-se o método das correntes de malha, para a resolução de estruturas, ou circuitos, pela escolha de correntes de malha e com a aplicação da lei de Kirchhoff para as tensões. Neste capítulo, obtém-se a mesma solução com a introdução de equações estabelecidas com a aplicação da lei de Kirchhoff para as correntes. Este é o chamado *método das tensões dos nós*.

Tensões dos Nós

Um *nó* é um ponto de uma estrutura comum a *dois ou mais elementos de circuito*. Se *três ou mais elementos* se unirem em um nó, este é chamado *nó principal* ou *junção*.* A cada nó pode-se atribuir um número ou uma letra. Na Fig. 10-1, *A, B, 1, 2* e *3* são nós e *1, 2* e *3* são nós principais ou junções. Tensão no nó é a tensão de um determinado nó, referente a um nó particular, chamado *nó de referência*. Escolhemos, na Fig. 10-1, o nó 3 como nó de referência. V_{13} é a

* N. T. É comum chamar-se *nó*, simplesmente, a um ponto comum a três ou mais ramos de um circuito.

tensão entre os nós 1 e 3 e $\mathbf{V}_{23}$ é a tensão entre os nós 2 e 3. Poderemos, portanto, escrever $\mathbf{V}_1$ em lugar de $\mathbf{V}_{13}$, e $\mathbf{V}_2$ em lugar de $\mathbf{V}_{23}$.

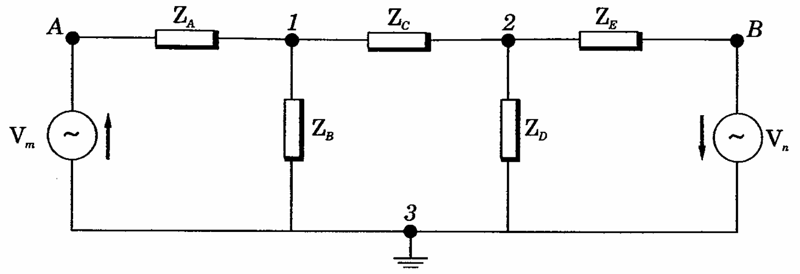


Figura 10-1 Nós de uma estrutura.

O método das tensões dos nós consiste em se determinarem as tensões de todos os nós principais, referidas ao nó de referência. Aplicamos, então, a lei de Kirchhoff para as correntes às junções 1 e 2, obtendo-se duas equações com as incógnitas $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$. Na Fig. 10-2 destacamos o nó 1 com todos os seus ramos. Suponhamos todas as correntes dos ramos saindo do nó. Como a soma dessas correntes deve ser nula,

$$\frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_m}{\mathbf{Z}_A} + \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_B} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_C} = 0 \qquad (1)$$

Ao escrever-se (*1*), a escolha do sentido das correntes é arbitrária. Ver Probl. 10-1.

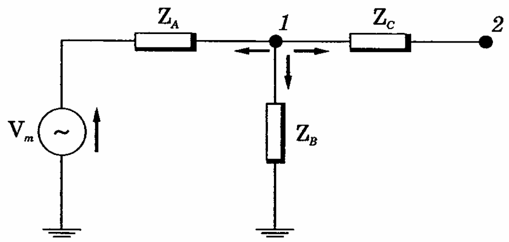


Figura 10-2

Repetimos o procedimento para o nó 2, mostrado na Fig. 10-3. A equação resultante é:

$$\frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_C} + \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_D} + \frac{\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_n}{\mathbf{Z}_E} = 0 \qquad (2)$$

Reagrupando termos em (*1*) e (*2*), o sistema de duas equações fica:

$$\left(\frac{1}{\mathbf{Z}_A} + \frac{1}{\mathbf{Z}_B} + \frac{1}{\mathbf{Z}_C}\right)\mathbf{V}_1 - \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_C}\right)\mathbf{V}_2 = \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_A}\right)\mathbf{V}_m$$

$$-\left(\frac{1}{\mathbf{Z}_C}\right)\mathbf{V}_1 + \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_C} + \frac{1}{\mathbf{Z}_D} + \frac{1}{\mathbf{Z}_E}\right)\mathbf{V}_2 = -\left(\frac{1}{\mathbf{Z}_E}\right)\mathbf{V}_n \qquad (3)$$

Como $1/Z = Y$, o sistema (*3*) pode ser reescrito em função das admitâncias:

$$(\mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_B + \mathbf{Y}_C)\mathbf{V}_1 - \mathbf{Y}_C\,\mathbf{V}_2 = \mathbf{Y}_A\,\mathbf{V}_m$$

$$-\mathbf{Y}_C\,\mathbf{V}_1 + (\mathbf{Y}_C + \mathbf{Y}_D + \mathbf{Y}_E)\mathbf{V}_2 = -\mathbf{Y}_E\,\mathbf{V}_n \qquad (4)$$

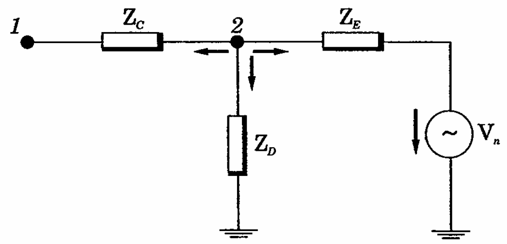


Figura 10-3

Número de Equações dos Nós

Com exceção do nó de referência, podem-se escrever equações para todos os nós de uma estrutura. Assim, o *número necessário de equações é igual ao número de nós principais menos um.* Dispondo-se dos métodos das tensões dos nós e das correntes de malha, a escolha do que seja mais conveniente para a solução de uma dada estrutura ou circuito depende da sua configuração. Um circuito com diversos ramos em paralelo, geralmente, tem maior número de malhas que de nós, exigindo, portanto, um menor número de equações dos nós para a sua solução. Ver Probl. 9.6 e 10.4. Pode ocorrer que o número de malhas seja igual ao de nós ou que existam mais nós que malhas. Deve escolher-se sempre o método que exigir o menor número de equações.

Equações dos Nós por Inspeção

Um circuito que contenha quatro nós principais exige três equações de nós para a sua solução. Pela notação geral, essas equações são

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{11}\,\mathbf{V}_1 + \mathbf{Y}_{12}\,\mathbf{V}_2 + \mathbf{Y}_{13}\,\mathbf{V}_3 &= \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{Y}_{21}\,\mathbf{V}_1 + \mathbf{Y}_{22}\,\mathbf{V}_2 + \mathbf{Y}_{23}\,\mathbf{V}_3 &= \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{Y}_{31}\,\mathbf{V}_1 + \mathbf{Y}_{32}\,\mathbf{V}_2 + \mathbf{Y}_{33}\,\mathbf{V}_3 &= \mathbf{I}_3 \end{aligned} \qquad (5)$$

$\mathbf{Y}_{11}$ é a auto-admitância (ou admitância própria) do nó 1, dada pela soma de todas as admitâncias ligadas ao nó 1. Do mesmo modo, $\mathbf{Y}_{22}$ e $\mathbf{Y}_{33}$ são as admitâncias próprias dos nós 2 e 3, obtidas pelas somas das admitâncias ligadas aos respectivos nós.

$\mathbf{Y}_{12}$ é a admitância mútua entre os nós 1 e 2, obtida pela soma das admitâncias ligando 1 e 2. Seu sinal é negativo, como se verifica na primeira equação de *(4)*. Do mesmo modo, $\mathbf{Y}_{23}$ e $\mathbf{Y}_{13}$ são as admitâncias mútuas dos elementos que ligam os nós 2 e 3 e os nós 1 e 3, respectivamente. Todas as admitâncias mútuas têm sinais negativos. Note-se que $\mathbf{Y}_{13} = \mathbf{Y}_{31}$ e $\mathbf{Y}_{23} = \mathbf{Y}_{32}$.

$\mathbf{I}_1$ é a soma de todas as correntes no nó 1. A corrente que chega ao nó tem sinal positivo e a que dele se afasta tem sinal negativo.* $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$ são as somas das correntes nos nós 2 e 3, respectivamente.

Por analogia com a notação matricial das correntes de malha (Capítulo 9), as três equações dos nós, obtidas de *(5)*, se escrevem, sob a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} & \mathbf{Y}_{13} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} & \mathbf{Y}_{23} \\ \mathbf{Y}_{31} & \mathbf{Y}_{32} & \mathbf{Y}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

As três tensões $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{V}_3$ são obtidas de:

* N. R. Evidentemente, esta regra é operacional. Veja Probl. 10.1.

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{Y}_{12} & \mathbf{Y}_{13} \\ \mathbf{I}_2 & \mathbf{Y}_{22} & \mathbf{Y}_{23} \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{Y}_{32} & \mathbf{Y}_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_Y}, \quad \mathbf{V}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{I}_1 & \mathbf{Y}_{13} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{Y}_{23} \\ \mathbf{Y}_{31} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{Y}_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_Y}$$

e

$$\mathbf{V}_3 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} & \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{Y}_{31} & \mathbf{Y}_{32} & \mathbf{I}_3 \end{vmatrix}}{\Delta_Y}$$

Desenvolvendo-se o determinante do numerador pelos elementos da coluna que contém a corrente, obtêm-se as seguintes equações para as tensões nos nós:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_Y}\right) + \mathbf{I}_2\left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_Y}\right) + \mathbf{I}_3\left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_Y}\right) \tag{7}$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1\left(\frac{\Delta_{12}}{\Delta_Y}\right) + \mathbf{I}_2\left(\frac{\Delta_{22}}{\Delta_Y}\right) + \mathbf{I}_3\left(\frac{\Delta_{32}}{\Delta_Y}\right) \tag{8}$$

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{I}_1\left(\frac{\Delta_{13}}{\Delta_Y}\right) + \mathbf{I}_2\left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta_Y}\right) + \mathbf{I}_3\left(\frac{\Delta_{33}}{\Delta_Y}\right) \tag{9}$$

Os termos dos segundos membros de (*7*), (*8*) e (*9*) são os fasores componentes, resultantes das diversas tensões de excitação. Assim, em (*7*), a tensão $\mathbf{V}_1$ é a soma de $\mathbf{I}_1(\Delta_{11}/\Delta_Y)$, devida à corrente $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2\ (\Delta_{21}/\Delta_Y)$, devida à corrente $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3\ (\Delta_{31}/\Delta_Y)$, devida à corrente $\mathbf{I}_3$.

Exemplo Escrever as equações dos nós do circuito da Fig. 10-4 e exprimi-las sob a forma matricial.

O nó 3 foi escolhido para referência. Admitindo-se que as correntes deixam os nós 1 e 2 e aplicando a cada um deles a lei de Kirchhoff para as correntes, obtém-se:

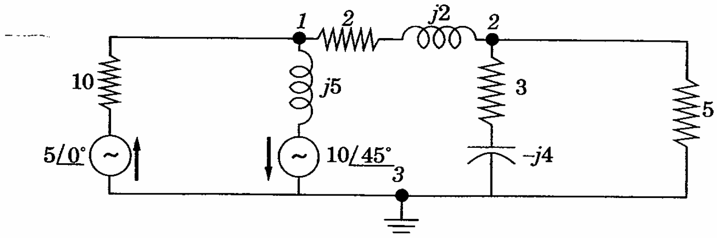


Figura 10-4

$$\text{No nó 1:}\quad \frac{\mathbf{V}_1 - 5\angle 0^\circ}{10} + \frac{\mathbf{V}_1 + 10\angle 45^\circ}{j5} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{2 + j2} = 0 \qquad (10)$$

$$\text{No nó 2:}\quad \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{2 + j2} + \frac{\mathbf{V}_2}{3 - j4} + \frac{\mathbf{V}_2}{5} = 0 \qquad (11)$$

Reagrupando:

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{2 + j2}\right)\mathbf{V}_1 - \left(\frac{1}{2 + j2}\right)\mathbf{V}_2 = \frac{5\angle 0^\circ}{10} - \frac{10\angle 45^\circ}{j5} \qquad (12)$$

$$-\left(\frac{1}{2 + j2}\right)\mathbf{V}_1 + \left(\frac{1}{2 + j2} + \frac{1}{3 - j4} + \frac{1}{5}\right)\mathbf{V}_2 = 0 \qquad (13)$$

Na matriz quadrada que contém as admitâncias, temos $\mathbf{Y}_{11} = 1/10 + 1/j5 + 1/(2 + j2)$, o que, pela comparação com (*6*), está de acordo com a definição de $\mathbf{Y}_{11}$, admitância própria do nó 1. Da mesma forma, $\mathbf{Y}_{12} = \mathbf{Y}_{21} = -\,1/(2 + j2)$, concordando com a definição de admitância mútua.

Na notação geral, $\mathbf{I}_1$ foi definida como a soma de todas as correntes de excitação do nó 1. De acordo com a convenção de sinais, a corrente da fonte do ramo esquerdo, que entra no nó 1, tem sinal positivo, ao passo que a corrente da fonte do segundo ramo, que sai do nó 1, tem sinal negativo. Portanto, $\mathbf{I}_1 = (5\angle 0^\circ)/10 - (10\angle 45^\circ)/j5$. A corrente $\mathbf{I}_2$ no nó 2 é nula, pois não há fontes nos ramos ligados ao nó 2.

Admitânc

Consic
quematiza a F
em paralelo co

Como

A adm
de excitação, p
de tensão resul

A adm
estrutura apre
são anuladas.*

V

* N. R. "Anular

Admitância de Entrada (ou no Ponto de Excitação)

Consideremos um circuito passivo com terminais externos, como esquematiza a Fig. 10-5. A corrente $\mathbf{I}_1$ penetra no nó 1 e quaisquer admitâncias em paralelo com a fonte são admitidas como já incluídas na estrutura.

Como não há fonte de corrente dentro da estrutura, a equação de $\mathbf{V}_1$ fica

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_Y}\right) \qquad (14)$$

A admitância de entrada, $\mathbf{Y}_e$, é, por definição, a relação entre a corrente de excitação, proveniente da fonte aplicada entre os dois terminais, e a queda de tensão resultante entre eles. De (*14*), então,

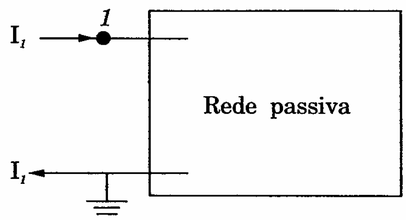


Figura 10-5

$$\mathbf{Y}_e = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{11}}$$

A admitância de entrada de uma estrutura ativa é a admitância que a estrutura apresenta em seus terminais quando todas as suas fontes internas são anuladas.* Então

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_Y}\right) + (0)\left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_Y}\right) + (0)\left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_Y}\right) + \ldots = \mathbf{I}_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_Y}\right)$$

ou

$$\mathbf{Y}_{e1} = \mathbf{I}_1/\mathbf{V}_1 = \Delta_y/\Delta_{11}$$

---

* N. R. "Anular" uma fonte significa substituí-la por sua impedância interna.

A definição de $\mathbf{Y}_e$, portanto, é válida, quer para a estrutura passiva quer para a ativa.

Admitância de Transferência

Uma corrente de excitação em um nó de um circuito produz tensões em todos os nós em relação ao de referência. A admitância de transferência é a relação entre a corrente de excitação em um nó e a tensão resultante em outro nó, supondo-se nulas todas as demais fontes.

No circuito da Fig. 10-6, $\mathbf{I}_r$ é a corrente de excitação, penetrando no nó r. A tensão resultante no nó s é dada por

$$\mathbf{V}_s = (0)\left(\frac{\Delta_{1s}}{\Delta_Y}\right) + \ldots + \mathbf{I}_r\left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta_Y}\right) + \ldots + (0)\left(\frac{\Delta_{ss}}{\Delta_Y}\right) = \mathbf{I}_r\left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta y}\right)$$

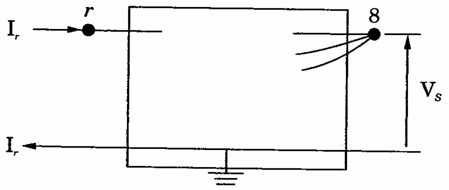


Figura 10-6

Então, temos: $Y_{\text{transf }(rs)} = \mathbf{I}_r/\mathbf{V}_s = \Delta_Y/\Delta_{rs}$

Observe-se que o ponto de retorno da corrente de excitação foi escolhido para nó de referência. Tem de ser assim, do contrário a corrente aparecerá em mais de um termo da equação de $\mathbf{V}_s$, deixando de ser válida a definição de $\mathbf{Y}_{\text{transf}}$.

Empregando as admitâncias, obtemos o seguinte sistema de equações para $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{V}_3$ numa estrutura de quatro nós principais:

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{Y}_{e1}} + \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{Y}_{\text{transf}(21)}} + \frac{\mathbf{I}_3}{\mathbf{Y}_{\text{transf}(31)}}$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{Y}_{\text{transf}(12)}} + \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{Y}_{e2}} + \frac{\mathbf{I}_3}{\mathbf{Y}_{\text{transf}(32)}}$$

$$\mathbf{V}_3 = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{Y}_{\text{transf}(13)}} + \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{Y}_{\text{transf}(23)}} + \frac{\mathbf{I}_3}{\mathbf{Y}_{e3}}$$

Quando apenas uma fonte de corrente atua no circuito, sendo nulas todas as demais fontes, ficam evidentes as definições de admitância de entrada e de transferência.

Problemas Resolvidos

10.1 Escrever a equação do nó 2 das Figs. 10-7(*a*) e 10-7(*b*).

Já que todas as correntes, na Fig. 10-7(*a*), se afastam do nó 2, a soma das correntes que saem é igual a zero.

$$(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)/j2 + \mathbf{V}_2/10 + (\mathbf{V}_2 + 10\,\underline{/0^\circ})/j5 = 0$$

Reagrupando: $-(1/j2)\mathbf{V}_1 + (1/j2 + 1/10 + 1/j5)\mathbf{V}_2 = -10\,\underline{/0^\circ}\,/\,j5$

Na Fig. 10-7(*b*), uma corrente entra e as outras duas saem do nó 2. Igualando a corrente que entra à soma das que saem:

$$(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2)/j2 = \mathbf{V}_2/10 + (\mathbf{V}_2 + 10\,\underline{/0^\circ})/j5$$

Reagrupando: $\mathbf{V}_2/10 + (\mathbf{V}_2 + 10\,\underline{/0^\circ})/j5 + (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)/j2 = 0$

ou

$$-(1/j2)\mathbf{V}_1 + (1/j2 + 1/10 + 1/j5)\mathbf{V}_2 = -10\,\underline{/0^\circ}/j5$$

Logo, pode-se escolher qualquer sentido para as correntes nos ramos, ao se escreverem as equações dos nós. As equações resultantes serão idênticas.

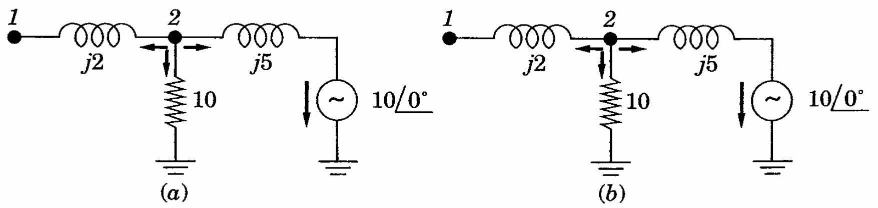


Figura 10-7

10.2 Escrever as equações dos nós do circuito da Fig. 10-8 e exprimi-las sob a forma matricial.

Foram numerados três nós e escolhido o nó de referência, conforme indica o diagrama. Supondo que todas as correntes deixam os nós, escrevem-se as seguintes equações, respectivamente, nos nós 1, 2 e 3:

$$(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2)/(-j8) + \mathbf{V}_1/5 + (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_3 + 10\angle 0^\circ)/(3 + j4) = 0$$

$$(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)/(-j8) + \mathbf{V}_2/10 + (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3 - 5\angle 0^\circ)/(j4) = 0$$

$$\mathbf{V}_3/8 + (\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_1 - 10\angle 0^\circ)/(3 + j4) + (\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2 + 5\angle 0^\circ)/(j4) = 0$$

Reagrupando os termos, temos:

$$\left(\frac{1}{-j8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3+j4}\right)\mathbf{V}_1 - \left(\frac{1}{-j8}\right)\mathbf{V}_2 - \left(\frac{1}{3+j4}\right)\mathbf{V}_3 = (-10\angle 0^\circ)/(3+j4)$$

$$-\left(\frac{1}{-j8}\right)\mathbf{V}_1 + \left(\frac{1}{-j8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{j4}\right)\mathbf{V}_2 - \left(\frac{1}{j4}\right)\mathbf{V}_3 = (5\angle 0^\circ)/(j4)$$

$$-\left(\frac{1}{3+j4}\right)\mathbf{V}_1 - \left(\frac{1}{j4}\right)\mathbf{V}_2 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{j4} + \frac{1}{3+j4}\right)\mathbf{V}_3 = \left(\frac{10\angle 0^\circ}{3+j4}\right) - \left(\frac{5\angle 0^\circ}{j4}\right)$$

Na notação matricial as equações são:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{-j8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3+j4}\right) & -\left(\frac{1}{-j8}\right) & -\left(\frac{1}{3+j4}\right) \\ -\left(\frac{1}{-j8}\right) & \left(\frac{1}{-j8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{j4}\right) & -\left(\frac{1}{j4}\right) \\ -\left(\frac{1}{3+j4}\right) & -\left(\frac{1}{j4}\right) & \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{j4} + \frac{1}{3+j4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{10\angle 0^\circ}{3+j4}\right) \\ \left(\frac{5\angle 0^\circ}{j4}\right) \\ \left(\frac{10\angle 0^\circ}{3+j4} - \frac{5\angle 0^\circ}{j4}\right) \end{bmatrix}$$

10.3 Escrever, pela observação do circuito da Fig. 10-9, as equações dos nós, sob a forma matricial.

A escolha dos nós está indicada no diagrama. Em $[\mathbf{Y}]$, $\mathbf{Y}_{11}$ é a soma de todas as admitâncias ligadas ao nó 1, $(1/\mathbf{Z}_g + 1/R_1 + j\omega C_1)$. São $\mathbf{Y}_{12}$ e $\mathbf{Y}_{13}$ as admitâncias comuns aos nós 1 e 2 e 1 e 3, tomados com o sinal contrário, isto é, $\mathbf{Y}_{12} = -(j\omega C_1)$ e $\mathbf{Y}_{13} = -(1/R_1)$, respectivamente. Os demais termos de $[\mathbf{Y}]$ são determinados de maneira semelhante.

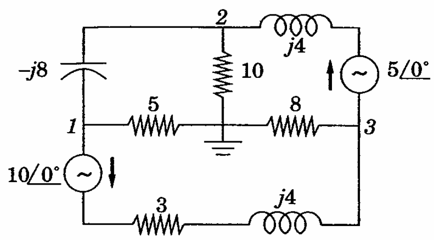


Figura 10-8

Há, apenas, uma corrente de excitação na estrutura; ela penetra no nó 1 e, portanto, tem sinal positivo, $\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_g/\mathbf{Z}_g$.

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{1}{\mathbf{Z}_g}+\dfrac{1}{R_1}+j\omega C_1\right) & -(j\omega C_1) & -\left(\dfrac{1}{R_1}\right) & 0 \\ -(j\omega C_1) & \left(j\omega C_1+\dfrac{1}{R_3}+j\omega C_2\right) & 0 & -(j\omega C_2) \\ -\left(\dfrac{1}{R_1}\right) & 0 & \left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+j\omega C_3\right) & -\left(\dfrac{1}{R_2}\right) \\ 0 & -(j\omega C_2) & -\left(\dfrac{1}{R_2}\right) & \left(\dfrac{1}{R_2}+j\omega C_2+\dfrac{1}{\mathbf{Z}_D}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \\ \mathbf{V}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_g/\mathbf{Z}_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

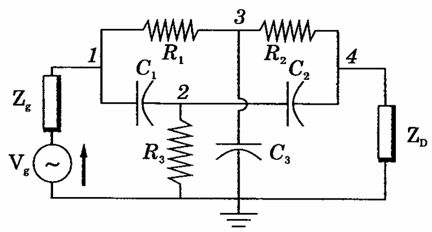


Figura 10-9

10.4 No circuito da Fig. 10-10, os dois capacitores iguais, de C farads, e o resistor R são ajustados, até que se anule a corrente na impedância detetora $\mathbf{Z}_D$. Determinar R_x e L_x em função das demais constantes do circuito, de modo a satisfazer aquela condição.

O diagrama indica a escolha dos nós. Estando a referência de um lado da impedância $\mathbf{Z}_D$, a corrente nula em $\mathbf{Z}_D$ resulta de $\mathbf{V}_3$ igual a zero. As equações dos nós, sob a forma matricial, são:

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{1}{\mathbf{Z}_g} + j\omega C + \dfrac{1}{R}\right) & -(j\omega C) & -\left(\dfrac{1}{R}\right) \\ -(j\omega C) & \left(j2\omega C + \dfrac{1}{R_x} + \dfrac{1}{j\omega L_x}\right) & -(j\omega C) \\ -\left(\dfrac{1}{R}\right) & -(j\omega C) & \left(j\omega C + \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\mathbf{Z}_D}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_g/\mathbf{Z}_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exprimindo $\mathbf{V}_3$ sob a forma de determinante e fazendo-o igual a zero:

$$\mathbf{V}_3 = \frac{\begin{vmatrix} \left(\dfrac{1}{\mathbf{Z}_g} + j\omega C + \dfrac{1}{R}\right) & -(j\omega C) & \mathbf{V}_g/\mathbf{Z}_g \\ -(j\omega C) & \left(j2\omega C + \dfrac{1}{R_x} + \dfrac{1}{j\omega L_x}\right) & 0 \\ -\left(\dfrac{1}{R}\right) & -(j\omega C) & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = 0$$

O determinante do numerador deve ser nulo. Desenvolvendo-o pelos elementos da terceira coluna, obtemos

$$(\mathbf{V}_g/\mathbf{Z}_g) \begin{vmatrix} -j\omega C & (j2\omega C + 1/R_x + 1/j\omega L_x) \\ -1/R & -j\omega C \end{vmatrix} = 0$$

Então: $\quad -\omega^2C^2 + j2\omega C/R + 1/(RR_x) + 1/(j\omega L_x R) = 0$

onde: $\quad R_x = 1/(\omega^2C^2R)$ e $L_x = 1/(2\omega^2C)$

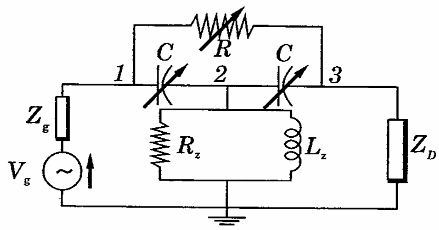


Figura 10-10

Este resu
9.6. Obs
reduzido
nós.

10.5 Determina

Havendo
Escolhid
de Kirch
à soma d

10 /0° = V

Sendo I =
resistor d

$\mathbf{V}_{AB}$ = I(

10.6 Determina

O circuito
de referê
corrente

$\mathbf{V}_1$ − 10
(5 + 3)

reagrupa

$\mathbf{V}_1 \left(\frac{1}{8} + \right.$

Este resultado já foi obtido pelo método das correntes de malha, no Probl. 9.6. Observe-se que o número de equações necessárias à solução ficou reduzido de quatro para três, com o emprego do método das tensões nos nós.

10.5 Determinar $\mathbf{V}_{AB}$ pelo método dos nós, na estrutura da Fig. 10-11.

Havendo dois nós principais ou funções, basta uma equação de nós. Escolhida a referência em *B*, escreve-se a equação do nó 1. Aplicando a lei de Kirchhoff para as correntes, a corrente $10\underline{/0^\circ}$ que entra deve ser igual à soma das correntes que saem:

$$10\,\underline{/0^\circ} = \mathbf{V}_1/10 + \mathbf{V}_1/(5+j2) \text{ e } \mathbf{V}_1 = 10\underline{/0^\circ}/(0{,}281\underline{/-14{,}2^\circ}) = 35{,}6\underline{/14{,}2^\circ}$$

Sendo $\mathbf{I} = \mathbf{V}_1/(5+j2)$ a corrente no ramo $(5+j2)$, a queda de tensão no resistor de 5 ohms desse ramo será:

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{I}(5) = \frac{\mathbf{V}_1}{(5+j2)}(5) = \frac{35{,}6\,\underline{/14{,}2^\circ}}{(5+j2)}(5) = 33\,\underline{/-7{,}6^\circ}$$

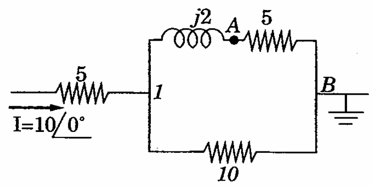


Figura 10-11

10.6 Determinar $\mathbf{V}_{AB}$ no circuito da Fig. 10-12.

O circuito não contém nós principais. Entretanto, escolhido *B* como ponto de referência e *A* como nó 1, pode-se escrever a equação, supondo que a corrente sai do nó *A* pelos dois ramos. Tem-se, portanto:

$$\frac{\mathbf{V}_1 - 10\,\underline{/0^\circ}}{(5+3)} + \frac{\mathbf{V}_1 - 10\,\underline{/90^\circ}}{(2+j5)} = 0$$

reagrupando:

$$\mathbf{V}_1\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2+j5}\right) = \left(\frac{10\,\underline{/0^\circ}}{8} + \frac{10\,\underline{/90^\circ}}{2+j5}\right)$$

onde: $\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_1 = 11{,}8\,\underline{/55{,}05°}$.

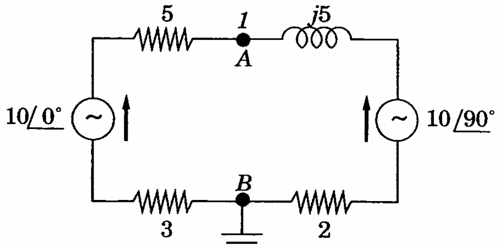


Figura 10-12

10.7 Determinar $\mathbf{V}_{AB}$ na estrutura da Fig. 10-13.

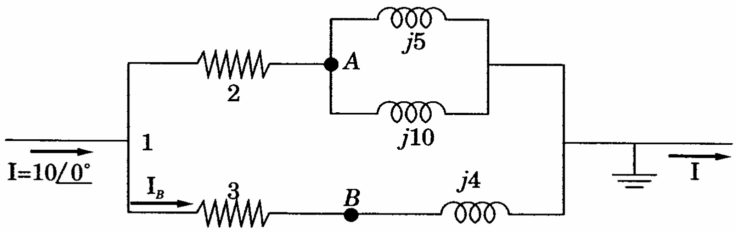


Figura 10-13

As equações dos nós são:

No nó 1: $10\,\underline{/0°} = (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2)/2 + \mathbf{V}_1/(3 + j4)$

No nó 2: $(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)/2 + \mathbf{V}_2/j5 + \mathbf{V}_2/j10 = 0$

Reagrupando: $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3 + j4}\right)\mathbf{V}_1 - \dfrac{1}{2}\mathbf{V}_2 = 10\,\underline{/0°}$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{V}_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{j10}\right)\mathbf{V}_2 = 0$$

$$\text{e } \mathbf{V}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10\angle 0^\circ & -0{,}5 \\ 0 & (0{,}5 - j0{,}3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0{,}62 - j0{,}16) & -0{,}5 \\ -0{,}5 & (0{,}5 - j0{,}3) \end{vmatrix}} = \frac{5{,}83\angle -31^\circ}{0{,}267\angle -87{,}42^\circ} = 21{,}8\angle 56{,}42^\circ$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0{,}62 - j0{,}16) & 10\angle 0^\circ \\ -0{,}5 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = \frac{5\angle 0^\circ}{0{,}267\angle -87{,}42^\circ} = 18{,}7\angle 87{,}42^\circ$$

A tensão de nó $\mathbf{V}_2$ é a tensão de A, com respeito à referência. Como $\mathbf{I}_B = \mathbf{V}_1/(3 + j4)$, a tensão $\mathbf{V}_B$ referente à referência é:

$$\mathbf{V}_B = \frac{\mathbf{V}_1}{(3 + j4)}(j4) = \frac{21{,}8\angle 56{,}42^\circ}{(3 + j4)}(j4) = 17{,}45\angle 93{,}32^\circ$$

A tensão $\mathbf{V}_{AB}$ pedida é, então,

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B = (18{,}7\angle 87{,}42^\circ) - (17{,}45\angle 93{,}32^\circ) = 2{,}23\angle 34{,}1^\circ$$

10.8 Determinar as correntes de linha $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$ na estrutura da Fig. 10-14.

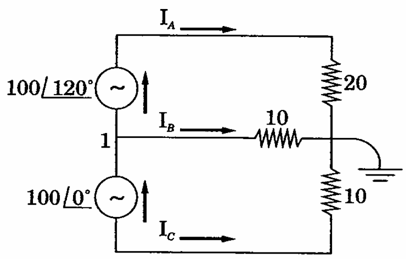


Figura 10-14

Escolhemos o nó 1 e o ponto de referência indicados no diagrama. Obtemos a equação dos nós:

$$\frac{\mathbf{V}_1 + 100\angle 120^\circ}{20} + \frac{\mathbf{V}_1}{10} + \frac{\mathbf{V}_1 - 100\angle 0^\circ}{10} = 0$$

de onde resulta $\mathbf{V}_1 = \dfrac{200\angle 0^\circ - 100\angle 120^\circ}{5} = 50 - j17{,}32 = 53\angle -19{,}1$

Em seguida, são calculadas as correntes nos ramos:

$$\mathbf{I}_A = (\mathbf{V}_1 + 100\angle 120^\circ)/20 = (50 - j17{,}32 - 50 + 86{,}6)/20 = 3{,}46\angle 90^\circ$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{V}_1/10 = 5{,}3\angle -19{,}1^\circ$$

$$\mathbf{I}_C = (\mathbf{V}_1 - 100\angle 0^\circ)/10 = (50 - j17{,}32 - 100)/10 = 5{,}3\angle -160{,}9^\circ$$

Observe-se que a soma das três correntes que penetram no nó de referência é nula:

$$\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C = 3{,}46\angle 90^\circ + 5{,}3\angle -19{,}1 + 5{,}3\angle -160{,}9^\circ$$
$$= j3{,}46 + 5{,}0 - j1{,}732 - 5 - j1{,}732 = 0$$

10.9 Determinar as correntes de linha $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$ no circuito da Fig. 10-15.

Os nós 1 e 2 e o nó de referência estão identificados na figura. As tensões dos nós $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ podem ser lidas diretamente na figura, pois são iguais às tensões dadas. Assim,

$$\mathbf{V}_1 = 150\angle 120^\circ \text{ e } \mathbf{V}_2 = -150\angle 0^\circ = 150\angle 180^\circ$$

Com a lei de Kirchhoff para as correntes aplicada a cada um dos três nós, calculam-se as correntes pedidas.

No nó 1:

$$\mathbf{I}_A = \frac{\mathbf{V}_1}{10\angle 45^\circ} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{10\angle 45^\circ} = \frac{300\angle 120^\circ - 150\angle 180^\circ}{10\angle 45^\circ} = 26\angle 45^\circ$$

No nó de referência:

$$\mathbf{I}_B = \frac{-\mathbf{V}_1}{10\angle 45^\circ} - \frac{\mathbf{V}_2}{10\angle 45^\circ} = \frac{150\angle -60^\circ + 150\angle 0^\circ}{10\angle 45^\circ} = 26\angle -75^\circ$$

No nó 2:

$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_2}{10\angle 45^\circ} + \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{10\angle 45^\circ} = \frac{300\angle 180^\circ - 150\angle 120^\circ}{10\angle 45^\circ} = 26\angle -195^\circ$$

10.10 Determin
da Fig. 10

O nó 1
equação

($\mathbf{V}_1$ – 50

onde:

$\mathbf{V}_1$ = (10

Calculam
indicados

$\mathbf{I}_5$ = (50

$\mathbf{I}_3$ = $\mathbf{V}_1$/(3

A potênci

$P = \mathbf{V}\mathbf{I}_5$ c

De $P = \mathbf{I}^2$

$P_5 = (\mathbf{I}_5)^2$

Observe-s
potências
= 198 W.

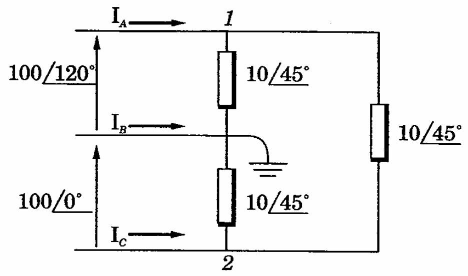


Figura 10-15

10.10 Determinar a potência de saída da fonte e a potência em cada resistor do circuito da Fig. 10-16.

O nó 1 e o de referência foram selecionados como indica a figura. A equação dos nós é:

$$(\mathbf{V}_1 - 50\angle 0°)/5 + \mathbf{V}_1/j10 + \mathbf{V}_1(3 - j4) = 0$$

onde:

$$\mathbf{V}_1 = (10\angle 0°)/(0{,}326\angle 10{,}6°) = 30{,}7\angle -10{,}6°$$

Calculamos as seguintes correntes nos braços, admitindo os sentidos indicados:

$$\mathbf{I}_5 = (50\angle 0° - \mathbf{V}_1)/5 = (50\angle 0° - 30{,}7\angle -10{,}6°)/5 = 4{,}12\angle 15{,}9°$$

$$\mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_1/(3 - j4) = (30{,}7\angle -10{,}6°)/(5\angle -53{,}1°) = 6{,}14\angle 42{,}5°$$

A potência de saída da fonte é

$$P = \mathbf{VI}_5 \cos\phi = (50)\,(4{,}12)\cos 15{,}9° = 198\text{ W}$$

De $P = \mathbf{I}^2R$ determina-se a potência dissipada em cada resistor:

$$P_5 = (\mathbf{I}_5)^2 5 = (4{,}12)^2 5 = 85\text{ W e } P_3 = (\mathbf{I}_3)^2 3 = (6{,}14)^2 3 = 113\text{ W}$$

Observe-se que a potência total fornecida pela fonte é igual à soma das potências dissipadas pelos dois resistores do circuito, isto é, $P_T = 85 + 113 =$ $= 198$ W.

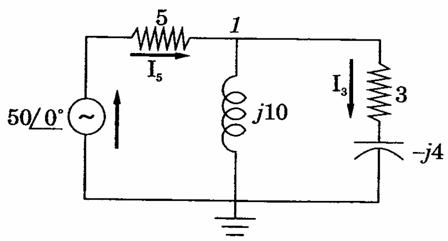


Figura 10-16

10.11 Determinar, na Fig. 10-17, as tensões nos nós 1 e 2, referidas ao ponto indicado.

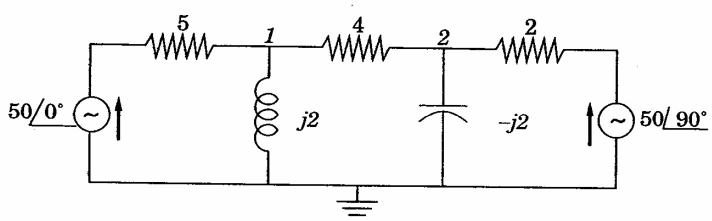


Figura 10-17

Pelo exame da figura, escrevem-se as equações dos dois nós, sob a forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{j2}+\dfrac{1}{4}\right) & -\left(\dfrac{1}{4}\right) \\ -\left(\dfrac{1}{4}\right) & \left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{-j2}+\dfrac{1}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{50\angle 0°}{5}\right) \\ \left(\dfrac{50\angle 90°}{2}\right) \end{bmatrix}$$

onde:

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -25 \\ j25 & (0{,}75+j0{,}5) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0{,}45-j0{,}5) & -0{,}25 \\ -0{,}25 & (0{,}75+j0{,}5) \end{vmatrix}} = \frac{13{,}5\angle 56{,}3°}{0{,}546\angle -15{,}95°} = 24{,}7\angle 72{,}25°$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}45 - j0{,}5) & 10 \\ -0{,}25 & j25 \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = \frac{18{,}35 \angle 37{,}8^\circ}{0{,}546 \angle -15{,}95^\circ} = 33{,}6 \angle 53{,}75^\circ$$

10.12 Dado $\mathbf{V}_0$, na estrutura da Fig. 10-18, como sendo a queda de tensão na impedância $2 - j2$, devida à fonte $\mathbf{V}_i$, determinar a relação $\mathbf{V}_0/\mathbf{V}_i$.

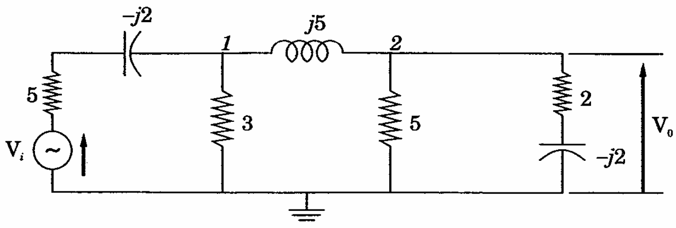


Figura 10-18

No diagrama estão indicados os nós 1, 2 e de referência, escolhidos. Assim, $\mathbf{V}_0$ é a tensão do nó 2, referida ao ponto escolhido.

As equações dos nós, sob a forma matricial, são, pois:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{5 - j2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{j5}\right) & -\left(\frac{1}{j5}\right) \\ -\left(\frac{1}{j5}\right) & \left(\frac{1}{j5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2 - j2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{V}_i}{5 - j2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tirando o valor de $\mathbf{V}_0$:

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0{,}506 - j0{,}131) & \mathbf{V}_i/(5 - j2) \\ j0{,}2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0{,}506 - j0{,}131) & j0{,}2 \\ j0{,}2 & 0{,}45 + j0{,}05 \end{vmatrix}} = \frac{(0{,}2 \angle -90^\circ)\mathbf{V}_i/(5 - j2)}{(0{,}276 \angle -7^\circ)}$$

$$\text{Então:} \quad \frac{\mathbf{V}_0}{\mathbf{V}_i} = \frac{0{,}2 \angle -90^\circ}{(5 - j2)(0{,}276 \angle -7^\circ)} = 0{,}1345 \angle -61{,}2^\circ$$

Esse resultado é chamado *função transferência* e permite o cálculo direto da tensão de saída de um ramo dado, para qualquer tensão de entrada dada, isto é, $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_i\,(0{,}1345\,\underline{/-61{,}2^\circ})$.

10.13 Dados os nós 1 e 2 da Fig. 10-19, determinar a relação $\mathbf{V}_1/\mathbf{V}_2$.

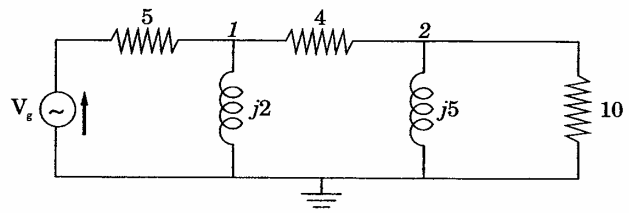


Figura 10-19

Equações dos nós, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{j2}+\dfrac{1}{4}\right) & -\left(\dfrac{1}{4}\right) \\ -\left(\dfrac{1}{4}\right) & \left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{j5}+\dfrac{1}{10}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{V}_g/5) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{onde } \mathbf{V}_1 = \frac{\begin{vmatrix} (\mathbf{V}_g/5) & -0{,}25 \\ 0 & (0{,}35 - j0{,}2) \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = \frac{(\mathbf{V}_g/5)(0{,}403\,\underline{/-29{,}8^\circ})}{\Delta_Y}$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0{,}45 - j0{,}5) & (\mathbf{V}_g/5) \\ -0{,}25 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = \frac{(\mathbf{V}_g/5)(0{,}25)}{\Delta_Y}$$

e

$$\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} = \frac{(\mathbf{V}_g/5)(0{,}403\,\underline{/-29{,}8^\circ})/\Delta_Y}{(\mathbf{V}_g/5)(0{,}25)/\Delta_Y} = 1{,}61\,\underline{/-29{,}8^\circ}$$

cálculo direto
ão de entrada

Outra solução Exprimir as tensões dos nós pelos cofatores. Como apenas uma fonte atua no circuito, pela corrente $\mathbf{I}_1$ temos $\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1(\Delta_{11}/\Delta_Y)$ e $\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1(\Delta_{12}/\Delta_Y)$.

Então temos:

$$\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} = \frac{\mathbf{I}_1(\Delta_{11}/\Delta_Y)}{\mathbf{I}_1(\Delta_{12}/\Delta_Y)} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} = \frac{0{,}35 - j0{,}2}{0{,}25} = 1{,}61\,\underline{/-29{,}8^\circ}$$

.0

10.14 No circuito da Fig. 10-20, determinar as tensões dos nós 1 e 2, empregando as admitâncias de entrada e de transferência.

A matriz (Y) das admitâncias, para os nós escolhidos, é:

$$[Y] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{2}\right) & -\left(\frac{1}{2}\right) \\ -\left(\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 + j4} + \frac{1}{-j10}\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (0{,}6 - j0{,}2) & -0{,}5 \\ -0{,}5 & (0{,}62 - j0{,}06) \end{bmatrix}$$

9,8°)

Então:

$$\mathbf{Y}_{i1} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} (0{,}6 - j0{,}2) & -0{,}5 \\ -0{,}5 & (0{,}62 - j0{,}06) \end{vmatrix}}{(0{,}62 - j0{,}06)} = \frac{0{,}194\,\underline{/-55{,}5^\circ}}{0{,}62\,\underline{/-5{,}56^\circ}} = 0{,}313\,\underline{/-49{,}94^\circ}$$

$$\mathbf{Y}_{\text{transf}(21)} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{12}} = \frac{0{,}194\,\underline{/-55{,}5^\circ}}{(-1)(-0{,}5)} = 0{,}388\,\underline{/-55{,}5^\circ}$$

No nó 1: $\mathbf{V}_1 = \dfrac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{Y}_{i1}} + \dfrac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{Y}_{\text{transf}(21)}}$

Como não há corrente devida ao gerador no nó 2, temos:

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{Y}_{i1}} = \frac{(50\,\underline{/0^\circ})/10}{0{,}313\,\underline{/-49{,}94^\circ}} = 15{,}95\,\underline{/49{,}94^\circ}$$

Do mesmo modo, $\mathbf{V}_2 = \dfrac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{Y}_{\text{transf}}} + \dfrac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{Y}_{i2}} = \dfrac{(50\,\angle 0^\circ)10}{0{,}388\,\angle -55{,}5^\circ} = 12{,}9\,\angle 55{,}5^\circ$

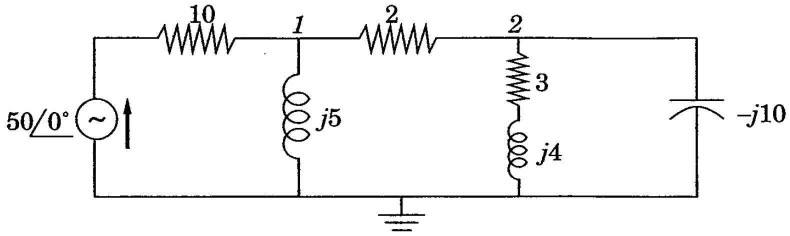


Figura 10-20

Problemas Propostos

10.15 Determinar o número de equações de tensões de nós necessário à solução de cada uma das estruturas mostradas na Figura 10-21 (*a-f*).

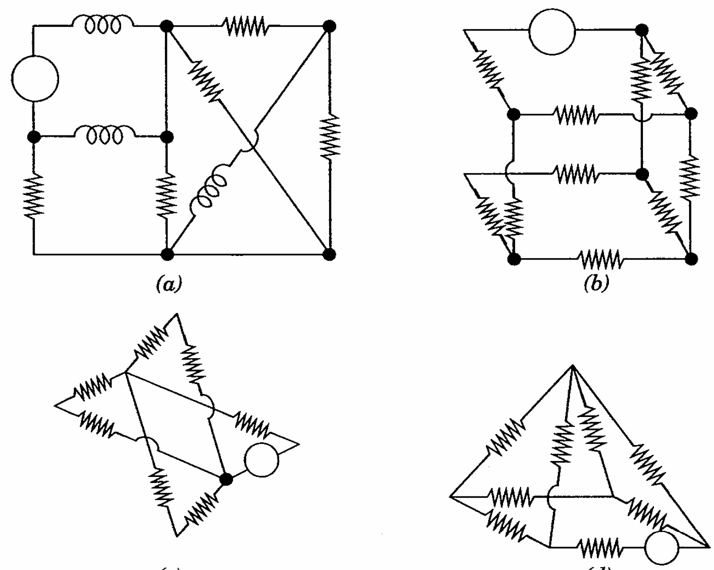


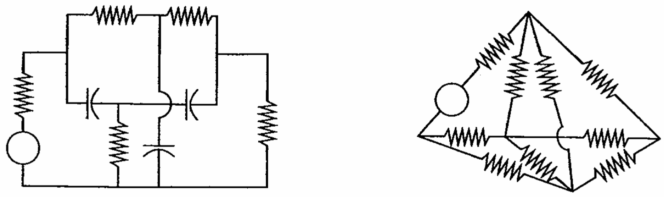
Figura 10-21

Resp.: (ɛ

10.16 Escrever

V

10.17 Escrever matricial. matriz ob



(e) (f)

Figura 10-21 *(continuação)*

Resp.: (*a*) 3, (*b*) 5, (*c*) 1, (*d*) 4, (*e*) 4, (*f*) 4.

10.16 Escrever a equação do nó indicado no circuito da Fig. 10-22.

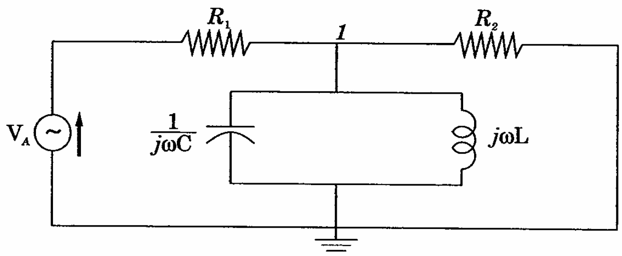


Figura 10-22

10.17 Escrever as equações dos nós do circuito da Fig. 10-23 e colocá-las sob a forma matricial. Em seguida, escrever [*y*] por inspeção da figura e comparar com a matriz obtida a partir das equações.

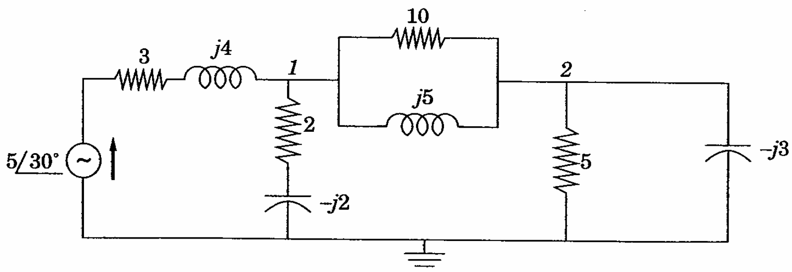


Figura 10-23

10.18 Escrever as equações dos nós da estrutura da Fig. 10-24 e colocá-las sob a forma matricial. Em seguida, escrever [Y] pela inspeção da figura e compará-la com a matriz obtida a partir das equações.

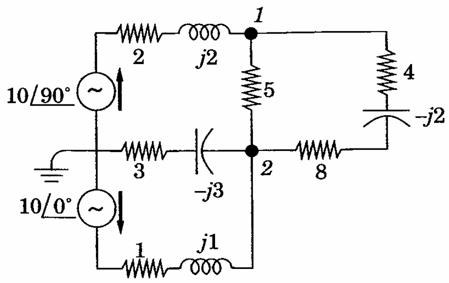


Figura 10-24

10.19 A Fig. 10-25 mostra o circuito da ponte de Wien. Escrever as três equações dos nós e colocá-las sob a forma matricial. Escrever [Y] por inspeção da figura e compará-la com a matriz obtida a partir das equações.

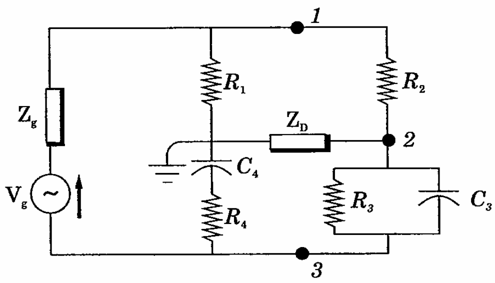


Figura 10-25

10.20 Determinar a potência fornecida pela fonte de 50 volts e a potência nos dois resistores da Fig. 10-26, empregando o método dos nós.
Resp.: 140 W; 80 W; 60 W.

10.21 Calcular a tensão V_{AB} no circuito da Fig. 10-27, empregando o método dos nós.
Resp.: 75,4 $\angle 55{,}2°$ V.

10.22 Determir
Resp.: 4

10.23 No circui
sentido c
Resp.: 1

:olocá-las sob a
ra e compará-la

ês equações dos
eção da figura e

otência nos dois

método dos nós.

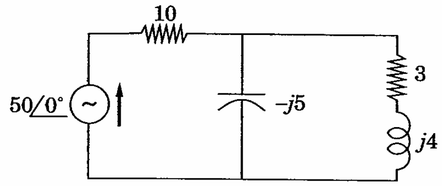


Figura 10-26

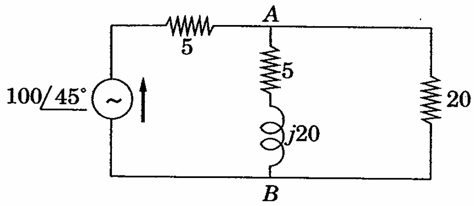


Figura 10-27

10.22 Determinar a tensão do nó $\mathbf{V}_1$ no circuito da Fig. 10-28.
Resp.: $43{,}9\angle 14{,}9^\circ$ V.

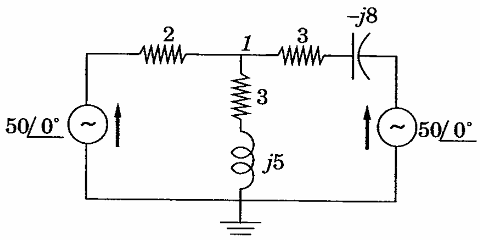


Figura 10-28

10.23 No circuito da Fig. 10-29, determinar a tensão do nó 1 e a corrente $\mathbf{I}_1$. Admitir o sentido de $\mathbf{I}_1$ indicado no diagrama.
Resp.: $17{,}7\angle -45^\circ$ **V**; $1{,}77\angle 135^\circ$ A.

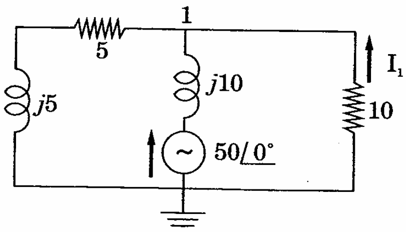


Figura 10-29

10.24 Empregando o método dos nós, determinar a potência fornecida pela fonte de 10 volts e a potência em cada resistor do circuito da Fig. 10-30.
Resp.: 36,7; 27,8; 6,66 e 2,22 W.

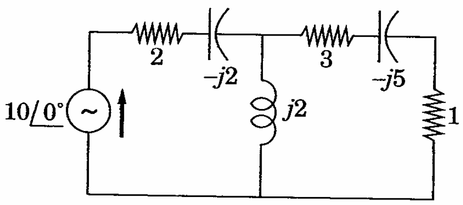


Figura 10-30

10.25 Determinar a potência fornecida pela fonte $\mathbf{V}_1 = 50\,\underline{/0^\circ}$ ao circuito da Fig. 10-31. Qual a potência dissipada em cada resistor do circuito?
Resp.: $P = 354$ W; $P_1 = 256$ W; $P_2 = 77{,}1$ W; $P_3 = 9{,}12$ W e $P_4 = 11{,}3$ W.

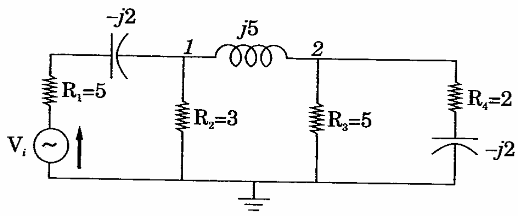


Figura 10-31

10.26 Empregando o método dos nós, determinar $\mathbf{I}_1$ no circuito da Fig. 10-32.
Resp.: 5 $\underline{/90^\circ}$A.

10.27 Determinar
no resistor c
Resp.: 24,2

10.28 No circuito d
no nó 1?
Resp.: 71,6

10.29 Calcular a ten
Resp.: 179 /2

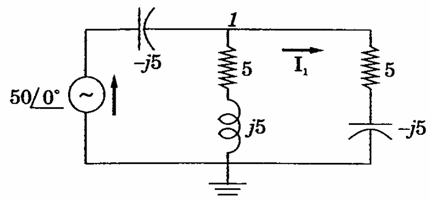


Figura 10-32

10.27 Determinar a tensão eficaz da fonte **V** de modo a ter uma potência de 75 watts no resistor de 3 ohms do circuito da Fig. 10-33.
Resp.: 24,2 V.

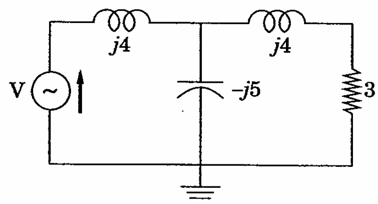


Figura 10-33

10.28 No circuito da Fig. 10-34, qual a tensão **V** que acarreta uma tensão 50 $\underline{/0^\circ}$ volts no nó 1?
Resp.: 71,6 $\underline{/-30{,}2^\circ}$ V.

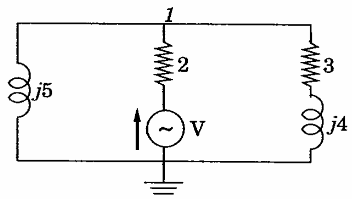


Figura 10-34

10.29 Calcular a tensão no nó 1 do circuito apresentado na Fig. 10-35.
Resp.: 179 $\underline{/204{,}8^\circ}$ V.

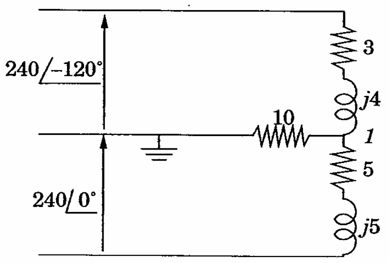


Figura 10-35

10.30 Determinar as três correntes de linha $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$ do circuito da Fig. 10-36.
Resp.: $10\angle 60^\circ$; $10\angle -60^\circ$ e $10\angle 180^\circ$ A.

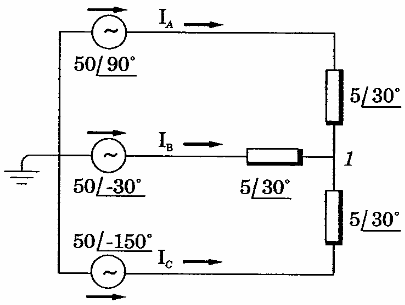


Figura 10-36

10.31 No circuito da Fig. 10-37, determinar a tensão da fonte $\mathbf{V}_2$, de modo que seja nula a corrente na impedância 2 + *j*4.
Resp.: $125\angle -135^\circ$ V.

10.32 Qual a corrente na impedância 2 + *j*4 da Fig. 10-37, se a fonte $\mathbf{V}_2$ for $100\angle 30^\circ$?
Resp.: $12{,}1\angle -11^\circ$ A.

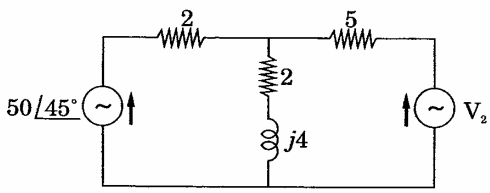


Figura 10-37

10.33 Determin
Resp.: P_1

10.34 A corrent
Determin
Resp.: 0,

10.35 No circuit
pelo méto
Resp.: 0,7

10.36 Determina
nós.
Resp.: 0,1

10.33 Determinar a potência fornecida por cada fonte do circuito do Probl. 10.32.
Resp.: $P_1 = -90{,}6$ W; $P_2 = 1000$ W.

10.34 A corrente de excitação da Fig. 10-38 é $\mathbf{I}_1$. A corrente no resistor de 10 ohms é $\mathbf{I}_2$. Determinar a relação $\mathbf{I}_2/\mathbf{I}_1$.
Resp.: $0{,}151\ \underline{/25{,}8^\circ}$.

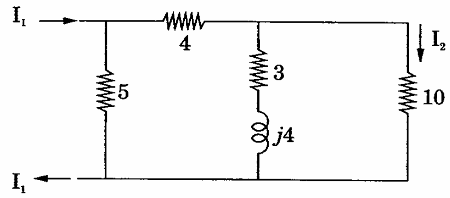


Figura 10-38

10.35 No circuito da Fig. 10-39, determinar a função transferência de tensão, $\mathbf{V}_0/\mathbf{V}_i$, pelo método dos nós.
Resp.: $0{,}707\ \underline{/45^\circ}$.

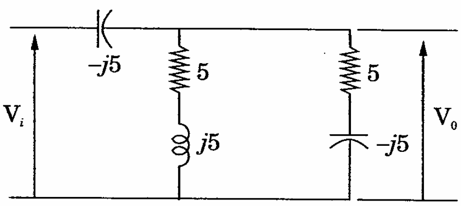


Figura 10-39

10.36 Determinar $\mathbf{V}_0/\mathbf{V}_i$ do circuito apresentado na Fig. 10-40 utilizando o método dos nós.
Resp.: $0{,}159\ \underline{/-61{,}4^\circ}$. Comparar com o Probl. 9.36.

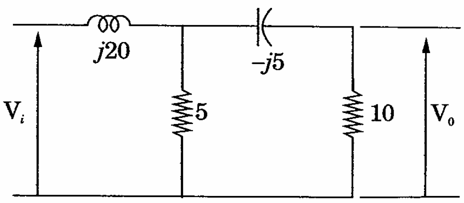


Figura 10-40

ig. 10-36.

le modo que seja

$\mathbf{V}_2$ for $100\ \underline{/30^\circ}$?

10.37 Determinar a tensão entre os terminais do circuito paralelo da Fig. 10-41 empregando o método dos nós.
Resp.: 72,2 $\angle 53{,}8^\circ$.

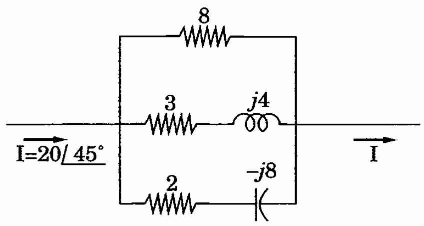


Figura 10-41

10.38 Determinar, pelo método dos nós, as tensões $\mathbf{V}_{AB}$, $\mathbf{V}_{BC}$ e $\mathbf{V}_{CD}$, no circuito da Fig. 10-42.
Resp.: 35,4 $\angle 45^\circ$ V; 50 $\angle 0^\circ$ V; 13,3 $\angle -90^\circ$ V.

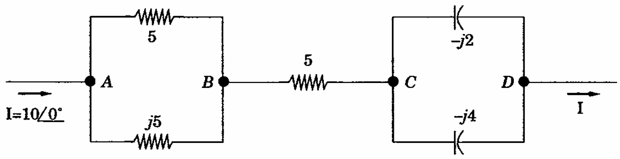


Figura 10-42

10.39 Empregando o método dos nós, determinar a tensão nas impedâncias em paralelo da Fig. 10-43.
Resp.: 35 $\angle -24{,}8^\circ$ V.

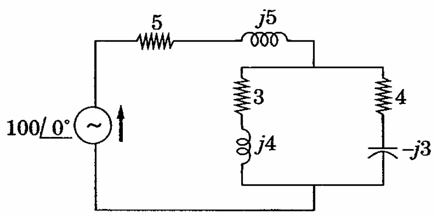


Figura 10-43

10.40 No circuit
fonte 10
Resp.: 3,

10.41 Determin
10-45.
Resp.: 39

30/0

10.42 No circuit
o sentido
Resp.: 1,

10.43 Determin
corrente r
referênci
Resp.: 95

10.40 No circuito da Fig. 10-44, determinar as tensões dos nós $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ e a corrente na fonte $10\angle 30^\circ$ volts.
Resp.: $3{,}02\angle 65{,}2^\circ$ V; $1{,}34\angle -31{,}3^\circ$ V; $1{,}44\angle 38{,}8^\circ$ V.

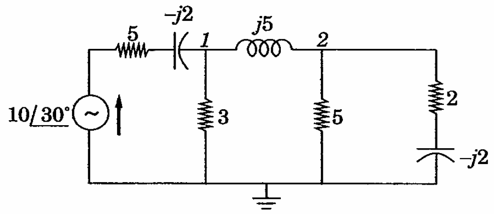


Figura 10-44

10.41 Determinar, pelo método dos nós, a potência no resistor de 6 ohms da Fig. 10-45.
Resp.: 39,6 W.

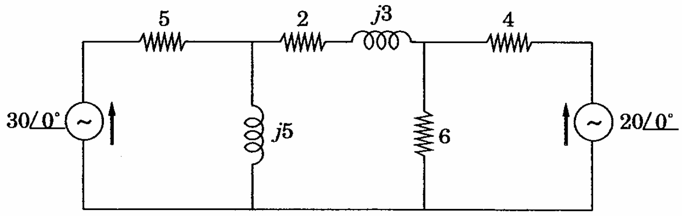


Figura 10-45

10.42 No circuito da Fig. 10-45, determinar a corrente na impedância $2 + j3$, admitindo o sentido positivo para a direita.
Resp.: $1{,}73\angle 40^\circ$ A.

10.43 Determinar a tensão $\mathbf{V}_1$ no circuito da Fig. 10-46, de modo que seja nula a corrente no resistor de 4 ohms. Escolher um dos extremos desse resistor como referência.
Resp.: $95{,}4\angle -23{,}2^\circ$ V.

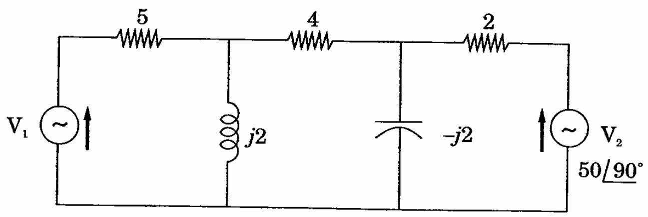


Figura 10-46

10.44 No circuito da Fig. 10-46, $\mathbf{V}_1 = 50\,/\underline{0°}$ e $\mathbf{V}_2$ é desconhecida. Determinar $\mathbf{V}_2$, de modo que a corrente no resistor de 4 ohms seja nula.
Resp.: $26{,}2\,/\underline{113{,}2°}$ V.

10.45 No circuito da Fig. 10-47, determinar a corrente $\mathbf{I}_3$ com o sentido ali indicado.
Resp.: $11{,}7\,/\underline{112{,}9°}$ A.

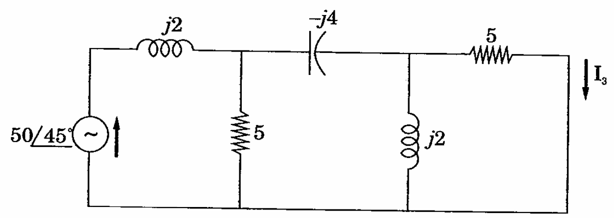


Figura 10-47

10.46 Calcular a relação entre as tensões de nós $\mathbf{V}_1/\mathbf{V}_2$ no circuito da Fig. 10-48.
Resp.: $2{,}26\,/\underline{96{,}35°}$.

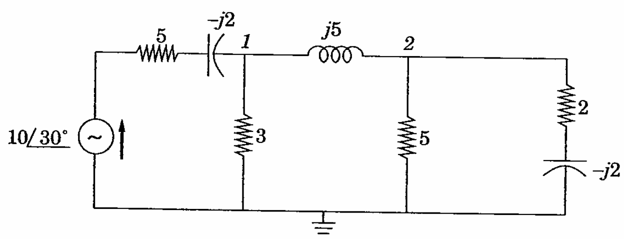


Figura 10-48

10.47 Determina
método d
Resp.: 1,5

10/0°(

10.48 Calcular a:
Resp.: 18,(

50/0°(

10.49 Determinar
nula a corr
Resp.: 4 /1

10/

10.47 Determinar a tensão $\mathbf{V}_0$ no circuito da estrutura da Fig. 10-49, empregando o método dos nós.
Resp.: $1{,}56\,\underline{/128{,}7^\circ}$ V.

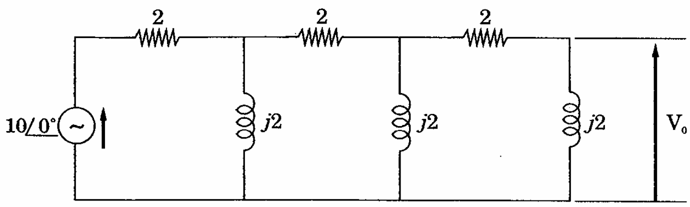


Figura 10-49

10.48 Calcular as tensões de nós $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ no circuito da Figura 10-50.
Resp.: $18{,}6\,\underline{/68{,}2^\circ}$ V.

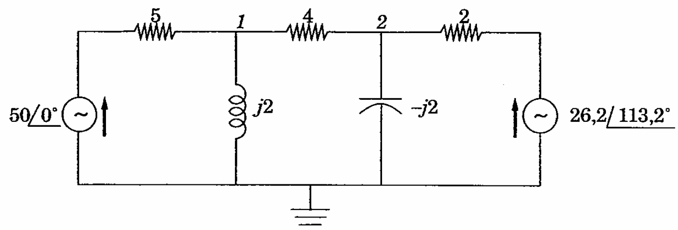


Figura 10-50

10.49 Determinar a tensão do gerador $\mathbf{V}_2$, no circuito da Fig. 10-51, de modo que seja nula a corrente do mesmo.
Resp.: $4\,\underline{/180^\circ}$ V. Comparar com o Probl. 9.50.

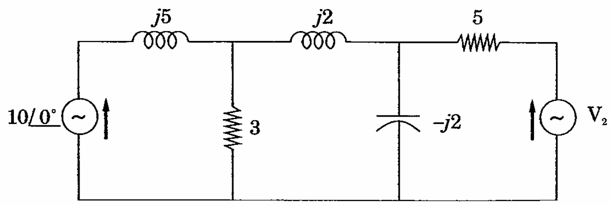


Figura 10-51

10.50 Na estrutura da Fig. 10-52, determinar a corrente **I**, de modo que a tensão $\mathbf{V}_{AB}$ seja $5 \underline{/30^\circ}$ volts.
Resp.: $9{,}72 \underline{/-16^\circ}$ A.

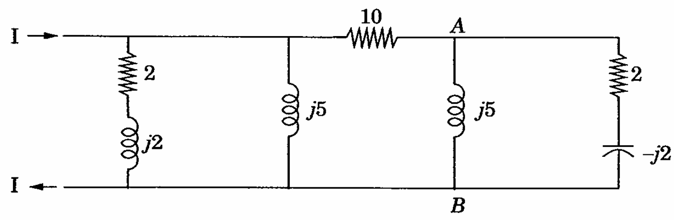


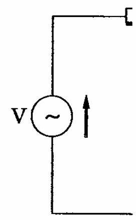
Figura 10-52

MAKRON
Books

Introduçã

Uma e
correntes de ma

Seja a
ligadas, uma de
do-se cada impe
conseqüenteme
balho necessári
estrutura ativa
e de Norton pre



MAKRON
Books

TEOREMAS DE THEVENIN E NORTON

Introdução

Uma estrutura cujas impedâncias são fixas pode ser resolvida pelas correntes de malha ou pelo método das tensões dos nós.

Seja a estrutura da Fig. 11-1. As impedâncias $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ e $\mathbf{Z}_3$ devem ser ligadas, uma de cada vez, ao circuito. Conforme o método empregado, inserindo-se cada impedância no circuito, resulta uma matriz diferente para **Z** ou **Y** e, conseqüentemente, são necessárias três soluções completas diferentes. O trabalho necessário para isso fica consideravelmente reduzido, se substituirmos a estrutura ativa por um circuito equivalente simples. Os teoremas de Thevenin e de Norton prestam-se a esse propósito.

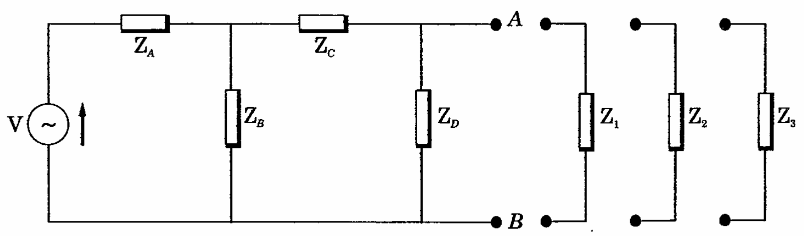


Figura 11-1

Teorema de Thevenin

Esse teorema estabelece que qualquer estrutura linear ativa com terminais de saída como *AB* da Fig. 11-2(*a*) pode ser substituída por uma única fonte de tensão **V'**, em série com uma impedância **Z'**, como mostra a Fig. 11-2(*b*).

A *tensão equivalente de Thevenin*, **V'**, é a tensão em circuito aberto medida nos terminais *AB*. A *impedância equivalente*, **Z'**, é a impedância da estrutura, vista dos terminais *AB*, quando todas as fontes internas são anuladas*.

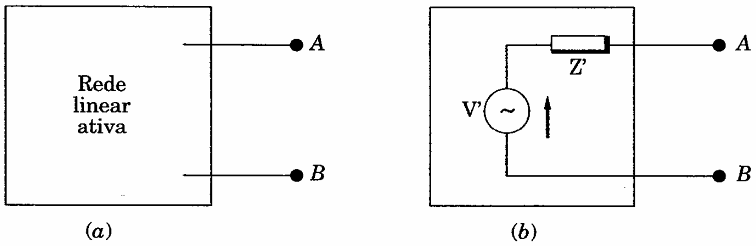


Figura 11-2 Circuito equivalente de Thevenin.

A polaridade da tensão **V'** equivalente de Thevenin deve ser escolhida de modo que a corrente através de uma impedância ligada tenha o mesmo sentido que teria com a impedância ligada à estrutura ativa original.

Exemplo 1

Dado o circuito da Fig. 11-3, determinar o circuito equivalente de Thevenin, em relação aos terminais *AB*. Empregar o resultado, determinando a corrente nas duas impedâncias $\mathbf{Z}_1 = 5 - j5$ e $\mathbf{Z}_2 = 10\angle 0^\circ$, ligadas, cada uma, aos terminais *AB* e calcular a potência a elas fornecida.

Na Fig. 11-3, a corrente é:

$$\mathbf{I} = 50\angle 0^\circ / (5 + j5 - j5) = 10\angle 0^\circ.$$

A tensão **V'** de Thevenin equivalente é, então, a queda de tensão na impedância $5 + j5$. Logo,

* N. T. Substituídas pelas respectivas impedâncias internas.

$$\mathbf{V'} = \mathbf{V}_{AB} = \mathbf{I}\,(5 + j5) = 70{,}7\,\underline{/45^\circ}$$

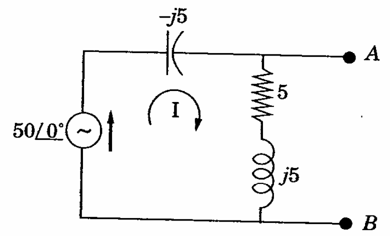


Figura 11-3

A impedância, vista dos terminais AB, é:

$$\mathbf{Z'} = \frac{(5 + j5)\,(-j5)}{5 + j5 - j5} = 5 - j5$$

O circuito equivalente de Thevenin é o da Fig. 11-4(a) com a fonte $\mathbf{V'}$ dirigida para o terminal A.

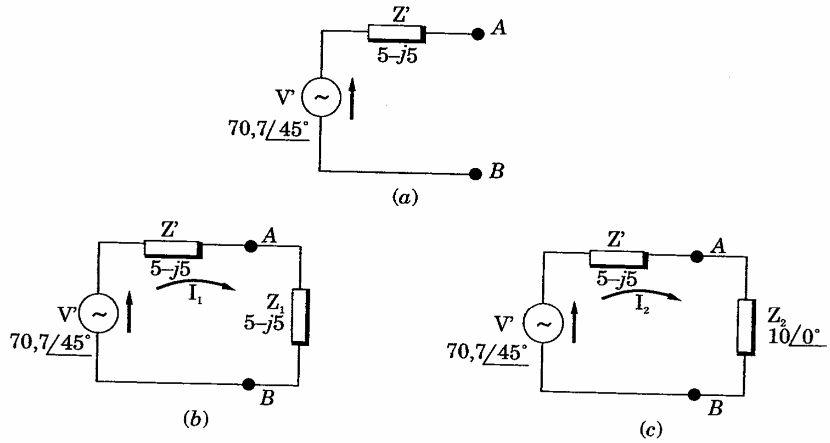


Figura 11-4

Ligando-se a impedância $\mathbf{Z}_1$ aos terminais do circuito equivalente de Thevenin, tem-se, como se vê na Fig. 11-4(b):

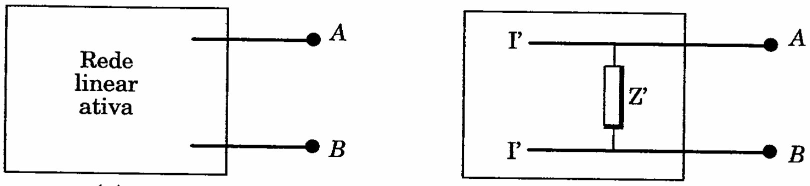
$$\mathbf{I}_1 = (70{,}7\underline{/45^\circ})/(5 - j5 + 5 - j5) = 5\underline{/90^\circ} \text{ e } P_1 = (I_1)^2\,5 = 125 \text{ W}$$

Quando a impedância $\mathbf{Z}_2$ é ligada, como na Fig. 11-4(c), tem-se:

$\mathbf{I}_2 = (70{,}7\angle 45^\circ)/(5 - j5 + 10) = 4{,}47\angle 63{,}43^\circ$ e $P_2 = (I_2)^2\, 10 = 200$ W

Teorema de Norton

O teorema de Norton estabelece que qualquer circuito linear ativo de terminais de saída tais como AB da Fig. 11-5(a) pode ser substituído por uma única fonte de corrente **I'** em paralelo com uma impedância **Z'** como mostra a Fig. 11-5(b).



(a) (b)

Figura 11-5 Circuito equivalente de Norton.

A *corrente equivalente de Norton*, **I'**, é a corrente através do curto-circuito aplicado aos terminais da estrutura ativa. A impedância paralela **Z'** é a impedância vista dos terminais AB, quando todas as fontes internas são anuladas.* Portanto, dado um circuito linear ativo, as impedâncias **Z'** dos circuitos equivalentes de Norton e Thevenin são iguais.

A corrente através de uma impedância ligada aos terminais do circuito equivalente de Norton deve ter o mesmo sentido que a corrente através da mesma impedância, ligada à estrutura ativa original.

Exemplo 2

Dado o circuito da Fig. 11-6, determinar o circuito equivalente de Norton, em relação aos terminais AB. Com o resultado obtido, calcular a corrente

---

* N. T. Substituídas pelas respectivas impedâncias internas.

nas impedâncias $\mathbf{Z}_1 = 5 - j5$ e $\mathbf{Z}_2 = 10\underline{/0^\circ}$, ligadas sucessivamente aos terminais *AB*, e determinar a potência fornecida a cada uma.

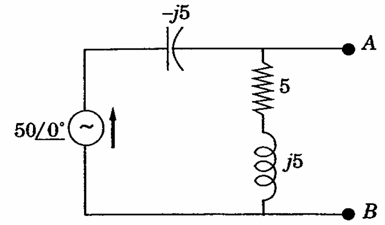


Figura 11-6

Aplicado um curto-circuito aos terminais *AB* (Fig. 11-7), temos $\mathbf{I'} = 50\underline{/0^\circ}/(-j5) = 10\underline{/90^\circ}$. Anulada a fonte, $\mathbf{Z'} = \dfrac{-j5(5 + j5)}{5 + j5 - j5} = 5 - j5$.

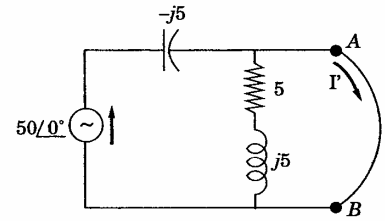


Figura 11-7

A Fig. 11-8(*a*) mostra o circuito equivalente de Norton. Observe-se que a corrente é dirigida para o terminal *A*.

Ligada a impedância $\mathbf{Z}_1$ aos terminais do circuito equivalente de Norton, como mostra a Fig. 11-8(*b*), tem-se a corrente em $\mathbf{Z}_1$.

$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I'}\left(\dfrac{\mathbf{Z'}}{\mathbf{Z'} + \mathbf{Z}_1}\right) = 10\underline{/90^\circ}\left(\dfrac{5 - j5}{10 - j10}\right) = 5\underline{/90^\circ}$. A potência fornecida a $\mathbf{Z}_1$ é $P_1 = 5(I_1)^2 = 125$ W

Quando a impedância $\mathbf{Z}_2$ é ligada em *AB*, como se vê na Fig. 11-8(*c*), tem-se: $\mathbf{I}_2 = \mathbf{I'}(5 - j5)/(15 - j5) = 4{,}47\underline{/63{,}43^\circ}$ e $P_2 = 10\,(I_2)^2 = 200$ W.

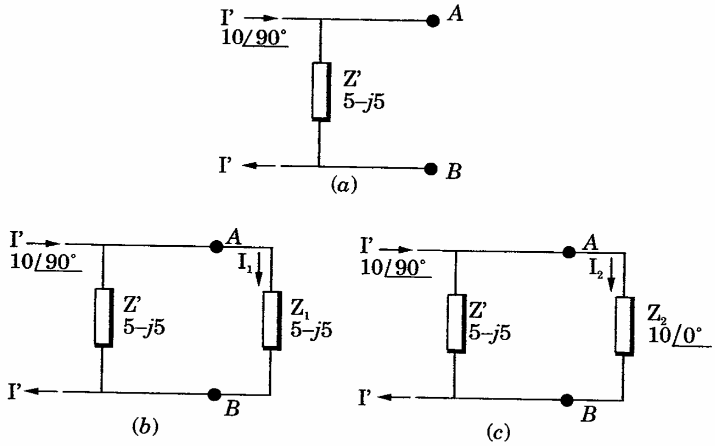


Figura 11-8

Circuitos Equivalentes de Thevenin e Norton

Os teoremas de Thevenin e de Norton foram aplicados aos dois circuitos idênticos do exemplo 1 e do exemplo 2, respectivamente, obtendo-se resultados idênticos. Segue-se que os circuitos de Thevenin e de Norton são equivalentes entre si.*

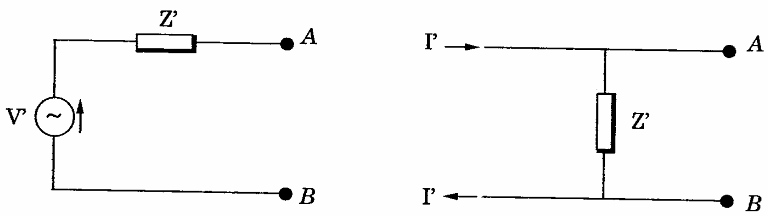


Figura 11-9 Circuitos de Thevenin e Norton.

* N. R. Na realidade se diz que um é o dual do outro.

Na Fi
terminais *AB*,
corrente no Th
correntes são ig
de Norton e a t

A mes
aberto em cada
I'Z'. Igualando

Os circ
freqüência. As
impedância equ
foram determin
ativa. Uma vez
circuitos de The
foram calculad

11.1 Determinar

A impedân
impedânci

Z' = *j*5 +

A corrente
= 1,117/–2
*j*4) ohms.

Na Fig. 11-9 encontra-se a mesma impedância **Z'** à esquerda dos terminais *AB*, em ambos os circuitos. Aplicando-se um curto em cada circuito, a corrente no Thevenin é dada por **V'**/**Z'**, enquanto no Norton é **I'**. Como as duas correntes são iguais, temos uma relação entre a corrente do circuito equivalente de Norton e a tensão equivalente de Thevenin, isto é, **I'** = **V'**/**Z'**.

A mesma relação pode ser obtida se for considerada a tensão circuito aberto em cada circuito. Para o circuito de Thevenin, ela é **V'** e, para o Norton, **I'Z'**. Igualando as duas tensões, **V'** = **I'Z'** ou **I'** = **V'**/**Z'**, como vimos acima.

Os circuitos de Thevenin e de Norton são *equivalentes para uma só freqüência*. As impedâncias complexas da estrutura ativa foram reduzidas à impedância equivalente **Z'**. A tensão equivalente **V'** e a corrente equivalente **I'** foram determinadas com o emprego das impedâncias complexas da estrutura ativa. Uma vez que as reatâncias dependem da freqüência, conclui-se que os *circuitos de Thevenin e de Norton são equivalentes apenas na freqüência em que foram calculados.*

Problemas Resolvidos

11.1 Determinar o circuito equivalente de Thevenin da estrutura ativa da Fig. 11-10.

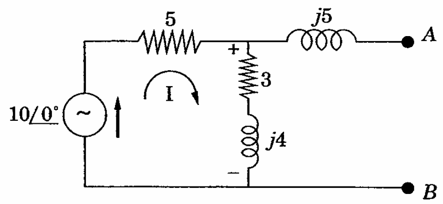


Figura 11-10

A impedância equivalente **Z'** é calculada substituindo-se a fonte por sua impedância interna. Assim, temos:

$$\mathbf{Z'} = j5 + \frac{5\,(3 + j4)}{5 + 3 - j4} = 2{,}5 + j6{,}25$$

A corrente **I** do circuito aberto da Fig. 11-10 é $\mathbf{I} = (10\underline{/0^\circ})/(5 + 3 + j4) = 1{,}117\underline{/-26{,}6^\circ}$. A tensão em circuito aberto é a queda na impedância (3 + $j4$) ohms.

$$\mathbf{V'} = \mathbf{I}\,(3 + j4) = (1{,}117\underline{/-26{,}6^\circ})(5\underline{/53{,}1^\circ}) = 5{,}58\underline{/26{,}5^\circ}$$

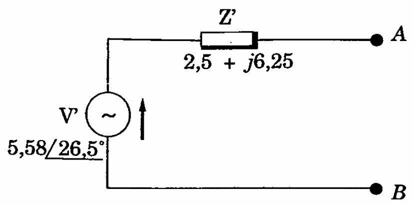


Figura 11-11

A polaridade de **V** é dada pelo sentido da corrente que entra na impedância $3 + j4$. Assim, a fonte **V'** debita no sentido do terminal *A* no circuito equivalente da Fig. 11-11.

11.2 Determinar o circuito equivalente de Norton da estrutura ativa da Fig. 11-10.

A impedância equivalente é a mesma calculada no Probl. 11.1: $\mathbf{Z'} = 2{,}5 + j6{,}25$.

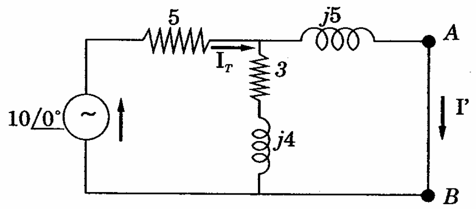


Figura 11-12

Aplicado um curto-circuito aos terminais *AB*, como mostra a Fig. 11-12, a impedância total que o circuito apresenta à fonte $10\underline{/0^\circ}$ é:

$$\mathbf{Z}_T = 5 + \frac{(3 + j4)j5}{3 + j4 + j5} = 5{,}83 + j2{,}5 = 6{,}35\,\underline{/23{,}2^\circ}$$

Assim:

$$\mathbf{I}_T = 10\,\underline{/0^\circ}/\mathbf{Z}_T = (10\,\underline{/0^\circ})/(6{,}35\,\underline{/23{,}2^\circ}) = 1{,}575\,\underline{/-23{,}2^\circ} \text{ e}$$

$$\mathbf{I'} = \mathbf{I}_T\,\frac{3 + j4}{3 + j4 + j5} = 1{,}575\,\underline{/-23{,}2^\circ}\left(\frac{5\,\underline{/53{,}1^\circ}}{3 + j9}\right) = 0{,}83\,\underline{/-41{,}65^\circ}$$

A Fig. 11-13 mostra o circuito equivalente de Norton. Observe-se que a corrente **I'** é dirigida para *A*, já que a corrente do curto-circuito entra pelo terminal *A*.

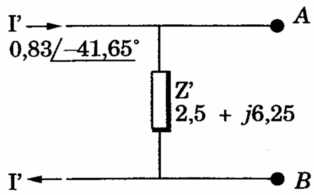


Figura 11-13

11.3 Nos terminais *AB* do circuito de corrente contínua da Fig.11-14, ligam-se, sucessivamente, três resistores R_1 = 1 ohm, R_2 = 5 ohms e R_3 = 10 ohms. Determinar a potência dissipada em cada resistor.

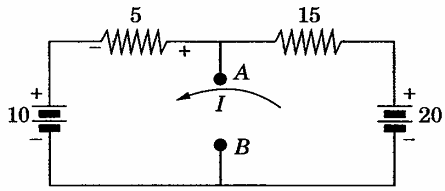


Figura 11-14

Determina-se o circuito equivalente de Thevenin. Na Fig. 11-14, a corrente é **I** = (20 – 10)/(5 + 15) = 0,5 ampère. A queda no resistor de 5 ohms é V_5 = **I**(5) = 2,5 volts com a polaridade indicada.

Exprime-se a tensão de *A* em relação à *B*, isto é,

$V_{AB} = V' = 10 + V_5 = 12{,}5$ volts

Quando as fontes de tensão contínua são anuladas *, a impedância **Z'** fica igual à combinação paralela dos resistores de 5 e 15 ohms,

$$\mathbf{Z'} = \frac{5 \cdot 15}{20} = 3{,}75$$

* N. T. Melhor diríamos, substituídas pelas respectivas impedâncias internas.

A Fig. 11-15 mostra o Thevenin equivalente. Ligando-se cada um dos três resistores aos terminais AB, pode-se calcular as potências respectivas.

Para R_1 = 1 ohm, $\mathbf{I}_1 = 12{,}5/(3{,}75 + 1) = 2{,}63$ A

e $P_1 = (\mathbf{I}_1)^2\,(1) = (2{,}63)^2\,(1) = 6{,}91$ W.

Para R_2 = 5 ohms, $\mathbf{I}_2 = 12{,}5/(3{,}75 + 5) = 1{,}43$ A

e $P_2 = (\mathbf{I}_2)^2\,(5) = (1{,}43)^2\,(5) = 10{,}2$ W.

Para R_3 = 10 ohms, $\mathbf{I}_3 = 12{,}5/(3{,}75 + 10) = 0{,}91$ A

e $P_3 = (\mathbf{I}_3)^3\,(10) = (0{,}91)^2\,(10) = 8{,}28$ W.

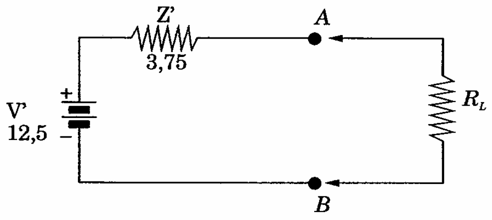


Figura 11-15

11.4 Para o circuito da Fig. 11-16, determinar o circuito equivalente de Norton, em relação aos terminais *AB*.

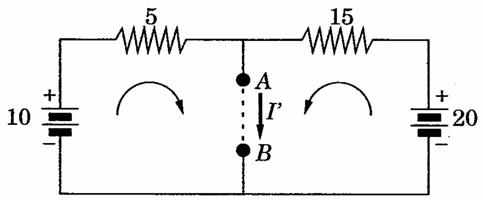


Figura 11-16

Aplicando um curto-circuito aos terminais AB, determina-se I':

$I' = 10/5 + 20/15 = 3{,}33$ A

A impedância equivalente, vista desses terminais, anuladas as fontes de tensão, é:

$\mathbf{Z'} = 5(15)/(5 + 15) = 3{,}75$ ohms.

A Fig. 11-17 apresenta o circuito equivalente de Norton.

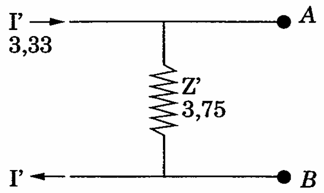


Figura 11-17

11.5 Determinar o Thevenin equivalente do circuito da Fig. 11-18.

No circuito aberto, há duas correntes de malha, como mostra o diagrama. A corrente $\mathbf{I}_2$ é dada por

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & 55{,}8\,\underline{/-17{,}4^\circ} \\ -j5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 + j5 & -j5 \\ -j5 & 8 + j8 \end{vmatrix}} = \frac{279\,\underline{/72{,}6^\circ}}{83{,}7\,\underline{/72{,}6^\circ}} = 3{,}33\,\underline{/0^\circ}$$

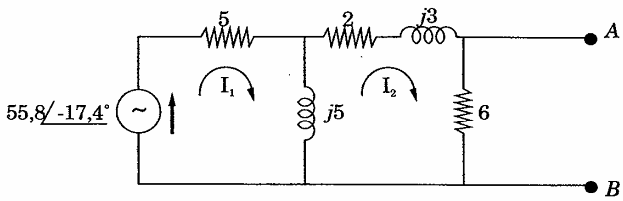


Figura 11-18

A tensão em circuito aberto será $\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{I}_2\,(6) = 3{,}33\underline{/0^\circ}\,(6) = 20\underline{/0^\circ}$. Pela redução do circuito,

$$\mathbf{Z'} = \frac{6\left[\dfrac{5(j5)}{5 + j5} + (2 + j3)\right]}{6 + \left[\dfrac{5(j5)}{5 + j5} + (2 + j3)\right]} = 3{,}32 + j1{,}41$$

A Fig. 11-19 mostra o circuito equivalente Thevenin com **V'** dirigido para *A*.

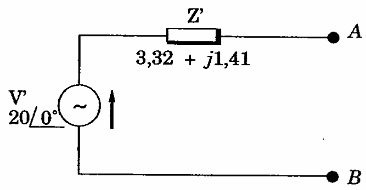


Figura 11-19

11.6 Determinar o circuito equivalente de Norton para o circuito da Fig. 11-18.

Aplicado um curto-circuito em *AB*, obtém-se a corrente $\mathbf{I}_2$, através do curto:

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I'} = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & 55{,}8\,\underline{/-17{,}4°} \\ -j5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 + j5 & -j5 \\ -j5 & 5 + j8 \end{vmatrix}} = \frac{279\,\underline{/72{,}6°}}{(-5 + j50)} = 5{,}58\,\underline{/-23{,}14°}$$

A impedância $\mathbf{Z'} = 3{,}32 + j1{,}41$ foi calculada no Probl. 11.5.

Como verificação, a tensão em circuito aberto do circuito equivalente de Norton, mostrado na Fig. 11-20, pode ser comparada com **V'** de Thevenin do Probl. 11.5.

$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{I'Z'} = 5{,}58\underline{/-23{,}14°}(3{,}32 + j1{,}41) = 20{,}1\underline{/-0{,}140}$

No Probl.

11.7 Substituir c terminais *A*

Na única r

$\mathbf{I} = 20\,\underline{/0°}$,

A queda de

A tensão **V** de 10 ohm

$\mathbf{V'} = \mathbf{V}_{AB} =$

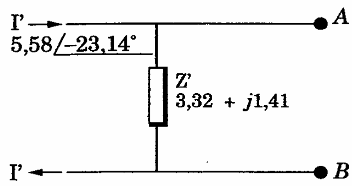


Figura 11-20

No Probl. 11.5, **V'** = $20\angle 0^\circ$. Resultados bastante próximos.

11.7 Substituir o circuito ativo da Fig. 11-21 por um equivalente de Thevenin nos terminais *AB*.

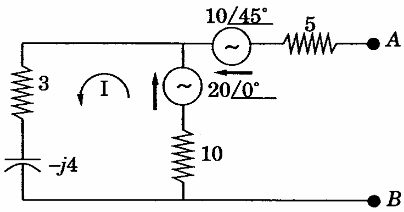


Figura 11-21

Na única malha do circuito, a corrente é:

$$\mathbf{I} = 20\angle 0^\circ/(10 + 3 - j4) = 1{,}47\angle 17{,}1^\circ$$

A queda de tensão no resistor de 10 ohms é, então, $\mathbf{V}_{10} = \mathbf{I}(10) = 14{,}7\angle 17{,}1^\circ$.

A tensão $\mathbf{V}_{AB}$ é a soma das tensões das duas fontes e da queda no resistor de 10 ohms, com as polaridades indicadas na Fig. 11-22. Assim,

$$\mathbf{V'} = \mathbf{V}_{AB} = 20\angle 0^\circ - 10\angle 45^\circ - 14{,}7\angle 17{,}1^\circ = 11{,}39\angle 264{,}4^\circ$$

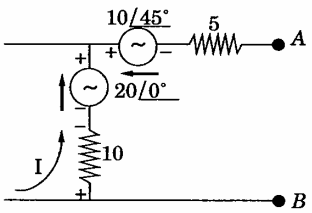


Figura 11-22

A impedância $\mathbf{Z}' = 5 + \dfrac{10(3 - j4)}{10 + 3 - j4} = 7{,}97 - j2{,}16.$

A Fig. 11-23 mostra o circuito equivalente de Thevenin.

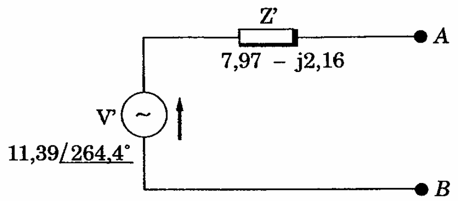


Figura 11-23

11.8 Determinar o circuito equivalente de Norton do circuito da Fig. 11-21.

$\mathbf{Z}' = 7{,}97 - j2{,}16$, calculada no Probl. 11.7.

Aplicando um curto-circuito nos terminais *AB* e escolhendo o sentido dos ponteiros do relógio para as correntes nas malhas principais, temos

$$\mathbf{I}' = \mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 13 - j4 & -20 \\ -10 & (20 - 10\,\underline{/45^\circ}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 13 - j4 & -10 \\ -10 & 15 \end{vmatrix}} = \frac{156\,\underline{/247{,}4^\circ}}{112{,}3\,\underline{/-32{,}3^\circ}} = 1{,}39\,\underline{/279{,}7^\circ}$$

No Norton, a fonte de corrente $\mathbf{I}'$ debita no terminal *A*, como mostra a Fig. 11-24.

Comparando a tensão em circuito aberto $\mathbf{V}_{ab}$, deste circuito, com a tensão $\mathbf{V}'$ do Thevenin equivalente do Probl. 11.7:

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{I}'\mathbf{Z}' = (1{,}39\,\underline{/279{,}7^\circ})(8{,}25\,\underline{/-15{,}2^\circ}) = 11{,}45\,\underline{/264{,}5^\circ}$$

e $\qquad \mathbf{V}' = 11{,}39\,\underline{/264{,}4^\circ}$

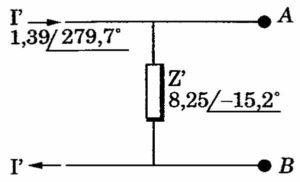


Figura 11-24

11.9 No circuito ativo da Fig. 11.25 há uma fonte de corrente **I** = $5\angle 30^\circ$. Achar o circuito de Thevenin equivalente, nos terminais *AB*.

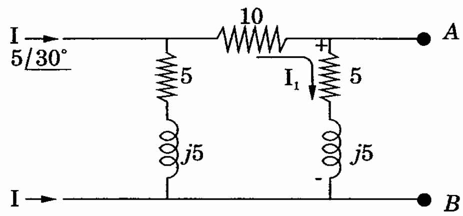


Figura 11-25

Anulada a fonte, a impedância equivalente, vista daqueles dois terminais, consta de dois ramos em paralelo. Então,

$$\mathbf{Z'} = \frac{(5 + j5)(15 + j5)}{(5 + j5 + 15 + j5)} = 4 + j3$$

Em circuito aberto, a corrente **I** se divide entre os dois ramos. Calculando $\mathbf{I}_1$ pelo diagrama, temos:

$$\mathbf{I}_1 = 5\angle 30^\circ \left(\frac{5 + j5}{20 + j10}\right) = 1{,}585\angle 48{,}4^\circ$$

Uma vez que a tensão $\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V'}$ é a queda de tensão na impedância $5 + j5$

$$\mathbf{V'} = \mathbf{I}_1(5 + j5) = (1{,}585\angle 48{,}4^\circ)(7{,}07\angle 45^\circ) = 11{,}2\angle 93{,}4^\circ$$

A Fig. 11-26 mostra o circuito de Thevenin equivalente.

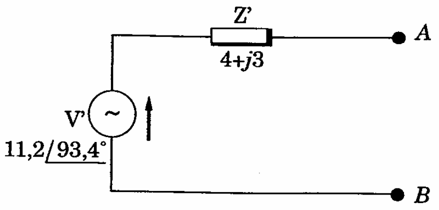


Figura 11-26

11.10 Determinar o circuito equivalente de Norton do circuito ativo da Fig. 11-25.

A impedância equivalente, calculada no Probl. 11.9, é $\mathbf{Z'} = 4 + j3 = 5\angle 36,9°$.

Aplicando um curto-circuito em AB da Fig. 11-25, a corrente nesse circuito é

$$\mathbf{I'} = 5\angle 30°\left(\frac{5 + 5}{5 + j5 + 10}\right) = 2,24\angle 56,6°$$

A Fig. 11-27 apresenta o circuito equivalente de Norton.

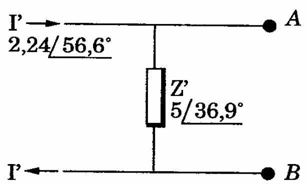


Figura 11-27

A circuito aberto, o circuito equivalente de Norton tem uma tensão $\mathbf{V}_{ab} = (2,24\angle 56,6°)(5\angle 36,9°) = 11,2\angle 93,5°$. No Probl. 11.9, a tensão do Thevenin equivalente é $\mathbf{V'} = 11,2\angle 93,4°$.

11.11 Determinar o Thevenin equivalente ao circuito em ponte dado na Fig. 11.28. Em que condições a tensão em circuito aberto dos terminais AB é igual a zero?

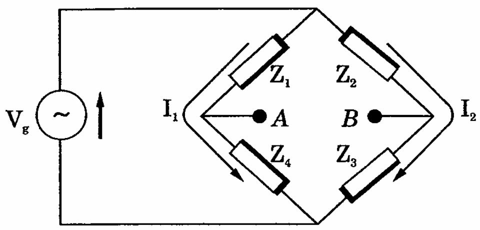


Figura 11-28

Anulada a fonte de tensão, a impedância equivalente, vista dos terminais *AB*, é constituída pela combinação paralela de $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_4$, em série com a combinação paralela de $\mathbf{Z}_2$ e $\mathbf{Z}_3$. Então,

$$\mathbf{Z}' = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_4}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_4} + \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}$$

A circuito aberto, a fonte $\mathbf{V}_g$ acarreta as correntes $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$, mostradas no diagrama.

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_g/(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_4) \text{ e } \mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_g/(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)$$

Admitindo que o potencial de *A* é superior ao de *B*, temos:

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V}_{AB} = \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_4 - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_3$$

$$= \frac{\mathbf{V}_g\mathbf{Z}_4}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_4} - \frac{\mathbf{V}_g\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}$$

$$= \mathbf{V}_g\left[\frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_4 - \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3}{(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_4)(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)}\right]$$

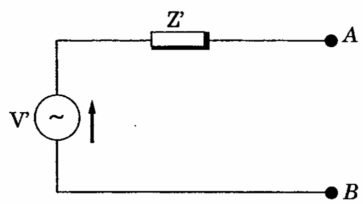


Figura 11-29

A tensão $\mathbf{V'}$ do Thevenin equivalente é proporcional à diferença $\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_4 - \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3$. Quando $\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_4 = \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3$, a tensão $\mathbf{V'} = 0$.

11.12 Determinar o Thevenin equivalente do circuito em ponte da Fig. 11-30.

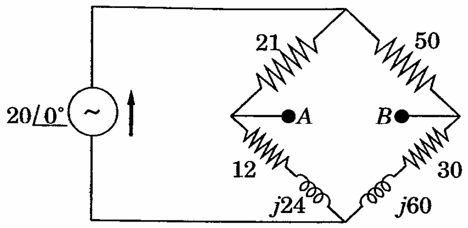


Figura 11-30

A impedância equivalente nos terminais AB, depois de anulada a fonte, é:

$$\mathbf{Z'} = \frac{21(12 + j24)}{33 + j24} + \frac{50(30 + j60)}{80 + j60} = 47{,}4\,\underline{/26{,}8^\circ}$$

Em circuito aberto, a corrente, no lado esquerdo da ponte, é $\mathbf{I}_1 = (20\underline{/0^\circ})/(33 + j24)$. No lado direito, $\mathbf{I}_2 = (20\underline{/0^\circ})/(80 + j60)$.

Admitindo que o ponto A tem potencial superior ao de B, temos:

$$\mathbf{V'} = \mathbf{V}_{AB} = \frac{(20\,\underline{/0^\circ})(12 + j24)}{33 + j24} - \frac{(20\,\underline{/0^\circ})(30 + j60)}{80 + j60}$$

$$= (20\,\underline{/0^\circ})(1 + j2)\left[\frac{12}{33 + j24} - \frac{30}{80 + j60}\right] = 0{,}328\,\underline{/170{,}5^\circ}$$

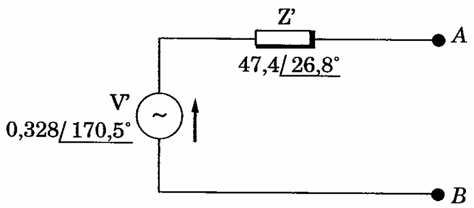


Figura 11-31

11.13 Substituir o circuito à esquerda dos terminais *AB* da Fig. 11-32 pelo Thevenin equivalente. Em seguida, determinar a corrente na impedância $2 - j2$, ligada ao circuito equivalente.

A impedância **Z'** pode ser encontrada pela redução da estrutura. A impedância $5 - j2$ está em paralelo com a resistência de 3 ohms. A impedância equivalente é

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{(5 - j2)(3 + j0)}{8 - j2} = 1{,}94 - j0{,}265$$

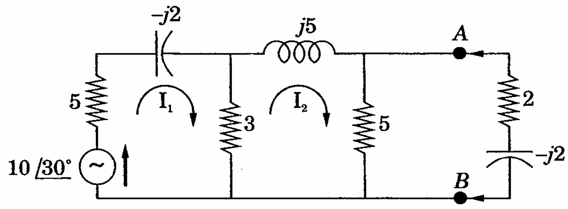


Figura 11-32

$\mathbf{Z}_1$ está em série com $j5$. Somando as duas, obtemos

$$\mathbf{Z}_2 = 1{,}94 - j0{,}265 + j5 = 1{,}94 + j4{,}735$$

Z' é obtida pela combinação de $\mathbf{Z}_2$ e o resistor de 5 ohms. Assim,

$$\mathbf{Z}' = \frac{(1{,}94 + j4{,}735)(5)}{6{,}94 + j4{,}735} = 3{,}04\,\underline{/33{,}4^\circ} = 2{,}54 + j1{,}67$$

Considerando o circuito aberto, calcula-se I_2 pelo método da corrente de malha.

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8 - j2 & 10\,\underline{/30^\circ} \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 - j2 & -3 \\ -3 & 8 + j5 \end{vmatrix}} = \frac{30\,\underline{/30^\circ}}{69{,}25\,\underline{/20{,}3^\circ}} = 0{,}433\,\underline{/9{,}7^\circ}$$

A tensão a circuito aberto é a queda no resistor de 5 ohms:

$$\mathbf{V}' = \mathbf{I}_2(5) = (0{,}433\underline{/9{,}7^\circ})\,5 = 2{,}16\underline{/9{,}7^\circ}$$

Conectando a impedância $2 - j2$ ao Thevenin equivalente (Fig. 11-33), a corrente pedida será:

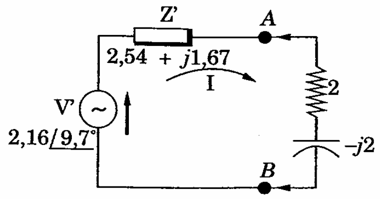


Figura 11-33

$\mathbf{I} = \mathbf{V'}/(\mathbf{Z'} + 2 - j2) = (2{,}16\underline{/9{,}7^\circ})/(4{,}54 - j0{,}33) = 0{,}475\underline{/13{,}86^\circ}$

11.14 Determinar uma tensão $\mathbf{V}_2$, no circuito da Fig. 11-34, de modo que seja nula a corrente na impedância $2 + j3$.

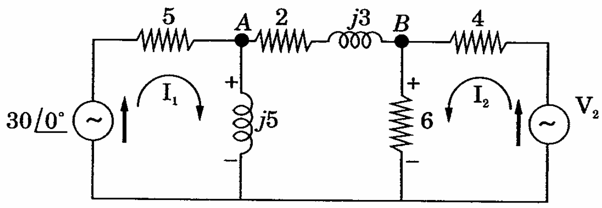


Figura 11-34

Aplica-se o teorema de Thevenin ao circuito dado e obtém-se a tensão equivalente medida nos terminais *AB*. A circuito aberto, as duas correntes de malha são $\mathbf{I}_1 = (30\underline{/0^\circ})/(5 + j5)$ e $\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_2/10$.

Supondo que o potencial de *A* seja mais alto que o de *B*, tem-se:

$\mathbf{V'} = \mathbf{V}_{AB} = \mathbf{I}_1\,(j5) - \mathbf{I}_2(6) = 30\underline{/0^\circ}\,(j5)/(5 + j5) - \mathbf{V}_2(6)/10 = 21{,}2\underline{/45^\circ} - 0{,}6\mathbf{V}_2$

A corrente no Thevenin equivalente da Fig. 11-35 será nula se $\mathbf{V'} = 0$. Então,

$0 = 21{,}2\underline{/45^\circ} - 0{,}6\,\mathbf{V}_2 \;\therefore\; \mathbf{V}_2 = 35{,}4\underline{/45^\circ}$ (veja Probl. 9.19)

Observação: o valor da impedância $\mathbf{Z'}$ da Fig. 11-35 não é necessário no problema. Entretanto, seu cálculo é deixado ao leitor como exercício.

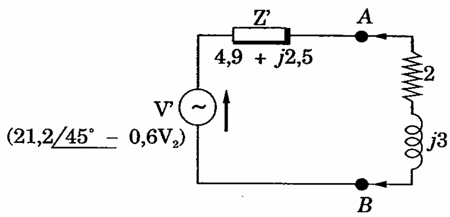


Figura 11-35

11.15 Determinar a tensão V_1 da fonte da Fig. 11-36, de modo que seja nula a corrente na fonte $20\underline{/0^\circ}$.

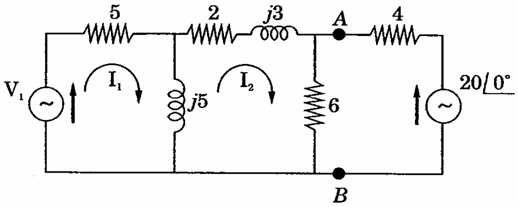


Figura 11-36

Calcula-se o equivalente de Thevenin para o circuito ativo à esquerda dos terminais *AB*. A circuito aberto, existem duas correntes de malha, $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$. O valor de $\mathbf{I}_2$ é

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & \mathbf{V}_1 \\ -j5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5+j5 & -j5 \\ -j5 & 8+j8 \end{vmatrix}} = \frac{\mathbf{V}_1 5\underline{/90^\circ}}{83{,}6\underline{/72{,}6^\circ}}$$

A tensão a circuito aberto é agora a queda no resistor de 6 ohms, $\mathbf{I}_2\,(6)$:

$$\mathbf{V'} = \frac{\mathbf{V}_1\, 5\underline{/90^\circ}}{83{,}6\underline{/72{,}6^\circ}}(6) = (0{,}359\underline{/17{,}4^\circ})\ \mathbf{V}_1$$

Ao se ligar o circuito equivalente de Thevenin aos terminais *AB*, como mostra a Fig. 11-37, fica evidenciado que, para que a corrente seja nula, $\mathbf{V'}$ deverá ser igual à outra fonte, isto é, $\mathbf{V'} = 20\underline{/0^\circ}$. Assim, $(0{,}359\underline{/17{,}4^\circ})\ \mathbf{V}_1 = 20\underline{/0^\circ}$, donde $\mathbf{V}_1 = 55{,}7\underline{/-17{,}4^\circ}$ (veja Probl. 9.20).

Também neste caso é válida a observação feita no final do problema anterior.

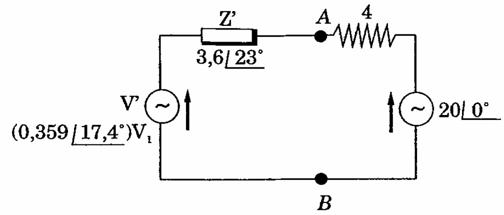


Figura 11-37

11.16 Três impedâncias, $\mathbf{Z}_1 = 10\angle 30°$, $\mathbf{Z}_2 = 20\angle 0°$ e $\mathbf{Z}_3 = 5 - j5$, deverão ser ligadas, sucessivamente, aos terminais *AB* da Fig. 11-38. Determinar a potência dissipada em cada uma delas.

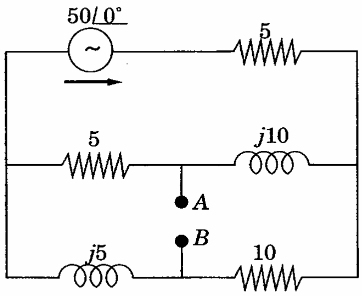


Figura 11-38

Substituído o circuito por seu equivalente Thevenin nos terminais *AB*, as impedâncias são aí ligadas, uma de cada vez.

Para o cálculo da impedância de entrada escolhem-se três cortes de malha, como se uma fonte hipotética estivesse debitando entre os terminais *AB*, conforme mostra a Fig. 11-39. A impedância de entrada $\mathbf{Z}_{e1}$ é **Z'** do circuito de Thevenin. Da definição de $\mathbf{Z}_e$, temos $\mathbf{Z}_{e1} = \Delta_z/\Delta_{11}$, onde

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} (5+j5) & -5 & (5+j5) \\ -5 & (10+j10) & (-5-j10) \\ (5+j5) & (-5-j10) & (15+j15) \end{vmatrix} = 1455\angle 121°$$

e

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} (10 + j10) & (-5 - 10) \\ (-5 - j10) & (15 + j15) \end{vmatrix} = 213{,}5 \,\underline{/69{,}4^\circ}$$

Substituindo $\mathbf{Z'} = \mathbf{Z}_{e1} = \Delta_z/\Delta_{11} = 1455\underline{/121^\circ} \,/\, 213{,}5\underline{/69{,}4^\circ} = 6{,}82\underline{/51{,}6^\circ} = 4{,}23 + j5{,}34$.

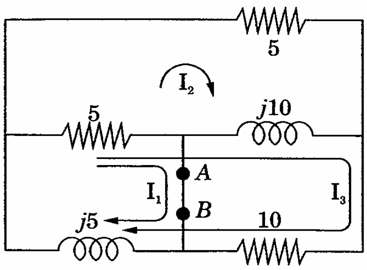


Figura 11-39

A circuito aberto há duas correntes de malha, $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$, como se vê na Fig. 11-40. São elas:

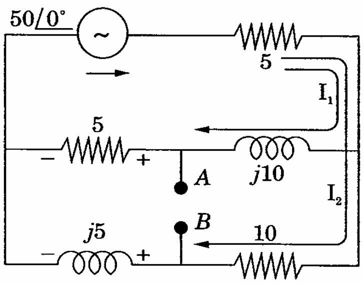


Figura 11-40

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 5 \\ 50 & 15 + j5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 + j10 & 5 \\ 5 & 15 + j5 \end{vmatrix}} = \frac{558 \,\underline{/26{,}6^\circ}}{213{,}5 \,\underline{/69{,}4^\circ}} = 2{,}62 \,\underline{/-42{,}8^\circ}$$

e

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 + j10 & 50 \\ 5 & 50 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{558\,\angle 63{,}4^\circ}{213{,}5\,\angle 69{,}4^\circ} = 2{,}62\,\angle{-6^\circ}$$

A tensão do equivalente Thevenin $\mathbf{V'}$ é a tensão em circuito aberto $\mathbf{V}_{AB}$, admitindo-se o ponto A a um potencial maior do que o de B. Na Fig. 11-40, as quedas de tensão no resistor de 5 ohms do ramo central e na reatância $j5$ do ramo inferior estão indicadas com polaridades instantâneas. Então,

$$\mathbf{V'} = \mathbf{V}_{AB} = \mathbf{I}_1(5) - \mathbf{I}_2(j5) = (2{,}62\angle{-42{,}8^\circ})(5) - (2{,}62\angle{-6^\circ})(5\angle 90^\circ) = 23{,}4\angle{-69{,}4^\circ}$$

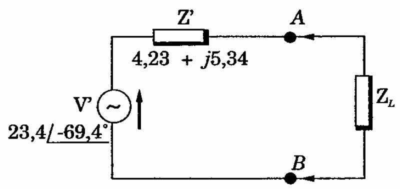


Figura 11-41

A Fig. 11-41 mostra o circuito equivalente de Thevenin com a impedância de carga $\mathbf{Z}_L$ ligada aos terminais AB.

Substituindo os valores de $\mathbf{Z}_L$ dados, em $\mathbf{I} = \mathbf{V'}/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_L)$, obtêm-se as correntes e as potências pedidas. Assim, temos:

Com $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_1 = 10\angle 30^\circ = 8{,}66 + j5$,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{23{,}4\,\angle{-69{,}4^\circ}}{(4{,}23 + j5{,}34 + 8{,}66 + j5)} = 1{,}414\,\angle{-108{,}2^\circ}$$

e $P_1 = (\mathbf{I}_1)^2\,\mathrm{Re}\mathbf{Z}_1 = (1{,}414)^2\,(8{,}66) = 17{,}32$ W;

com $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_2 = 20\angle 0^\circ$, temos:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{23{,}4\,\angle{-69{,}4^\circ}}{(4{,}23 + j5{,}34 + 20)} = 0{,}940\,\angle{-81{,}8^\circ} \text{ e } P_2 = (0{,}940)^2(20) = 17{,}65 \text{ W};$$

com $\mathbf{Z}_L$ =

$\mathbf{I}_3$ = (4,2

11.17 Determinar
da Fig. 11-
Resp.: **Z'** =

11.18 Obter o cir
Resp.: **Z'** =

11.19 Obter o cir
Fig. 11.43.
Resp.: **Z'** =

50 V

11.20 Determinar
Resp.: **Z'** =

com $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_3 = 5 - j5$, temos:

$$\mathbf{I}_3 = \frac{23{,}4\,\underline{/-69{,}4^\circ}}{(4{,}23 + j5{,}34 + 5 - j5)} = 2{,}54\,\underline{/-71{,}5^\circ} \ \text{ e } \ P_3 = (2{,}54)^2(5) = 32{,}3\ \text{W}.$$

Problemas Propostos

11.17 Determinar o circuito equivalente de Thevenin nos terminais *AB* do circuito ativo da Fig. 11-42.
Resp.: **Z**' = 9,43 ohms; **V**' = 6,29 **V** (*B*+).

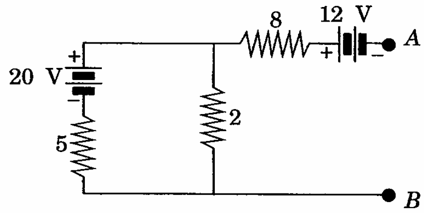


Figura 11-42

11.18 Obter o circuito equivalente de Norton do circuito da Fig. 11-42.
Resp.: **Z**' = 9,43 ohms; **I**' = 0,667 **A**.

11.19 Obter o circuito equivalente de Thevenin nos terminais *AB* do circuito ativo da Fig. 11.43.
Resp.: **Z**' = 1,52 ohms; **V**' = 11,18 **V** (*B*+).

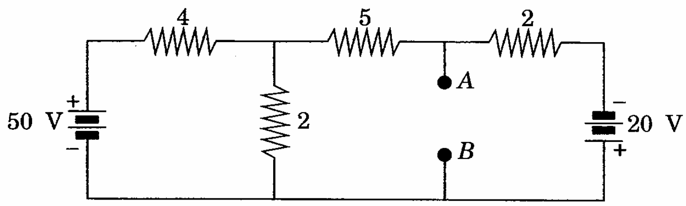


Figura 11-43

11.20 Determinar o circuito equivalente de Norton no circuito da Fig. 11-43.
Resp.: **Z**' = 1,52 ohms; **I**' = 7,35 **A**.

11.21 Obter o Thevenin equivalente ao circuito em ponte da Fig. 11-44, visto dos terminais *AB*.
Resp.: **Z'** = 55,5 ohms, **V'** = 0 volt.

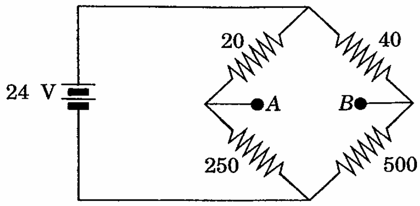


Figura 11-44

11.22 Mudado o resistor de 500 ohms do circuito da Fig. 11-44 para 475 ohms, determinar o circuito equivalente de Thevenin.
Resp.: **Z'** = 55,4 ohms; **V'** = 0,0863 **V** (*A*+).

11.23 Aplicando o teorema de Thevenin ao circuito em ponte da Fig. 11-45, determinar a deflexão de um galvanômetro, ligado em *AB*, com uma resistência de 100 ohms e uma sensibilidade de 0,5 μA por mm.
Resp.: *D* = 19,5 cm.

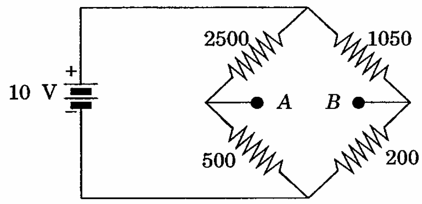


Figura 11-45

11.24 Determinar o circuito equivalente de Thevenin nos terminais *AB* da ponte de *CA*, mostrada na Fig. 11-46.
Resp.: **Z'** = $88{,}7\underline{/11{,}55^\circ}$; **V'** = $0{,}192\underline{/-43{,}4^\circ}$.

11.25 Aplicand
ligado ao
Resp.: 2,

11.26 Repetir o

11.27 Obter o
Fig. 11-4
Resp.: **Z'**

11.28 Obter o c
Resp.: **Z'**

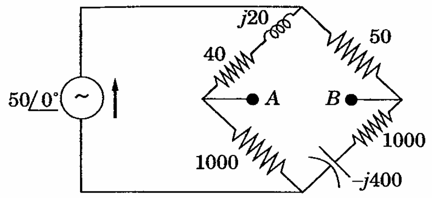


Figura 11-46

11.25 Aplicando o teorema de Thevenin, determinar a potência num resistor de 1 ohm ligado aos terminais *AB* do circuito da Fig. 11-47.
Resp.: 2,22 W.

11.26 Repetir o Probl. 11.25, empregando o circuito equivalente de Norton.

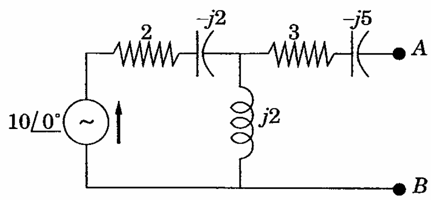


Figura 11-47

11.27 Obter o circuito equivalente de Thevenin nos terminais *AB* do circuito ativo da Fig. 11-48.
Resp.: **Z'** = $10{,}6\underline{/45°}$; **V'** = $11{,}17\underline{/-63{,}4°}$.

11.28 Obter o circuito equivalente de Norton nos terminais *AB* do circuito da Fig. 11-48.
Resp.: **Z'** = $10{,}6\underline{/45°}$; **I'** = $1{,}05\underline{/251{,}6°}$.

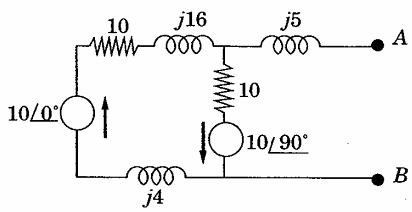


Figura 11-48

11.29 Empregando o teorema de Thevenin, determinar a potência entregue a uma impedância $2 + j4$ ligada aos terminais AB do circuito ativo da Fig. 11-49.
Resp.: 475 W.

11.30 Repetir o Probl. 11.29, aplicando o teorema de Norton.

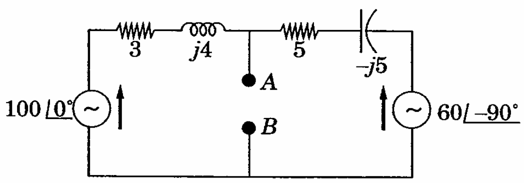


Figura 11-49

11.31 Obter o circuito equivalente de Thevenin nos terminais AB do circuito ativo da Fig. 11-50.
Resp.: $\mathbf{Z}' = 5{,}55\angle 0^\circ$; $\mathbf{V}' = 5{,}9\angle 16{,}4^\circ$.

11.32 Obter o circuito equivalente de Norton para a estrutura da Fig. 11-50.
Resp.: $\mathbf{Z}' = 5{,}55\angle 0^\circ$; $\mathbf{I}' = 1{,}06\angle 16{,}4^\circ$.

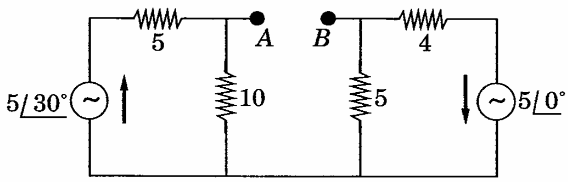


Figura 11-50

11.33 Obter o circuito equivalente de Thevenin nos terminais AB da estrutura ativa da Fig. 11-51.
Resp.: $\mathbf{Z}' = 2{,}5 + j12{,}5$; $\mathbf{V}' = 25\sqrt{2}\angle 45^\circ$.

11.34 Obter o circuito equivalente de Norton para a estrutura da Fig. 11-51.
Resp.: $\mathbf{Z}' = 2{,}5 + j12{,}5$; $\mathbf{I}' = 2{,}77\angle -33{,}7^\circ$.

11.35 Substituin
equivalen
Resp.: **Z'** =

11.36 Repetir o
nais *AB*.
Resp.: **Z'** =

11.37 Uma font
pontos inc
Resp.: **Z'** =

11.38 Determina
11-53.
Resp.: **Z'** =

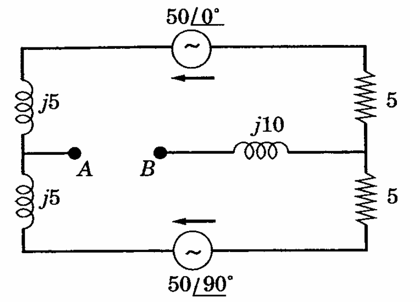


Figura 11-51

11.35 Substituindo a estrutura da Fig. 11.52, nos terminais *AB*, por seu Thevenin equivalente, determinar a corrente **I** na impedância 3 + *j*4.
Resp.: **Z'** = $3{,}53\angle 45^\circ$; **V'** = $70{,}7\angle 135^\circ$; **I** = $8{,}3\angle 85{,}2^\circ$.

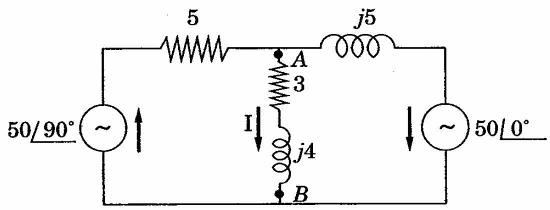


Figura 11-52

11.36 Repetir o Probl. 11.35 empregando um circuito equivalente de Norton nos terminais *AB*.
Resp.: **Z'** = $3{,}53\angle 45^\circ$; **I'** = $20\angle 90^\circ$; **I** = $8{,}3\angle 85{,}2^\circ$.

11.37 Uma fonte de corrente $15\angle 45^\circ$ ampères alimenta o circuito da Fig. 11-53 nos pontos indicados. Substituir o circuito por um Thevenin equivalente em *AB*.
Resp.: **Z'** = 11,48 + *j*1,19; **V'** = $28{,}6\angle 83{,}8^\circ$.

11.38 Determinar o circuito equivalente de Norton nos terminais *AB* do circuito da Fig. 11-53.
Resp.: **Z'** = 11,48 + *j*1,19; **I'** = $2{,}47\angle 77{,}9^\circ$.

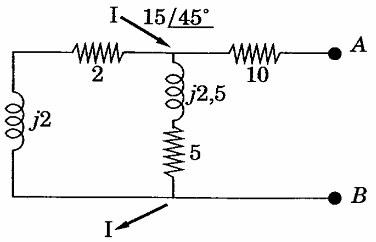


Figura 11-53

11.39 Obter o circuito equivalente de Thevenin nos terminais *AB* do circuito da Fig. 11-54.
Resp.: **Z'** = $5{,}34\angle{-49{,}8^\circ}$; **V'** = $43{,}3\angle{-70{,}6^\circ}$.

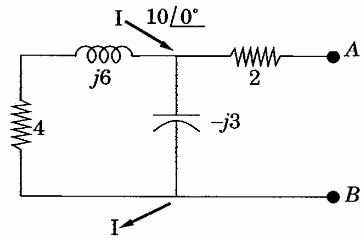


Figura 11-54

11.40 Obter o circuito equivalente de Norton para a estrutura da Fig. 11-54.
Resp.: **Z'** = $5{,}34\angle{-49{,}8^\circ}$; **I'** = $8{,}1\angle{-20{,}8^\circ}$.

11.41 Empregando o teorema de Thevenin, determinar a potência dissipada na impedância **Z** = $10\angle{60^\circ}$ ohms, ligada aos terminais *AB* da estrutura da Fig. 11-55.
Resp.: 23 W.

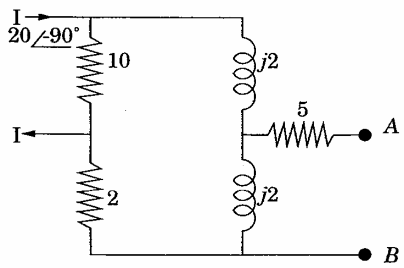


Figura 11-55

11.42 Repetir c

11.43 Obter o c
Resp.: **Z**'

11.44 Determin
Resp.: **Z**'

11.45 Determin
Fig. 11-5
Resp.: **Z**'

11.46 Obter o c
Resp.: **Z**'

11.47 O circuit
uma fon
Thevenir
Resp.: **Z**'

11.42 Repetir o Probl. 11.41, empregando o circuito equivalente de Norton.

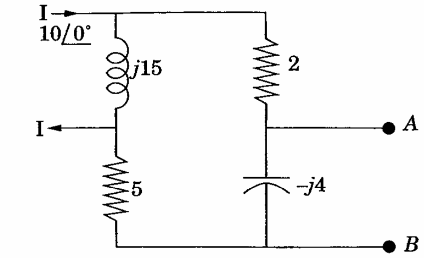


Figura 11-56

11.43 Obter o circuito equivalente de Thevenin do circuito ativo da Fig. 11-56.
Resp.: **Z'** = $5{,}09\angle{-82{,}5^\circ}$; **V'** = $46{,}2\angle{-57{,}5^\circ}$.

11.44 Determinar o circuito equivalente de Norton para o circuito da Fig. 11-56.
Resp.: **Z'** = $5{,}09\angle{-82{,}5^\circ}$; **I'** = $9{,}05\angle{25^\circ}$.

11.45 Determinar o circuito equivalente de Thevenin nos terminais *AB* do circuito da Fig. 11-57.
Resp.: **Z'** = $6{,}2\angle{51{,}8^\circ}$; **V'** = $62{,}6\angle{44{,}17^\circ}$.

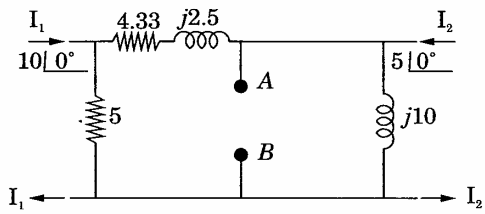


Figura 11-57

11.46 Obter o circuito equivalente de Norton para o circuito da Fig. 11-57.
Resp.: **Z'** = $6{,}2\angle{51{,}8^\circ}$; **I'** = $10{,}1\angle{-7{,}63^\circ}$.

11.47 O circuito ativo da Fig. 11-58 contém uma fonte de corrente de $4\angle{45^\circ}$ ampères e uma fonte de tensão de $25\angle{90^\circ}$ volts. Determinar o circuito equivalente de Thevenin nos terminais *AB*.
Resp.: **Z'** = $3{,}68\angle{36^\circ}$; **V'** = $22{,}2\angle{98^\circ}$.

11.48 Obter o circuito equivalente de Norton para o circuito da Fig. 11-58.
Resp.: **Z'** = $3{,}68\angle 36^\circ$; **I'** = $6{,}03\angle 62^\circ$.

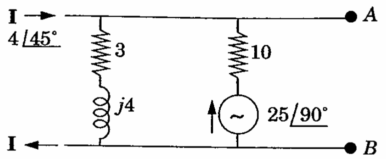


Figura 11-58

11.49 Determinar o Thevenin equivalente nos terminais *AB* do circuito ativo da Fig. 11-59.
Resp.: **Z'** = $3{,}47\angle 6{,}85^\circ$; **V'** = $31{,}2\angle 6{,}89^\circ$.

11.50 Obter o circuito equivalente de Norton para o circuito da Fig. 11-59.
Resp.: **Z'** = $3{,}47\angle 6{,}85^\circ$; **I'** = $9{,}0\angle 0^\circ$.

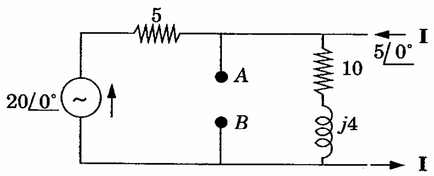


Figura 11-59

MAKRON
Books

Introduçã

Os mé
possível a res
teoremas de T
redução dos cá
individualmen
neste capítulo
determinados
razão, ser cons

Transform

Uma e
dâncias $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{Z}_B$
ligação em Δ (d
tuído por três
constitui uma
suas respectiv
iguais.

MAKRON
Books

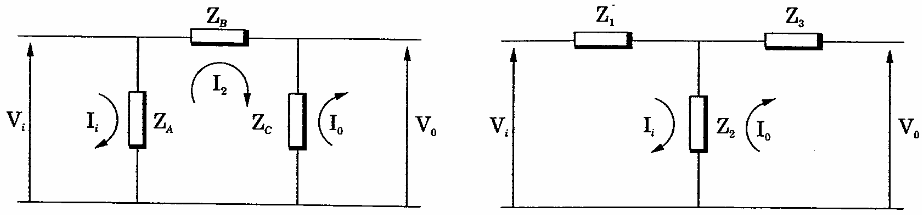
TEOREMAS GERAIS DE CIRCUITOS

Introdução

Os métodos das correntes de malha e das tensões nos nós tornam possível a resolução, praticamente, de todos os circuitos. A introdução dos teoremas de Thevenin e de Norton, no Capítulo 11, mostrou sua utilidade na redução dos cálculos numéricos quando várias impedâncias devem ser ligadas, individualmente, a um par de terminais. Também os teoremas apresentados neste capítulo atendem à mesma finalidade de simplificação da solução de determinados tipos de problemas sobre circuitos. Este capítulo pode, por esta razão, ser considerado como uma ampliação do Capítulo 11.

Transformação $\Delta - Y$

Uma estrutura passiva de três terminais, constituída por três impedâncias $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{Z}_B$ e $\mathbf{Z}_C$, como mostra a Fig. 12-1(*a*), forma o que se chama uma ligação em Δ (delta ou triângulo). Um circuito passivo de três terminais, constituído por três impedâncias $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ e $\mathbf{Z}_3$ ligadas, como mostra a Fig. 12-1(*b*), constitui uma ligação em Y (estrela). Os dois circuitos serão equivalentes se suas respectivas impedâncias de entrada, de saída e de transferência forem iguais.



(a) *(b)*

Figura 12-1

Seja $\mathbf{V}_i$ a tensão de entrada e $\mathbf{V}_0$ a correspondente tensão de saída em cada circuito. Escolhendo a corrente de entrada, $\mathbf{I}_i$, e a de saída, $\mathbf{I}_0$, com o mesmo sentido horário, em cada circuito, seja $\mathbf{I}_2$ a corrente da malha central da ligação em Δ, com o sentido indicado.

A forma matricial das equações das correntes de malha do circuito ligado em Δ é:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_A & -\mathbf{Z}_A & 0 \\ -\mathbf{Z}_A & \mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C & -\mathbf{Z}_C \\ 0 & -\mathbf{Z}_C & \mathbf{Z}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_i \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ 0 \\ -\mathbf{V}_0 \end{bmatrix}$$

As correspondentes impedâncias de entrada, de saída e de transferência são:

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B}$$

$$\mathbf{Z}_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta_{33}} = \frac{\mathbf{Z}_B\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C}$$

$$\mathbf{Z}_{\text{transf}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{13}} = \mathbf{Z}_B$$

As equações das correntes de malha do circuito ligado em Y, Fig. 12-1(*b*), são:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 & -\mathbf{Z}_2 \\ -\mathbf{Z}_2 & \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_i \\ \mathbf{I}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ -\mathbf{V}_0 \end{bmatrix}$$

As correspondentes impedâncias de entrada, de saída e de transferência são:

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}$$

$$\mathbf{Z}_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta_{22}} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}$$

$$\mathbf{Z}_{\text{transf}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{12}} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2}$$

Igualando as impedâncias de mesmo nome, nos dois circuitos:

$$\frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} \qquad (1)$$

$$\frac{\mathbf{Z}_B\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \qquad (2)$$

$$\mathbf{Z}_B = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2} \qquad (3)$$

Substituindo $\mathbf{Z}_B$ em (*1*) e (*2*) pelo seu valor em (*3*) e, em seguida, tirando os valores de $\mathbf{Z}_A$ e $\mathbf{Z}_C$, vem:

$$\mathbf{Z}_A = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_3} \qquad (4)$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1} \qquad (5)$$

Assim, uma ligação em estrela de $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ e $\mathbf{Z}_3$ pode ser substituída por uma ligação em triângulo de $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{Z}_B$ e $\mathbf{Z}_C$, atendidas as equações (*3*), (*4*) e (*5*).

Para obter-se a transformação de Δ para Y, somem-se as três equações (*3*), (*4*) e (*5*) e tome-se o inverso. Vem:

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{(\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3)^2} \qquad (6)$$

Multiplicando o primeiro membro de (*6*) por $\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B$ e o segundo membro pelas expressões de $\mathbf{Z}_A$ em (*4*) e de $\mathbf{Z}_B$ em (*3*), temos:

$$\left(\frac{1}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C}\right)\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B =$$

$$= \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{(\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3)^2}\left(\frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_3}\right)\left(\frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2}\right)$$

donde $$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C}$$

Semelhantemente, obtêm-se expressões para $\mathbf{Z}_2$ e $\mathbf{Z}_3$ em função de $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{Z}_B$ e $\mathbf{Z}_C$. Os resultados completos das transformações $Y - \Delta$ e vice-versa são tabulados a seguir.

Transformação Y – Δ

$$\mathbf{Z}_A = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_3}$$

$$\mathbf{Z}_B = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2}$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1}$$

Transformação Δ – Y

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C}$$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C}$$

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_B\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C}$$

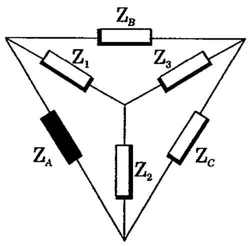


Figura 12-2

As relações acima podem ser obtidas pelas duas regras mnemônicas a seguir:

1. *Transformaç*

Qualq
duas, das impe
é oposta.

Na Fi
impedância qu

2. *Transformaç*

Qualq
cias adjacentes

Na Fig
triângulo, divi

Teorema d

Este te
estrutura bilat
respostas obtid
anuladas.*

O prin
de malha e das
como relações c

* N. T. Substitu

1. *Transformação Y – Δ*

Qualquer impedância do triângulo é igual à soma dos produtos, duas a duas, das impedâncias da estrela, dividida pela impedância da estrela que lhe é oposta.

Na Fig. 12-2, $\mathbf{Z}_A$ é igual à soma dos três produtos, dividida por $\mathbf{Z}_3$, impedância que lhe fica oposta na estrela.

2. *Transformação Δ – Y*

Qualquer impedância da estrela é igual ao produto das duas impedâncias adjacentes do triângulo dividido pela soma das três impedâncias do triângulo.

Na Fig. 12-3, $\mathbf{Z}_1$ é igual ao produto $\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B$, impedâncias adjacentes do triângulo, dividido pela soma das três impedâncias do triângulo.

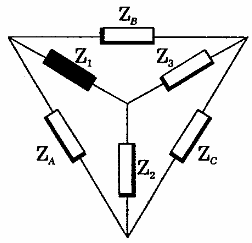


Figura 12-3

Teorema da Superposição

Este teorema estabelece que a resposta, em qualquer elemento de uma estrutura bilateral linear que contenha duas ou mais fontes, é a soma das respostas obtidas individualmente por cada fonte, com todas as devidas fontes anuladas.*

O princípio da superposição estava implícito nos métodos das correntes de malha e das tensões dos nós. Essas correntes e tensões foram encontradas como relações de dois determinantes (ver Capítulos 9 e 10). O desenvolvimento

* N. T. Substituídas pelas respectivas impedâncias internas.

dos determinantes do numerador em função dos elementos da coluna que contém as fontes resultou em equações do tipo:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} + \mathbf{V}_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z} + \mathbf{V}_3 \frac{\Delta_{31}}{\Delta_Z} + \ldots \tag{7}$$

e

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Y} + \mathbf{I}_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Y} + \mathbf{I}_3 \frac{\Delta_{31}}{\Delta_Y} + \ldots \tag{8}$$

Os termos da equação (*7*) são as correntes componentes da corrente de malha $\mathbf{I}_1$, devidas às tensões $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ etc. Na equação (*8*) os termos são as tensões componentes da tensão de nó $\mathbf{V}_1$, devidas às correntes $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ etc.

Caso as correntes de malha sejam escolhidas de modo que as fontes fiquem todas em ramos não-acoplados, os termos de (*7*) serão idênticos às correntes devidas a cada fonte, atuando isoladamente. Do mesmo modo, se as fontes de correntes de uma estrutura a ser resolvida pelo método dos nós tiverem todas um mesmo ponto de retorno, tomando-se esse ponto como referência, os termos da equação (*8*) serão idênticos às tensões de nós que resultam quando cada fonte atua isoladamente.

O princípio da superposição se aplica à determinação de correntes e de tensões de nós linearmente relacionadas às fontes que ajem no circuito. A potência não pode ser determinada pela superposição, por ser quadrática a relação entre potência e corrente ou tensão.

Teorema da Reciprocidade

Estabelece este teorema que, num circuito, *com uma única fonte*, linear e bilateral, a relação entre excitação e resposta é constante, quando se invertem as posições entre excitação e resposta.

Na hipótese de corrente de malha com uma única fonte atuando na estrutura, pode-se demonstrar o teorema, considerando a seguinte equação para a corrente $\mathbf{I}_r$:

$$\mathbf{I}_r = \mathbf{V}_1 \frac{\Delta_{1r}}{\Delta_z} + \mathbf{V}_2 \frac{\Delta_{2r}}{\Delta_z} + \ldots + \mathbf{V}_r \frac{\Delta_{rr}}{\Delta_z} + \mathbf{V}_s \frac{\Delta_{sr}}{\Delta_z} + \ldots$$

Seja $\mathbf{V}_s$ a fonte única da estrutura. Então

$$\mathbf{I}_r = \mathbf{V}_s \frac{\Delta_{sr}}{\Delta_z}$$

A relação entre a excitação e a resposta é

$$\frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{I}_r} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{sr}} = \mathbf{Z}_{\text{transf}(sr)} \tag{9}$$

Intercambiando-se as posições entre a excitação e a resposta, a fonte se torna $\mathbf{V}_r$ e a corrente $\mathbf{I}_s$:

$$\mathbf{I}_s = \mathbf{V}_r \frac{\Delta_{rs}}{\Delta_z}$$

A relação entre excitação e resposta é, então,

$$\frac{\mathbf{V}_r}{\mathbf{I}_s} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{rs}} = \mathbf{Z}_{\text{transf}(rs)} \tag{10}$$

As duas impedâncias de transferências são iguais [equações (*9*) e (*10*)] em qualquer estrutura linear bilateral, pois, nesses circuitos, a matriz impedância [**Z**] é simétrica em relação à diagonal principal e os cofatores Δ_{sr} e Δ_{rs} são iguais. Assim, a corrente na malha *r* devida a uma fonte de tensão na malha *s* é a mesma corrente produzida na malha ε quando a fonte de tensão é deslocada para a malha *r*. Deve-se ressaltar que *as correntes em outras partes do circuito não permanecerão as mesmas*.

O teorema da reciprocidade aplica-se também a circuitos que contenham uma única fonte de corrente. O teorema estabelece que, nesse caso, a tensão que aparece em um par de terminais *mn*, devida a uma fonte de corrente que atua nos terminais *ab*, é a mesma tensão que aparece em *ab*, quando a fonte de corrente é deslocada para os terminais *mn*. Deve-se ressaltar que *as tensões em outros pontos do circuito não permanecerão as mesmas*. Ver Probl. 12.9.

Teorema da Compensação

A queda de tensão em uma impedância **Z**, em que circula a corrente **I**, é dada por **IZ**. De acordo com o teorema da compensação, essa impedância pode ser substituída por uma f.e.m. *de compensação*, cuja amplitude e fase sejam iguais a **IZ**. Do mesmo modo, se **V** é a tensão em um elemento ou ramo de uma estrutura cuja impedância é **Z**, esse elemento ou ramo pode ser substituído por uma fonte de corrente **I** = **V**/**Z**. As correntes e tensões em todas as demais partes do circuito permanecem inalteradas, após a substituição da fonte de compensação. O teorema da compensação chama-se, também, teorema da substituição.

Na Fig. 12-4(*a*), um ramo de uma estrutura contém as impedâncias $\mathbf{Z}_A$ e $\mathbf{Z}_B$. Se a corrente nesse ramo for $\mathbf{I}_1$, a queda de tensão em $\mathbf{Z}_A$ será $\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_A$, com a polaridade indicada. A Fig. 12-4(*b*) mostra a fonte de compensação, $\mathbf{V}_C = \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_A$, que substitui $\mathbf{Z}_A$. A polaridade de $\mathbf{V}_C$ deve ser a indicada, pois a seta, no sentido convencional, aponta para o terminal positivo.

Caso ocorra alguma alteração no circuito que influa sobre $\mathbf{I}_1$, a fonte de compensação deverá ser modificada convenientemente. Por esta razão, *a fonte de compensação* $\mathbf{V}_C$ *é chamada de fonte dependente*.

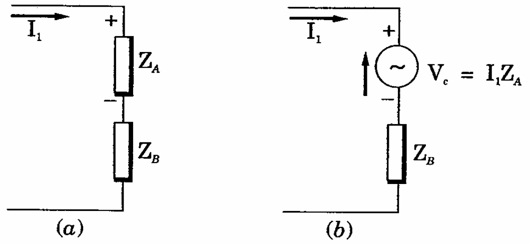


Figura 12-4

O teorema da compensação é útil na determinação das alterações da corrente e da tensão, em um elemento de circuito, quando se muda o valor de sua impedância. Esta aplicação ocorre em circuitos de pontes e de potenciômetros, onde uma pequena variação em uma impedância resulta num desvio das condições de equilíbrio.

Na Fig. 12-5(*a*), a fonte **V** acarreta no circuito uma corrente **I** = **V**/**Z**. Na Fig. 12-5(*b*), a impedância total é substituída por ($\mathbf{Z} + \delta\mathbf{Z}$). A corrente é, então, $\mathbf{I'} = \mathbf{V}/(\mathbf{Z} + \delta\mathbf{Z})$. Uma fonte de compensação $\mathbf{V}_C = \mathbf{I}\delta\mathbf{Z}$, atuando no circuito, *depois de anulada a fonte original*, acarreta uma corrente $\Delta\mathbf{I}$, como mostra a Fig. 12-5(*c*). $\Delta\mathbf{I}$ é a alteração na corrente, devida à variação $\delta\mathbf{Z}$ na impedância do circuito. Pelo teorema da superposição, $\mathbf{I} + \Delta\mathbf{I} = \mathbf{I'}$ ou $\Delta\mathbf{I} = \mathbf{I'} - \mathbf{I}$.

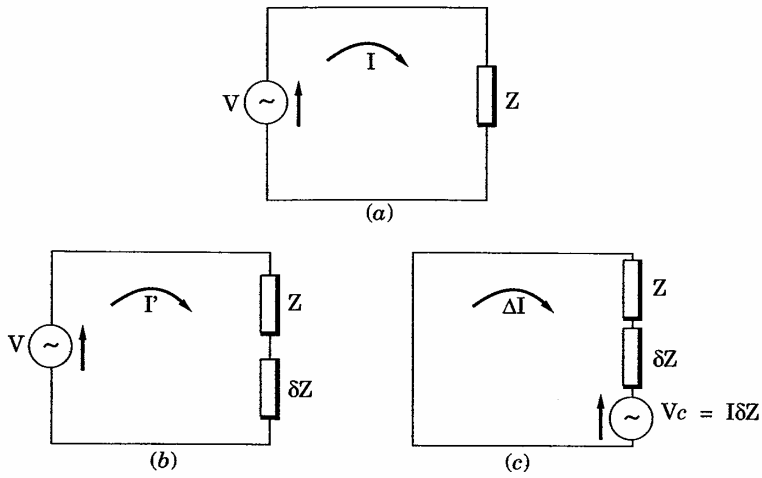


Figura 12-5

Exemplo

No circuito da Fig. 12-6, troca-se a impedância $3 + j4$ por $5 + j5$, isto é, $\delta\mathbf{Z} = 2 + j1$. Determinar a variação da corrente pelo cálculo direto e verificar o resultado, aplicando o teorema da compensação.

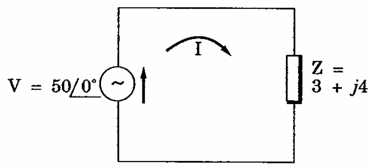


Figura 12-6

Antes da troca, $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z} = (50\angle 0^\circ)/(5\angle 53{,}1^\circ) = 10\angle -53{,}1^\circ$. Quando se acrescenta $\delta\mathbf{Z}$ ao circuito, como mostra a Fig. 12-7(a), tem-se:

$\mathbf{I} = \mathbf{V}/(\mathbf{Z} + \delta\mathbf{Z}) = (50\angle 0^\circ)/(5 + j5) = 7{,}07\angle -45^\circ$

A variação na corrente é

$\Delta\mathbf{I} = \mathbf{I'} - \mathbf{I} = (5 - j5) - (6 - j8) = -1 + j3 = 3{,}16\angle 108{,}45^\circ$

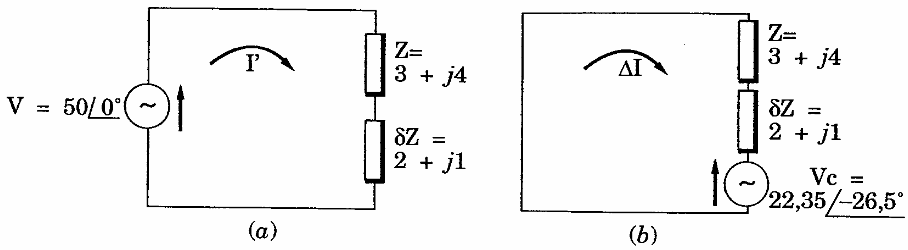


Figura 12-7

Aplicando o teorema da compensação, a fonte de compensação $\mathbf{V}_C = \mathbf{I}\delta\mathbf{Z} = (10\underline{/-53,1^\circ})(2 + j1) = 22,35\underline{/-26,5^\circ}$. Introduzindo essa fonte no circuito que contém $\mathbf{Z}$ e $\delta\mathbf{Z}$ e tornando igual a zero a fonte $50\underline{/0^\circ}$, como mostra a Fig. 12-7(*b*), a variação de corrente é:

$$\Delta\mathbf{I} = -\frac{\mathbf{V}_C}{\mathbf{Z} + \delta\mathbf{Z}} = -\frac{22,35\underline{/-26,5^\circ}}{5 + j5} = 3,16\underline{/108,45^\circ}$$

Portanto, quando se modifica uma impedância em um circuito e se deseja conhecer a correspondente variação de corrente, $\Delta\mathbf{I}$, determina-se essa variação fazendo atuar a fonte de compensação, $\mathbf{V}_C$, com as demais fontes tornadas iguais a zero.

Teoremas da Máxima Transferência de Potência

Os teoremas que se seguem determinam os valores de impedâncias de carga que resultam em máxima transferência de potência entre os terminais de um circuito ativo.

Seja uma fonte e uma impedância complexa fixa, associadas em série, fornecendo potência a uma carga, constituída por uma resistência variável ou uma impedância complexa variável.

Caso 1 Carga: resistência variável R_L (Fig. 12-8). A corrente no circuito é:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_g}{(R_g + R_L) + jX_g}$$

$$\mathbf{I} = |\mathbf{I}|\ \frac{V_g}{\sqrt{(R_g + R_L)^2 + X_g^2}}$$

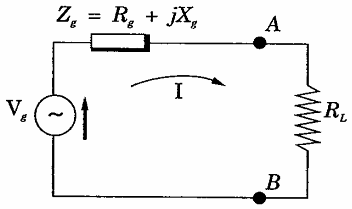


Figura 12-8

A potência entregue a R_L é, então:

$$P = I^2 R_L = \frac{V_g^2 R_L}{(R_g + R_L)^2 + X_g^2}$$

O valor de R_L que determina a máxima potência transferida à carga é encontrado igualando-se a zero a primeira derivada dP/dR_L.

$$\frac{dP}{dR_L} = \frac{d}{dR_L}\left[\frac{V_g^2 R_L}{(R_g + R_L)^2 + X_g^2}\right] =$$

$$= V_g^2 \left\{\frac{[(R_g + R_L)^2 + X_g^2] - R_L(2)(R_g + R_L)}{[(R_g + R_L)^2 + X_g^2]^2}\right\} = 0$$

ou $\qquad R_g^2 + 2R_gR_L + R_L^2 + X_g^2 - 2R_LR_g - 2R_L^2 = 0$

e $\qquad R_g^2 + X_g^2 = R_L^2$

Então, temos: $\qquad R_L = \sqrt{R_g^2 + X_g^2} = |\mathbf{Z}_g|$

Sendo a carga uma resistência variável pura entre os terminais da estrutura ativa, ocorre a máxima transferência de potência se a resistência de carga for igual ao valor absoluto da impedância do circuito.

Se a componente reativa da impedância em série com a fonte for nula, isto é, $X_g = 0$, a máxima potência será transferida para a carga se as resistências da carga e da fonte forem iguais, $R_L = R_g$.

Caso 2 Carga: impedância $\mathbf{Z}_L$ com resistência e impedância variáveis (Fig. 12-9).

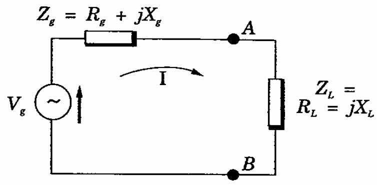


Figura 12-9

A corrente do circuito é:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_g}{(R_g + R_L) + j(X_g + X_L)}$$

$$I = |\mathbf{I}| = \frac{\mathbf{V}_g}{\sqrt{(R_g + R_L)^2 + (X_g + X_L)^2}}$$

A potência entregue pela fonte é:

$$P = I^2 R_L = \frac{V_g^2 R_L}{(R_g + R_L)^2 + (X_g + X_L)^2} \qquad (11)$$

Fixando-se R_L em (*11*), o valor de P é máximo quando $X_g = -X_L$. A equação (*11*) torna-se:

$$P = \frac{V_g^2 R_L}{(R_g + R_L)^2}$$

Considere-se, agora, R_L variável. Como mostra o caso 1, a potência máxima é entregue à carga quando $R_L = R_g$. Se $R_L = R_g$ e $X_L = -X_g$, tem-se $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_g$.

Se a impedância de carga é constituída de resistência e reatância variáveis, a máxima transferência de potência, nos terminais do circuito ativo, dá-se quando a impedância de carga $\mathbf{Z}_L$ é igual ao conjugado do complexo da impedância $\mathbf{Z}_g$ do circuito.

Caso 3 Carga: impedância $\mathbf{Z}_L$ com resistência variável e reatância fixa (Fig. 12-10).

Obtêm-se as mesmas equações para I e P já obtidas no caso 2, com a condição de que X_L permaneça constante. Quando se iguala a zero a primeira derivada de P em relação a R_L, tem-se:

$$R_L^2 = R_g^2 + (X_g + X_L)^2$$

e

$$R_L = |Z_g + jX_L|$$

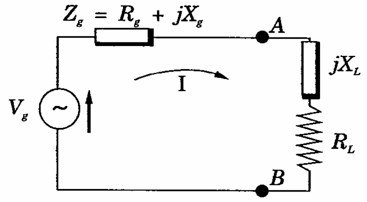


Figura 12-10

Como $\mathbf{Z}_g$ e X_L são admitidas fixas, podem ser combinadas em uma impedância única. Assim, com R_L variável, o caso 3 reduz-se ao caso 1 e a máxima transferência de potência ocorre quando R_L é igual ao valor absoluto da impedância do circuito.

Problemas Resolvidos

12.1 Determinar o circuito em Δ equivalente às impedâncias ligadas em *Y*, conforme a Fig. 12-11.

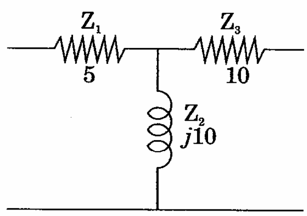


Figura 12-11

O circuito equivalente em Δ tem para impedâncias $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{Z}_B$ e $\mathbf{Z}_C$, conforme a Fig. 12-12, onde:

$$\mathbf{Z}_A = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_3} = \frac{5(j10) + 5(10) + 10(j10)}{10} =$$

$$= \frac{50 + j150}{10} = 5 + j15$$

$$\mathbf{Z}_B = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2} = \frac{50 + j150}{j10} = 15 - j5$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1} = \frac{50 + j150}{5} = 10 - j30$$

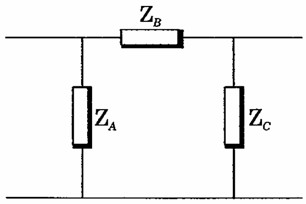


Figura 12-12

Como verificação, converter as impedâncias do circuito em Δ, novamente, nas impedâncias do circuito em Y:

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} = \frac{(5 + j15)(15 - j5)}{5 + j15 + 15 - j5 + 10 + j30} = \frac{150 + j200}{30 + j40} = 5$$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} = \frac{(5 + j15)(10 + j30)}{30 + j40} = j10$$

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_B\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} = \frac{(15 - j5)(10 + j30)}{30 + j40} = 10$$

12.2 Uma ligação em Δ contém três impedâncias iguais a $\mathbf{Z}\Delta = 15\underline{/30^\circ}$. Determinar as impedâncias da ligação em Y, equivalente.

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C}, \text{ onde } \mathbf{Z}_A = \mathbf{Z}_B = \mathbf{Z}_C = \mathbf{Z}\Delta.$$

Logo, $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}\Delta/3 = (15\underline{/30^\circ})/3 = 5\underline{/30^\circ}$. Do mesmo modo, $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}\Delta/3 = 5\underline{/30^\circ}$. Assim, para qualquer circuito em Δ com três impedâncias iguais temos um circuito equivalente em *Y*, cujas impedâncias são um terço daquelas do circuito em Δ.

Inversamente, quando todas as impedâncias de um circuito em estrela são iguais, são também iguais entre si as impedâncias do circuito equivalente em triângulo e são iguais a três vezes as impedâncias do circuito em estrela.

12.3 Mostrar que uma estrutura passiva de três terminais e várias malhas pode ser substituída por uma associação de três impedâncias, ligadas em Δ.

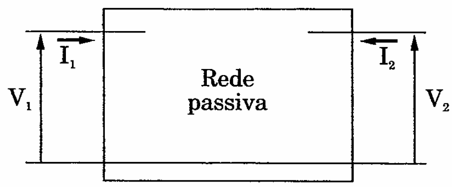


Figura 12-13

Aplica-se uma tensão $\mathbf{V}_1$ aos terminais da esquerda, como mostra a Fig. 12-13. Chamando $\mathbf{I}_1$ à corrente que entra no circuito e designando por $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I}_2$ tensão e corrente nos terminais da direita, tem-se que, sendo passivo o circuito, todas as demais tensões são nulas.

As equações das correntes de malha, na forma matricial, são:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \cdots & \mathbf{Z}_{1n} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{Z}_{n1} & \cdots & \cdots & \mathbf{Z}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde: $\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1 \dfrac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} + \mathbf{V}_2 \dfrac{\Delta_{21}}{\Delta_Z}$ e $\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1 \dfrac{\Delta_{12}}{\Delta_Z} + \mathbf{V}_2 \dfrac{\Delta_{22}}{\Delta_Z}$

Exprimindo-se essas duas equações simultâneas na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} & \dfrac{\Delta_{21}}{\Delta_Z} \\ \\ \dfrac{\Delta_{12}}{\Delta_Z} & \dfrac{\Delta_{22}}{\Delta_Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

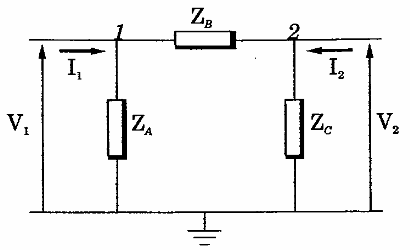


Figura 12-14

Esta equação matricial é semelhante à que resulta de uma estrutura de três nós dos quais um é tomado para referência. A Fig. 12-14 apresenta essa estrutura onde $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{Z}_B$ e $\mathbf{Z}_C$ estão ligadas em Δ. Introduzindo $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I}_2$ com os mesmos sentidos que na Fig. 12-13 e escrevendo as equações matriciais correspondentes, por aplicação do método das tensões dos nós, temos:

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{1}{\mathbf{Z}_A} + \dfrac{1}{\mathbf{Z}_B}\right) & -\dfrac{1}{\mathbf{Z}_B} \\ \\ -\dfrac{1}{\mathbf{Z}_B} & \left(\dfrac{1}{\mathbf{Z}_B} + \dfrac{1}{\mathbf{Z}_C}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

Igualando os elementos correspondentes das duas matrizes, temos:

$$(1)\ \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_A} + \frac{1}{\mathbf{Z}_B}\right) = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z}, \quad (2)\ \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_B} + \frac{1}{\mathbf{Z}_C}\right) = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_Z}, \quad (3)\ -\frac{1}{\mathbf{Z}_B} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z}$$

Substituindo (*3*) em (*1*) e (*2*), obtemos:

$$\mathbf{Z}_A = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11} + \Delta_{21}}, \quad \mathbf{Z}_B = -\frac{\Delta_Z}{\Delta_{21}}, \quad \mathbf{Z}_C = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{22} + \Delta_{21}}$$

É sempre possível, matematicamente, como se vê, a transformação de uma estrutura de três terminais em um circuito equivalente em Y ou em Δ. Pode acontecer, entretanto, de os elementos do circuito equivalente não serem fisicamente realizáveis. Ver Probl. 12.4.

12.4 Aplicar os resultados do Probl. 12.3 ao circuito da Fig. 12-15 e obter o circuito equivalente em Δ.

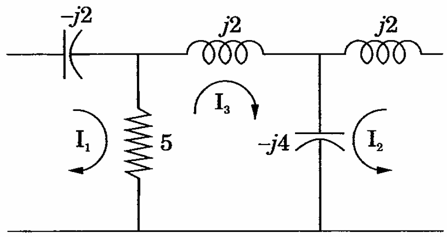


Figura 12-15

Escolhidas as correntes de malha indicadas no diagrama, temos:

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} 5 - j2 & 0 & -5 \\ 0 & -j2 & -j4 \\ -5 & -j4 & 5 - j2 \end{vmatrix}$$

$$= 40 - j24 = 46{,}6\,\underline{/-31^\circ}$$

e

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} -j2 & -j4 \\ -j4 & 5 - j2 \end{vmatrix} = 12 - j10, \quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 5 - j2 & -5 \\ -5 & 5 - j2 \end{vmatrix} = -4 - j20,$$

$$\Delta_{21} = (-)\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -j4 & 5 - j2 \end{vmatrix} = j20$$

Empregando as expressões do Probl. 12.3, temos:

$$\mathbf{Z}_A = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11} + \Delta_{21}} = \frac{46{,}6\,\underline{/-31^\circ}}{12 - j10 + j20} = 2{,}98\,\underline{/-70{,}8^\circ}$$

$$\mathbf{Z}_B = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{21}} = \frac{46{,}6\,\underline{/-31^\circ}}{j20} = 2{,}33\,\underline{/59^\circ}$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{22} + \Delta_{21}} = \frac{46{,}6\,\underline{/-31^\circ}}{-4 - j20 + j20} = 11{,}65\,\underline{/149^\circ}$$

Observe-se que $\mathbf{Z}_A$ pode ser obtida pela associação de uma resistência e uma capacitância em série e $\mathbf{Z}_B$ pela associação, também em série, de uma resistência e uma indutância. A impedância $\mathbf{Z}_C$, entretanto, exigiria uma resistência negativa. Um circuito com as três impedâncias calculadas não pode, portanto, ser construído.

12.5 Dado o circuito da Fig. 12-16, determinar a corrente no resistor de 2 ohms por aplicação do princípio da superposição.

Seja I' a corrente no resistor de 2 ohms, devida a V_1, quando V_2 é igualada a zero, e I'' a corrente no mesmo ramo devida a V_2, quando V_1 é igualada a zero. Escolhidas as correntes de malha indicadas na Fig. 12-16, tem-se, para I' e I'':

$$I' = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & 5 & 0 \\ V_1 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 5 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{10\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}}{242} = 1{,}075 \text{ amp.}$$

$$I'' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -V_2 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix}}{242} = \frac{-(-20)\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}}{242} = 2{,}48 \text{ ampères}$$

Aplicando-se o teorema da superposição, a corrente I_1, devida às duas fontes atuando simultaneamente, é:

$I_1 = I' + I'' = 1{,}075 + 2{,}48 = 3{,}555$ ampères

12.6 Aplicar o
corrente n

$V_1 = 50\angle$

Seja $\mathbf{V}_2 =$

$\mathbf{Z}_{T_1} = 5$

e

$\mathbf{I}_{T_1} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_T}$

A corrent

$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{T1}($

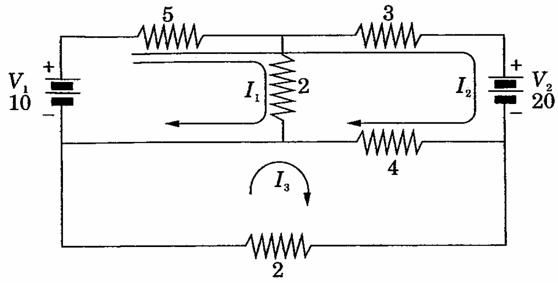


Figura 12-16

12.6 Aplicar o teorema da superposição ao circuito da Fig. 12-17 e determinar a corrente na impedância 3 + *j*4 ohms.

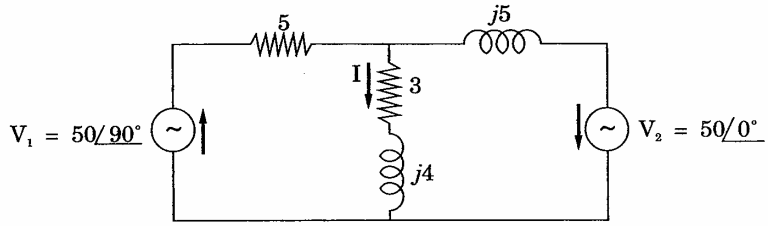


Figura 12-17

Seja $\mathbf{V}_2 = 0$ e $\mathbf{V}_1$ a única fonte presente no circuito. Tem-se:

$$\mathbf{Z}_{T_1} = 5 + \frac{(3 + j4)\,5}{3 + j9} = 5{,}83 + j2{,}5 = 6{,}35\,\underline{/23{,}2^\circ}$$

e

$$\mathbf{I}_{T_1} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_{T_1}} = \frac{50\,\underline{/90^\circ}}{6{,}35\,\underline{/23{,}2^\circ}} = 7{,}87\,\underline{/66{,}8^\circ}$$

A corrente no ramo $3 + j4$, devida apenas a $\mathbf{V}_1$, é:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{T1}\left(\frac{j5}{3 + j9}\right) = 7{,}87\,\underline{/66{,}8^\circ}\left(\frac{j5}{3 + j9}\right) = 4{,}15\,\underline{/85{,}3^\circ}$$

Seja, agora, $\mathbf{V}_1 = 0$ e $\mathbf{V}_2$ a única fonte presente. Tem-se:

$$\mathbf{Z}_{T_2} = j5 + \frac{5(3+j4)}{8+j4} = 2{,}5 + j6{,}25 = 6{,}74\,\underline{/68{,}2^\circ}$$

$$\mathbf{I}_{T_2} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_{T_2}} = \frac{50\,\underline{/0^\circ}}{6{,}74\,\underline{/68{,}2^\circ}} = 7{,}42\,\underline{/-68{,}2^\circ}$$

A corrente no ramo $3 + j4$, devida apenas a $\mathbf{V}_2$, é:

$$\mathbf{I}_2 = -(7{,}42\,\underline{/-68{,}2^\circ})\left(\frac{5}{8+j4}\right) = 4{,}15\,\underline{/85{,}3^\circ}$$

onde o sinal menos indica que $\mathbf{I}_2$ tem o mesmo sentido de $\mathbf{I}$ no diagrama.

A corrente total no ramo $3 + j4$ é:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 4{,}15\underline{/85{,}3^\circ} + 4{,}15\underline{/85{,}3^\circ} = 8{,}30\underline{/85{,}3^\circ}$$

12.7 Aplicar o teorema da superposição ao circuito da Fig. 12-18 e determinar a tensão $\mathbf{V}_{AB}$.

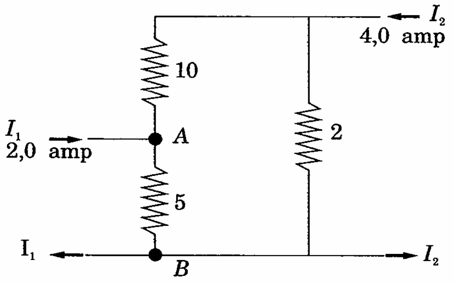


Figura 12-18

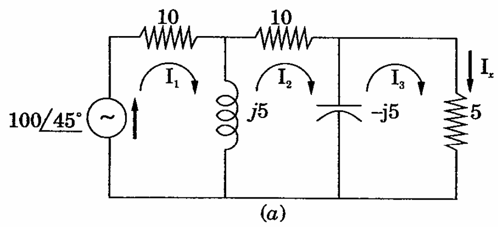
Com $I_1 = 2$ ampères atuando no circuito e $I_2 = 0$, tem-se $V'_{AB} = (2)(5)(12)/17 = 7{,}06$ volts.

Se, agora, $I_1 = 0$ e $I_2 = 4$ ampères atua no circuito, a corrente no resistor de 5 ohms será $I_5 = 4(2/17) = 8/17$ ampères. Então, $V''_{AB} = (8/17)5 = 2{,}35$ volts.

Agindo as duas fontes, a tensão é:

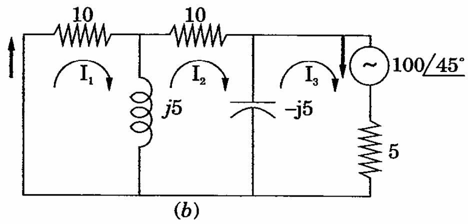
$V_{AB} = V'_{AB} + V''_{AB} = 7{,}06 + 2{,}35 = 9{,}41$ volts.

12.8 No circuito da Fig. 12-19(a), a fonte de tensão $100\angle 45^\circ$ acarreta uma corrente $\mathbf{I}_x$ no ramo de 5 ohms. Achar $\mathbf{I}_x$ e, em seguida, verificar o teorema da reciprocidade nesse circuito.



(a)

Figura 12-19



(b)

Figura 12-19

Na Fig. 12-19(a) vêem-se as correntes de malha $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$. A corrente $\mathbf{I}_x$ pedida é a corrente de malha $\mathbf{I}_3$.

$$\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 10+j5 & -j5 & 100\angle 45^\circ \\ -j5 & 10 & 0 \\ 0 & j5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10+j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 10 & j5 \\ 0 & j5 & 5-j5 \end{vmatrix}} = 100\angle 45^\circ \left(\frac{25}{1155\angle -12{,}5^\circ}\right) = 2{,}16\angle 57{,}5^\circ \quad (1)$$

Aplicando, agora, o teorema da reciprocidade, pela troca de posições entre a excitação e a resposta, como mostra a Fig. 12-19(b), e empregando as correntes de malha indicadas, além de notar que $\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_1$, temos:

$$\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -j5 & 0 \\ 0 & 10 & j5 \\ 100\,\underline{/45^\circ} & j5 & 5-j5 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 100\,\underline{/45^\circ}\left(\frac{25}{1155\,\underline{/-12{,}5^\circ}}\right) = 2{,}16\,\underline{/57{,}5^\circ} \quad (2)$$

Verificada a igualdade de (*1*) e (*2*), fica verificado o teorema da reciprocidade, pois $\mathbf{I}_x$ é igual nas duas equações.

12.9 O circuito da Fig. 12-20(*a*) contém uma única fonte de corrente $\mathbf{I} = 12\underline{/90^\circ}$ ampères. Determinar a tensão $\mathbf{V}_2$ do nó 2. Aplicar o teorema da reciprocidade e comparar os resultados.

Sob a forma matricial, as duas equações nodais da estrutura da Fig. 12-20(*a*) são:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3+j4} + \frac{1}{j10}\right) & -\frac{1}{j10} \\ -\frac{1}{j10} & \left(\frac{1}{j10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2+j2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12\,\underline{/90^\circ} \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}12-j0{,}26 & 12\,\underline{/90^\circ} \\ j0{,}1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0{,}12-j0{,}26 & j0{,}1 \\ j0{,}1 & 0{,}45-j0{,}35 \end{vmatrix}} = 12\,\underline{/90^\circ}\left(\frac{-j0{,}1}{0{,}161\,\underline{/260{,}35^\circ}}\right) = 7{,}45\,\underline{/99{,}65^\circ}$$

Empregando o teorema da reciprocidade, aplica-se a corrente *I* entre o nó *2* e o de referência, no circuito da Fig. 12-20(*b*). Calcula-se, em seguida, a tensão nos terminais em que penetrava corrente. Basta uma equação de nó, pois só existem dois nós no circuito. Logo:

$$\left(\frac{1}{3+j14} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2+j2}\right)\mathbf{V}_2 = 12\,\underline{/90^\circ} \quad \text{donde} \quad \mathbf{V}_2 = \frac{12\,\underline{/90^\circ}}{0{,}563\,\underline{/-34{,}4^\circ}} \quad 21{,}3\,\underline{/124{,}4^\circ}$$

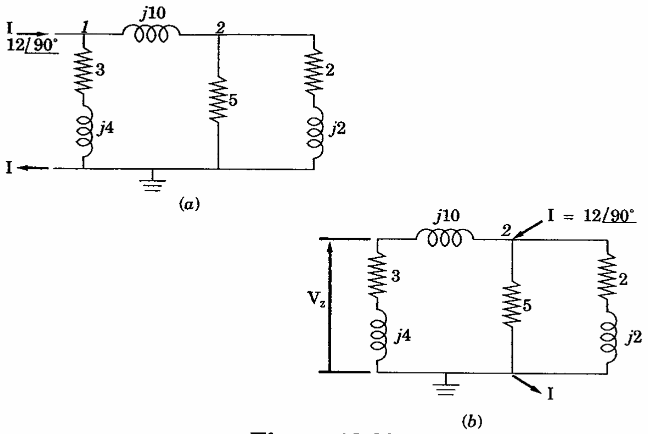


Figura 12-20

A tensão $\mathbf{V}_x$ é, então:

$$\mathbf{V}_x = \mathbf{V}_2\left(\frac{3 + j4}{3 + j4 + j10}\right) = 21{,}3\,\underline{/124{,}4^\circ}\left(\frac{3 + j4}{3 + j14}\right) = 7{,}45\,\underline{/99{,}6^\circ}$$

Comparando os valores calculados de $\mathbf{V}_2$ no circuito da Fig. 12-20(a) e de $\mathbf{V}_x$, na estrutura da Fig. 12-20(b), verificamos que eles são iguais, provando, assim, o teorema da reciprocidade. Observe-se, também, que $\mathbf{V}_2$ não permanece a mesma, depois da troca de posição entre excitação e resposta.

12.10 No circuito de uma única fonte de corrente da Fig. 12-21(a), determinar a tensão $\mathbf{V}_x$. Trocar as posições entre a fonte de corrente e a tensão $\mathbf{V}_x$. Verifica-se o teorema da reciprocidade?

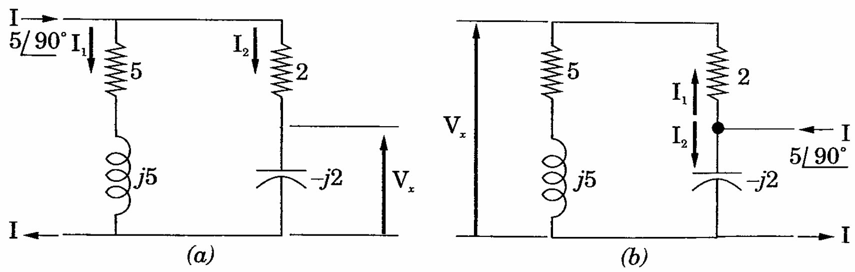


Figura 12-21

Na Fig. 12-21(a), a corrente $\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}\left(\dfrac{5+j5}{7+j3}\right) = 5\,\underline{/90^\circ}\left(\dfrac{5+j5}{7+j3}\right) = 4{,}64\,\underline{/111{,}8^\circ}$.

Logo, a tensão $\mathbf{V}_x = \mathbf{I}_2\,(-j2) = (4{,}64\underline{/111{,}8^\circ})(2\underline{/-90^\circ}) = 9{,}28\underline{/21{,}8^\circ}$ volts.

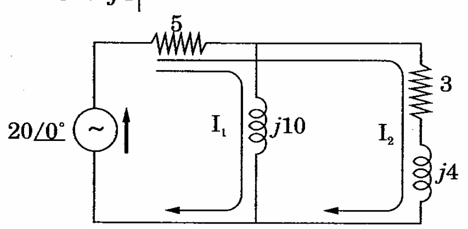
Na Fig. 12-21(b), a fonte de corrente **I** e os terminais em que se mede $\mathbf{V}_x$ são trocados. A corrente $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}\left(\dfrac{-j2}{7+j3}\right) = 5\,\underline{/90^\circ}\left(\dfrac{-j2}{7+j3}\right) = 1{,}31\,\underline{/-23{,}2^\circ}$.

Uma vez que $\mathbf{V}_x = (1{,}31\underline{/-23{,}2^\circ})\,(5+j5) = 9{,}27\underline{/21{,}8^\circ}$ volts, como antes, fica verificado o teorema da reciprocidade.

12.11 Substituir a reatância $j4$, no circuito da Fig. 12-22(a), por uma f.e.m. de compensação.

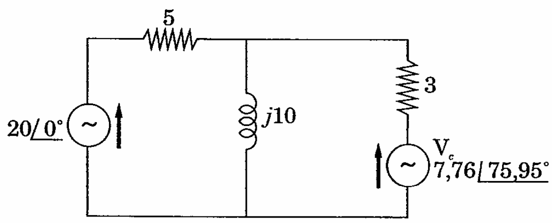
Escolhidas as correntes de malha I_1 e I_2, como mostra o diagrama, tem-se para valor de I_2 (corrente na reatância $j4$):

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j10 & 20 \\ 5 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5+j10 & 5 \\ 5 & 8+j4 \end{vmatrix}} = \frac{20(j10)}{103\,\underline{/104{,}05^\circ}} = 1{,}94\,\underline{/-14{,}05^\circ}$$



(a)

Figura 12-22



(b)

Figura 12-22

A fonte de
Fig. 12-22(
reatância j

Verifique a
um ramo e

12.12 Substituir a
compensaçã

A impedânc

= 1,46 + j

$\mathbf{Z}_T$ = 5 + 1

A fonte de

$\mathbf{V}_C = \mathbf{I}_T\,\mathbf{Z}_{eq}$

A Fig. 12-2
corretamen

A fonte de compensação é $\mathbf{V}_C = \mathbf{I}_2(j4) = 1{,}94\underline{/-14{,}05^\circ}(j4) = 7{,}76\underline{/75{,}95^\circ}$. A Fig. 12-22(*b*) mostra o circuito com a fonte de compensação em lugar da reatância $j4$.

Verifique a equivalência dos dois circuitos, calculando uma corrente em um ramo em cada circuito e comparando os resultados.

12.12 Substituir a associação paralela das impedâncias $j10$ e $3 + j4$ por uma fonte de compensação.

A impedância equivalente às impedâncias em paralelo é $\mathbf{Z}_{eq} = \dfrac{j10(3+j4)}{3 + j14} =$

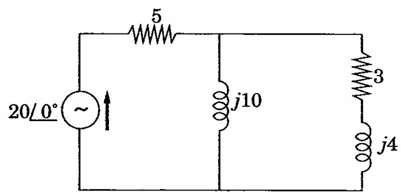
$= 1{,}46 + j3{,}17 = 3{,}50\underline{/65{,}3^\circ}$. Então:

$$\mathbf{Z}_T = 5 + 1{,}46 + j3{,}17 = 7{,}18\underline{/26{,}2^\circ} \text{ e } \mathbf{I}_T = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{20\underline{/0^\circ}}{7{,}18\underline{/26{,}2^\circ}} = 2{,}79\underline{/-26{,}2^\circ}$$

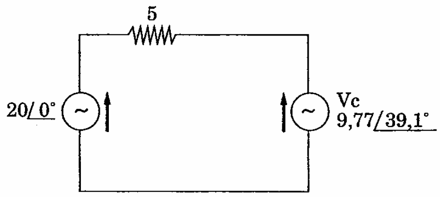
A fonte de compensação é:

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{I}_T\,\mathbf{Z}_{eq} = (2{,}79\underline{/26{,}2^\circ})(3{,}50\underline{/65{,}3^\circ}) = 9{,}77\underline{/39{,}1^\circ}$$

A Fig. 12-23(*b*) mostra o circuito com a fonte de compensação polarizada corretamente.



(*a*)



(*b*)

Figura 12-23

12.13 A impedância $3 + j4$ da Fig. 12-24(*a*) é substituída por $4 + j4$, Fig. 12-24(*b*). Determinar a corrente no resistor de 10 ohms, antes e depois da troca. Aplicar o teorema da compensação e determinar a diferença entre as duas correntes no resistor de 10 ohms.

Antes da troca de $3 + j4$ [Fig. 12-24(*a*)], temos:

$$\mathbf{Z}_T = 10 + \frac{j5(3+j4)}{3+j9} = 11{,}1\,\angle 13^\circ \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_T = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{50\,\angle 0^\circ}{11{,}1\,\angle 13^\circ} = 4{,}50\,\angle{-13^\circ}$$

Depois da troca [Fig. 12-24(*b*)]:

$$\mathbf{Z'}_T = 10 + \frac{j5(4+j4)}{4+j9} = 11{,}03 + j2{,}68 = 11{,}35\,\angle 13{,}65^\circ$$

$$\text{e} \quad \mathbf{I'}_T = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_T} = 4{,}41\,\angle{-13{,}65^\circ}$$

A fonte de compensação é $\mathbf{V}_c = \mathbf{I}(\delta\mathbf{Z})$, onde $\mathbf{I}$, corrente inicial no ramo $3 + j4$, é

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_T\left(\frac{j5}{3+j9}\right) = 4{,}5\,\angle{-13^\circ}\left(\frac{j5}{3+j9}\right) = 2{,}37\,\angle 5{,}5^\circ.$$

e $\delta\mathbf{Z} = (4 + j4) - (3 + j4) = 1$. Então, $\mathbf{V}_c = 2{,}37\angle 5{,}5^\circ(1) = 2{,}37\angle 5{,}5^\circ$ com sentido oposto à corrente $\mathbf{I}$.

A variação da corrente $\Delta\mathbf{I}_T$ é determinada fazendo-se igual a zero a fonte inicial de tensão e deixando-se $\mathbf{V}_C$ como única fonte atuando no circuito, como mostra a Fig. 12-24(*c*).

Nesse circuito, portanto, $\mathbf{Z''}_T = 4 + j4 + \dfrac{j5(10)}{10+j5} = 10\,\angle 53{,}1^\circ$ e

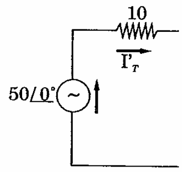
$$\Delta\mathbf{I}_T = -\left(\frac{\mathbf{V}_C}{\mathbf{Z}_T}\right)\left(\frac{5}{10+j5}\right) = -\left(\frac{2{,}37\,\angle 5{,}5^\circ}{10\,\angle 53{,}1^\circ}\right)\left(\frac{j5}{10+j5}\right) = 0{,}1055\,\angle 195{,}8^\circ$$

Comparando com a diferença entre $\mathbf{I'}_T$ e $\mathbf{I}_T$, temos:

$$\mathbf{I'}_T - \mathbf{I}_T = (4{,}41\,\angle{-13{,}65^\circ}) - (4{,}50\,\angle{-13^\circ}) = -0{,}10 - j0{,}03 = 0{,}1045\,\angle 196{,}7$$

Observe-se que os dois valores de $\Delta\mathbf{I}_T$ não são exatamente iguais. O valor determinado com a tensão de compensação $\mathbf{V}_C$ é mais exato que o obtido

pela sub
pequena
acarreta
erro no c
madame



12.14 Calcular a
reduzir o v

Sejam **I** e
mudança

$\mathbf{I} = \dfrac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} =$

$\Delta\mathbf{I} = \mathbf{I'} -$

Se calcul
$=\mathbf{I}(\delta\mathbf{Z}) =$
A variaçã

pela subtração $\mathbf{I'}_T - \mathbf{I}_T$. Isso é verdadeiro, particularmente, quando é pequena a variação de impedância. Conforme se verifica acima, isso acarreta uma pequena variação na corrente, introduzindo, portanto, um erro no cálculo da diferença de duas quantidades que são muito aproximadamente iguais.

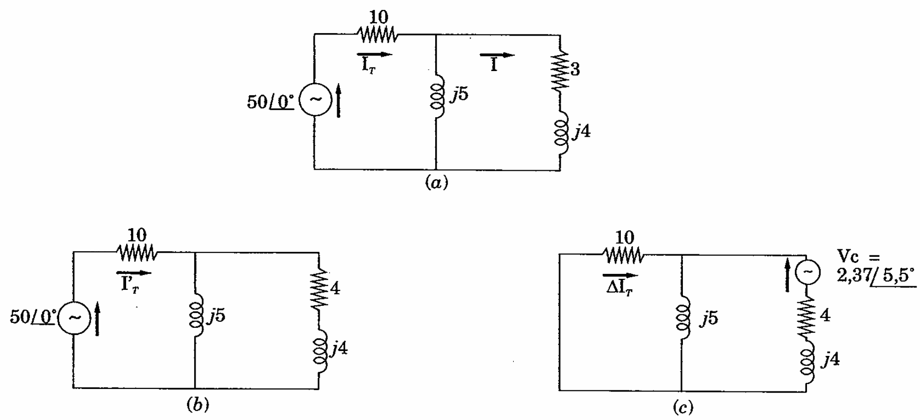


Figura 12-24

12.14 Calcular a variação na corrente do circuito em série da Fig. 12-25(*a*), ao se reduzir o valor da reatância para *j*35.

Sejam **I** e **I'**, respectivamente, as correntes no circuito, antes e depois da mudança da reatância [Fig. 12-25(*a*) e (*b*)].

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{100\angle 45°}{50\angle 53{,}1°} = 2{,}0\angle -8{,}1°; \quad \mathbf{I'} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z} + \delta\mathbf{Z}} = \frac{100\angle 45°}{30 + j35} = 2{,}17\angle -4{,}4°$$

$$\Delta\mathbf{I} = \mathbf{I'} - \mathbf{I} = 2{,}17\angle -4{,}4 - 2{,}0\angle -8{,}1° = 0{,}223\angle 31{,}6°$$

Se calcularmos $\Delta\mathbf{I}$ por aplicação do teorema da compensação, temos $\mathbf{V}_C = \mathbf{I}(\delta\mathbf{Z}) = 2{,}0\angle -8{,}1° \,(-j5) = 10\angle -98{,}1°$, dirigida, como mostra a Fig. 12-25(*c*). A variação de corrente é:

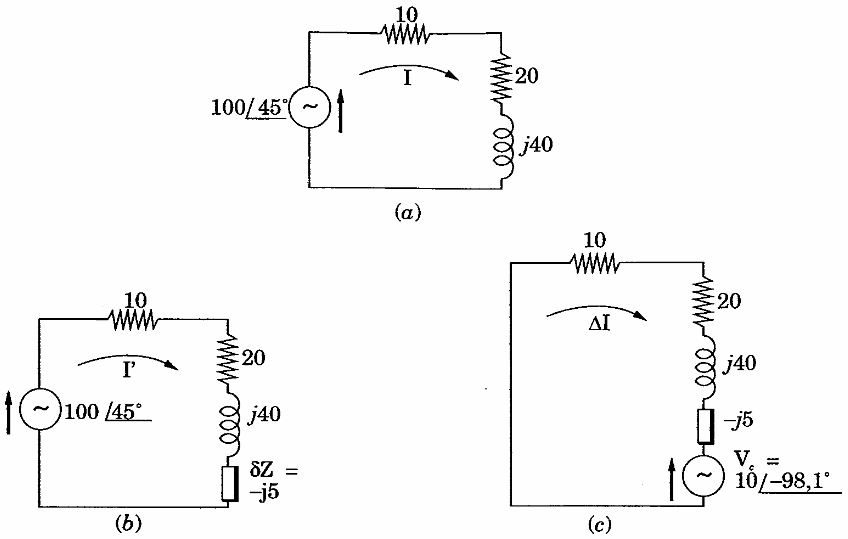


Figura 12-25

$$\Delta \mathbf{I} = -\mathbf{V}_C/(\mathbf{Z} + \delta\mathbf{Z}) = -(10\ \angle -98{,}1°)/(30 + j35) =$$

$$= (10\ \angle 81{,}9°)/(46{,}1\ \angle 49{,}4°) = 0{,}217\ \angle 32{,}5°$$

Novamente, temos um pequeno erro devido à pequena variação da impedância.

12.15 No circuito da Fig. 12-26, a carga $\mathbf{Z}_L$ é constituída por uma resistência pura R_L. Determinar o valor de R_L para o qual a fonte entrega a máxima potência à carga. Determinar o valor dessa potência máxima, P.

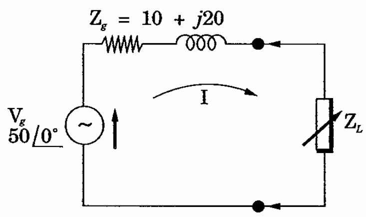


Figura 12-26

A máxima transferência de potência ocorre quando $R_L = |Z_g| = |10 + j20| = 22{,}4$ ohms.

Assim, $\mathbf{I} = \mathbf{V}/(\mathbf{Z}_g + R_L) = (50\angle 0^\circ)/(10 + j20 + 22{,}4) = 1{,}31\angle{-31{,}7^\circ}$ e a potência máxima fornecida à carga é $P = I^2R_L = (1{,}31)^2(22{,}4) = 38{,}5$ watts.

12.16 Na hipótese de a carga da Fig. 12-26 ser constituída por uma impedância complexa $\mathbf{Z}_L$, em que R_L e X_L sejam ambas variáveis, determinar o valor de $\mathbf{Z}_L$ que resulta na máxima transferência de potência. Calcular o valor da potência máxima.

A máxima transferência de potência ocorre quando $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_g^*$. Como $\mathbf{Z}_g = 10 + j20$, teremos $\mathbf{Z}_L = 10 - j20$.

A impedância total do circuito é $\mathbf{Z}_T = (10 + j20) + (10 - j20) = 20$. Conseqüentemente, $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_T = (50\angle 0^\circ)/20 = 2{,}5\angle 0^\circ$ e $P = I^2R = (2{,}5)^2(10) = 62{,}5$ watts.

12.17 Na estrutura da Fig. 12-27, a carga ligada entre os terminais AB é constituída por uma resistência variável R_L e uma reatância capacitiva X_C variável entre 2 e 8 ohms. Determinar os valores de R_L e X_C que acarretam a máxima transferência de potência. Calcular a potência máxima P fornecida à carga.

A tensão equivalente de Thevenin nos terminais AB é $\mathbf{V}' = \dfrac{50\angle 45^\circ}{5 + j10}(2 + j10) = 45{,}6\angle 60{,}3^\circ$. A impedância da estrutura ativa ligada nos terminais AB é $\mathbf{Z}' = 3(2 + j10)/(5 + j10) = 2{,}64 + j0{,}72$.

No circuito dado, a máxima transferência de potência ocorre com uma impedância $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}'^* = 2{,}64 - j0{,}72$. Nas condições do problema, X_C é ajustável entre 2 e 8 ohms. O valor mais próximo para X_C é, portanto, 2 ohms. Logo:

$$R_L = |\mathbf{Z}_g - jX_C| = |2{,}64 + j0{,}72 - j2| = |2{,}64 - j1{,}28| = 2{,}93 \text{ ohms}$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}' + \mathbf{Z}_L = (2{,}64 + 2{,}93) + j(0{,}72 - 2) = 5{,}57 - j1{,}28 = 5{,}70\angle{-13^\circ}$$

Então, temos:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}'}{\mathbf{Z}_T} = \frac{45{,}6\angle 60{,}3^\circ}{5{,}70\angle{-13^\circ}} = 8{,}0\angle 73{,}3^\circ \quad \text{e} \quad P = I^2R_L = (8{,}0)^2 2{,}93 = 187 \text{ W.}$$

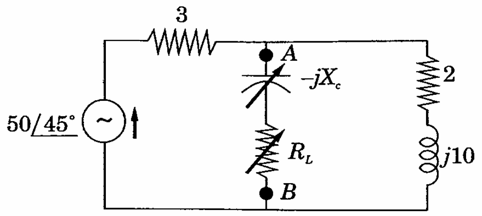


Figura 12-27

12.18 A resistência R_g do circuito da Fig. 12-28 é ajustável entre 2 e 55 ohms. Qual o valor de R_g que acarreta a máxima transferência de potência nos terminais AB ?

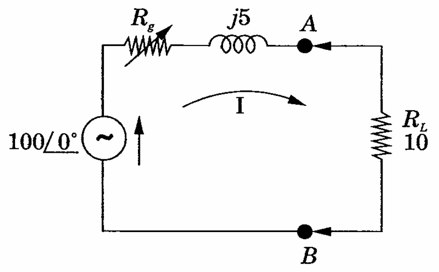


Figura 12-28

No circuito dado, a resistência de carga R_L é fixa. *Os teoremas de máxima transferência de potência não se aplicam,* portanto. Obviamente, a maior corrente ocorre quando R_g é mínima.

Fazendo, portanto, R_g igual a 2 ohms, temos:

$$\mathbf{Z}_T = (2 + j5 + 10) = 13\underline{/22{,}6°}$$

e $$\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_T = (100\underline{/0°})/(13\underline{/22{,}6°}) = 7{,}7\underline{/-22{,}6°}$$

A potência máxima é $P = (7{,}7)^2\ 10 = 593$ watts.

Problemas Propostos

12.19 Determinar o circuito em Y equivalente à ligação em Δ da Fig. 12-29.
Resp.: $(0{,}5 - j0{,}5)$, $(3 - j1)$, $(1 + j3)$.

12.20 A estrutura
paralelo. De
Resp.: (5 +

12.21 Na Fig. 12-
paralelo co
estrela eq
Resp.: **Z** =

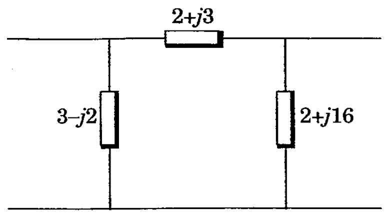


Figura 12-29

12.20 A estrutura da Fig. 12-30 é constituída por dois circuitos em *Y*, ligados em paralelo. Determinar a estrela simples equivalente.
Resp.: $(5 + j5)$, ∞, $(5 + j5)$.

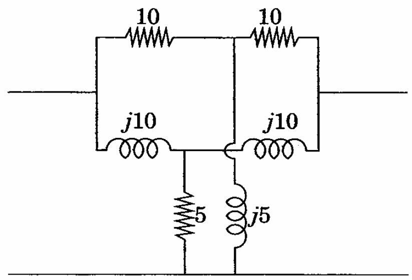


Figura 12-30

12.21 Na Fig. 12-31, um circuito equilibrado com $\mathbf{Z} = 10\angle 30°$, ligado em Δ, está em paralelo com um circuito equilibrado, com $\mathbf{Z} = 4\angle -45°$, ligado em *Y*. Determinar a estrela equivalente.
Resp.: $\mathbf{Z} = 2{,}29\angle -3{,}5°$.

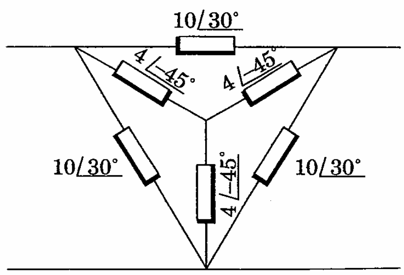


Figura 12-31

12.22 Mostrar que a estrutura passiva de três terminais da Fig. 12-32(*a*) pode ser substituída por um circuito em estrela, como o da Fig. 12-32(*b*), onde $\mathbf{Z}_1 = (\Delta_{11} - \Delta_{12})/\Delta_Y$, $\mathbf{Z}_2 = \Delta_{12}/\Delta_Y$ e $\mathbf{Z}_3 = (\Delta_{22} - \Delta_{12})/\Delta_Y$. ($\Delta_Y$ e os cofatores referem-se às equações das tensões nos nós, na forma matricial.)

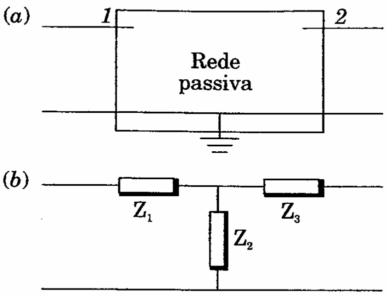


Figura 12-32

12.23 Substituir a estrutura da Fig. 12-33 por um circuito equivalente em estrela, empregando os processos desenvolvidos no Probl. 12.22.
Resp.: $(12 + j1)$; $(-1 + j2)$; $(4 + j1)$.

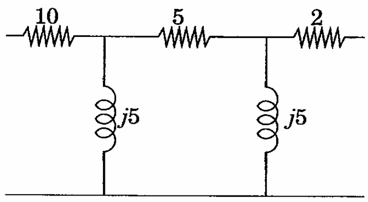


Figura 12-33

12.24 Determinar a ligação de três impedâncias em *Y* equivalente à estrutura da Fig. 12-34.
Resp.: 6,25; 2,5; 10,5 ohms.

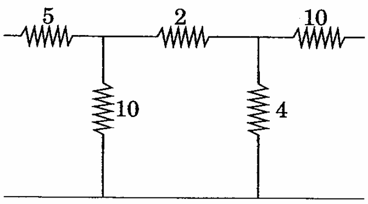


Figura 12-34

12.25 Obter o circ
Resp.: 10,2

12.26 Obter o circ
Resp.: (3 –

12.27 Empregand
ohms do cir
Resp.: *I* = 4,

12.28 A fonte de te
superior. De
da superpos
Resp.: *I* = 1,

12.29 Na estrutura
cada uma d
Resp.: 2,27

2-32(*a*) pode ser
de $\mathbf{Z}_1 = (\Delta_{11} - \Delta_{12})/$
n-se às equações

lente em estrela,

ı estrutura da Fig.

12.25 Obter o circuito em Δ equivalente à estrutura da Fig. 12-34.
Resp.: 10,25; 43; 17,2 ohms.

12.26 Obter o circuito em Δ equivalente à estrutura da Fig. 12-35.
Resp.: $(3 - j2)$; $(2 + j3)$; $(2 + j16)$.

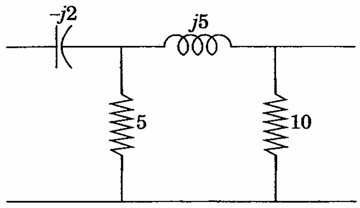


Figura 12-35

12.27 Empregando o teorema da superposição, determinar a corrente no resistor de 2 ohms do circuito da Fig. 12-36.
Resp.: $I = 4{,}27$ A.

12.28 A fonte de tensão V_2 da Fig. 12-36 é mudada para 8,93 volts, positiva no terminal superior. Determinar a corrente no resistor de 2 ohms, com o auxílio do teorema da superposição.
Resp.: $I = 1{,}43$ A.

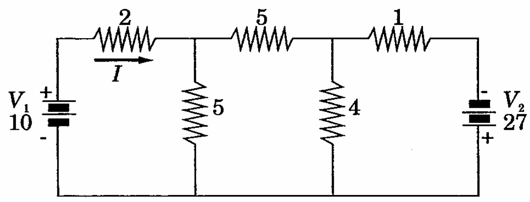


Figura 12-36

12.29 Na estrutura da Fig. 12-37, determinar a corrente no resistor de 5 ohms devida a cada uma das fontes de tensão.
Resp.: 2,27 A; 3,41 A.

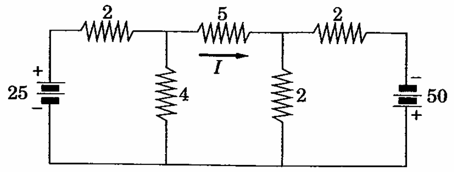


Figura 12-37

12.30 Determinar as componentes da tensão do nó $\mathbf{V}_2$, devidas a cada uma das fontes de corrente da Fig. 12-38.
Resp.: $8{,}48\angle{-2{,}8^\circ}$; $8{,}20\angle{12{,}2^\circ}$.

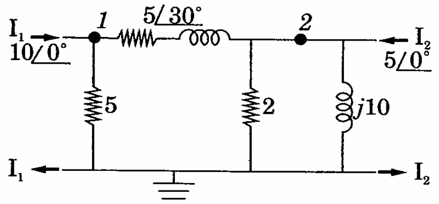


Figura 12-38

12.31 Na estrutura da Fig. 12-39, determinar a corrente no resistor de 4 ohms devida a cada uma das fontes de tensão.
Resp.: $3{,}24\angle{60{,}95^\circ}$; $6{,}16\angle{-142{,}2^\circ}$.

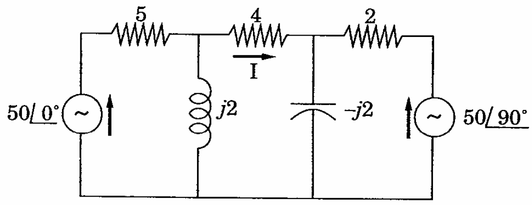


Figura 12-39

12.32 Permitindo-se que as fontes de tensão da Fig. 12-40 atuem separadamente no circuito, constata-se que as correntes correspondentes, no resistor de 10 ohms, são iguais. Qual é o valor da relação $\mathbf{V}_1/\mathbf{V}_2$?
Resp.: $0{,}707\angle{-45^\circ}$.

12.33 Determina
devidas a
Resp.: 5,8

12.34 No circuitc
ampères. (
$\mathbf{V}_2$.

12.35 Determinar
Aplicar o te
Resp.: 2,2

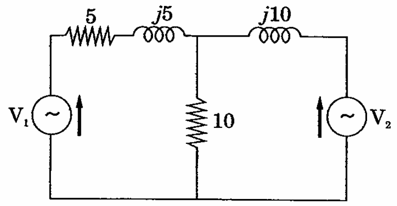


Figura 12-40

12.33 Determinar as componentes da tensão de nó $\mathbf{V}_2$, no circuito da Fig. 12-41, devidas a cada uma das fontes de correntes $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$.
Resp.: $5{,}82\underline{/-5{,}5^\circ}$; $9{,}22\underline{/72{,}9}$.

12.34 No circuito da Fig. 12-41, a fonte de corrente $\mathbf{I}_2$ é mudada para $3{,}16\underline{/191{,}6^\circ}$ ampères. Com o auxílio do teorema da superposição, determinar a tensão de nó $\mathbf{V}_2$.

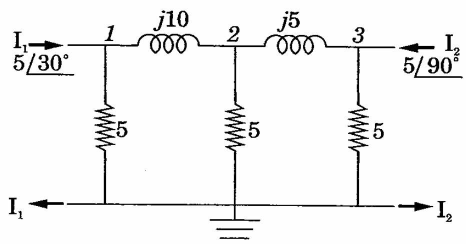


Figura 12-41

12.35 Determinar a corrente **I** na impedância $3 - j4$ ohms do circuito da Fig. 12-42. Aplicar o teorema da reciprocidade e comparar as duas correntes.
Resp.: $2{,}27\underline{/53{,}2^\circ}$.

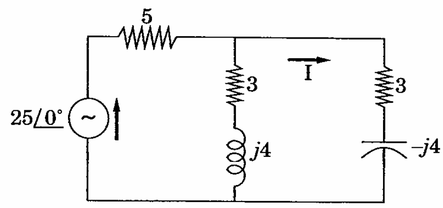


Figura 12-42

12.36 Determinar a corrente **I** na impedância 2 – *j*2 ohms do circuito da Fig. 12-43. Aplicar o teorema da reciprocidade e comparar as duas correntes.
Resp.: $10{,}1\angle 129{,}1^\circ$.

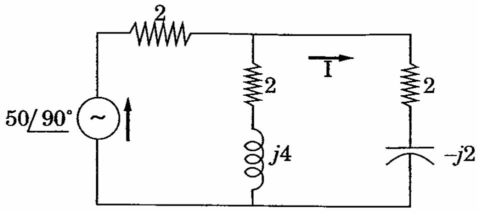


Figura 12-43

12.37 Calcular a corrente no resistor de 4 ohms do circuito da Fig. 12-44. Aplicar o teorema da reciprocidade e comparar as duas correntes. Que variações de corrente resultam nos ramos dos resistores de 5 ohms e de 2 ohms?
Resp.: 2,5 ampères. Após a aplicação do teorema da reciprocidade, as correntes nos resistores de 5 ohms e 2 ohms são nulas. Anteriormente, as correntes eram de 2 e de 5 ampères, respectivamente.

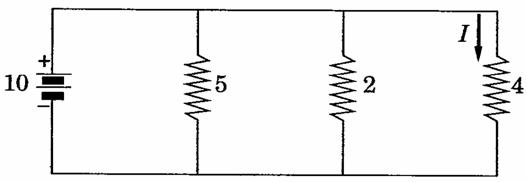


Figura 12-44

12.38 Na estrutura da Fig. 12-45, determinar a corrente no resistor de 5 ohms. Aplicar o teorema da reciprocidade e comparar as duas correntes.
Resp.: $0{,}270\angle 53{,}75^\circ$.

12.39 Calcular a corrente *I* no resistor de 50 ohms da Fig. 12-46. Verificar o teorema da reciprocidade, trocando de posição a fonte de tensão e a corrente resultante *I*.
Resp.: 1,32 mA.

12.40 Determina
dade e coı
Resp.: 35/

12.41 Calcular **V**
reciprocida
Resp.: 5,0

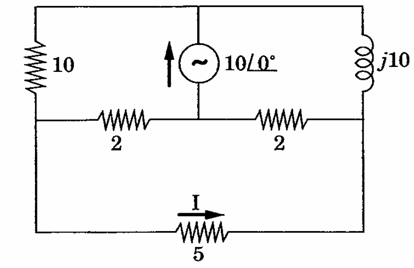


Figura 12-45

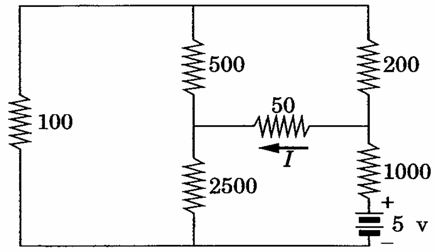


Figura 12-46

12.40 Determinar a tensão $\mathbf{V}_x$ no circuito da Fig. 12.47. Aplicar o teorema da reciprocidade e comparar as duas tensões.
Resp.: $35\angle{-12{,}1^\circ}$.

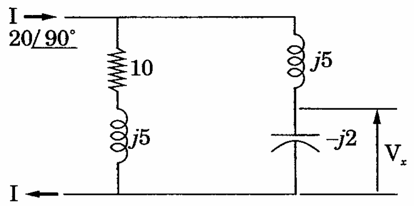


Figura 12-47

12.41 Calcular $\mathbf{V}_x$ no circuito da Fig. 12-48 e, em seguida, verificar o teorema da reciprocidade.
Resp.: $5{,}08\angle{21^\circ}$.

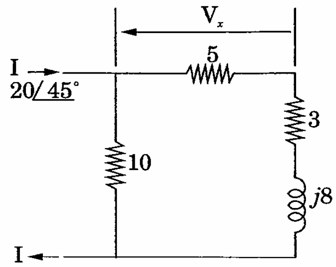


Figura 12-48

12.42 Determinar a tensão $\mathbf{V}_x$ no circuito da Fig. 12-49. Trocar de posição a fonte de corrente e a tensão $\mathbf{V}_x$ e verificar o teorema da reciprocidade.
Resp.: $2{,}53\underline{/-162{,}3^\circ}$.

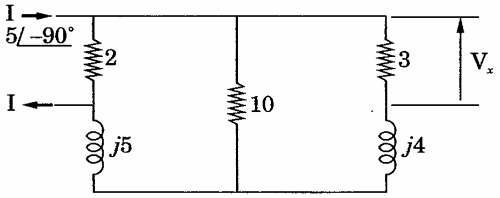


Figura 12-49

12.43 Substituir as impedâncias em paralelo $3 + j4$ e $3 - j4$ do circuito da Fig. 12-50 por uma fonte de tensão de compensação. Como verificação, determinar a corrente no resistor de 5 ohms, antes e depois da substituição.
Resp.: $\mathbf{V}_C = 11{,}35\underline{/0^\circ}$ volts; $\mathbf{I} = 2{,}73\underline{/0^\circ}$ ampères.

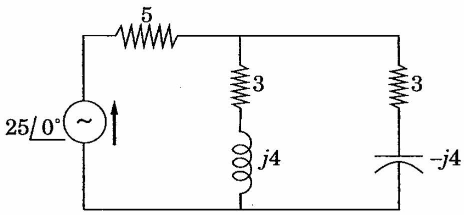


Figura 12-50

12.44 Substituir c
compensaç
substituiçãc
Resp.: $\mathbf{V}_C$ =

12.45 Substituir ca
uma fonte (
fonte de 50
Resp.: 11,3

12.46 Conforme n
resistor de 1
fonte passa
da fonte de
Resp.: $\Delta \mathbf{I}$ =

12.44 Substituir o resistor de 5 ohms da Fig. 12-50 por uma fonte de tensão de compensação e determinar a corrente total da fonte de $25\angle 0^\circ$, antes e após a substituição.
Resp.: $\mathbf{V}_C = 13{,}65\angle 0^\circ$ volts; $\mathbf{I} = 2{,}73\angle 0^\circ$ ampères.

12.45 Substituir cada uma das associações em paralelo de resistores da Fig. 12-51 por uma fonte de tensão de compensação e calcular a corrente total de saída da fonte de 50 volts.
Resp.: 11,35 V; 4,55 V; 3,41 A.

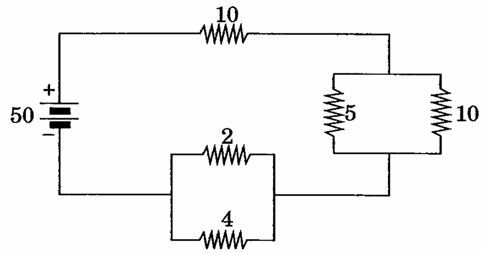


Figura 12-51

12.46 Conforme mostra a Fig. 12-52(*a*), **I** é a corrente na fonte de 20 volts. Quando o resistor de 10 ohms do lado de cima é trocado para 12 ohms, a corrente naquela fonte passa a ser **I'**. Determinar a variação de corrente $\Delta\mathbf{I} = (\mathbf{I'} - \mathbf{I})$, com o auxílio da fonte de tensão de compensação, como se vê na Fig. 12-52(*b*).
Resp.: $\Delta\mathbf{I} = -0{,}087$ A.

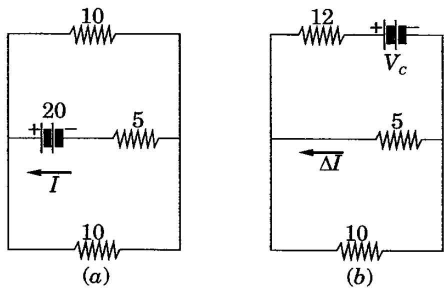


Figura 12-52

12.47 O resistor de 5 ohms da Fig. 12-53(*a*) é mudado para 8 ohms. Determinar a variação de corrente $\Delta \mathbf{I}$ que resulta na impedância $3 + j4$.
Resp.: $0{,}271\underline{/159^\circ}$ A.

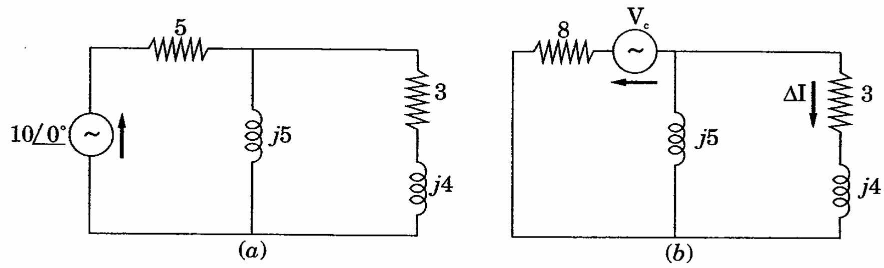


Figura 12-53

12.48 A corrente **I** circula na fonte $50\underline{/45^\circ}$ do circuito da Fig. 12-54(*a*). Troca-se o resistor de 10 ohms para 5 ohms. Empregar o teorema da compensação para determinar $\mathbf{V}_C$ e $\Delta \mathbf{I}$ [Fig. 12-54(*b*)].
Resp.: $21{,}45\underline{/-166^\circ}$ V; $2{,}74\underline{/-36^\circ}$ A.

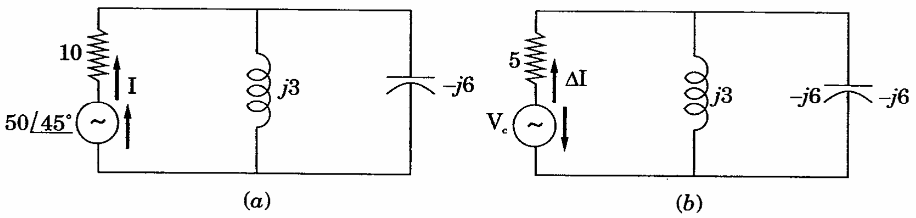


Figura 12-54

12.49 Determinar o valor de R_L que acarreta a máxima transferência de potência no circuito da Fig. 12-55. Calcular o valor da potência máxima.
Resp.: 11,17 ohms; 309 watts.

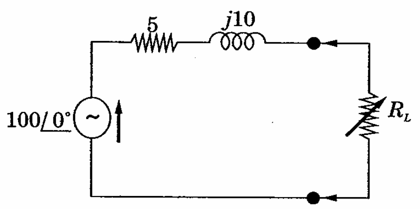


Figura 12-55

12.50 No circui
de 15 oh
qual a pc
Resp.: (a

12.51 Duas font
AB do cir
forem var
da máxim
Resp.: (4,

12.50 No circuito da Fig. 12-56, a carga é constituída por uma reatância capacitiva fixa de 15 ohms e uma resistência variável R_L. Determinar (*a*) o valor de R_L para o qual a potência transferida é máxima; (*b*) o valor da potência máxima.
Resp.: (*a*) R_L = 11,17 ohms; (*b*) 236 watts.

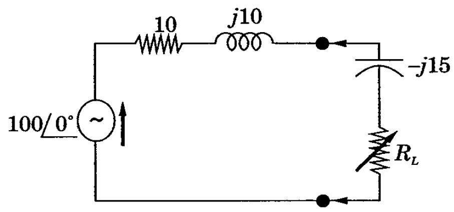


Figura 12-56

12.51 Duas fontes de tensão atuam sobre a impedância de carga ligada aos terminais *AB* do circuito da Fig. 12-57. Se tanto a reatância como a resistência da carga forem variáveis, que valor da carga $\mathbf{Z}_L$ receberá a máxima potência? Qual o valor da máxima potência ?
Resp.: (4,23 + *j*1,15)Ω; 5,68 W.

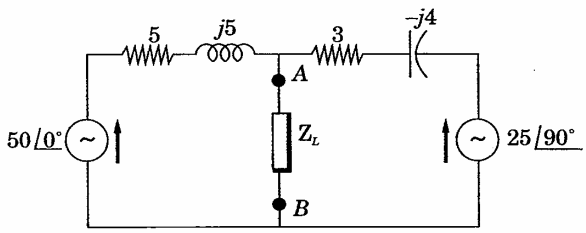


Figura 12-57

MAKRON
Books

INDUTÂNCIA MÚTUA

Introdução

Os circuitos estudados nos capítulos anteriores eram constituídos por malhas e nós. Como duas malhas contíguas possuem um ramo comum e dois nós se ligam por elementos passivos ou ativos, malhas e nós se dizem acoplados condutivamente. Os métodos mistos solucionam essas estruturas.

Neste capítulo, analisaremos outro tipo de acoplamento – o acoplamento magnético. Quando a interação entre duas malhas tem lugar através de um campo magnético, em lugar de fazê-lo pelos elementos comuns, diz-se que as malhas estão acopladas indutiva ou magneticamente.

Auto-Indutância

Quando a corrente varia em um circuito, o fluxo magnético que o abrange varia e, no circuito, induz-se uma f.e.m. Admitindo constante a permeabilidade, a f.e.m. induzida é proporcional à taxa de variação da corrente, isto é:

$$v_L = L\frac{di}{dt} \qquad (1)$$

onde a constante de proporcionalidade L se chama auto-indutância do circuito. A unidade de auto-indutância é o weber/ampère ou henry (H).

Numa bobina de N espiras a f.e.m. induzida é dada por:

$$v_L = N\frac{d\phi}{dt} \qquad (2)$$

onde $Nd\phi$ define o "fluxo de ligação" ("flux linkage") do circuito. Combinando as equações (*1*) e (*2*), temos:

$$L\frac{di}{dt} = N\frac{d\phi}{dt}$$

onde:

$$L = N\frac{d\phi}{dt}$$

Indutância Mútua

Na Fig. 13-1, consideremos a corrente i_1, na bobina 1, variando com o tempo. A corrente variável i_1 estabelece um fluxo magnético ϕ_1. Parte desse fluxo abrange apenas a bobina 1 e chama-se fluxo de perdas ϕ_{11} ("leakage flux"). O fluxo restante ϕ_{12} abrange, também, a bobina 2. A tensão induzida na bobina 2 é dada pela lei de Faraday:

$$v_2 = N_2\frac{d\phi_{12}}{dt} \qquad (3)$$

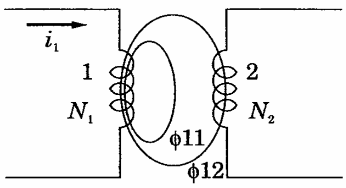


Figura 13-1

Como ϕ_{12} está relacionado à corrente i_1, v_2 é proporcional à taxa de variação da corrente i_1 ou:

$$v_2 = M\frac{di_1}{dt} \tag{4}$$

onde a constante de proporcionalidade M se chama indutância mútua entre as duas bobinas. A unidade de indutância mútua é a mesma unidade de auto-indutância (o henry).

Combinando as equações (*3*) e (*4*), temos:

$$v_2 = N_2\frac{d\phi_{12}}{dt} = M\frac{di_1}{dt}$$

e

$$M = N_2\frac{d\phi_{12}}{di_1} \tag{5}$$

A indutância mútua de um par de bobinas enroladas no mesmo núcleo de ferro é dada pela equação (*5*); o fluxo e a corrente não se relacionam linearmente. Se, em lugar do ferro, o meio for o ar, o fluxo e a corrente estarão relacionados linearmente e a indutância mútua será:

$$M = \frac{N_2\phi_{12}}{i_1} \tag{6}$$

O acoplamento mútuo é bilateral e resultados análogos serão obtidos se uma corrente variável i_2, função do tempo, circular na bobina 2 da Fig. 13-1. Os fluxos de ligação são, portanto, ϕ_2, ϕ_{21} e ϕ_{22}, a tensão induzida na bobina 1 é $v_1 = M(di_2/dt)$ e as equações (*5*) e (*6*) tornam-se, respectivamente:

$$M = \frac{N_1 d\phi_{21}}{di_2} \quad (7) \qquad \text{e} \qquad M = \frac{N_1\phi_{21}}{i_2} \quad (8)$$

Coeficiente de Acoplamento, k

Na Fig. 13-1 o "fluxo de ligação" depende do espaçamento e orientação dos eixos das bobinas e da permeabilidade do meio. A fração do fluxo total que abrange as duas bobinas chama-se coeficiente de acoplamento k. Então, temos:

$$k = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{\phi_{21}}{\phi_2}$$

Como $\phi_{12} \leqslant \phi_1$ e $\phi_{21} \leqslant \phi_2$, o máximo valor para k é a unidade.

As operações a seguir permitem obter-se M em termos das auto-indutâncias L_1 e L_2. Multiplicando as equações (*6*) e (*8*), obtém-se:

$$M^2 = \left(\frac{N_2\phi_{12}}{i_1}\right)\left(\frac{N_1\phi_{21}}{i_2}\right) = \left(\frac{N_2 k\phi_1}{i_1}\right)\left(\frac{N_1 k\phi_2}{i_2}\right) = k^2\left(\frac{N_1\phi_1}{i_1}\right)\left(\frac{N_2\phi_2}{i_2}\right) \qquad (9)$$

Substituindo $L_1 = N_1\phi_1/i_1$ e $L_2 = N_2\phi_2/i_2$ em (*9*), temos:

$$M^2 = k^2 L_1 L_2 \qquad \text{e} \qquad M = k\sqrt{L_1 L_2}\ .$$

Análise de Circuitos Acoplados

Com a finalidade de mostrar o sentido dos enrolamentos e seus efeitos sobre as tensões de indutância mútua, as bobinas são apresentadas no núcleo, como mostra a Fig. 13-2.

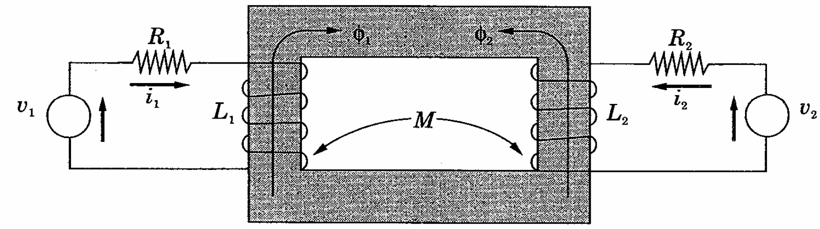


Figura 13-2

Como, em cada circuito, existe uma fonte de tensão, as correntes de malha i_1 e i_2 são escolhidas no mesmo sentido das fontes e as equações das duas malhas são escritas de conformidade com a lei de Kirchhoff:

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} = v_1$$
$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} = v_2 \qquad (10)$$

As tensões de indutância mútua podem ter qualquer polaridade dependendo do sentido do enrolamento. Os sinais corretos em (*10*) podem ser determinados por aplicação da regra da mão direita a cada bobina: segurando-se a bobina, de modo que os dedos envolvam as espiras no sentido em que a corrente as percorre, o polegar direito aponta no sentido do fluxo. Os sentidos de ϕ_1 e de ϕ_2 são, portanto, os indicados na figura. *Se os fluxos* ϕ_1 e ϕ_2, *devidos a correntes de sentidos supostos positivos, se somam, os sinais das tensões de indutância mútua são os mesmos das tensões de auto-indutância.*

Na Fig. 13-2 observa-se que ϕ_1 e de ϕ_2 têm sentidos opostos. Escrevendo (*10*), novamente, com os sinais corretos, temos:

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = v_1$$
$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = v_2 \qquad (11)$$

Admitindo fontes de tensões senoidais, o conjunto (*11*) torna-se, em regime estacionário:

$$(R_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 - j\omega M \mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1$$
$$-j\omega M \mathbf{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2)\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_2 \qquad (12)$$

Recordando o sistema de duas equações simultâneas das correntes de malha (Capítulo 9), temos:

$$\mathbf{Z}_{11}\mathbf{I}_1 \pm \mathbf{Z}_{12}\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1$$
$$\pm \mathbf{Z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{22}\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_2 \qquad (13)$$

Vimos que $\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21}$ eram as impedâncias comuns às duas correntes de malha $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$. As malhas eram acopladas condutivamente, já que as correntes circulavam num ramo comum. No circuito da Fig. 13-2, temos um sistema semelhante de equações, onde $j\omega M$ corresponde a $\mathbf{Z}_{12}$ e $\mathbf{Z}_{21}$ das equações *(13)*. As malhas não são acopladas condutivamente, pois as duas correntes não percorrem impedâncias comuns. Entretanto, as equações indicam que existe acoplamento. Em tais casos, o acoplamento é chamado *mútuo* ou *acoplamento magnético*.

Corrente Induzida

Na seção precedente, após admitir o sentido das correntes, examinamos um circuito com duas malhas acopladas mutuamente, cada uma contendo uma fonte de tensão. Algumas vezes, torna-se necessário analisarmos a corrente induzida numa malha em que não existe fonte de tensão. O sentido dessa corrente é determinado por aplicação da lei de Lenz.

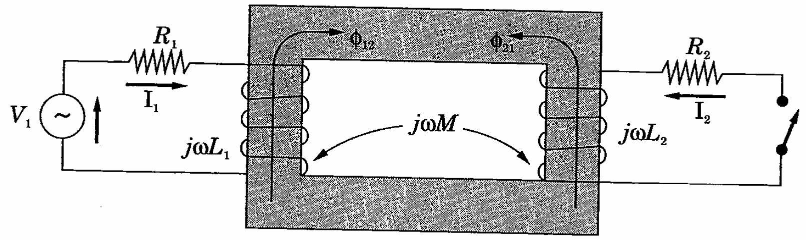


Figura 13-3

Seja o circuito da Fig. 13-3, onde apenas a malha 1 contém uma fonte de tensão. Admitindo para a corrente $\mathbf{I}_1$ o sentido de acordo com a fonte $\mathbf{V}_1$, aplica-se a regra da mão direita para determinar o sentido do fluxo ϕ_{12}. A lei de Lenz estabelece que a polaridade da tensão induzida é tal que, se o circuito for completado, circulará pela bobina uma corrente de sentido tal que crie um fluxo que se oponha ao fluxo principal, estabelecido pela corrente $\mathbf{I}_1$.

Portanto, quando o interruptor é fechado no circuito da Fig. 13-3, o sentido do fluxo ϕ_{21}, de conformidade com a lei de Lenz, é o indicado. Aplicando-se então a regra da mão direita, com o polegar apontando no sentido de ϕ_{21}, os dedos envolverão a bobina 2 no sentido da *corrente induzida*. As equações das correntes de malha são, então:

$$
\begin{aligned}
(R_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 &= \mathbf{V}_1 \\
-j\omega M\mathbf{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2)\mathbf{I}_2 &= 0
\end{aligned} \tag{14}
$$

Como não existe fonte de tensão na malha 2, segue-se que a corrente induzida $\mathbf{I}_2$ resultou da tensão na indutância mútua $(R_2 + j\omega L_2)\mathbf{I}_2$, que é igual a $j\omega M\mathbf{I}_1$. Na Fig. 13-4, representa-se essa tensão como uma fonte. O sentido da fonte deve ser o indicado pela seta para que o sentido da corrente $\mathbf{I}_2$ seja o positivo. Portanto, *a polaridade instantânea da tensão de indutância mútua, na bobina 2, é positiva no terminal em que a corrente induzida sai do enrolamento.*

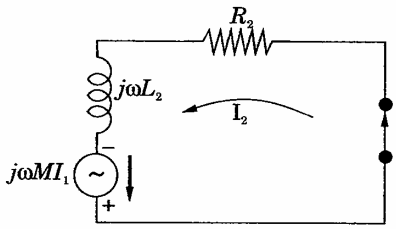
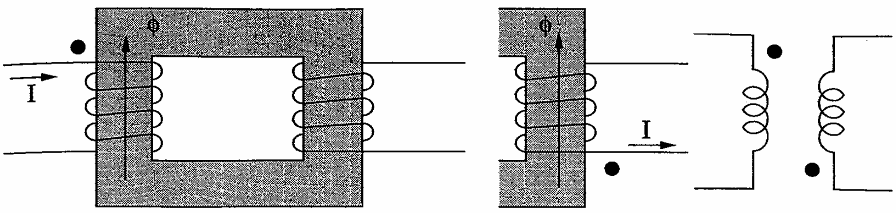


Figura 13-4

Regra do Ponto – Bobinas Acopladas

O processo de determinação da polaridade relativa das tensões de indutância mútua por considerações quanto ao núcleo e ao sentido do enrolamento não é prático. Para simplificar a representação de circuitos acoplados, as bobinas são marcadas com pontos, como mostra a Fig. 13-5(*c*). Coloca-se um ponto nos terminais das bobinas que sejam instantaneamente da mesma polaridade, tendo em vista a indutância mútua, apenas. Para isso, devemos, portanto, saber em que terminal de cada bobina colocar o ponto. Devemos, também, determinar o sinal atribuído à tensão de indutância mútua, ao escrever as equações das correntes de malha.



(*a*) (*b*) (*c*)

Figura 13-5

Para localizar os pontos em um par de bobinas acopladas, escolhe-se um sentido para a corrente em uma delas e coloca-se um ponto no terminal por onde a corrente penetra no enrolamento. Esse terminal é instantaneamente positivo, em relação ao outro terminal da bobina. Aplica-se a regra da mão direita para determinar o fluxo correspondente, como mostra a Fig. 13-5(*a*). O fluxo na segunda bobina deve-se opor ao fluxo original, de acordo com a lei de Lenz. Ver a Fig. 13-5(*b*).

Com o auxílio da regra da mão direita, determina-se o sentido da corrente induzida e, como a tensão de indutância mútua é positiva no terminal por onde a corrente induzida deixa o enrolamento, deve-se colocar um ponto nesse terminal, como na Fig. 13-5(*b*). Uma vez identificada a polaridade das bobinas por intermédio dos pontos, não haverá mais necessidade do núcleo no diagrama. As bobinas podem, então, ser ilustradas como indica a Fig. 13-5(*c*).

Para determinar o sinal da tensão de indutância mútua nas equações das correntes de malha, usa-se a regra dos pontos, que estabelece: (1) *quando ambas as correntes entram ou saem de um par de bobinas acopladas pelos terminais que têm ponto, os sinais dos termos em M são iguais aos sinais dos termos em L; (2) se uma das correntes entra e a outra sai, os sinais dos termos em M são opostos aos dos termos em L.*

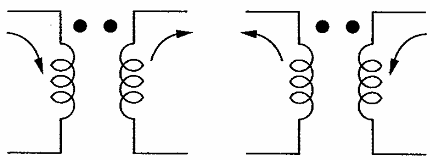


Figura 13-6

A Fig. 13-6 mostra quando os sinais dos termos em M e em L são opostos. A Fig. 13-7 ilustra dois casos em que os sinais de M e de L são iguais.

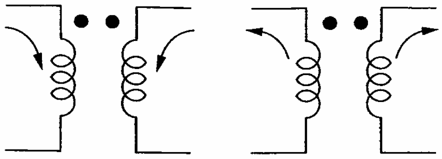


Figura 13-7

Ainda como ilustração das polaridades relativas nos circuitos com acoplamento mútuo, seja o circuito da Fig. 13-8, onde estão indicados os pontos e as correntes $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$. Como uma corrente entra e a outra sai, pelos terminais com ponto, o sinal dos termos em M é oposto ao dos termos em L. Sob a forma matricial, as equações das correntes de malha para este circuito são:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & -j\omega M \\ -j\omega M & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

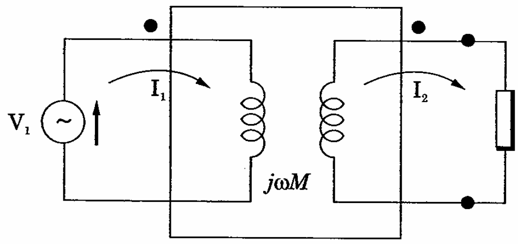


Figura 13-8

A Fig. 13-9 apresenta uma estrutura simples a duas malhas com acoplamento condutivo. Estão indicados os terminais positivos. Sob a forma matricial, as equações das correntes de malha são:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & -\mathbf{Z} \\ -\mathbf{Z} & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

A imp
sinal negativo
contém **Z**.

Cobrin
diferem, apena
Comparando (
corresponde ao

Circuitos E

Na aná
mento mútuo
circuito da Fig.
senta. As equaç

Sejam
13-10(a). As cor
cia é, então, $j\omega M$
$\mathbf{I}_1$ passa no ra
($-j\omega M$) na malh

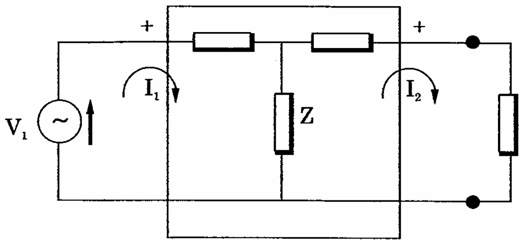


Figura 13-9

A impedância $\mathbf{Z}$, comum a ambas as correntes de malha, apresenta sinal negativo porque as correntes $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ têm sentidos opostos no ramo que contém $\mathbf{Z}$.

Cobrindo-se as "caixinhas" nas Figs. 13-8 e 13-9, os dois circuitos diferem, apenas pelos pontos, em um deles, e pela notação de sinais, no outro. Comparando *(15)* e *(16)*, verifica-se que o sinal negativo atribuído a $j\omega M$ corresponde ao sinal negativo de $\mathbf{Z}$.

Circuitos Equivalentes Acoplados Condutivamente

Na análise de circuitos, é possível substituir-se um circuito com acoplamento mútuo por um outro equivalente, acoplado condutivamente. Seja o circuito da Fig. 13-10(a), com os sentidos das correntes $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ como se representa. As equações das correntes de malha são, então, sob a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & -j\omega M \\ -j\omega M & R_2 + j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \qquad (17)$$

Sejam os mesmos os sentidos das correntes nas Figs. 13-10(b) e 13-10(a). As correntes $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ têm sentidos opostos no ramo comum; a impedância é, então, $j\omega M$. Nas equações *(17)*, $\mathbf{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1$. Como a corrente de malha $\mathbf{I}_1$ passa no ramo comum que contém a impedância $j\omega M$, devemos inserir $(-j\omega M)$ na malha e escrever:

$$\mathbf{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1 - j\omega M + j\omega M = R_1 + j\omega L_1$$

Semelhantemente, na malha 2, temos:

$$\mathbf{Z}_{22} = R_2 + j\omega L_2 - j\omega M + j\omega M = R_2 + j\omega L_2$$

Se escrevermos as equações das correntes de malha para o circuito da Fig. 13-10(*b*), obteremos a equações (*17*). O circuito da Fig. 13-10(*b*), acoplado condutivamente, é, portanto, equivalente ao circuito de acoplamento mútuo da Fig. 13-10(*a*).

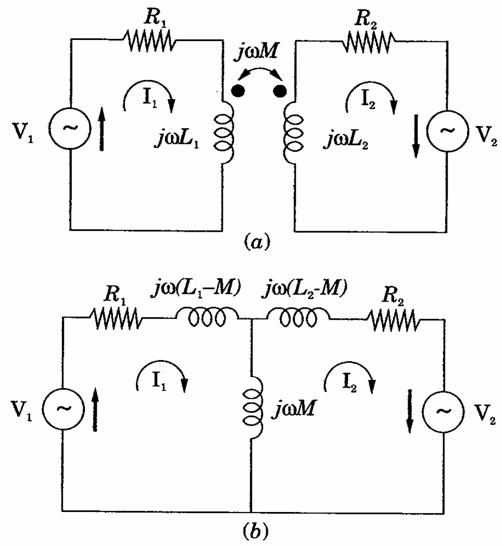


Figura 13-10

Este método de análise, entretanto, nem sempre conduz a um circuito equivalente fisicamente realizável. Isto é verdade quando $M > L_1$ ou $M > L_2$.

Para substituir a ligação em série das bobinas acopladas mutuamente, mostradas na Fig. 13-11(*a*), procede-se da seguinte maneira: aplica-se o método acima descrito, obtendo-se o circuito equivalente da Fig. 13-11(*b*) com os pontos; em seguida substitui-se esse equivalente pelo equivalente condutivo mostrado na Fig. 13-11(*c*).

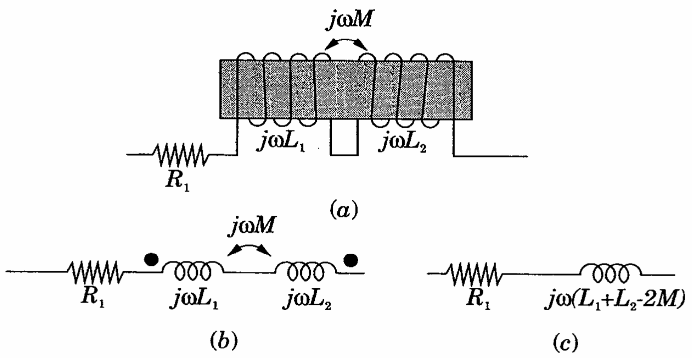


Figura 13-11

A análise do circuito da Fig. 13-11(*a*) exige que se considere os fluxos, na determinação dos sinais das tensões de indutância mútua. No circuito da Fig. 13-11(*b*) não há necessidade de se conhecerem os fluxos, mas é necessária a regra dos pontos. Com o circuito da Fig. 13-11(*c*) podem-se escrever as equações pela forma usual, sem que se exija atenção especial ao fluxo, aos pontos ou à indutância mútua. Todos os três circuitos possuem a mesma impedância complexa $\mathbf{Z} = R_1 + j\omega\,(L_1 + L_2 - 2M)$.

Problemas Resolvidos

13.1 Em um par de bobinas acopladas, a corrente contínua na bobina 1 é 5 ampères e os fluxos correspondentes ϕ_{11} e ϕ_{12} são, respectivamente, 20000 e 40000 maxwells.* Sendo $N_1 = 500$ e $N_2 = 1500$ os totais de espiras, determinar L_1, L_2, M e k (1 weber = 10^8 maxwells).

O fluxo total é $\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} = 60000$ maxwells $= 6 \times 10^{-4}$ webers. A auto-indutância da bobina 1 é, então, $L_1 = N_1\phi_1/I_1 = 500\,(6 \times 10^{-4})/5 =$ $= 0{,}06$ H.

O coeficiente de acoplamento é $k_1 = \phi_{12}/\phi_1 = 40000/60000 = 0{,}667$.

A indutância mútua $M = N_2\phi_{12}/I_1 = 1500\,(4 \times 10^{-4})/5 = 0{,}12$ H

Como $M = k\sqrt{L_1L_2}$, vem $0{,}12 = 0{,}667\,\sqrt{0{,}06L_2}$ e $L_2 = 0{,}539$ H.

* N. R. Aqui a palavra "maxwells" designa uma antiga unidade (do sistema CGS) para fluxos magnéticos.

13.2 Duas bobinas, $L_1 = 0{,}8$ H e $L_2 = 0{,}2$ H têm um coeficiente de acoplamento $k = 0{,}9$. Determinar a indutância mútua M e a relação de espiras N_1/N_2.

A indutância mútua é $M = k\sqrt{L_1L_2} = 0{,}9\sqrt{0{,}8(0{,}2)} = 0{,}36$ H.

Tomando $M = N_2\phi_{12}/i_1$, fazendo $\phi_{12} = k\phi_1$ e multiplicando por N_1/N_1, obtém-se

$$M = k\frac{N_2}{N_1}\left(\frac{N_1\phi_1}{i_1}\right) = k\frac{N_2}{N_1}L_1 \text{ e } N_1/N_2 = kL_1/M = 0{,}9(0{,}8)/0{,}36 = 2$$

13.3 Duas bobinas cujas respectivas auto-indutâncias são $L_1 = 0{,}05$ H e $L_2 = 0{,}20$ H têm coeficiente de acoplamento $k = 0{,}5$. A bobina 2 tem 1000 espiras. Sendo $i_1 = 5$ sen $400t$ a corrente na bobina 1, determinar a tensão na bobina 2 e o fluxo máximo estabelecido pela bobina 1.

A indutância mútua é $M = B\sqrt{L_1L_2} = 0{,}5\sqrt{0{,}5(0{,}20)} = 0{,}05$ H. A tensão na bobina 2 será, então: $v_2 = M(di_1/dt) = 0{,}05\,\dfrac{d}{dt}\,(5 \text{ sen } 400t) = 100 \cos 400t$. Como a tensão na bobina 2 é também dada por $v_2 = N_2(d\phi_{12}/dt)$, temos:

$$100 \cos 400t = 1000(d\phi_{12}/dt)$$

e

$$\phi_{12} = 10^{-3} \int 100 \cos 400t \; dt = 0{,}25 \times 10^{-3} \text{ sen } 400t$$

O fluxo ϕ_{12} máximo é $0{,}25 \times 10^{-3}$ weber, então:

$$\phi_{1(\max)} = \frac{\phi_{12(\max)}}{0{,}5} = \frac{0{,}25 \times 10^{-3}}{0{,}5} = 0{,}5 \times 10^{-3}\text{ Wb}$$

13.4 Aplicar a lei de Kirchhoff para as tensões ao circuito da Fig. 13-12 e escrever sua equação sob a forma instantânea.

O exame do sentido dos enrolamentos das bobinas mostra que os sinais dos termos em M são opostos aos dos termos em L. Observe-se, também, que em cada bobina aparece uma tensão de indutância mútua, devida à corrente i, na outra bobina.

$$Ri + L_1\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt + L_2\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} = v$$

ou Ri +

13.5 Escrever a

Escolhida
da mão di
dos termo

$R_1i_1 + L_1$

$R_2i_2 + L_2$

13.6 Repetir o Pr

$$\text{ou } Ri + (L_1 + L_2 - 2M)\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = v$$

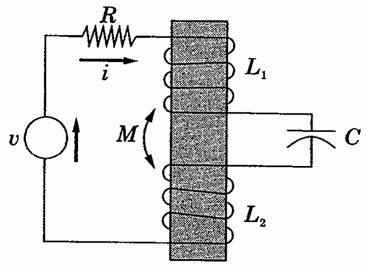


Figura 13-12

13.5 Escrever as equações instantâneas do circuito acoplado da Fig. 13-3

Escolhidas as correntes i_1 e i_2, como mostra o diagrama, aplica-se a regra da mão direita a cada enrolamento. Já que os fluxos se somam, os sinais dos termos em M são iguais aos dos termos em L. Assim:

$$R_1 i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} = v$$

$$R_2 i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} = v$$

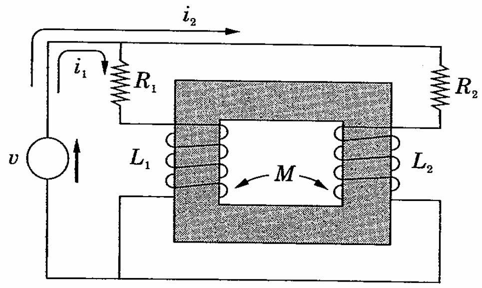


Figura 13-13

13.6 Repetir o Probl. 13.5, sendo a corrente i_2 a indicada na Fig. 13-14.

Ao se aplicar a lei de Kirchhoff para as tensões à malha da corrente i_2, são negativas as tensões de indutância mútua. Assim, temos:

$$R_1(i_1 - i_2) + L_1 \frac{d}{dt}(i_1 - i_2) + M \frac{di_2}{dt} = v$$

$$R_1(i_2 - i_1) + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{d}{dt}(i_2 - i_1) + L_1 \frac{d}{dt}(i_2 - i_1) - M \frac{di_2}{dt} = 0$$

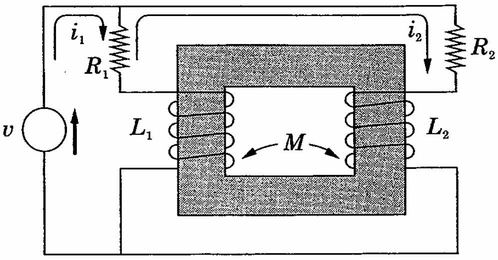


Figura 13-14

13.7 Duas bobinas ligadas em série têm indutância equivalente L_A se a ligação for ativa e indutância equivalente L_B se a ligação for subtrativa (em oposição). Determinar a indutância mútua M em termos de L_A e L_B.

Quando a ligação é aditiva, a indutância equivalente é dada por:

$$L_A = L_1 + L_2 + 2M \qquad (1)$$

Quando é subtrativa, tem-se:

$$L_B = L_1' + L_2 - 2M \qquad (2)$$

Subtraindo (*1*) de (*2*), temos:

$$L_A - L_B = 4M \quad \text{e} \quad M = \frac{1}{4}(L_A - L_B)$$

Esta solução indica um processo prático para a determinação de M: ligam-se as duas bobinas das duas maneiras possíveis e medem-se as indutâncias equivalentes numa ponte de *CA*; a indutância mútua é um quarto da diferença entre as duas indutâncias equivalentes.

13.8 Determinar o circuito equivalente ao da Fig. 13-15, com os pontos colocados nas bobinas. Achar a tensão na reatância $-j10$, empregando o circuito equivalente.

10

Para local
vos sentid
minal de c
fluxo corr
Pela lei de
para cima
induzida.
se colocar

Com os se
matricial,

$$\begin{bmatrix} 5 - j5 & \\ 5 + j3 & \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{I}_1$ =

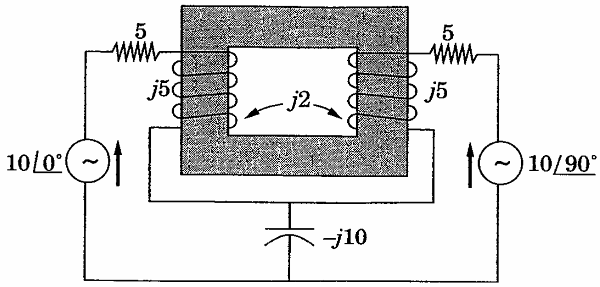


Figura 13-15

Para localizar os pontos, consideram-se apenas as bobinas e os respectivos sentidos de enrolamento. Admitida a corrente penetrando pelo terminal de cima da bobina da esquerda, coloca-se aí um ponto. O sentido do fluxo correspondente é de baixo para cima, na parte esquerda do núcleo. Pela lei de Lenz, o fluxo na bobina da direita deve, também, ser de baixo para cima. A regra da mão direita indica, então, o sentido da corrente induzida. Essa corrente sai do enrolamento pelo terminal superior. Deve-se colocar um ponto nesse terminal, como mostra a Fig. 13-16.

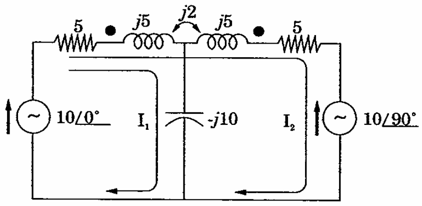


Figura 13-16

Com os sentidos apontados para i_1 e i_2, as equações das malhas, na forma matricial, são:

$$\begin{bmatrix} 5 - j5 & 5 + j3 \\ 5 + j3 & 10 + j6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 - j10 \end{bmatrix}$$

$$\text{onde } \mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 5 + j3 \\ 10 - j10 & 10 + j6 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 1{,}015 \,\underline{/113{,}95^\circ}$$

A tensão na reatância $-j10$ é, então:

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}_1(-j10) = 10{,}15\underline{/23{,}95^\circ}$$

13.9 Determinar o circuito equivalente ao da Fig. 13-17, com os pontos colocados nas bobinas, e escrever a respectiva equação.

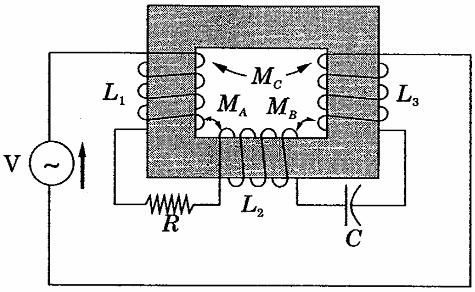


Figura 13-17

Localizam-se os pontos pelos métodos empregados no Probl. 13.8, obtendo-se o circuito da Fig. 13-18.

Aplicando-se a lei de Kirchhoff para as tensões à malha simples, temos:

$$\left[R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega(L_1 + L_2 + L_3 + 2M_A - 2M_B - 2M_C)\right]\mathbf{I} = \mathbf{V}$$

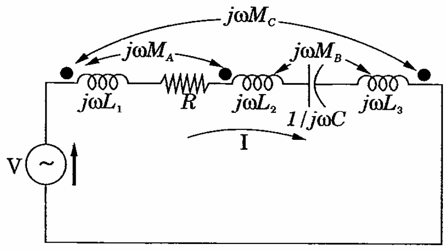


Figura 13-18

13.10 No circuito da Fig. 13-19, dados os pontos na localização indicada, determinar a tensão no resistor de 5 ohms. Inverter a polaridade de uma bobina e repetir o problema.

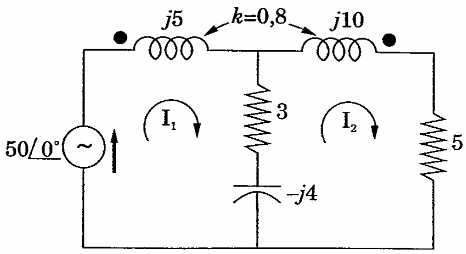


Figura 13-19

Para a indutância mútua, tem-se:

$$jX_m = jk\sqrt{X_{L1}X_{L2}} = j8\sqrt{5(10)} = j5{,}66$$

A corrente de malha I_2 é:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 + j1 & 50 \\ -3 - j1{,}66 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 + j1 & -3 - j1{,}66 \\ -3 - j1{,}66 & 8 + j6 \end{vmatrix}} = \frac{172\,\underline{/29^\circ}}{19{,}9\,\underline{/53{,}8^\circ}} = 8{,}60\,\underline{/24{,}8^\circ}$$

Logo, a tensão no resistor de 5 ohms é:

$$\mathbf{V}_5 = \mathbf{I}_2(5) = 43\,\underline{/-24{,}8^\circ}$$

Trocando-se a polaridade de uma bobina, muda a matriz impedância, resultando um outro valor para $\mathbf{I}_2$.

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 + j1 & 50 \\ -3 + j9{,}66 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 + j1 & -3 + j9{,}66 \\ 3 + j9{,}66 & 8 + j6 \end{vmatrix}} = \frac{505\,\underline{/-72{,}7^\circ}}{132\,\underline{/39{,}4^\circ}} = 3{,}83\,\underline{/-112{,}1^\circ}$$

A tensão no resistor de 5 ohms será:

$$\mathbf{V}_5 = \mathbf{I}_2\ (5) = 19{,}15\,\underline{/-112{,}1^\circ}$$

13.11 Determinar a indutância equivalente da ligação em paralelo de L_1 e L_2, mostrada na Fig. 13-20(*a*).

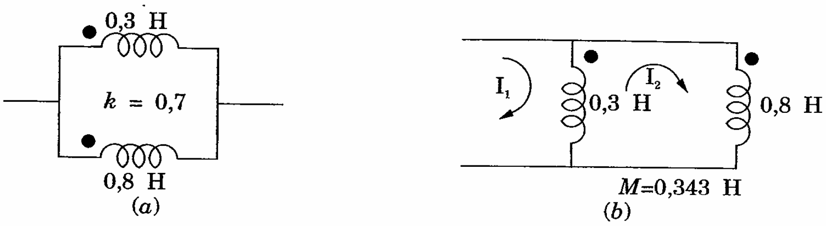


Figura 13-20

A indutância mútua é $M = k\sqrt{L_1L_2} = 0{,}7\sqrt{0{,}3(0{,}8)} = 0{,}343$ H.

Redesenhado o circuito, como mostra a Fig. 13-20(*b*), e introduzidas as correntes de malha, vem:

$$[\mathbf{Z}] = \begin{bmatrix} j\omega 0{,}3 & j\omega 0{,}043 \\ j\omega 0{,}043 & j\omega 0{,}414 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_{i1} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{j\omega 0{,}3(j\omega 0{,}414) - (j\omega 0{,}043)^2}{j\omega 0{,}414} = j\omega 0{,}296$$

A impedância equivalente das bobinas acopladas é, então, 0,296 H.

13.12 A Fig. 13-21 apresenta o circuito da ponte de Heaviside, usada na determinação da indutância mútua de duas bobinas. Determinar *M* em função das demais constantes da ponte, quando a corrente $\mathbf{I}_D$ do detetor se anula.

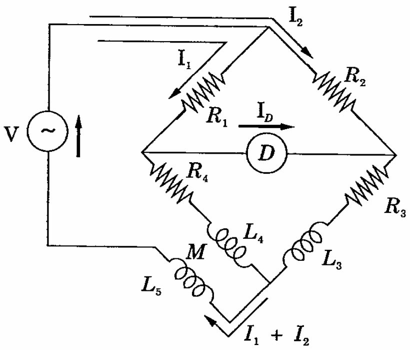


Figura 13-21

O diagra
ser iguai

$\mathbf{I}_1R_1 = \mathbf{I}$

Pela mes
Entretan
corrente

$\mathbf{I}_1(R_4 +$

Substitui

$\mathbf{I}_1(R_4 + j$

Igualand

$R_4R_2 = R$

13.13 Substituir
AB.

A tensão
Escolhida

$\mathbf{I}_2 =$

5
−2

Então,

$\mathbf{V}' = \mathbf{V}_{AB}$

Para dete
corrente d

AB, anula

* N. T. Substituíc

O diagrama mostra as correntes $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_D$, escolhidas. Sendo $\mathbf{I}_D = 0$, devem ser iguais as quedas de tensão em R_1 e R_2, logo:

$$\mathbf{I}_1 R_1 = \mathbf{I}_2 R_2 \qquad (1)$$

Pela mesma razão, devem ser iguais as quedas em $(R_4 + j\omega L_4)$ e $(R_3 + j\omega L_3)$. Entretanto, em L_4 aparece uma tensão devida à indutância mútua, e a corrente na outra bobina do par, L_5, é a soma $\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$.

$$\mathbf{I}_1(R_4 + j\omega L_4) + j\omega M(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) = \mathbf{I}_2(R_3 + j\omega L_3) \qquad (2)$$

Substituindo $\mathbf{I}_2 = (R_1/R_2)\mathbf{I}_1$ em (*2*), temos:

$$\mathbf{I}_1(R_4 + j\omega L_4 + j\omega M) + (R_1/R_2)\mathbf{I}_1(j\omega M) = (R_1/R_2)\mathbf{I}_1(R_3 + j\omega L_3) \qquad (3)$$

Igualando as partes reais e imaginárias de (*3*), vem:

$$R_4 R_2 = R_1 R_3 \text{ e } j\omega\left(L_4 + M + \frac{R_1}{R_2}M\right) = j\omega\frac{R_1}{R_2}L_3, \text{ donde } M = \frac{R_1 L_3 - R_2 L_4}{R_1 + R_2}$$

13.13 Substituir o circuito da Fig. 13-12 pelo Thevenin equivalente visto dos terminais *AB*.

A tensão V' do Thevenin equivalente é a tensão a circuito aberto em *AB*. Escolhidas $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$, tem-se para $\mathbf{I}_2$:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & 10 \\ -2 + j3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 + j5 & -2 + j3 \\ -2 + j3 & 6 + j5 \end{vmatrix}} = \frac{20 - j30}{10 + j67} = 0{,}533 \underline{/-137{,}8^\circ}$$

Então,

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V}_{AB} = \mathbf{I}_2(4) = 2{,}13 \underline{/-137{,}8^\circ}$$

Para determinar $\mathbf{Z}'$ do Thevenin equivalente, estabelece-se a terceira corrente de malha $\mathbf{I}_3$ e calcula-se $\mathbf{Z}_{i_3}$, que é a impedância nos terminais *AB*, anuladas todas as fontes internas.*

* N. T. Substituídas pelas respectivas impedâncias internas.

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}_{\text{entrada3}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{33}} = \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & -2+j3 & 0 \\ -2+j3 & 6+j5 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5+j5 & -2+j3 \\ -2+j3 & 6+j5 \end{vmatrix}}$$

$$\mathbf{Z}' = \frac{j456}{10+j67} = 6{,}74\underline{/8{,}5^\circ} = 6{,}67$$

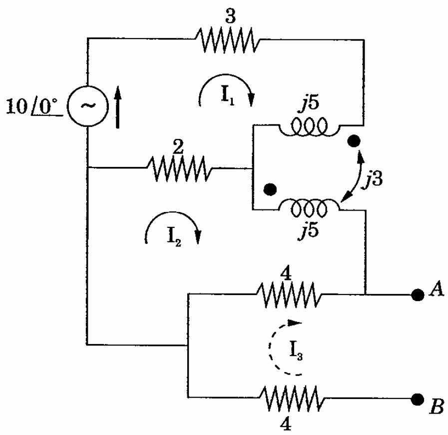


Figura 13-22

A Fig. 13-23 mostra o circuito equivalente de Thevenin.

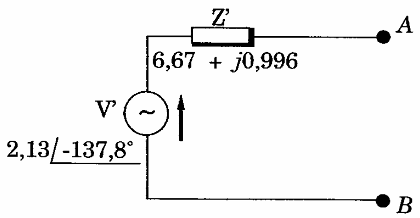


Figura 13-23

13.14 Mostrar que os pontos são desnecessários no circuito da Fig. 13-24, desde que a segunda malha seja passiva.

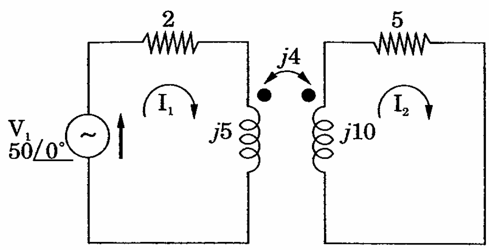


Figura 13-24

Escolhidas as correntes de malha mostradas no diagrama, tem-se

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2+j5 & 50 \\ \pm j4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+j5 & \pm j4 \\ \pm j4 & 5+j10 \end{vmatrix}} = \frac{-50(\pm j4)}{-24+j45} = 3{,}92\,\underline{/61{,}9° \pm 90°}$$

O valor de Δ_z não é afetado pelo sinal de M e a corrente $\mathbf{I}_2$ terá para ângulo de fase 151,9° ou – 28,1°. Como não existe fonte de tensão na malha, é desnecessário o conhecimento da polaridade da tensão de indutância mútua. As quedas de tensão nas impedâncias da malha teriam o mesmo valor absoluto e ângulo de fase diferindo de 180°. A potência numa impedância não seria afetada e $\mathbf{I}_1$ seria a mesma, fosse qual fosse o sinal devido à indutância mútua.

13.15 No circuito da Fig. 13-25, depois de escolher a melhor ligação para as bobinas e determinar k, determinar o valor de R_L que resulta na máxima transferência de potência.

A impedância do circuito à esquerda de AB deve ser um mínimo. Exprimindo-se essa impedância, tem-se:

$$\mathbf{Z} = 5 - j5 + j12 + j12 \pm j2X_M = 5 + j19 \pm j2k\sqrt{12(12)}$$

Para que a impedância seja um mínimo, a reatância deve ser nula; logo, a indutância mútua deve ter sinal negativo. Assim, temos:

$$19 - 2k\sqrt{12(1)} = 0 \text{ e } k = 19/24 = 0{,}792$$

A ligação indicada na Fig. 13-26 acarreta sinal negativo para as tensões da indutância mútua, conforme se deseja. Logo, a impedância do circuito, à esquerda de AB, é 5 ohms, resistência pura, e a potência será máxima quando $R_L = R_g = 5$ ohms.

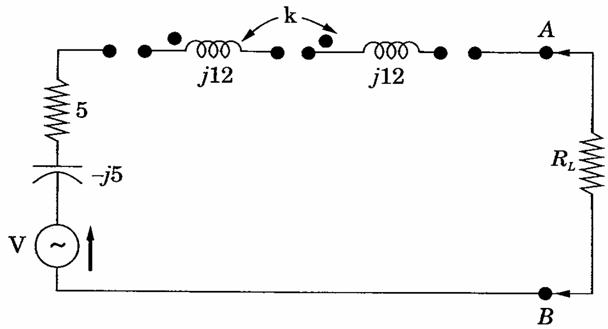


Figura 13-25

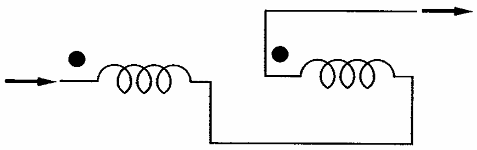


Figura 13-26

13.16 No circuito da Fig. 13-25, $R_L = 10$ ohms e $V = 50\angle 0°$. Supondo possíveis as duas ligações das bobinas e k variável de 0 a 1, determinar a faixa de valores de potência que pode ser fornecida ao resistor de carga.

Com o acoplamento indicado na Fig. 13-26, o sinal da indutância mútua é negativo e a impedância total do circuito, incluindo a carga, é $\mathbf{Z}_T = 5 - j5 + j12 + j12 - j24k + 10$. Para $k = 1$:

$$\mathbf{Z}_T = 15 - j5 = 15{,}8\angle -18{,}45°, \quad \mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{50\angle 0°}{15{,}8\angle -18{,}45°} = 3{,}16\angle 18{,}45°$$

A potência no resistor de 10 ohms é $P = I^2R = (3{,}16)^2(10) = 100$ watts. Para $k = 0$, temos:

$$\mathbf{Z}_T = 15 + j19 = 24{,}2\angle 51{,}7°, \quad \mathbf{I} = 500°/(24{,}2\angle 51{,}7°) = 2{,}06\angle -51{,}7°$$

A potência no resistor de 10 ohms é $P = I^2R = (2{,}06)^2\,(10) = 42{,}4$ watts.

Mudando a ligação das bobinas para que o sinal da indutância mútua se torne positivo, acarreta $\mathbf{Z}_T = 15 + j19 + jk24$. Para $k = 1$, vem:

$$\mathbf{Z}_T = 15 + j43 = 45{,}6\,\underline{/70{,}8^\circ}, \quad \mathbf{I} = 50\,\underline{/0^\circ}/(45{,}6\,\underline{/70{,}8^\circ}) = 1{,}095\,\underline{/-70{,}8^\circ}$$

A potência correspondente é $P = I^2R = (1{,}095)^2(10) = 12$ watts.

O resistor de 10 ohms deve, portanto, admitir uma potência variável entre 12 e 100 watts.

13.17 Determinar um circuito acoplado condutivamente, equivalente ao circuito de acoplamento mútuo da Fig. 13-27.

Escolhidas as correntes $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$, pode-se escrever sob a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 + j1 & -3 - j2 \\ -3 - j2 & 8 + j6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50\,\underline{/0^\circ} \\ 0 \end{bmatrix}$$

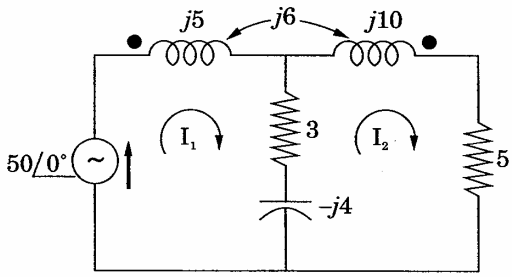


Figura 13-27

No circuito acoplado condutivamente, escolhem-se as correntes de malha com os mesmos sentidos que têm no circuito de acoplamento mútuo. Da matriz impedância, $\mathbf{Z}_{12} = -3 - j2$. Como as correntes têm sentido opostos no ramo comum, a impedância desse ramo deve ser $3 + j2$. A impedância própria da malha 1 é $\mathbf{Z}_{11} = 3 + j1$. Há necessidade, portanto, de uma impedância $-j1$ na malha. Da mesma maneira, com $\mathbf{Z}_{22} = 8 + j6$, a malha pede uma impedância $5 + j4$, além dos elementos do ramo comum, como mostra a Fig. 13-28.

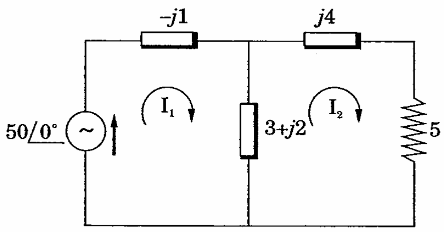


Figura 13-28

13.18 Determinar o circuito acoplado condutivamente equivalente à estrutura de acoplamento mútuo da Fig. 13-29.

Escolhidas as correntes de malha $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$, as equações, sob a forma matricial, ficam:

$$\begin{bmatrix} 7 + j8 & -2 - j12 \\ -2 - j12 & 6 + j19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ 0 \end{bmatrix}$$

No circuito acoplado condutivamente, as correntes circulam em sentidos opostos, pelo ramo comum. Como $\mathbf{Z}_{12}$ é $-2 - j12$, na matriz impedância, a impedância desse ramo deve ser $2 + j12$. Ainda, da matriz impedância, $\mathbf{Z}_{11} = 7 + j8$ e $\mathbf{Z}_{22} = 6 + j19$. Logo, as demais impedâncias nas malhas 1 e 2 do circuito equivalente devem ser, respectivamente:

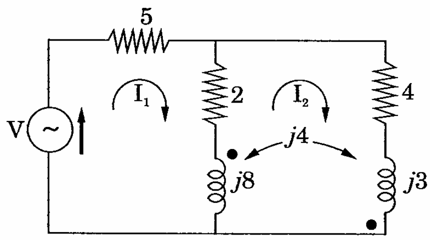


Figura 13-29

$\mathbf{Z}_1 = (7 + j8) - (2 + j12) = 5 - j4$ e $\mathbf{Z}_2 = (6 + j19) - (2 + j12) = 4 + j7$

A Fig. 13-30 mostra o circuito equivalente pedido.

13.19 Duas bob
espiras. (
Reduzind
na bobina
Resp.: 37

13.20 O coefici
e N_2 = 8(
bobina 2,
Resp.: 0,8

13.21 Duas bob
em série
de L_1, L_2,
Resp.: L_1

13.22 Duas bob
quatro for
as dispos
indutânci
Resp.: 15

13.23 Duas bob
Determin
ligadas e
Resp.: 16

13.24 Duas bob
ciente de

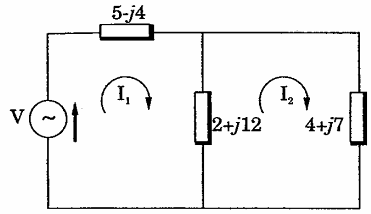


Figura 13-30

Problemas Propostos

13.19 Duas bobinas têm coeficiente de acoplamento $k = 0{,}85$ e a bobina 1 tem 250 espiras. Com $i_1 = 2$ ampères na bobina 1, o fluxo total ϕ_1 é $3{,}0 \times 10^{-4}$ weber. Reduzindo-se i_1 linearmente até zero, em dois milissegundos a tensão induzida na bobina 2 fica igual a 63,75 volts. Determinar L_1, L_2, M e N_2.
Resp.: 37,5 mH; 150 mH; 63,8 mH; 500.

13.20 O coeficiente de acoplamento de duas bobinas, respectivamente, com $N_1 = 100$ e $N_2 = 800$ é 0,85. Com a bobina 1 aberta e uma corrente de 5 ampères na bobina 2, o fluxo ϕ_2 é $3{,}5 \times 10^{-4}$ weber. Determinar L_1, L_2 e M.
Resp.: 0,875; 5,95 mH.

13.21 Duas bobinas idênticas têm indutância equivalente de 0,080 H, quando ligadas em série aditiva, e de 0,035 H, quando em série subtrativa. Quais são os valores de L_1, L_2, M e k?
Resp.: $L_1 = L_2 = 28{,}8$ mH; $M = 11{,}25$ mH; $k = 0{,}392$.

13.22 Duas bobinas acopladas com $L_1 = 0{,}02$ H, $L_2 = 0{,}01$ H e $k = 0{,}5$ são ligadas de quatro formas diferentes: série aditiva, série subtrativa e em paralelo com ambas as disposições possíveis dos sentidos dos enrolamentos. Quais são as quatro indutâncias equivalentes?
Resp.: 15,9; 44,1; 9,47; 3,39 mH.

13.23 Duas bobinas idênticas têm $L = 0{,}02$ H e coeficiente de acoplamento $k = 0{,}8$. Determinar M e as duas indutâncias equivalentes, admitindo que elas estejam ligadas em série aditiva e em série subtrativa.
Resp.: 16; 72; 8 mH.

13.24 Duas bobinas cujas indutâncias estão na relação de quatro para um têm coeficiente de acoplamento $k = 0{,}6$. Ligadas em série aditiva, sua indutância equiva-

lente é 44,4 mH. Determinar L_1, L_2 e M.
Resp.: 6; 24; 7,2 mH.

13.25 Duas bobinas de indutâncias L_1 = 6,8 mH e L_2 = 4,5 mH são ligadas em série aditiva e em série subtrativa. As indutâncias equivalentes dessas ligações são, respectivamente, 19,6 mH e 3 mH. Determinar M e k.
Resp.: 4,15 mH; 0,75.

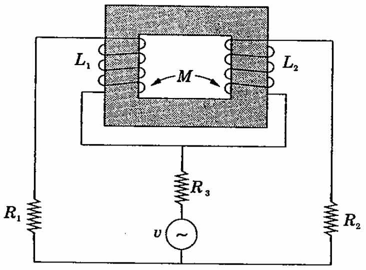


Figura 13-31

13.26 Arbitrar as correntes de malha no circuito da Fig. 13-31 e escrever suas equações instantâneas. Representar o circuito equivalente, localizar os pontos, escrever suas equações e comparar os resultados.

13.27 Traçar o circuito com ponto equivalente ao das bobinas da Fig. 13-32 e determinar a reatância indutiva equivalente.
Resp.: $j12$.

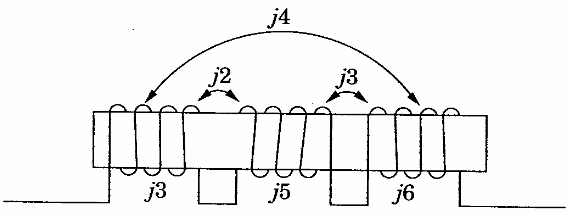


Figura 13-32

13.28 Determinar, situando os pontos, o circuito equivalente às bobinas da Fig. 13-33 e escrever sua equação instantânea.

13.29 Representa
e calcular a
Resp.: 4,47

13.30 Achar o circ
13-35, situa
terminais Al
Resp.: 0,23

13.31 Determinar
minar a imp
Resp.: 2,54

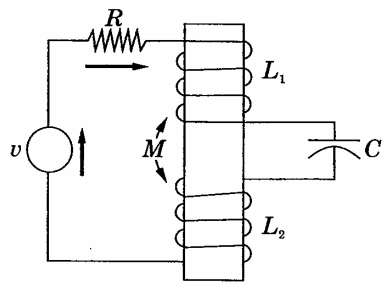


Figura 13-33

13.29 Representar o circuito equivalente às bobinas da Fig. 13-34, situando os pontos, e calcular a corrente **I**.
Resp.: $4{,}47\underline{/26{,}7^\circ}$.

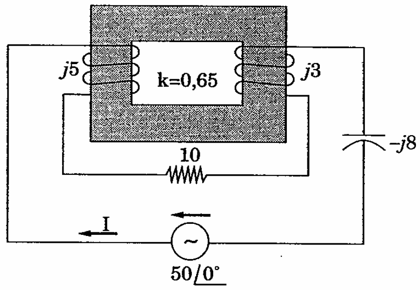


Figura 13-34

13.30 Achar o circuito equivalente para as três bobinas acopladas, mostradas na Fig. 13-35, situando os pontos, e determinar a indutância equivalente, vista dos terminais *AB*. Todos os coeficientes de acoplamento são de 0,5.
Resp.: 0,239 H.

13.31 Determinar o circuito equivalente ao da Fig. 13-36, situando os pontos, e determinar a impedância equivalente nos terminais *AB*.
Resp.: 2,54 + *j*2,26.

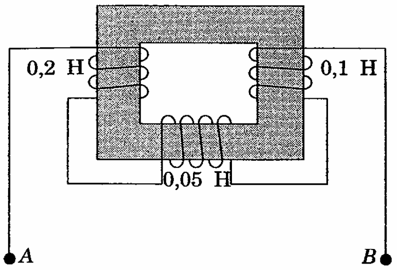


Figura 13-35

13.32 Ainda no circuito da Fig. 13-36, inverter o enrolamento de uma das bobinas e determinar a impedância equivalente.
Resp.: 2,53 + *j*0,238.

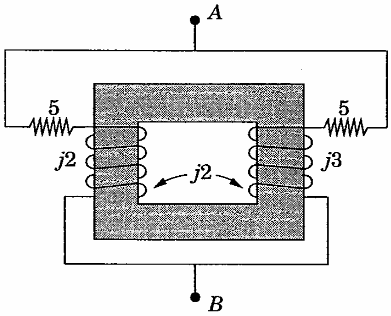


Figura 13-36

13.33 Determinar o valor de *k* e situar os pontos, no circuito em série da Fig. 13-37, de modo que o circuito esteja em ressonância em série.
Resp.: *R* = 0,177.

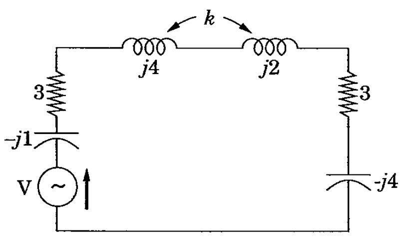


Figura 13-37

13.34 Determinar
modo que c
Resp.: *k* = (

13.35 Determinar
potência de
Resp.: *W* =

13.36 Ainda no P
posição do:
Resp.: 54,2

13.37 No circuito
Repetir par
Resp.: 1,41

13.38 No probl. 1
$\mathbf{V}_1 = 100\angle 0^\circ$
Resp.: 100

a das bobinas e

da Fig. 13-37, de

13.34 Determinar o valor de k e situar os pontos, no circuito em série da Fig. 13-38, de modo que o circuito esteja em ressonância em série.
Resp.: $k = 0{,}112$.

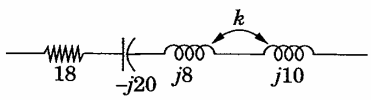


Figura 13-38

13.35 Determinar k e situar os pontos, no circuito da Fig. 13-39, de modo que a potência de saída da fonte de $50\angle 0°$ volts seja 168 watts.
Resp.: $W = 0{,}475$.

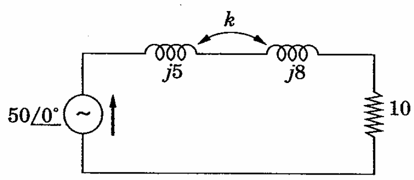


Figura 13-39

13.36 Ainda no Probl. 13.35, determinar a potência de saída da fonte, ao inverter-se a posição dos pontos. Utilizar o valor de k encontrado no Probl. 13.35.
Resp.: 54,2 watts.

13.37 No circuito da Fig. 13-40, determinar a relação $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$ que anula a corrente $\mathbf{I}_1$. Repetir para a hipótese de anular $\mathbf{I}_2$.
Resp.: $1{,}414\angle -45°$; $0{,}212\angle 32°$.

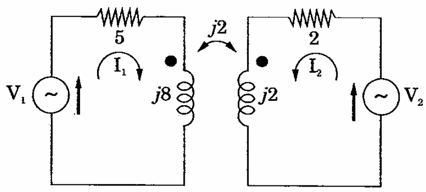


Figura 13-40

13.38 No probl. 13.37, que tensão aparece nos terminais da reatância $j8$, quando $\mathbf{V}_1 = 100\angle 0°$ e $\mathbf{I}_1 = 0$?
Resp.: $100\angle 0°$ (+ no ponto).

13.39 Determinar a reatância indutiva $j\omega M$ do circuito da Fig. 13-41, quando a potência no resistor de 5 ohms é 45,2 watts.
Resp.: $j4$.

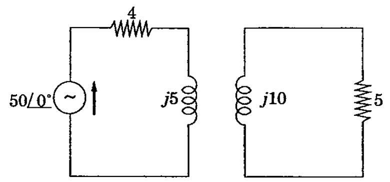


Figura 13-41

13.40 No circuito da Fig. 13-42, determinar as componentes da corrente $\mathbf{I}_2$ devidas a cada uma das fontes $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$.
Resp.: $0{,}77\angle 112{,}6°$; $1{,}72\angle 86°$.

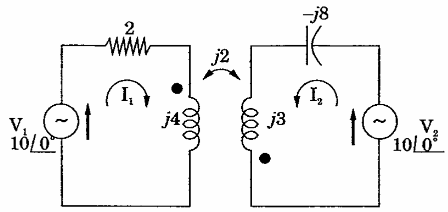


Figura 13-42

13.41 Determinar o valor de k, no circuito da Fig. 13-43, sendo de 32 watts a potência no resistor de 10 ohms.
Resp.: 0,791.

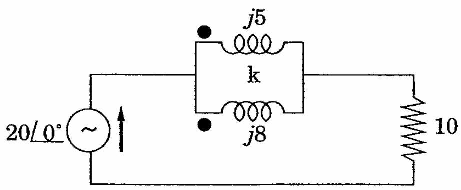


Figura 13-43

13.42 Determinar
seja máxim
Resp.: 1,4 -

13.43 Achar a imp
Resp.: 3 +

13.44 No circuito
Resp.: 25,2

13.45 Achar a imp
Resp.: 1 +

ıando a potência

13.42 Determinar a impedância de carga, $\mathbf{Z}_L$, no circuito da Fig. 13-44, de modo que seja máxima a transferência de potência nos terminais *AB*.
Resp.: 1,4 – *j*2,74Ω.

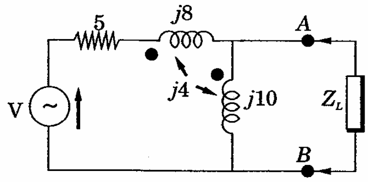
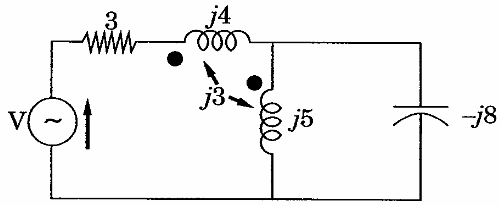


Figura 13-44

ente $\mathbf{I}_2$ devidas a

13.43 Achar a impedância de saída do circuito da Fig. 13-45, nos terminais da fonte.
Resp.: 3 + *j*36,3.

13.44 No circuito da Fig. 13-45, determinar a tensão na reatância *j*5, sendo $\mathbf{V} = 50\angle 45^\circ$.
Resp.: $25{,}2\angle 49{,}74^\circ$.



watts a potência

Figura 13-45

13.45 Achar a impedância equivalente do circuito acoplado da Fig. 13-46.
Resp.: 1 + *j*1,5.

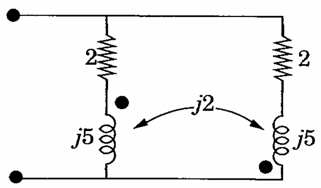


Figura 13-46

13.46 Determinar o circuito de Thevenin equivalente nos terminais *AB* do circuito da Fig. 13-47.
Resp.: **Z'** = 2 + *j*6,5; **V'** = 5 + *j*5.

13.47 Determinar o circuito equivalente de Norton nos terminais *AB* da estrutura da Fig. 13-47.
Resp.: **Z'** = 2 + *j*6,5; **I'** = $1{,}04\angle -27{,}9^\circ$.

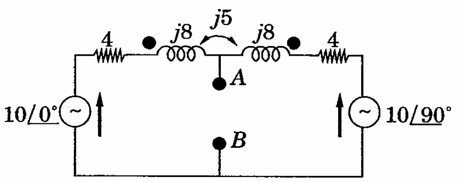


Figura 13-47

13.48 Determinar o circuito de Thevenin equivalente nos terminais *AB* do circuito da Fig. 13-48.
Resp.: **Z'** = $8{,}63\angle 48{,}75^\circ$; **V'** = $4{,}84\angle -34{,}7^\circ$.

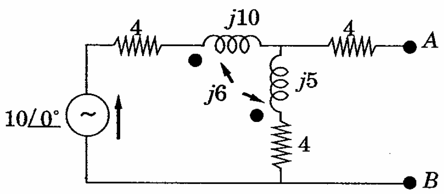


Figura 13-48

13.49 Determinar o circuito equivalente de Norton para a estrutura da Fig. 13-48.
Resp.: **Z'** = $8{,}63\angle 48{,}75^\circ$; **I'** = $0{,}560\angle -83{,}4^\circ$.

13.50 Calcular a impedância de entrada do circuito da Fig. 13-49, vista dos terminais da fonte **V**.
Resp.: 7,06 + *j*3,22.

13.51 Achar a im
Resp.: 6,2.

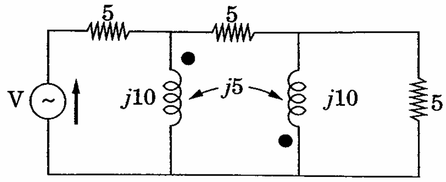


Figura 13-49

13.51 Achar a impedância equivalente da estrutura da Fig. 13-50 nos terminais *AB*.
Resp.: 6,22 + *j*4,65.

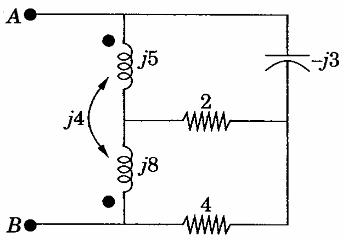


Figura 13-50

MAKRON
Books

SISTEMAS POLIFÁSICOS

Introdução

Um sistema polifásico é constituído por duas ou mais tensões iguais, com diferenças de fase fixas, fornecendo energia às cargas ligadas às linhas. No sistema bifásico, duas tensões iguais diferem em fase de 90°; no sistema trifásico, a diferença de fase entre as tensões é de 120°. Nos retificadores polifásicos usam-se, às vezes, sistemas de seis ou mais fases, com o objetivo de obter uma tensão retificada com pouca ondulação ("ripple"); o sistema trifásico é, entretanto, o comumente usado para a geração e transmissão de energia elétrica.

Sistema Bifásico

A rotação do par de bobinas perpendiculares da Fig. 14-1(*a*) num campo magnético constante acarreta tensões induzidas cuja diferença de fase constante é 90°. Com o mesmo número de espiras nas bobinas, as tensões instantâneas e dos fasores têm as mesmas amplitudes, como mostram os respectivos diagramas nas Figs. 14-1(*b*) e (*c*).

O diagrama do fasor tensão da Fig. 14-1(*b*) tem $\mathbf{V}_{BN} = V_{\text{bob}} \underline{/0^\circ}$ como referência; como conseqüência $\mathbf{V}_{AN} = V_{\text{bob}} \underline{/90^\circ}$. Se os terminais *A'* e *B'* das bobinas forem ligados, constituindo a linha N, o sistema bifásico fica contido nas três linhas A, B, N. A diferença de potencial entre as linhas A e B é $\sqrt{2}$ vezes maior que as tensões de linha para neutro e é obtida pela soma $\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AN} + \mathbf{V}_{NB} = V_{\text{bob}}\,\underline{/90^\circ} + V_{\text{bob}}\,\underline{/180^\circ} = \sqrt{2}\,V_{\text{bob}}\,\underline{/135^\circ}$.

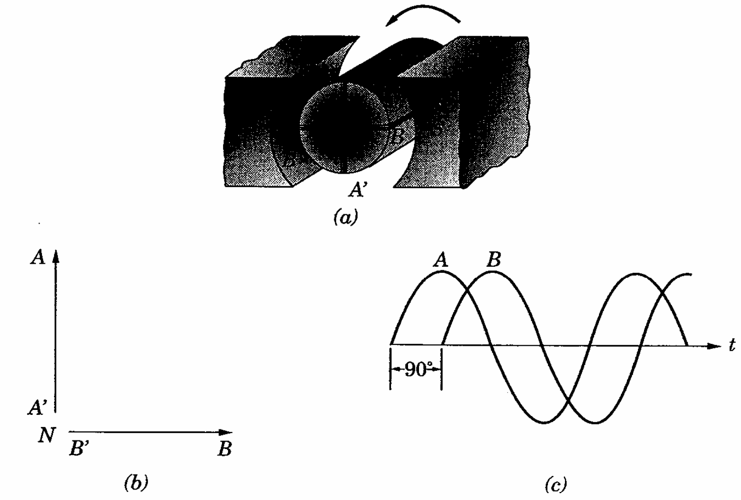


Figura 14-1 Sistema bifásico.

Sistema Trifásico

É de 120° a diferença de fase entre as tensões induzidas nas três bobinas igualmente espaçadas da Fig. 14-2(a). Na seqüência ABC, a tensão na bobina A atinge um máximo em primeiro lugar, seguida pela bobina B e, depois, pela C. Essa seqüência fica evidente pelo diagrama de fasores, sendo positiva a rotação anti-horária, onde os fasores passam por um ponto fixo na seqüência A-B-C-A-B-C ..., e também pelo traçado das tensões instantâneas da Fig. 14-2(c), onde se verifica que os máximos ocorrem na mesma ordem.

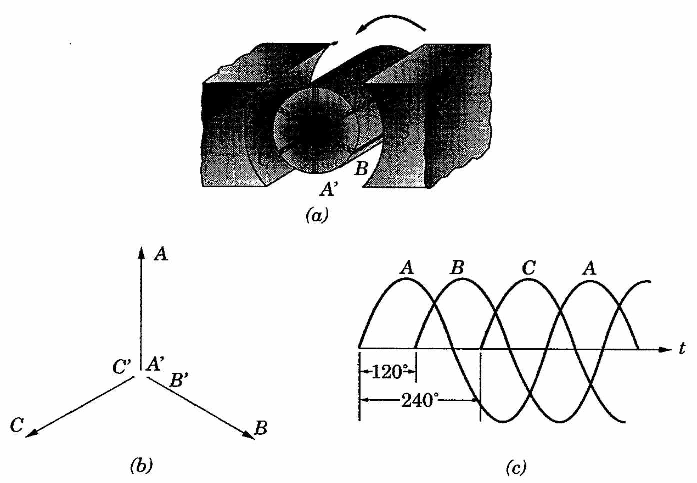


Figura 14-2 Sistema trifásico com seqüência ABC.

A rotação das bobinas em sentido oposto resulta na seqüência *CBA*, como mostra na Fig. 14-3.

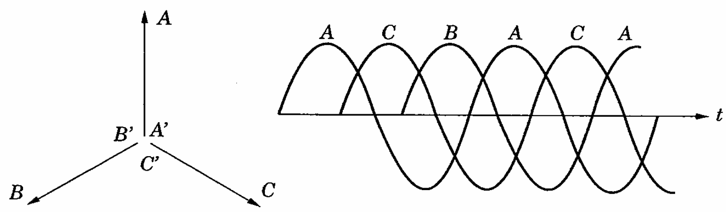
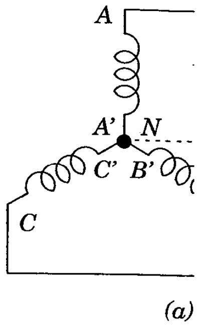


Figura 14-3 Sistema trifásico com seqüência CBA.

A máquina apresentada na Fig. 14-2(*a*) é teórica; diversas limitações práticas impedem sua utilização. Realmente, na prática, o campo gira, enquanto o enrolamento trifásico é estacionário.

A ligação dos terminais *A'*, *B'* e *C'*, como na Fig. 14-4(*a*), resulta num alternador ligado em *Y* (em estrela), ao passo que a ligação de *A* em *B'*, de *B* em

C' e de *C* em *A'*, c
ou triângulo).



Na ligaç
são iguais, enqua
em triângulo, sã
linha são $\sqrt{3}$ veze

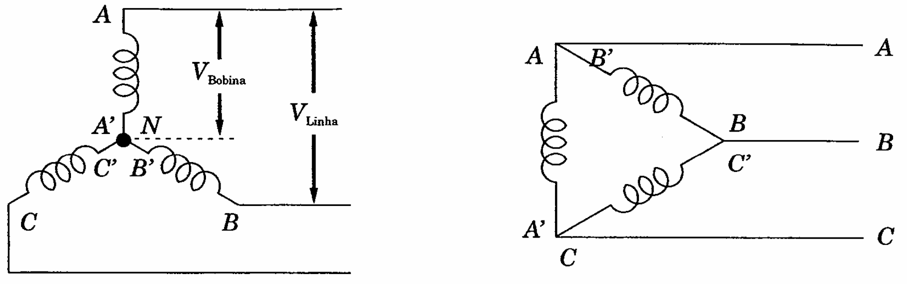
Seja qua
trifásico de tens
condutor do siste

Tensões do S

A escolh
mina os ângulos
V_{BC} foi escolhida
todas as tensões

A *tensão*
B e *C* ou *C* e *A*. N
neutro é $1/\sqrt{3}$ ve
quatro fios, *CBA*,
de linha para neu

C' e de C em A', como na Fig. 14-4(*b*), resulta num alternador ligado em Δ (delta ou triângulo).



(*a*) (*b*)

Figura 14-4

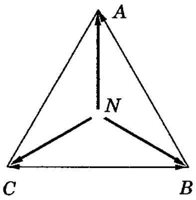
Na ligação em estrela, as correntes na bobina (ou "de fase") e na linha são iguais, enquanto a tensão de linha é $\sqrt{3}$ vezes a tensão de fase. Na ligação em triângulo, são iguais as tensões de linha e de fase, porém as correntes de linha são $\sqrt{3}$ vezes as correntes de fase. Ver Probl. 14.2.

Seja qual for a ligação, as três linhas *A*, *B* e *C* constituem um sistema trifásico de tensão. O ponto neutro da ligação em estrela fornece o quarto condutor do sistema trifásico a quatro condutores.

Tensões do Sistema Trifásico

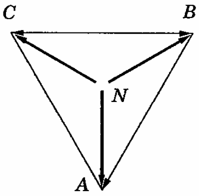
A escolha de uma tensão de referência com ângulo de fase nulo determina os ângulos de fase de todas as demais tensões do sistema. Neste capítulo, $\mathbf{V}_{BC}$ foi escolhida para referência. Os triângulos das Figs. 14-5(*a*) e (*b*) mostram todas as tensões nas seqüências *ABC* e *CBA*.

A *tensão do sistema* é a tensão entre quaisquer pares de linhas, *A* e *B*, *B* e *C* ou *C* e *A*. No sistema a quatro fios, a amplitude da tensão entre linha e neutro é $1/\sqrt{3}$ vezes a tensão de linha. Por exemplo, num sistema trifásico a quatro fios, *CBA*, de 208 volts, as tensões de linha são de 208 volts e as tensões de linha para neutro (tensões de fase) são de $208/\sqrt{3}$ ou 120 volts. A Fig. 14-5(*b*) determina os ângulos de fase das tensões. Assim, $\mathbf{V}_{BC} = 208\angle 0^\circ$, $\mathbf{V}_{AB} = 208\angle 240^\circ$, $\mathbf{V}_{CA} = 208\angle 120^\circ$, $\mathbf{V}_{AN} = 120\angle -90^\circ$, $\mathbf{V}_{BN} = 120\angle 30^\circ$ e $\mathbf{V}_{CN} = 120\angle 150^\circ$.



$V_{AB} = V_L\angle 120^\circ$
$V_{BC} = V_L\angle 0^\circ$
$V_{CA} = V_L\angle 240^\circ$
$V_{AN} = (V_L/\sqrt{3})\angle 90^\circ$
$V_{BN} = (V_L/\sqrt{3})\angle -30^\circ$
$V_{CN} = (V_L/\sqrt{3})\angle -150^\circ$

(*a*) Seqüência *ABC*



$V_{AB} = V_L\angle 240^\circ$
$V_{BC} = V_L\angle 0^\circ$
$V_{CA} = V_L\angle 120^\circ$
$V_{AN} = (V_L/\sqrt{3})\angle -90^\circ$
$V_{BN} = (V_L/\sqrt{3})\angle -30^\circ$
$V_{CN} = (V_L/\sqrt{3})\angle -150^\circ$

(*a*) Seqüência *CBA*

Figura 14-5

Cargas Trifásicas Equilibradas

Exemplo 1 Um sistema *ABC* trifásico a três condutores, 110 volts, alimenta uma carga em triângulo, constituída por três impedâncias iguais de $5\angle 45^\circ$ ohms. Determinar as correntes de linha $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$ e traçar o diagrama de fasores.

A Fig. 14-6 esquematiza o circuito, aplicadas as tensões e representados os sentidos positivos das correntes de linha e de fase. Daí, temos:

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}} = \frac{110\angle 120^\circ}{5\angle 45^\circ} = 22\angle 75^\circ = 5{,}7 + j21{,}2$$

$$\mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}} = \frac{110\angle 0^\circ}{5\angle 45^\circ} = 22\angle -45^\circ = 15{,}55 - j15{,}55$$

$$\mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}} = \frac{110\angle 240^\circ}{5\angle 45^\circ} = 22\angle -195^\circ = -21{,}2 - j5{,}7$$

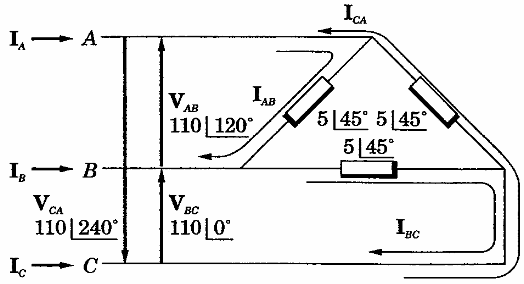


Figura 14-6

Aplicando a lei de Kirchhoff para as correntes a cada vértice da carga, tem-se:

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} = 22\angle 75^\circ - 22\angle 195^\circ = 38{,}1\angle 45^\circ$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{BA} + \mathbf{I}_{BC} = -22\angle 75^\circ + 22\angle -45^\circ = 38{,}1\angle 75^\circ$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{CA} + \mathbf{I}_{CB} = 22\angle 195^\circ - 22\angle -45^\circ = 38{,}1\angle 165^\circ$$

O diagrama de fasores da Fig. 14-7 mostra as correntes de linha, equilibradas, de 38,1 ampères com ângulos de fase de 120° entre elas.

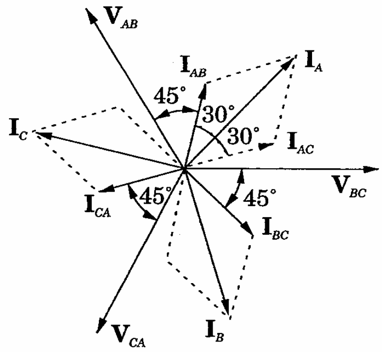


Figura 14-7

Para uma carga equilibrada ligada em triângulo, a tensão de linha e a tensão de fase são iguais e a corrente de linha é $\sqrt{3}$ vezes a corrente de fase.

Exemplo 2 Um sistema *CBA* trifásico a quatro condutores, 208 volts, alimenta uma carga em estrela, constituída por impedâncias $20\underline{/-30^\circ}$ ohms. Calcular as correntes de linha e traçar o diagrama de fasores.

A Fig. 14-8 mostra o circuito, aplicadas as tensões de linha para neutro da Fig. 14-5(*b*). O diagrama apresenta todas as correntes de linha, verificando-se que elas retornam pelo condutor neutro. Assim:

$$\mathbf{I}_A = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}} = \frac{120\underline{/-90^\circ}}{20\underline{/-30^\circ}} = 6{,}0\underline{/-60^\circ}$$

$$\mathbf{I}_B = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}} = \frac{120\underline{/30^\circ}}{20\underline{/-30^\circ}} = 6{,}0\underline{/60^\circ}$$

$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}} = \frac{120\underline{/150^\circ}}{20\underline{/-30^\circ}} = 6{,}0\underline{/180^\circ}$$

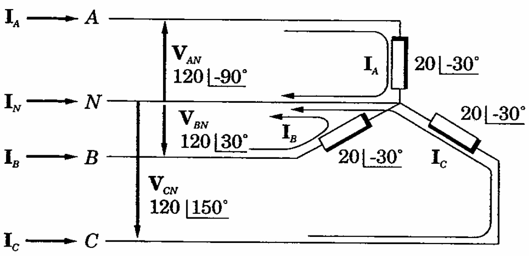


Figura 14-8

Admitindo positiva a corrente do neutro, quando se dirige para a carga, tem-se:

$$\mathbf{I}_N = -(\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C) = -(6{,}0\underline{/-60^\circ} + 6{,}0\underline{/60^\circ} + 6{,}0\underline{/180^\circ}) = 0$$

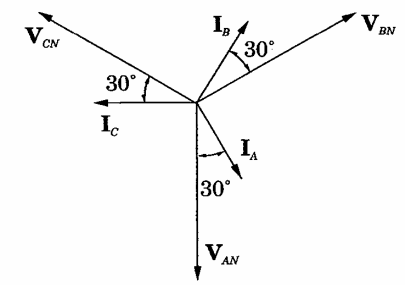


Figura 14-9

O diagrama de fasores da Fig. 14-9 mostra as correntes equilibradas de linha, estando cada uma delas adiantada, em relação à tensão simples correspondente, de um ângulo igual ao ângulo da impedância respectiva.

Numa carga equilibrada ligada em estrela, as correntes de linha são iguais às correntes de fase. A corrente no neutro é nula e a tensão de linha é $\sqrt{3}$ *vezes a tensão de fase, ou seja,* $V_L = \sqrt{3}\, V_F$.

Circuito Monofásico Equivalente para Cargas Equilibradas

De conformidade com as transformações de Y para Δ, vistas no Capítulo 12, um conjunto de três impedâncias $\mathbf{Z}_\Delta$, numa ligação em triângulo, é equivalente a um conjunto de três impedâncias iguais $\mathbf{Z}_Y$ ligadas em estrela, onde $\mathbf{Z}_Y = (1/3)\mathbf{Z}_\Delta$. É possível, portanto, um cálculo mais direto do circuito em estrela para cargas trifásicas equilibradas, ligadas de qualquer das duas formas.

O circuito equivalente de uma linha é uma fase do circuito trifásico a quatro condutores em estrela da Fig. 14-10, com a diferença de que se emprega uma tensão de amplitude igual à de linha para neutro e de ângulo de fase igual a zero. A corrente de linha calculada para esse circuito tem um ângulo de fase referido ao ângulo de fase nula da tensão. As correntes de linha reais $\mathbf{I}_A$; $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$ estarão avançadas ou atrasadas, em relação às respectivas tensões de linha para neutro, do mesmo ângulo de fase.

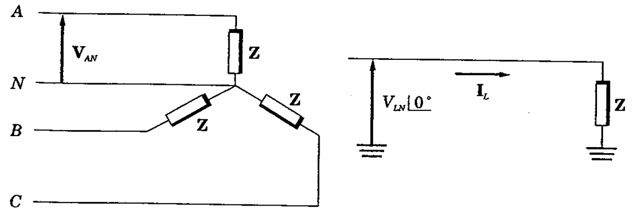


Figura 14-10 Circuito monofásico equivalente.

Exemplo 3 Calcular as correntes de linha do exemplo 1 pelo método do equivalente monofásico.

Traça-se o circuito de uma linha e assinala-se um Δ na carga, para lembrar de que as impedâncias estavam ligadas em triângulo. A impedância do equivalente ligado em estrela é: $\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_\Delta/3 = (5/3)\angle 45°$ e a tensão de linha é:

$$V_{LN} = V_L/\sqrt{3} = 110/\sqrt{3} = 63{,}5$$

A corrente de linha é, portanto, dada por:

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_{LN}}{\mathbf{Z}} = \frac{63{,}5\angle 0°}{(5/3)\angle 45°} = 38{,}1\angle -45°$$

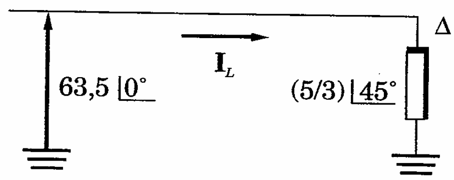


Figura 14-11

Como esta corrente está atrasada de 45° em relação à tensão, as correntes de linha $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$ estão atrasadas de 45° em relação às suas respectivas tensões $\mathbf{V}_{AN}$, $\mathbf{V}_{BN}$ e $\mathbf{V}_{CN}$. Os ângulos dessas tensões são obtidos do triângulo da Fig. 14-5(*a*). As tensões entre linha e neutro (tensões de fase) e as correspondentes correntes de linha estão reunidas a seguir:

$\mathbf{V}_{AN} = 63,$

$\mathbf{V}_{BN} = 63,$

$\mathbf{V}_{CN} = 63,$

Estas corr
correntes
$I_F = I_L/\sqrt{}$
obtidos, es
seguida, d
de 45°. As

$\mathbf{V}_{AB} = 110$

$\mathbf{V}_{BC} = 110$

$\mathbf{V}_{CA} = 110$

Carga Dese

A soluç
consiste em se c
nós da lei de Kir
As correntes de
ocorre nas carga

Exemplo
tores, tem
$\mathbf{Z}_{CA} = 15\angle$
fasores.

Traça-se c
fasores te
independe

$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_{AB}}$

$$\mathbf{V}_{AN} = 63{,}5\angle 90^\circ \qquad \mathbf{I}_A = 38{,}1\angle 90^\circ - 45^\circ \quad = 38{,}1\angle 45^\circ$$

$$\mathbf{V}_{BN} = 63{,}5\angle -30^\circ \qquad \mathbf{I}_B = 38{,}1\angle -30^\circ - 45^\circ \quad = 38{,}1\angle -75^\circ$$

$$\mathbf{V}_{CN} = 63{,}5\angle -150^\circ \qquad \mathbf{I}_C = 38{,}1\angle -150^\circ - 45^\circ \quad = 38{,}1\angle -195^\circ$$

Estas correntes são idênticas às obtidas no exemplo 1. Caso se deseje, as correntes de fase da carga ligada em triângulo poderão ser calculadas por $I_F = I_L/\sqrt{3} = 38{,}1/\sqrt{3} = 22$. Os ângulos de fase dessas correntes são obtidos, escrevendo-se os ângulos das tensões de linha [Fig. 14-5(a)] e, em seguida, determinando-se as correntes, de modo que estejam atrasadas de 45°. Assim, temos:

$$\mathbf{V}_{AB} = 110\angle 120^\circ \qquad \mathbf{I}_{AB} = 22\angle 120^\circ - 45^\circ \quad = 22\angle 75^\circ$$

$$\mathbf{V}_{BC} = 110\angle 0^\circ \qquad \mathbf{I}_{BC} = 22\angle 0^\circ - 45^\circ \quad = 22\angle -45^\circ$$

$$\mathbf{V}_{CA} = 110\angle 240^\circ \qquad \mathbf{I}_{CA} = 22\angle 240^\circ - 45^\circ \quad = 22\angle 195^\circ$$

Carga Desequilibrada em Triângulo

A solução, quando a carga é desequilibrada e ligada em triângulo, consiste em se calcularem as correntes de fase e, em seguida, por aplicação aos nós da lei de Kirchhoff para as correntes, determinar as três correntes de linha. As correntes de linha não serão iguais e sua defasagem não será de 120°, como ocorre nas cargas equilibradas.

Exemplo 4 Um sistema trifásico ABC de 240 volts, a três condutores, tem carga ligada em triângulo com $\mathbf{Z}_{AB} = 10\angle 0^\circ$, $\mathbf{Z}_{BC} = 10\angle 30^\circ$ e $\mathbf{Z}_{CA} = 15\angle -30^\circ$. Calcular as três correntes de linha e traçar o diagrama de fasores.

Traça-se o diagrama do circuito, como na Fig. 14-12, e aplicam-se os fasores tensão. Conforme mostra o diagrama, as correntes de fase são independentes e dadas por:

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_{AB}} = \frac{240\angle 120^\circ}{10\angle 0^\circ} = 24\angle 120^\circ, \quad \mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_{BC}} = 24\angle -30^\circ,$$

$$\mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_{CA}} = 16\,\angle 270^\circ$$

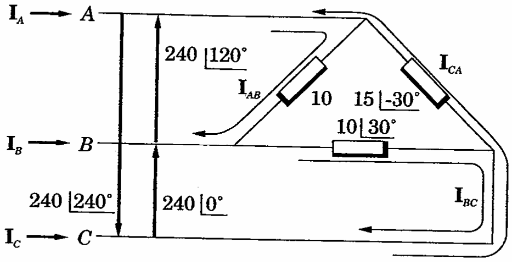


Figura 14-12

Aplicando aos nós a lei de Kirchhoff para as correntes, temos:

$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} = \;\; 24\angle 120^\circ \; - 16\angle 270^\circ = 38{,}7\angle 108{,}1^\circ$

$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{BA} + \mathbf{I}_{BC} = \;\; -24\angle 120^\circ + 24\angle -30^\circ = 46{,}4\angle -45^\circ$

$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{CA} + \mathbf{I}_{CB} = \;\; 16\angle 270^\circ \; - 24\angle -30^\circ = 21{,}2\angle 190{,}9^\circ$

Notar que os defasamentos não são de 120°.

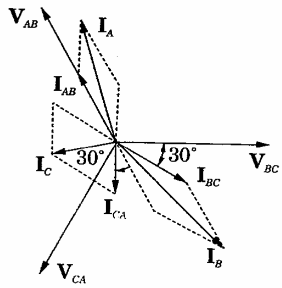


Figura 14-13

Carga Dese
com Quatro

Num sis
quando a carga é
carga permanece
(tensão de fase).

Exemplo
carga ligad
as corrente

Traça-se o
escolhendo-
pendentes

$\mathbf{I}_A = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}_A}$

$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}_C}$

A corrente
positivo o se

$\mathbf{I}_N = -(\mathbf{I}_A +$

A Fig. 14-15

Carga Desequilibrada, Ligada em Estrela, com Quatro Condutores

Num sistema a quatro fios, o condutor neutro transporta corrente quando a carga é desequilibrada, e a tensão em cada uma das impedâncias de carga permanece fixa e de amplitude igual à existente entre linha e neutro (tensão de fase). As correntes de linha são desiguais e sua defasagem não é 120°.

Exemplo 5 Um sistema *CBA* trifásico a quatro fios, 208 volts, tem carga ligada em estrela com $\mathbf{Z}_A = 6\angle 0°$, $\mathbf{Z}_B = 6\angle 30°$ e $\mathbf{Z}_C = 5\angle 45°$. Determinar as correntes de linha e no neutro. Traçar o diagrama de fasores.

Traça-se o diagrama do circuito (Fig 14-14), aplicam-se os fasores tensão, escolhendo-se as correntes de linha indicadas. As correntes são independentes e dadas por:

$$\mathbf{I}_A = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}_A} = \frac{120\angle -90°}{6\angle 0°} = 20\angle -90°,\quad \mathbf{I}_B = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}_B} = 20\angle 0°,$$

$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}_C} = 24\angle 105°$$

A corrente no neutro é a soma das correntes de linha $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$. Supondo positivo o sentido de $\mathbf{I}_N$ para a carga, temos:

$$\mathbf{I}_N = -(\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C) = -(20\angle -90° + 20\angle 0° + 24\angle 105°) = 14{,}1\angle -166{,}9°$$

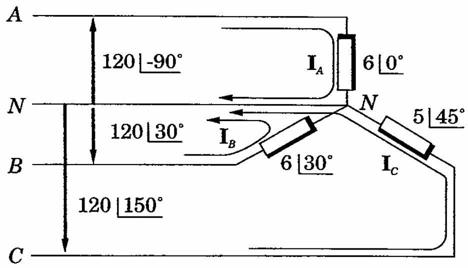


Figura 14-14

A Fig. 14-15 mostra o diagrama de fasores.

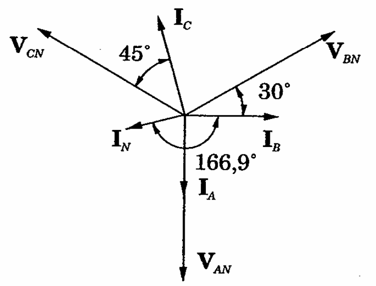


Figura 14-15

Carga Desequilibrada, Ligada em Estrela, com Três Condutores

Estando apenas as três linhas *A*, *B* e *C* ligadas a uma carga desequilibrada em estrela, o ponto comum das três impedâncias de carga não está no potencial do neutro e é designado por "*O*", em vez de "*N*". As tensões nas três impedâncias podem diferir consideravelmente do valor entre linha e neutro, como mostra o triângulo das tensões que relaciona todas as tensões no circuito. É de particular interesse a diferença de tensão entre "*O*" e "*N*", *tensão de deslocamento do neutro.*

Exemplo 6 Um sistema trifásico *CBA*, a três fios, 208 volts, tem carga $\mathbf{Z}_A = 6\underline{/0^\circ}$, $\mathbf{Z}_B = 6\underline{/30^\circ}$ e $\mathbf{Z}_C = 5\underline{/45^\circ}$, ligada em estrela. Determinar as correntes de linha e o fasor tensão em cada impedância. Traçar o triângulo das tensões e determinar a tensão de deslocamento do neutro, $\mathbf{V}_{ON}$.

Traça-se o diagrama do circuito e selecionam-se as correntes de malha $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$, como mostra a Fig. 14-16. Escrevem-se as correspondentes equações matriciais de $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$, como se segue:

$$\begin{bmatrix} 6\underline{/0^\circ} + 6\underline{/30^\circ} & -6\underline{/30^\circ} \\ -6\underline{/30^\circ} & 6\underline{/30^\circ} + 5\underline{/45^\circ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208\underline{/240^\circ} \\ 208\underline{/0^\circ} \end{bmatrix}$$

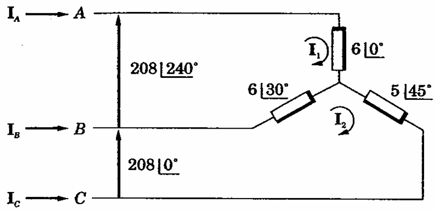


Figura 14-16

Daí, vem: $\mathbf{I}_1 = 23{,}3\underline{/261{,}1^\circ}$ e $\mathbf{I}_2 = 26{,}5\underline{/-63{,}4^\circ}$.

As correntes de linha $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$, dirigidas como mostra o diagrama, são:

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_1 = 23{,}3\underline{/261{,}1^\circ}$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1 = 26{,}5\underline{/-63{,}4^\circ} - 23{,}3\underline{/261{,}1^\circ} = 15{,}45\underline{/-2{,}5^\circ}$$

$$\mathbf{I}_C = -\mathbf{I}_2 = 26{,}5\underline{/116{,}6^\circ}$$

As tensões nas três impedâncias são dadas pelos produtos das correntes de linha pelas respectivas impedâncias. Logo:

$$\mathbf{V}_{AO} = \mathbf{I}_A\mathbf{Z}_A = 23{,}3\underline{/261{,}1^\circ}\,(6\underline{/0^\circ}) = 139{,}8\underline{/261{,}1^\circ}$$

$$\mathbf{V}_{BO} = \mathbf{I}_B\mathbf{Z}_B = 15{,}45\underline{/-2{,}5^\circ}\,(6\underline{/30^\circ}) = 92{,}7\underline{/27{,}5^\circ}$$

$$\mathbf{V}_{CO} = \mathbf{I}_C\mathbf{Z}_C = 26{,}5\underline{/116{,}6^\circ}\,(5\underline{/45^\circ}) = 132{,}5\underline{/161{,}6^\circ}$$

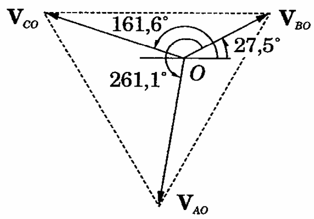


Figura 14-17

O diagrama de fasores dessas três tensões, mostrado na Fig. 14-17, forma um triângulo eqüilátero. Na Fig. 14-18, reconstrói-se esse triângulo, acrescentando-se o neutro e aparecendo, assim, a tensão de deslocamento do neutro, $\mathbf{V}_{ON}$. Essa tensão pode ser calculada utilizando-se qualquer um dos três pontos, *A*, *B* ou *C*, e seguindo-se a notação convencional de duplo índice. Utilizando o ponto *A*, temos:

$$\mathbf{V}_{ON} = \mathbf{V}_{OA} + \mathbf{V}_{AN} = -139{,}8\underline{/261{,}1^\circ} + 120\underline{/-90^\circ}$$

$$= 28{,}1\underline{/39{,}8^\circ}$$

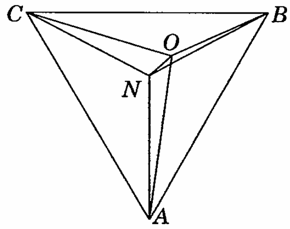


Figura 14-18

Método do Deslocamento do Neutro, Carga Desequilibrada em Estrela a Três Condutores

No exemplo 6, a tensão $\mathbf{V}_{ON}$ de deslocamento do neutro foi obtida em função das tensões na carga. Se determinarmos uma expressão para $\mathbf{V}_{ON}$ independente das tensões na carga, as correntes e tensões, pedidas no exemplo 6, serão obtidas mais diretamente, como mostra o exemplo 7.

Para obter a tensão de deslocamento do neutro, escrevem-se as correntes de linha em termos das tensões na carga e das admitâncias da carga.

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{V}_{AO}\mathbf{Y}_A, \quad \mathbf{I}_B = \mathbf{V}_{BO}\mathbf{Y}_B,$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{V}_{CO}\mathbf{Y}_C \qquad (1)$$

Em seguida, aplica-se a lei de Kirchhoff para as correntes ao nó *O* (Fig. 14-19), escrevendo:

$$\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C = 0 \qquad (2)$$

$$\mathbf{V}_{AO}\mathbf{Y}_A + \mathbf{V}_{BO}\mathbf{Y}_B + \mathbf{V}_{CO}\mathbf{Y}_C = 0 \qquad (3)$$

Do diagrama da Fig. 14-18, tiram-se as tensões $\mathbf{V}_{AO}$, $\mathbf{V}_{BO}$ e $\mathbf{V}_{CO}$ em função das suas componentes, isto é:

$$\mathbf{V}_{AO} = \mathbf{V}_{AN} + \mathbf{V}_{NO} \qquad \mathbf{V}_{BO} = \mathbf{V}_{BN} + \mathbf{V}_{NO} \qquad \mathbf{V}_{CO} = \mathbf{V}_{CN} + \mathbf{V}_{NO} \tag{4}$$

Substituindo as expressões de (*4*) em (*3*), temos:

$$(\mathbf{V}_{AN} + \mathbf{V}_{NO})\mathbf{Y}_A + (\mathbf{V}_{BN} + \mathbf{V}_{NO})\mathbf{Y}_B + (\mathbf{V}_{CN} + \mathbf{V}_{NO})\mathbf{Y}_C = 0 \tag{5}$$

onde: $$\mathbf{V}_{ON} = \frac{\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A + \mathbf{V}_{BN}\mathbf{Y}_B + \mathbf{V}_{CN}\mathbf{Y}_C}{\mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_B + \mathbf{Y}_C} \tag{6}$$

As tensões $\mathbf{V}_{AN}$, $\mathbf{V}_{BN}$ e $\mathbf{V}_{CN}$ da equação (*6*) são obtidas pelo triângulo da Fig. 14-5, para a seqüência dada no problema. As admitâncias $\mathbf{Y}_A$, $\mathbf{Y}_B$ e $\mathbf{Y}_C$ são os inversos das impedâncias de carga $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{Z}_B$ e $\mathbf{Z}_C$. Portanto, como todos os termos de (*6*) são dados ou obtidos facilmente, a tensão de deslocamento do neutro pode ser calculada e empregada na determinação das correntes de linha.

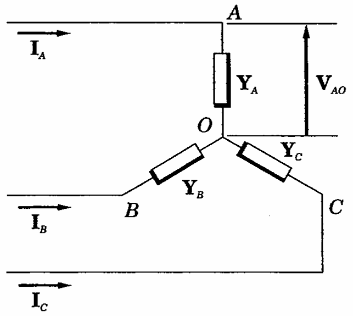


Figura 14-19

Exemplo 7 Determinar as correntes de linha e as tensões na carga do exemplo 6 pelo método do deslocamento do neutro.

Da Fig. 14-20, a equação da tensão de deslocamento do neutro é:

$$\mathbf{V}_{ON} = \frac{\mathbf{V}_{AN}\,\mathbf{Y}_A + \mathbf{V}_{BN}\,\mathbf{Y}_B + \mathbf{V}_{CN}\,\mathbf{Y}_C}{\mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_B + \mathbf{Y}_C}$$

onde:

$$\mathbf{Y}_A = 1/(6\angle 0^\circ) = 0{,}1667\angle 0^\circ \qquad = 0{,}1667$$

$$\mathbf{Y}_B = 1/(6\angle 30^\circ) = 0{,}1667\angle -30^\circ = 0{,}1443 - j0{,}0833$$

$$\mathbf{Y}_C = 1/(5\angle 45^\circ) = 0{,}20\angle -45^\circ \quad = \underline{0{,}1414 - j0{,}1414}$$

$$\mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_B + \mathbf{Y}_C \quad = 0{,}4524 - j0{,}2247$$

$$= 0{,}504\angle -26{,}5^\circ$$

e

$$\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A = 120\angle -90^\circ(0{,}1667\angle 0^\circ) = 20\angle -90^\circ = -j20$$

$$\mathbf{V}_{BN}\mathbf{Y}_B = 120\angle 30^\circ(0{,}1667\angle -30^\circ) = 20\angle 0^\circ = 20$$

$$\mathbf{V}_{CN}\mathbf{Y}_C = 120\angle 150^\circ(0{,}20\angle -45^\circ) = 24\angle 105^\circ = \underline{-6{,}2 + j23{,}2}$$

$$\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A + \mathbf{V}_{BN}\mathbf{Y}_B + \mathbf{V}_{CN}\mathbf{Y}_C = 13{,}8 + j3{,}2 = 14{,}1\angle 13{,}1^\circ$$

Então, finalmente: $\mathbf{V}_{ON} = 14{,}1\angle 13{,}1^\circ / 0{,}504\angle -26{,}5^\circ = 28{,}0\angle 39{,}6^\circ$

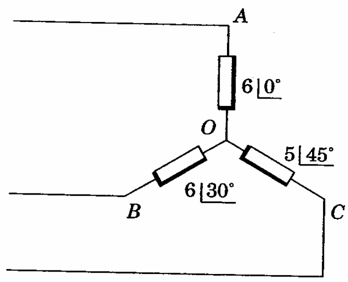


Figura 14-20

As tensões $\mathbf{V}_{AO}$, $\mathbf{V}_{BO}$ e $\mathbf{V}_{CO}$ são obtidas com o emprego de $\mathbf{V}_{NO}$ e da tensão apropriada de linha para neutro. Assim:

$$\mathbf{V}_{AO} = \mathbf{V}_{AN} + \mathbf{V}_{NO} = 120\angle -90^\circ - 28{,}0\angle 39{,}6^\circ = 139{,}5\angle 261{,}1^\circ$$

$$\mathbf{V}_{BO} = \mathbf{V}_{BN} + \mathbf{V}_{NO} = 120\angle 30^\circ - 28{,}0\angle 39{,}6^\circ = 92{,}5\angle 27{,}1^\circ$$

$$\mathbf{V}_{CO} = \mathbf{V}_{CN} + \mathbf{V}_{NO} = 120\angle 150^\circ - 28{,}0\angle 39{,}6^\circ = 132{,}5\angle 161{,}45^\circ$$

As correntes de linha obtêm-se facilmente a partir das tensões e das correspondentes admitâncias de carga. Assim:

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{V}_{AO}\mathbf{Y}_A = 139{,}5\angle 261{,}1^\circ(0{,}1667\angle 0^\circ) = 23{,}2\angle 261{,}1^\circ$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{V}_{BO}\mathbf{Y}_B = 92{,}5\angle 27{,}1^\circ(0{,}1667\angle -30^\circ) = 15{,}4\angle -2{,}9^\circ$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{V}_{CO}\mathbf{Y}_C = 132{,}5\angle 161{,}45^\circ(0{,}20\angle -45^\circ) = 26{,}6\angle 116{,}45^\circ$$

As correntes e tensões acima conferem, com boa aproximação, com os resultados do exemplo 6.

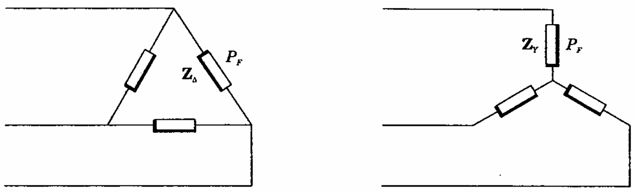
Potência nas Cargas Trifásicas Equilibradas

Já que a corrente é a mesma nas impedâncias de fase das cargas equilibradas em estrela ou em triângulo, a potência de fase é igual a um terço da potência total. A tensão na impedância $\mathbf{Z}_\Delta$ da Fig. 14-21(a) é *tensão de linha* e a corrente é *corrente de fase*. O ângulo entre a tensão e a corrente é o ângulo da impedância. A potência de fase é, então, dada por:

$$P_F = V_L\, I_F \cos\phi \tag{7}$$

e a potência total é:

$$P_T = 3\, V_L\, I_F \cos\phi \tag{8}$$



(a) (b)

Figura 14-21

Como, nas cargas equilibradas em triângulo, $I_L = \sqrt{3}\, I_F$, temos:

$$P_L = \sqrt{3}\ V_L I_F \cos \phi \qquad (9)$$

Na Fig. 4-21(b), as impedâncias estão ligadas em estrela, as correntes são *correntes de linha* e a tensão em $\mathbf{Z}_y$ é *tensão de fase*. O ângulo entre elas é o ângulo da impedância. A potência de fase é, então, dada por:

$$P_F = V_F I_L \cos \phi \qquad (10)$$

e a potência total é

$$P_T = 3\, V_F I_L \cos \phi \qquad (11)$$

Como $\quad V_L = \sqrt{3}\ V_F$

$$P_T = \sqrt{3}\ V_L I_L \cos \phi \qquad (12)$$

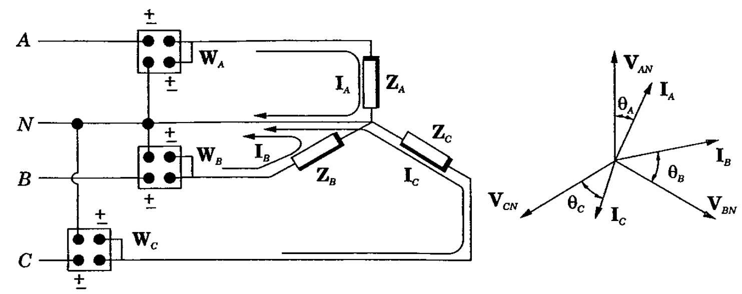
Como as equações (9) e (12) são idênticas, a potência em qualquer carga trifásica equilibrada é dada por $\sqrt{3} V_L I_L \cos \phi$, onde ϕ é o ângulo da impedância de carga ou o ângulo da impedância equivalente, na hipótese de serem várias cargas equilibradas, alimentadas pelo mesmo sistema.

Os volts-ampères totais N_T (potência aparente total) e a potência reativa total Q_T foram relacionadas a P_T no Capítulo 7. Assim, para uma carga trifásica equilibrada, a potência ativa, a potência aparente e a potência reativa são dadas por

$$P_T = \sqrt{3}\ V_L I_L \cos \phi;\ N_T = \sqrt{3}\ V_L I_L;\ Q_T = \sqrt{3}\ V_L I_L \operatorname{sen} \phi \qquad (13)$$

Wattímetros e Cargas em Estrela a Quatro Condutores

Um wattímetro é um instrumento com uma bobina de potencial e uma bobina de corrente, arranjadas de forma que sua deflexão seja proporcional a $VI \cos \phi$, onde ϕ é o ângulo entre a tensão e a corrente. Uma carga ligada em estrela, a quatro condutores, exige três wattímetros com um medidor instalado em cada linha, como mostra a Fig. 14-22(a).



(*a*) (*b*)

Figura 14-22

O diagrama de fasores da Fig. 14-22(*b*) admite uma corrente atrasada na fase *A* e adiantada nas fases *B* e *C*, com ângulo de fase ϕ_A, ϕ_B e ϕ_C, respectivamente. As leituras dos wattímetros são, então:

$$W_A = V_{AN} I_A \cos \sphericalangle_A^{AN}, \; W_B = V_{BN} I_B \cos \sphericalangle_B^{BN}, \; W_C = V_{CN} I_C \cos \sphericalangle_C^{CN} \qquad (14)^*$$

O wattímetro W_A lê a potência na fase *A*, e os wattímetros W_B e W_C lêem nas fases *B* e *C*, respectivamente. A potência total é:

$$P_T = W_A + W_B + W_C \qquad (15)$$

Método dos Dois Wattímetros

A potência total em uma carga trifásica a três condutores é obtida pela soma das leituras de dois wattímetros ligados em duas linhas quaisquer, estando sua bobinas de potencial ligadas à terceira linha, como mostra a Fig. 14-23. As leituras dos medidores são:

$$W_A = V_{AB} I_A \cos \sphericalangle_A^{AB} \quad \text{e} \quad W_C = V_{CB} I_C \cos \sphericalangle_C^{CB} \qquad (16)$$

* N. T. O índice duplo no ângulo de fase indica que o mesmo se refere à tensão e à corrente correspondentes.

Aplicando a lei de Kirchhoff para as correntes aos nós A e C da carga em triângulo, tem-se:

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{CA} + \mathbf{I}_{CB} \tag{17}$$

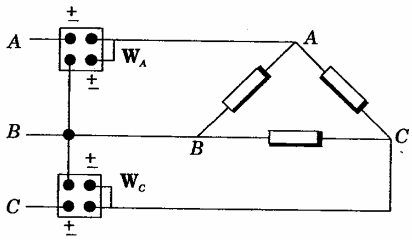


Figura 14-23

Substituindo nas equações (*16*) os valores de I_A e I_C, dados por (*17*), temos:

$$W_A = V_{AB} I_{AB} \cos \sphericalangle^{AB}_{AB} + V_{AB} I_{AC} \cos \sphericalangle^{AB}_{AC}$$

$$W_C = V_{CB} I_{CA} \cos \sphericalangle^{CB}_{CA} + V_{CB} I_{CB} \cos \sphericalangle^{CB}_{CB} \tag{18}$$

Os termos $V_{AB} I_{AB} \cos \phi_{AB/AB}$ e $V_{CB} I_{CB} \cos \phi_{CB/CB}$ são facilmente identificados como as potências nas fases AB e CB da carga. Os dois termos restantes contêm $V_{AB} I_{AC}$ e $V_{CB} I_{CA}$ que, agora, podem ser escritos como $V_L I_{AC}$, já que V_{AB} e V_{CB} são tensões de linha e $I_{AC} = I_{CA}$. Para identificar esses dois termos, construímos o diagrama de fasores da Fig. 14-24, onde admitimos a corrente I_{AC} atrasada de ϕ, em relação a V_{AC}.

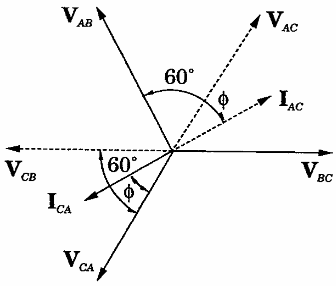


Figura 14-24

Do diagrama, escrevemos:

$$\sphericalangle_{AC}^{AB} = 60^\circ + \phi \quad \text{e} \quad \sphericalangle_{CA}^{CB} = 60^\circ - \phi \tag{19}$$

Somando, agora, os dois termos que restaram de *(18)* e substituindo $\sphericalangle_{AC}^{AB} = 60^\circ + \phi$ e $\sphericalangle_{CA}^{CB} = 60^\circ - \phi$, temos:

$$V_L I_{AC} \cos (60^\circ + \phi) + V_L I_{AC} \cos (60^\circ - \phi) \tag{20}$$

Como $\cos (a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$, escrevemos:

$$V_L I_{AC} (\cos 60^\circ \cos \phi - \operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} \phi + \cos 60^\circ \cos \phi + \operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} \phi) \tag{21}$$

ou: $$V_L I_{AC} \cos \phi \tag{22}$$

que é a potência na fase restante da carga, a fase AC. Verifica-se, assim, que dois wattímetros indicam a carga total numa carga ligada em triângulo. Deixamos ao leitor, como exercício, a aplicação do método dos dois wattímetros a uma carga ligada em estrela.

Aplicação do Método dos Dois Wattímetros a Cargas Equilibradas

Para mostrar a aplicação do método a cargas equilibradas, consideremos as três impedâncias iguais, ligadas em estrela, mostradas na Fig. 14-25(*a*). A Fig. 14-25(*b*) apresenta o diagrama de fasores para a seqüência ABC, admitindo-se a corrente atrasada de um ângulo ϕ.

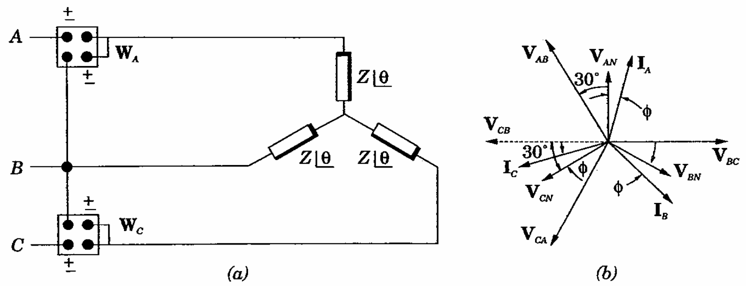


Figura 14-25

Com os wattímetros na linhas A e C, suas leituras são:

$$W_A = V_{AB} I_A \cos \measuredangle_A^{AB} \quad \text{e} \quad W_C = V_{CB} I_C \cos \measuredangle_C^{CB} \tag{23}$$

Do diagrama de fasores,

$$\measuredangle_A^{AB} = 30^\circ + \phi \quad \text{e} \quad \measuredangle_C^{CB} = 30^\circ - \phi \tag{24}$$

Substituindo (*24*) em (*23*), tem-se:

$$W_A = V_{AB} I_A \cos (30^\circ + \phi) \quad \text{e} \quad W_C = V_{CB} I_C \cos (30^\circ - \phi) \tag{25}$$

Quando o método dos dois wattímetros é usado numa carga equilibrada, as leituras dos wattímetros são $V_L I_L \cos (30^\circ + \phi)$ e $V_L I_L \cos (30^\circ - \phi)$, onde ϕ é o ângulo da impedância. As duas leituras podem ser empregadas para a determinação do ângulo ϕ.

Como, em geral, não conhecemos a ordem relativa na seqüência, temos (escrevendo a expressão de W_1 e usando o co-seno da soma de dois ângulos) a seguinte expressão:

$$W_1 = V_L I_L (\cos 30^\circ \cos \phi - \text{sen } 30^\circ \text{ sen } \phi)^* \tag{26}$$

Da mesma maneira, para W_2 temos:

$$W_2 = V_L I_L (\cos 30^\circ \cos \phi + \text{sen } 30^\circ \text{ sen } \phi)^* \tag{27}$$

Assim, a soma $W_1 + W_2 = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos \phi$ e a diferença $W_2 - W_1 = V_L I_L$ sen ϕ, donde:

$$\text{tg } \phi = \sqrt{3} \left(\frac{W_2 - W_1}{W_1 + W_2} \right) \tag{28}$$

Portanto, a tangente do ângulo da impedância **Z** é $\sqrt{3}$ vezes a relação entre a diferença e a soma das leituras dos dois wattímetros. Sem conhecer as linhas em que os medidores estão localizados, nem a seqüência do sistema, é impossível definir-se o sinal de ϕ. Entretanto, quando se conhecem a seqüência e a localização dos medidores, o sinal pode ser determinado por uma das seguintes expressões com as designações exatas de cada wattímetro:

* N. R. Por não conhecermos as linhas onde se situam os wattímetros, utilizamos as denominações genéricas W_1 e W_2.

Seqüência *ABC*:

$$\text{tg}\ \phi = \sqrt{3}\ \frac{W_A - W_B}{W_A + W_B} = \sqrt{3}\ \frac{W_B - W_C}{W_B + W_C} = \sqrt{3}\ \frac{W_C - W_A}{W_C + W_A} \qquad (29)$$

Seqüência *CBA*:

$$\text{tg}\ \phi = \sqrt{3}\ \frac{W_B - W_A}{W_B + W_A} = \sqrt{3}\ \frac{W_C - W_B}{W_C + W_B} = \sqrt{3}\ \frac{W_A - W_C}{W_A + W_C} \qquad (30)$$

Problemas Resolvidos

14.1 Mostrar que, no sistema trifásico, a tensão de linha V_L $\sqrt{3}$ vezes a tensão entre linha e neutro, V_F.

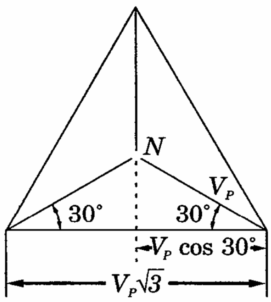


Figura 14-26

A Fig. 14-26 mostra as tensões de um sistema trifásico constituindo um triângulo eqüilátero, cujos lados são proporcionais às tensões de linha V_L e cujo centro representa o ponto neutro, *N*.

A tensão entre linha e neutro (tensão de fase) tem para projeção horizontal V_F cos 30° ou $V_F\sqrt{3}/2$. Como a base é a soma de duas dessas projeções, segue-se que:

$$V_L = 2(V_F\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}V_F$$

14.2 Calcular as correntes a plena carga nos enrolamentos de alternadores, ligados em triângulo e em estrela em regime de 25 k*VA* a 480 volts.

Na ligação em estrela, a corrente é a mesma, na linha e no enrolamento. Num sistema trifásico equilibrado,

$$N = \sqrt{3}V_L I_L \quad \text{e} \quad I_L = \frac{N}{\sqrt{3}V_L} = \frac{25 \times 10^3}{\sqrt{3} \times 480} = 30{,}1 \text{ A}$$

Estando o alternador ligado em triângulo, com a mesma potência aparente, as correntes de linha permanecem em 30,1 A. As correntes nos enrolamentos são $I_L/\sqrt{3}$, ou seja, $I_F = 30{,}1/\sqrt{3} = 17{,}35$ A.

14.3 Um sistema bifásico com tensão de 150 volts entre linha e neutro alimenta uma carga equilibrada ligada em triângulo, constituída por impedâncias de $10\angle 53{,}1^\circ$ ohms. Calcular as correntes de linha e a potência total.

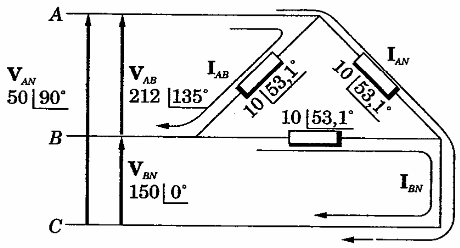


Figura 14-27

No sistema bifásico, as duas tensões entre linha e neutro* estão defasadas de 90°. Assim, se $\mathbf{V}_{BN}$ é tomada como referência, $\mathbf{V}_{AN}$ está a 90°, como mostra a Fig. 14-27. A tensão entre linhas * é $\sqrt{2}$ vezes a tensão entre linha e neutro. Assim, $V_{AB} = \sqrt{2}\ (150) = 212$. As correntes de fase são:

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}} = \frac{212\angle 135^\circ}{10\angle 53{,}1^\circ} = 21{,}2\angle 81{,}9^\circ$$

$$\mathbf{I}_{AN} = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}} = \frac{150\angle 90^\circ}{10\angle 53{,}1^\circ} = 15{,}0\angle 36{,}9^\circ$$

* N. T. Também no sistema bifásico chamamos *tensões de fase* às tensões entre linha e neutro, e *tensão de linha* às tensões entre linhas.

$$\mathbf{I}_{BN} = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}} = \frac{150\,\angle 0^\circ}{10\,\angle 53{,}1^\circ} = 15{,}0\,\angle -53{,}1^\circ$$

As correntes de linha, por aplicação da lei de Kirchhoff aos nós da carga ligada em triângulos, são determinadas em função das correntes de fase. Se admitirmos positivo o sentido dessas correntes dirigindo-se para a carga, temos:

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AN} + \mathbf{I}_{AB} = 15{,}0\,\angle 36{,}9^\circ + 21{,}2\,\angle 81{,}9^\circ = 33{,}5\,\angle 63{,}4^\circ$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{BN} + \mathbf{I}_{BA} = 15{,}0\,\angle -53{,}1^\circ - 21{,}2\,\angle 81{,}9^\circ = 33{,}6\,\angle -79{,}7^\circ$$

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{I}_{NA} + \mathbf{I}_{NB} = -15{,}0\,\angle 36{,}9^\circ - 15{,}0\,\angle -53{,}1^\circ = 21{,}2\,\angle 171{,}86^\circ$$

A potência total é obtida por meio da corrente eficaz nas impedâncias de carga. Assim, temos:

$$P_{AB} = I_{AB}^2\, R = (21{,}2)^2 6 = 2700 \text{ W}$$

$$P_{AN} = I_{AN}^2\, R = (15{,}0)^2 6 = 1350 \text{ W}$$

$$P_{BN} = I_{BN}^2\, R = (15{,}0)^2 6 = \underline{1350 \text{ W}}$$

$$\text{Potência total} = 5400 \text{ W}$$

14.4 Um sistema trifásico, *ABC*, a três condutores e 100 volts, alimenta uma carga equilibrada, ligada em triângulo, constituída por impedâncias de $20\,\angle 45^\circ$ ohms. Determinar as correntes de linha e traçar o diagrama de fasores.

Aplicam-se as tensões de linha da seqüência *ABC* ao circuito da Fig. 14-28. As correntes de fase são:

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}} = \frac{100\,\angle 120^\circ}{20\,\angle 45^\circ} = 5{,}0\,\angle 75^\circ, \quad \mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}} = 5{,}0\,\angle -45^\circ,$$

$$\mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}} = 5{,}0\,\angle 195^\circ$$

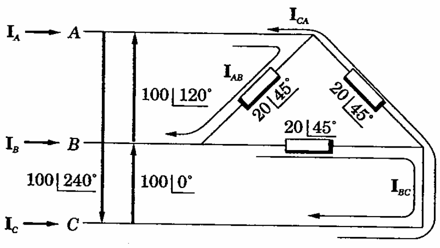


Figura 14-28

Para calcular as correntes de linha aplica-se a lei de Kirchhoff a cada nó da carga. Assim, temos:

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} = 5{,}0\angle 75^\circ - 5{,}0\angle 195^\circ = 8{,}66\angle 45^\circ$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{BA} + \mathbf{I}_{BC} = -5{,}0\angle 75^\circ + 5{,}0\angle -45^\circ = 8{,}66\angle -75^\circ$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{CA} + \mathbf{I}_{CB} = 5{,}0\angle 195^\circ - 5{,}0\angle -45^\circ = 8{,}66\angle 165^\circ$$

A Fig. 14-29 mostra o diagrama de fasores das correntes de fase e de linha.

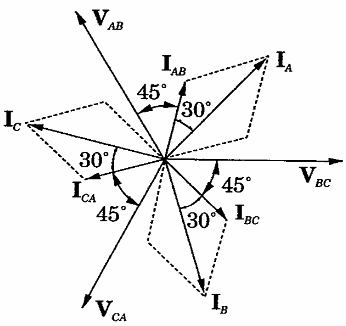


Figura 14-29

14.5 Determinar as leituras dos wattímetros, quando se aplica o método dos dois wattímetros ao circuito do Probl. 14.4.

Sendo a ca

$W_1 = V_L I_L$

onde ϕ é o
$I_L = 8{,}66$ e
temos:

$W_1 = 100$ (

$W_2 = 100$ (

A potência

Como veri
trifásica e

$P = \sqrt{3}\, V_l$

14.6 Três imped
CBA trifási
traçar o dia

Nos sister
demos acr
guida, apl
amplitude

$V_{LN} = V_L$

Sendo a carga trifásica, equilibrada, a três condutores, as leituras são:

$W_1 = V_L I_L \cos(30° + \phi)$ e $W_2 = V_L I_L \cos(30° - \phi)$ *(1)*

onde ϕ é o ângulo da impedância de carga. Do Probl. 14.4, $V_L = 100$, $I_L = 8{,}66$ e o ângulo da impedância de carga é 45°. Substituindo em *(1)*, temos:

$W_1 = 100\,(8{,}66)\cos(30° + 45°) = 866 \cos 75° = 224$ W

$W_2 = 100\,(8{,}66)\cos(30° - 45°) = 866 \cos(-15°) = 836$ W

A potência total é, então, $P_T = W_1 + W_2 = 1060$ W.

Como verificação, podemos calcular a potência total em qualquer carga trifásica equilibrada por:

$P = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\phi = \sqrt{3}\, 100\,(8{,}66) \cos 45° = 1060$ W

14.6 Três impedâncias iguais de $5\underline{/-30°}$ ohms são ligadas em estrela a um sistema *CBA* trifásico, a três condutores, 150 volts. Determinar as correntes de linha e traçar o diagrama de fasores.

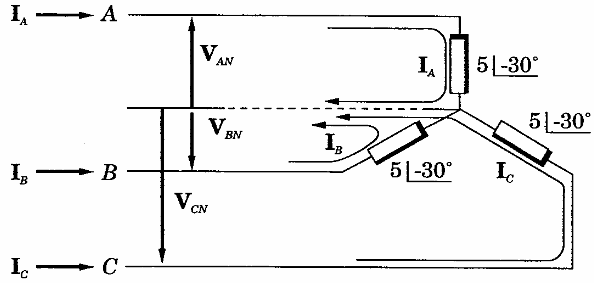


Figura 14-30

Nos sistemas equilibrados, a três condutores, ligados em estrela, podemos acrescentar o condutor neutro, como mostra Fig. 14-30. Em seguida, aplicadas as tensões entre linha e neutro (tensões de fase), de amplitudes:

$V_{LN} = V_L/\sqrt{3} = 150/\sqrt{3} = 86{,}6$

e seqüência *CBA*, as correntes de linha são:

$$\mathbf{I}_A = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}} = \frac{86{,}6\,\underline{/-90^\circ}}{5\,\underline{/-30^\circ}} = 17{,}32\,\underline{/-60^\circ}, \quad \mathbf{I}_B = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}} = 17{,}32\,\underline{/60^\circ},$$

$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}} = 17{,}32\,\underline{/180^\circ}$$

O diagrama de fasores da Fig. 14-31 mostra o conjunto equilibrado de correntes de linha, avançado de 30° (ângulo da impedância de carga) em relação às tensões de fase.

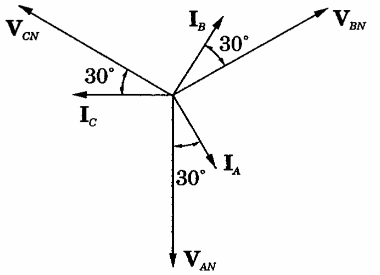


Figura 14-31

14.7 Aplicando-se o método dos dois wattímetros ao circuito do Probl. 14.6, determinar as leituras dos wattímetros.

Sendo a carga trifásica, equilibrada,

$W_1 = V_L I_L \cos(30^\circ + \phi) = 150\,(17{,}32)\cos(30^\circ + 30^\circ) = 1300$ W

$W_2 = V_L I_L \cos(30^\circ - \phi) = 150\,(17{,}32)\cos(30^\circ - {}^\circ\,30^\circ) = 2600$ W

A potência total é $P_T = W_1 + W_2 = 3900$ W

Pela fórmula geral para cargas trifásicas equilibradas, a potência total é:

$$P = \sqrt{3}\;V_L I_L \cos\phi = \sqrt{3}\;(150)\;(17{,}32)\;\cos(-30^\circ) = 3900 \text{ W}$$

14.8 Três impedâncias iguais de $15\underline{/30^\circ}$ ohms são ligadas em triângulo a um sistema trifásico *ABC*, 200 volts, três condutores. Determinar as correntes de linha pelo método do circuito equivalente de uma linha.

Como a carga é dada em triângulo, devemos, em primeiro lugar, determinar as impedâncias da carga em estrela equivalente:

$$\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_\Delta/3 = 15\angle 30^\circ/3 = 5\angle 30^\circ$$

A amplitude da tensão de fase é:

$$V_{LN} = V_L/\sqrt{3} = 200/\sqrt{3} = 115{,}5$$

No circuito equivalente de uma linha da Fig. 14-32, aplicando-se a tensão $115{,}5\angle 0^\circ$, a corrente resultante é:

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_{LN}}{\mathbf{Z}} = \frac{115{,}5\angle 0^\circ}{5\angle 30^\circ} = 23{,}1\angle -30^\circ$$

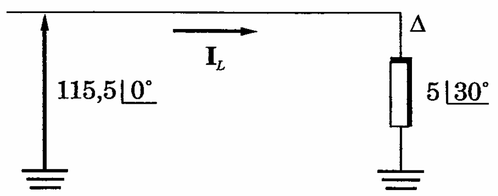


Figura 14-32

Para determinar as correntes de linha $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ e $\mathbf{I}_C$ devemos determinar, em primeiro lugar, o ângulo de fase das tensões correspondentes entre linha e neutro, na seqüência *ABC*. Como $\mathbf{V}_{AN}$ tem ângulo de fase de 90°, $\mathbf{I}_A = 23{,}1\angle 90^\circ - 30^\circ = 23{,}1\angle 60^\circ$. Do mesmo modo, determina-se $\mathbf{I}_B = 23{,}1\angle -60^\circ$ e $\mathbf{I}_C = 23{,}1\angle 180^\circ$.

Na ligação em triângulo as correntes nas impedâncias estão relacionadas com as correntes de linha por $I_L = \sqrt{3}\ I_F$, donde $I_F = 23{,}1/\sqrt{3} = 13{,}3$.

O ângulo de $\mathbf{V}_{AB}$ na seqüência *ABC* é 120°; assim, $\mathbf{I}_{AB} = 13{,}3\angle 120^\circ - 30^\circ = 13{,}3\angle 90^\circ$. Do mesmo modo, conclui-se que $\mathbf{I}_{BC} = 13{,}3\angle -30^\circ$ e $\mathbf{I}_{CA} = 13{,}3\angle 210^\circ$.

14.9 Três impedâncias iguais de $10\angle 30^\circ$ ohms, ligadas em estrela, e três impedâncias iguais de $15\angle 0^\circ$ ohms, também ligadas em estrela, são ligadas a um mesmo sistema trifásico a três condutores, 250 volts. Calcular a potência total.

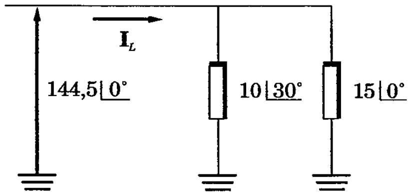


Figura 14-33

Já que ambas as cargas estão em estrela, suas impedâncias podem ser representadas, diretamente, no circuito equivalente de uma linha, como mostra a Fig. 14-33. A tensão aplicada no circuito equivalente de uma linha é:

$$V_{LN} = V_L/\sqrt{3} = 250/\sqrt{3} = 144{,}5$$

A corrente é, então:

$$\mathbf{I}_L = \frac{144{,}5\,\angle 0^\circ}{10\,\angle 30^\circ} + \frac{144{,}5\,\angle 0^\circ}{15\,\angle 0^\circ}$$

$$= 14{,}45\,\angle -30^\circ + 9{,}62\,\angle 0^\circ = 23{,}2\,\angle -18{,}1^\circ$$

Na fórmula da potência, $P = \sqrt{3}\ V_L I_L \cos\phi$, o ângulo da impedância de carga quando há apenas uma carga é ϕ. Com várias cargas no mesmo sistema, ϕ é o ângulo da impedância equivalente. No cálculo da corrente $\mathbf{I}_L$ foram consideradas ambas as cargas e verificou-se que a corrente estava atrasada de 18,1° em relação à tensão. Assim, sabemos que a impedância equivalente é indutiva e tem ângulo de 18,1°. Portanto,

$$P = \sqrt{3}\ V_L I_L \cos\phi = \sqrt{3}\ (250)\,(23{,}2)\cos 18{,}1^\circ = 9530\ \text{W}$$

14.10 Três impedâncias iguais de $12\angle 30^\circ$ ohms, ligadas em triângulo, e outras três, também iguais, e de $5\angle 45^\circ$ ohms, ligadas em estrela, são alimentadas por um mesmo sistema trifásico *ABC* a três condutores, 208 volts. Calcular as correntes de linha e a potência total.

Como a primeira carga está em triângulo, determinamos, primeiro, a estrela equivalente:

$$\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_\Delta/3 = 12\angle 30^\circ/3 = 4\angle 30^\circ$$

Sendo a te

A Fig. 14-
dâncias de
única equi

$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{4\angle}{4\angle}$

A corrent

$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_{LN}}{\mathbf{Z}_{eq}}$

Na seqü
tanto, $\mathbf{I}_A$
minam-se

A potênci

$P = \sqrt{3}$

14.11 Um sistem
triângulo
Determina

$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}}$

$\mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}}$

Sendo a tensão de linha 208 volts, a tensão de fase é $208/\sqrt{3}$ ou 120 volts.

A Fig. 14-34 mostra o circuito equivalente de uma linha. As duas impedâncias de carga são $4\angle 30^\circ$ e $5\angle 45^\circ$ ohms e podem ser substituídas por uma única equivalente:

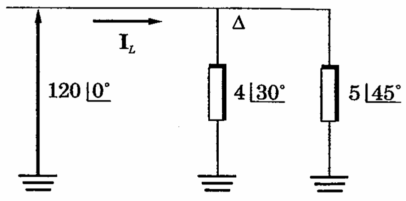


Figura 14-34

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{4\angle 30^\circ\ (5\angle 45^\circ)}{4\angle 30^\circ + 5\angle 45^\circ} = 2{,}24\angle 36{,}6^\circ$$

A corrente é, então:

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_{LN}}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{120\angle 0^\circ}{2{,}24\angle 36{,}6^\circ} = 53{,}6\angle -36{,}6^\circ$$

Na seqüência ABC, a tensão $\mathbf{V}_{AN}$ tem ângulo de fase de 90°; portanto, $\mathbf{I}_A = 53{,}6\angle(90^\circ - 36{,}6^\circ) = 53{,}6\angle 53{,}4^\circ$. Da mesma forma determinam-se $\mathbf{I}_B = 53{,}6\angle -66{,}6^\circ$ e $\mathbf{I}_C = 53{,}6\angle -186{,}6^\circ$.

A potência total é:

$$P = \sqrt{3}\ V_L I_L \cos\phi = \sqrt{3}\ (208)(53{,}6) \cos 36{,}6^\circ = 15500 \text{ W}$$

14.11 Um sistema trifásico CBA a três condutores, 240 volts, alimenta uma carga em triângulo constituída por $\mathbf{Z}_{AB} = 25\angle 90^\circ$, $\mathbf{Z}_{BC} = 15\angle 30^\circ$ e $\mathbf{Z}_{CA} = 20\angle 0^\circ$ ohms. Determinar as correntes de linha e a potência total.

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_{AB}} = \frac{240\angle 240^\circ}{25\angle 90^\circ} = 9{,}6\angle 150^\circ$$

$$\mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_{BC}} = \frac{240\angle 0^\circ}{15\angle 30^\circ} = 16{,}0\angle -30^\circ$$

$$\mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_{CA}} = \frac{240\,\angle 120^\circ}{20\,\angle 0^\circ} = 12{,}0\,\angle 120^\circ$$

No circuito da Fig. 14.35, as tensões de linha da seqüência *CBA* são aplicadas à carga em triângulo. O diagrama mostra as correntes de fase escolhidas. Então:

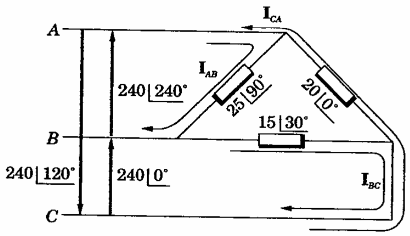


Figura 14-35

Calculam-se, então, as correntes de linha em função das correntes de fase.

$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} = 9{,}6\angle 150^\circ - 12\angle 120^\circ = 6{,}06\angle 247{,}7^\circ$

$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{BA} + \mathbf{I}_{BC} = -9{,}6\angle 150^\circ + 16\angle -30^\circ = 25{,}6\angle -30^\circ$

$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{CA} + \mathbf{I}_{CB} = 12\angle 120^\circ - 16\angle -30^\circ = 27{,}1\angle 137{,}2^\circ$

Como era de esperar, por ser a carga desequilibrada, as correntes de linha são desiguais.

Cálculo da potência em cada fase:

Impedância $\mathbf{Z}_{AB} = 25\angle 90^\circ = 0 + j25$ ohms, $R_{AB} = 0$ e $I_{AB} = 9{,}6$ A. Então, $P_{AB} = I^2_{AB}\,R_{AB} = (9{,}6)^2(0) = 0$

Impedância $\mathbf{Z}_{BC} = 15\angle 30^\circ = 13 + j7{,}5$ ohms, $R_{BC} = 13$ ohms e $I_{BC} = 16$ A. Então, $P_{BC} = I^2_{BC}\,R_{BC} = (16)^2(13) = 3330$ W

Impedância $\mathbf{Z}_{CA} = 20\angle 0^\circ = 20 + j0$ ohms, $R_{CA} = 20$ ohms e $I_{CA} = 12$ A. Então, $P_{CA} = I^2_{CA}\,R_{CA} = (12)^2(20) = 2880$ W

A potência total é a soma das potências nas três fases, ou seja:

$$P_T = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA} = 0 + 3330 + 2880 = 6210 \text{ W}$$

14.12 Determinar as leituras dos wattímetros, ao se empregar o método dos dois wattímetros no circuito do Probl. 14.11, estando os medidores (*a*) nas linhas *A* e *B*, (*b*) nas linhas *A* e *C*.

(*a*) Com os wattímetros nas linhas *A* e *B*,

(*1*) $W_A = V_{AC} I_A \cos \sphericalangle_A^{AC}$ (*2*) $W_B = V_{BC} I_B \cos \sphericalangle_B^{BC}$

Do Probl. 14.11, $V_{AC} = 240\angle{-60^\circ}$ e $I_A = 6{,}06\angle{247{,}7^\circ}$. Então, o ângulo $\phi_{AC/A}$ é o ângulo entre 247,7° e –60°, ou 52,3°. Substituindo em (*1*):

$W_A = 240(6{,}06) \cos 52{,}3^\circ = 890 \text{ W}$

Ainda do Probl. 14.11, $V_{BC} = 240\angle{0^\circ}$ e $I_B = 25{,}6\angle{-30^\circ}$. Então, $\phi = 30^\circ$; substituindo em (*2*):

$W_B = 240(25{,}6) \cos 30^\circ = 5320 \text{ W}$

A potência total $P_T = W_A + W_B = 890 + 5320 = 6210 \text{ W}$

(*b*) Com os wattímetros nas linhas *A* e *C*,

(*3*) $W_A = V_{AB} I_A \cos \sphericalangle_A^{AB}$ (*4*) $W_C = V_{CB} I_C \cos \sphericalangle_C^{CB}$

Do Probl. 14.11, $V_{AB} = 240\angle{240^\circ}$. Como $I_A = 6{,}06\angle{247{,}7^\circ}$, $\phi = 7{,}7^\circ$. Substituindo em (*3*):

$W_A = 240(6{,}06) \cos 7{,}7^\circ = 1440 \text{ W}$

Também $V_{CB} = 240\angle{180^\circ}$ e $I_C = 27{,}1\angle{137{,}2^\circ}$, donde $\phi = 42{,}8^\circ$. Substituindo em (*4*):

$W_C = 240(27{,}1) \cos 42{,}8^\circ = 4770 \text{ W}$

A potência total $P_T = W_A + W_C = 1440 + 4770 = 6210$ W.

14.13 Um sistema *ABC* trifásico a quatro condutores, 208 volts, alimenta uma carga em estrela, onde $\mathbf{Z}_A = 10\angle{0^\circ}$, $\mathbf{Z}_B = 15\angle{30^\circ}$ e $\mathbf{Z}_C = 10\angle{-30^\circ}$ ohms. Determinar as correntes de linha, a corrente do neutro e a potência total.

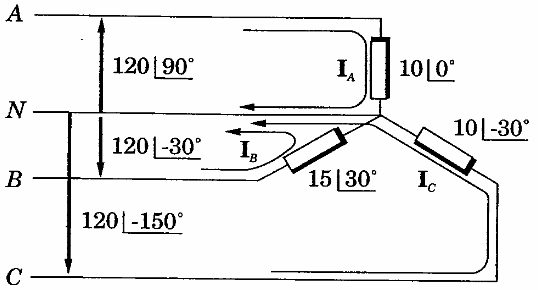


Figura 14-36

No circuito da Fig. 14-36, aplicam-se as tensões entre linha e neutro na seqüência *ABC* e calculam-se as correntes de linha, supondo positivo o sentido que se dirige para a carga.

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{V}_{AN}/\mathbf{Z}_A = (120\angle 90^\circ)/(10\angle 0^\circ) = 12\angle 90^\circ$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{V}_{BN}/\mathbf{Z}_B = (120\angle -30^\circ)/(15\angle 30^\circ) = 8\angle -60^\circ$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{V}_{CN}/\mathbf{Z}_C = (120\angle -150^\circ)/(10\angle -30^\circ) = 12\angle -120^\circ$$

O condutor neutro contém o fasor soma das correntes de linha. Sendo positivo o sentido que se dirige para a carga, temos:

$$\mathbf{I}_N = -(\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C) = -(12\angle 90^\circ + 8\angle -60^\circ + 12\angle -120^\circ) = 5{,}69\angle 69{,}4^\circ$$

A corrente $\mathbf{I}_A = 12\angle 90^\circ$ ampères circula na impedância $\mathbf{Z}_A = 10 + j0$ ohms; a potência nessa fase da carga é $P_A = (12)^2\,10 = 1440$ W. $\mathbf{I}_B = 8\angle -60^\circ$ ampères circula em $\mathbf{Z}_B = 15\angle 30^\circ = 13 + j7{,}5$ ohms; a potência nessa fase é $P_B = (8)^2 13 = 832$ W. Assim, também, $\mathbf{I}_C = 12\angle -120^\circ$ circula em $\mathbf{Z}_C = 10\angle -30^\circ = 8{,}66 - j5$ ohms e $P_C = (12)^2 8{,}66 = 1247$ W.

A potência total é:

$$P_T = P_A + P_B + P_C = 1440 + 832 + 1247 = 3519 \text{ W.}$$

14.14 As impedâncias de carga do Probl. 14.13 são ligadas a um sistema trifásico *ABC*, a três condutores e 208 volts. Determinar as correntes de linha e as tensões nas impedâncias de carga.

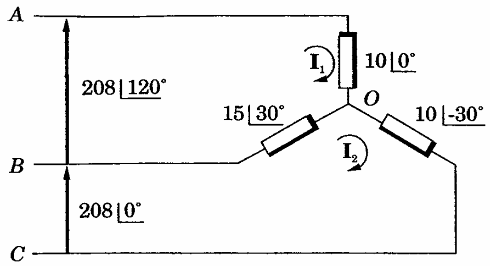


Figura 14-37

O circuito da Fig. 14-37 mostra as duas tensões de linha $\mathbf{V}_{AB}$ e $\mathbf{V}_{BC}$. Escolhidas as correntes de malha $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$, como mostra a figura, a forma matricial das equações respectivas fica:

$$\begin{bmatrix} 10\angle 0^\circ + 15\angle 30^\circ & -15\angle 30^\circ \\ -15\angle 30^\circ & 15\angle 30^\circ + 10\angle -30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208\angle 120^\circ \\ 208\angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

onde:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{5210\angle 90^\circ}{367{,}5\angle 3{,}9^\circ} = 14{,}15\angle 86{,}1^\circ$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{3730\angle 56{,}6^\circ}{367{,}5\angle 3{,}9^\circ} = 10{,}15\angle 52{,}7^\circ$$

Partindo de $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ e com o sentido positivo dirigindo-se para a carga, as correntes de linha são:

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_1 = 14{,}15\angle 86{,}1^\circ$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1 = 10{,}15\angle 52{,}7^\circ - 14{,}15\angle 86{,}1^\circ = 8{,}0\angle -49{,}5^\circ$$

$$\mathbf{I}_C = -\mathbf{I}_2 = 10{,}15\angle(52{,}7^\circ - 180^\circ) = 10{,}15\angle -127{,}3^\circ$$

As tensões nas impedâncias de carga são, então:

$$\mathbf{V}_{AO} = \mathbf{I}_A\mathbf{Z}_A = 14{,}15\angle 86{,}1^\circ\,(10\angle 0^\circ) = 141{,}5\angle 86{,}1^\circ$$

$$\mathbf{V}_{BO} = \mathbf{I}_B\mathbf{Z}_B = 8{,}0\angle -49{,}5^\circ\,(15\angle 30^\circ) = 120\angle -19{,}5^\circ$$

$$\mathbf{V}_{CO} = \mathbf{I}_C\mathbf{Z}_C = 10{,}15\angle{-127{,}3^\circ}\,(10\angle{-30^\circ}) = 101{,}5\angle{-157{,}3^\circ} = 101{,}5\angle{202{,}7^\circ}$$

Representadas essas três tensões, obtém-se o triângulo da seqüência *ABC*, unindo-se as extremidades dos fasores por meio de linhas e retas. A Fig. 14-38 mostra como se pode acrescentar o ponto *N*.

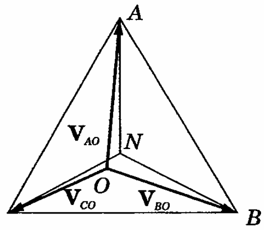


Figura 14-38

14.15 Repetir a solução do Probl. 14.14 empregando o método do deslocamento do neutro.

No método do deslocamento do neutro a tensão $\mathbf{V}_{ON}$ é calculada pela fórmula:

$$\mathbf{V}_{ON} = \frac{\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A + \mathbf{V}_{BN}\mathbf{Y}_B + \mathbf{V}_{CN}\mathbf{Y}_C}{\mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_B + \mathbf{Y}_C}$$

Do Probl. 14.14, $\mathbf{Y}_A = 1/10 = 0{,}1$, $\mathbf{Y}_B = 1/(15\angle{30^\circ}) = 0{,}0577 - j0{,}033$ e $\mathbf{Y}_C =$ $= 1/(10\angle{-30^\circ}) = 0{,}0866 + j0{,}050$. Então,

$$\mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_B + \mathbf{Y}_C = 0{,}244 + j0{,}0167 = 0{,}244\angle{3{,}93^\circ}$$

e $\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A = 120\angle{90^\circ}\,(0{,}1) = 12\angle{90^\circ} = j12$

$$\mathbf{V}_{BN}\mathbf{Y}_B = 120\angle{-30^\circ}\,(0{,}0667\angle{-30^\circ}) = 8{,}0\angle{-60^\circ} = 4{,}0 - j6{,}93$$

$$\mathbf{V}_{NC}\mathbf{Y}_C = 120\angle{-150^\circ}\,(0{,}1\angle{30^\circ}) = 12\angle{-120^\circ} = -6{,}0 - j10{,}4$$

$$\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A + \mathbf{V}_{BN}\,\mathbf{Y}_B + \mathbf{V}_{NC}\mathbf{Y}_C = -2{,}0 - j5{,}33 = 5{,}69\angle{249{,}4^\circ}$$

Portanto: V

As tensões
tensões co
camento d

$\mathbf{V}_{AO} = \mathbf{V}_{AN}$

$\mathbf{V}_{BO} = \mathbf{V}_{BN}$

$\mathbf{V}_{CO} = \mathbf{V}_{CN}$

Para obter
pelas resp

$\mathbf{I}_A = \mathbf{V}_{AO}\mathbf{Y}$

$\mathbf{I}_B = \mathbf{V}_{BO}\mathbf{Y}$

$\mathbf{I}_C = \mathbf{V}_{CO}\mathbf{Y}$

Os result
problema

14.16 Empregan
leituras obt
triângulo, s

Para carg

tg ϕ = $\sqrt{}$

donde ϕ =
seqüência

A potênci

$I_L = \sqrt{3}$

Portanto: $\mathbf{V}_{ON} = (5{,}69\angle 249{,}4^\circ/(0{,}244\angle 3{,}93^\circ) = 23{,}3\angle 245{,}5^\circ = -9{,}66 - j21{,}2$

As tensões nas impedâncias de carga podem ser expressas em função das tensões correspondentes entre linha e neutro e da tensão de deslocamento do neutro. Assim,

$$\mathbf{V}_{AO} = \mathbf{V}_{AN} + \mathbf{V}_{NO} = 120\angle 90^\circ + (9{,}66 + j21{,}2) = 141{,}2\angle 86{,}08^\circ$$

$$\mathbf{V}_{BO} = \mathbf{V}_{BN} + \mathbf{V}_{NO} = 120\angle -30^\circ + (9{,}66 + j21{,}2) = 120\angle -18{,}9^\circ$$

$$\mathbf{V}_{CO} = \mathbf{V}_{CN} + \mathbf{V}_{NO} = 120\angle -150^\circ + (9{,}66 + j21{,}2) = 102\angle 202{,}4^\circ$$

Para obter as correntes de linha, tomam-se os produtos dessas tensões pelas respectivas admitâncias

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{V}_{AO}\mathbf{Y}_A = 141{,}2\angle 86{,}08^\circ(0{,}1\angle 0^\circ) = 14{,}12\angle 86{,}08^\circ$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{V}_{BO}\mathbf{Y}_B = 120\angle -18{,}9^\circ(0{,}0667\angle -30^\circ) = 8{,}0\angle -48{,}9^\circ$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{V}_{CO}\mathbf{Y}_C = 102\angle 202{,}4^\circ(0{,}1\angle 30^\circ) = 10{,}2\angle 232{,}4^\circ \text{ ou } 10{,}2\angle -127{,}6^\circ$$

Os resultados acima são bastante próximos dos resultados obtidos no problema anterior.

14.16 Empregando-se o método dos dois wattímetros em uma carga equilibrada, as leituras obtidas são 1154 e 577 watts. Determinar as impedâncias da carga em triângulo, supondo de 100 volts a tensão do sistema.

Para cargas trifásicas equilibradas, temos:

$$\text{tg}\ \phi = \sqrt{3}\ \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2} = \pm\ \sqrt{3}\ \frac{1154 - 577}{1154 + 577} = \pm\ 0{,}577$$

donde $\phi = \pm\ 30^\circ$. (Usamos o duplo sinal, porque, sem que se conheçam a seqüência e a localização dos medidores, o sinal fica indeterminado.)

A potência total $P = \sqrt{3}\ V_L I_L\ \cos\ \phi$ e

$$I_L = \frac{P}{\sqrt{3}\ V_L\ \cos\ \phi} = \frac{1{,}731}{\sqrt{3}\ (100)\ (0{,}866)} = 11{,}55 \text{ ampères}$$

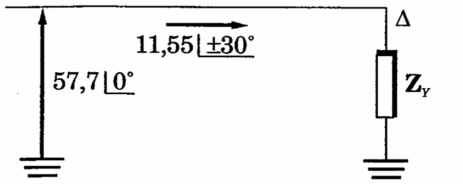


Figura 14-39

A Fig. 14-39 mostra o circuito equivalente de uma linha, onde está aplicada a tensão $100/\sqrt{3}\,\angle 0° = 57{,}7\,\angle 0°$. A impedância da carga em estrela é:

$$\mathbf{Z}_Y = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{57{,}7\,\angle 0°}{11{,}55\,\angle \pm 30°} = 5{,}0\,\angle \pm 30°$$

e

$$\mathbf{Z}_\Delta = 3\mathbf{Z}_Y = 15\,\angle \pm 30°$$

14.17 Aplicando-se o método dos dois wattímetros a um sistema trifásico a três condutores, 100 volts, seqüência *ABC*, tem-se W_B = 836 watts e W_C = 224 watts, estando os medidores nas linhas *B* e *C*. Determinar as impedâncias da carga em triângulo.

Sendo dadas a seqüência e a localização dos medidores, fica definido o sinal de ϕ. Assim, temos:

$$\text{tg}\ \phi = \sqrt{3}\,\frac{W_B - W_C}{W_B + W_C} = \sqrt{3}\,\frac{836 - 224}{836 + 224} = 1 \text{ ou } \phi = 45°$$

Como

$$P = \sqrt{3}\ V_L I_L \cos\phi_1,\ I_L = \frac{P}{\sqrt{3}\ V_L \cos\phi} = \frac{1060}{\sqrt{3}\ (100)(0{,}707)} = 8{,}66.$$

A tensão no circuito equivalente de uma linha vem, pois, a ser $57{,}7\angle 0°$ e a impedância da estrela $\mathbf{Z}_Y = \mathbf{V}/\mathbf{I} = (57{,}7\angle 0°)/(8{,}66\angle -45°) = 6{,}67\angle 45°$. A impedância pedida do triângulo é $\mathbf{Z}_\Delta = 3\mathbf{Z}_Y = 20\angle 45°$.

14.18 Uma unidad
e um motor
alimentados
minar a amp

Sendo 1 H
entrada dc

O motor é

$P = \sqrt{3}\,V_l$

$4662 = \sqrt{}$

No circuit
em relaçã
é, então $\mathbf{I}_l$

Para a ca
tuindo: 15

A corrent
de aqueci

$\mathbf{I}_L$ = 15,25

* N. T. No Brasi
63.233 de 12/9
volvida quand
do, valendo 73

14.18 Uma unidade trifásica de aquecimento de 1500 watts, fator de potência unitário e um motor de indução de 5 HP*, rendimento 80% e fator de potência 0,85, são alimentados pelo mesmo sistema trifásico a três condutores, 208 volts. Determinar a amplitude da corrente de linha para regime normal do motor de indução.

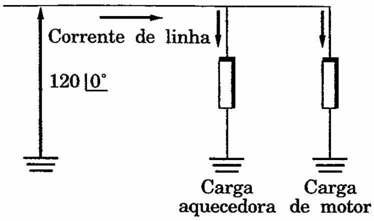


Figura 14-40

Sendo 1 HP = 746 watts*, a saída do motor é 746 × 5 = 3730 watts. A entrada do motor é, então, 3730/0,80 = 4662 watts.

O motor é uma carga trifásica equilibrada. Então, temos:

$P = \sqrt{3}\,V_L I_L \cos\phi$; donde:

$4662 = \sqrt{3}(208\,\mathbf{I}_L)\,(0{,}85)$; $\mathbf{I}_L = 15{,}25$ ampères

No circuito equivalente de uma linha o fasor corrente está atrasado de ϕ em relação à tensão; $\phi = \text{arc cos } 0{,}85 = 31{,}7^\circ$. A corrente de linha do motor é, então $\mathbf{I}_L = 15{,}25\underline{/-31{,}7^\circ}$.

Para a carga de aquecimento, $P = \sqrt{3}\,V_L I_L \cos\phi$, onde $\phi = 0^\circ$. Substituindo: $1500 = \sqrt{3}\,(208) I_L$, $I_L = 4{,}16$ e $\mathbf{I}_L = 4{,}16\underline{/0^\circ}$.

A corrente total de linha é o fasor soma das correntes do motor e da carga de aquecimento:

$\mathbf{I}_L = 15{,}25\underline{/-31{,}7^\circ} + 4{,}16\underline{/0^\circ} = 18{,}9\underline{/-25{,}1^\circ}$

* N. T. No Brasil, segundo o Quadro Geral das Unidades de Medida aprovado pelo Decreto nº 63.233 de 12/9/1968, a unidade de potência é o cavalo-vapor (cv), que é a potência desenvolvida quando se produz um trabalho igual a 75 quilogramas-força-metros em cada segundo, valendo 735,5 W, arredondados para 736 W.

A corrente em cada linha será, então, 18,9 ampères, em regime normal do motor.

14.19 Três impedâncias iguais de $30\angle 30^\circ$ ohms são ligadas em triângulo a um sistema trifásico a três condutores, 208 volts, por condutores cujas impedâncias são $0{,}8 + j0{,}6$. Determinar a amplitude da tensão de linha na carga.

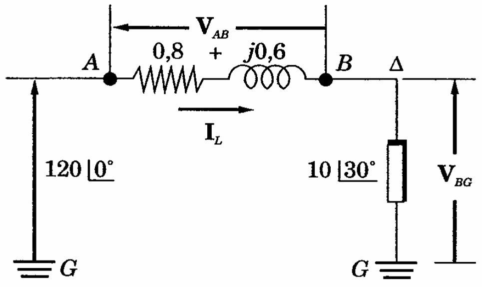


Figura 14-41

A Fig. 14-41 mostra o circuito com a impedância equivalente em estrela igual a 1/3 $\mathbf{Z}_\Delta$ ou $10\angle 30^\circ$ ohms. A impedância da linha está em série com a carga e, portanto:

$$\mathbf{Z}_{ez} = \mathbf{Z}_{\text{linha}} + \mathbf{Z}_{\text{carga}} = 0{,}8 + j0{,}6 + 8{,}66 + j5{,}0 = 9{,}46 + j5{,}6 = 11{,}0\angle 30{,}6^\circ$$

Então, temos: $\mathbf{I}_L = \dfrac{\mathbf{Z}}{\mathbf{Z}_{eq}} = \dfrac{120\angle 0^\circ}{11{,}0\angle 30{,}6^\circ} = 10{,}9\angle -30{,}6^\circ$.

A tensão na carga é $\mathbf{V}_{BG} = \mathbf{I}_L Z_{\text{carga}} = 10{,}9\angle -30{,}6^\circ(10\angle 30^\circ) = 109\angle -0{,}6^\circ$.

A tensão de linha pedida é:

$$V_L = \sqrt{3}\,(109) = 189$$

Assim, a tensão de 208 volts do sistema caiu para 189 volts na carga, devido à impedância das linhas.

A Fig. 14-42 mostra o diagrama de fasores com a queda na linha $\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{I}_L\,\mathbf{Z}_{\text{linha}} = (10{,}9\angle -30{,}6^\circ) \times (0{,}8 + j0{,}6) = 10{,}9\angle 6{,}3^\circ$ e $\mathbf{V}_{AG} = \mathbf{V}_{AB} + \mathbf{V}_{BG}$.

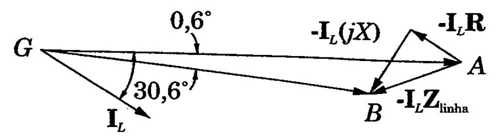


Figura 14-42

14.20 Determinar a tensão de linha, na carga do Probl. 14.19, depois de se ligar em paralelo com essa carga um conjunto de capacitores de reatância $-j20$.

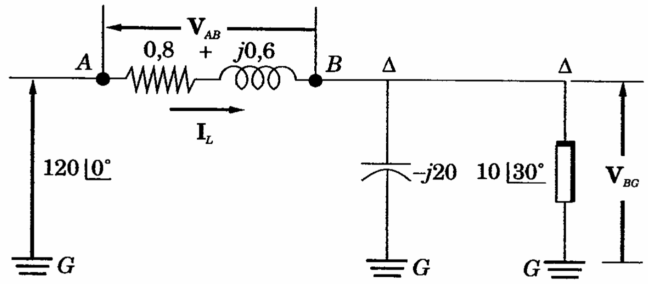


Figura 14-43

No circuito equivalente de uma linha da Fig. 14-43, a reatância $-j20$ e a carga $10\angle 30°$ estão em paralelo e, portanto:

$$\mathbf{Z}_P = \frac{10\angle 30°\,(-j20)}{(8{,}66 + j5) - j20} = 11{,}55\angle 0°$$

Assim, $\mathbf{Z}_P$ está em série com as impedâncias de linha, de modo que:

$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} = \mathbf{Z}_{\text{linha}} + \mathbf{Z}_P = (0{,}8 + j0{,}6) + (11{,}55\angle 0°) = 12{,}35\angle 2{,}78°$$

A corrente de linha é:

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_{\text{eq}}} = \frac{120\angle 0°}{12{,}35\angle 2{,}78°} = 9{,}73\angle -2{,}78°$$

e a tensão na carga é:

$$\mathbf{V}_{BG} = \mathbf{I}_L\mathbf{Z}_P = (9{,}73\angle -2{,}78°)\,(11{,}55\angle 0°) = 112\angle -2{,}78°$$

A tensão de linha correspondente é $V_L = \sqrt{3}\,(112) = 194$ volts.

Conforme foi mostrado no Capítulo 7, o fator de potência fica melhorado quando se acrescentam capacitores em paralelo com a carga. Isso acarreta uma redução na queda de tensão na linha. Assim, neste problema a tensão de 208 volts do sistema caiu para 194 volts e não para 189 volts, como no Probl. 14.19.

Problemas Propostos

14.21 Três impedâncias iguais de $10\angle 53{,}1^\circ$ ohms são ligadas em triângulo a um sistema *CBA* trifásico, a três condutores, 240 volts. Calcular as correntes de linha.
Resp.: $41{,}6\angle{-143{,}1^\circ}$; $41{,}6\angle{-23{,}1^\circ}$ e $41{,}6\angle 96{,}9^\circ$.

14.22 Três impedâncias de $15{,}9\angle 70^\circ$ ohms são ligadas em triângulo a um sistema *CBA* trifásico, a três condutores, 100 volts. Determinar as correntes de linha e a potência total.
Resp.: $10{,}9\angle{-160^\circ}$; $10{,}9\angle{-40^\circ}$; $10{,}9\angle 80^\circ$; 646 watts.

14.23 Três impedâncias de $42\angle{-35^\circ}$ ohms são ligadas em triângulo a um sistema *ABC* trifásico, a três condutores, 350 volts. Determinar as correntes de linha e a potência total.
Resp.: $14{,}4\angle 125^\circ$; $14{,}4\angle 5^\circ$; $14{,}4\angle{-115^\circ}$; 7130 watts.

14.24 Uma carga equilibrada em estrela com impedância de $6\angle 45^\circ$ ohms é ligada a um sistema *CBA* trifásico, a quatro condutores, 208 volts. Determinar as correntes de linha, incluindo o neutro.
Resp.: $20\angle{-135^\circ}$; $20\angle{-15^\circ}$; $20\angle 105^\circ$; 0.

14.25 Uma carga equilibrada em estrela com impedâncias de $65\angle{-20^\circ}$ ohms é ligada a um sistema *CBA* trifásico a três condutores, 480 volts. Determinar as correntes de linha e a potência total.
Resp.: $4{,}26\angle{-70^\circ}$; $4{,}26\angle 50^\circ$; $4{,}26\angle 170^\circ$; 3320 watts.

14.26 Um motor de indução de 50 HP com rendimento de 85%, a plena carga, e fator de potência de 0,80 é ligado a um sistema trifásico de 480 volts. Determinar as impedâncias da estrela equivalente que pode substituí-lo.
Resp.: $4{,}2\angle 36{,}9^\circ$.

14.27 Um motor de indução trifásico de 25 HP, com rendimento de 82%, a plena carga, e fator de potência de 0,75 é ligado a um sistema de 208 volts. Determinar as impedâncias do triângulo equivalente que pode substituí-lo e achar as leituras

obtidas pel
Resp.: 4,28

14.28 Três impec
5/45° ohm
condutores
total.
Resp.: 119,

14.29 Uma carga
carga equil
um sistema
de linha e
Resp.: 25,

14.30 Um sistem
com impec
impedânci
tude da co
Resp.: 240

14.31 Duas carg
ohms, res
a potência
Resp.: 16

14.32 Um sisten
equilibrad
ligadas er
três impec
da imped
quando se
Resp.: 18,

14.33 As leitura
120 volts
da carga
Resp.: 16

14.34 As leitura
173,2 vol
cias da ca
Resp.: 10

obtidas pelo método dos dois wattímetros.
Resp.: $4{,}28\angle 41{,}4^\circ$; 5,58 kW; 17,15 kW.

14.28 Três impedâncias iguais de $9\angle -30^\circ$ ohms em triângulo e três impedâncias de $5\angle 45^\circ$ ohms, em estrela, são ligadas ao mesmo sistema *ABC* trifásico, a três condutores, 480 volts. Determinar a amplitude da corrente de linha e a potência total.
Resp.: 119,2 A; 99 kW.

14.29 Uma carga equilibrada em triângulo com impedâncias de $27\angle -25^\circ$ ohms e uma carga equilibrada em estrela, com impedâncias de $10\angle -30^\circ$ ohms, são ligadas a um sistema *ABC* trifásico, a três condutores, 208 volts. Determinar as correntes de linha e a potência em cada carga.
Resp.: $25{,}3\angle 117{,}4^\circ$; $25{,}3\angle -2{,}6^\circ$; $25{,}3\angle -122{,}6^\circ$; 4340 W e 3740W.

14.30 Um sistema trifásico a 100 volts alimenta uma carga equilibrada em triângulo com impedâncias de $10\angle -36{,}9^\circ$ ohms e uma carga equilibrada em estrela, com impedâncias de $5\angle 53{,}1^\circ$ ohms. Determinar a potência em cada carga e a amplitude da corrente de linha total.
Resp.: 2400 W; 1200 W; 20,8 A.

14.31 Duas cargas equilibradas em triângulo, com impedâncias de $20\angle -60^\circ$ e $18\angle 45^\circ$ ohms, respectivamente, são ligadas a um sistema trifásico de 150 volts. Calcular a potência em cada carga.
Resp.: 1690 W; 2650 W.

14.32 Um sistema *CBA* trifásico, a três condutores, 173,2 volts, alimenta três cargas equilibradas, constituídas como se segue: três impedâncias de $10\angle 0^\circ$ ohms, ligadas em estrela, três impedâncias de $24\angle 90^\circ$ ohms, ligadas em triângulo, e três impedâncias iguais desconhecidas, ligadas em triângulo. Determinar o valor da impedância desconhecida, sabendo que a corrente na linha *A*, positiva quando se dirige para a carga, é igual a $32{,}7\angle -138{,}1^\circ$ ampères.
Resp.: $18\angle 45^\circ$.

14.33 As leituras dos wattímetros colocados nas linhas *A* e *B* de um sistema *CBA* de 120 volts são, respectivamente, 1500 e 500 watts. Determinar as impedâncias da carga equilibrada ligada em triângulo.
Resp.: $16{,}3\angle -41^\circ$.

14.34 As leituras dos wattímetros colocados nas linhas *A* e *B* de um sistema *ABC* de 173,2 volts são, respectivamente, –301 e + 1327 watts. Determinar as impedâncias da carga equilibrada, ligada em estrela.
Resp.: $10\angle -70^\circ$.

14.35 Determinar as leituras de dois wattímetros usados num sistema trifásico de 240 volts sendo de $20\angle 80^\circ$ ohms a carga equilibrada, ligada em triângulo.
Resp.: –1710 watts; 3210 watts.

14.36 Em um sistema *CBA*, trifásico, de 173,2 volts, que alimenta uma carga equilibrada, os wattímetros estão ligados às linhas *B* e *C*. Sendo $\mathbf{I}_A = 32{,}7\angle -41{,}9^\circ$ ampères a corrente de linha, determinar as leituras dos wattímetros.
Resp.: 1170 watts; 5370 watts.

14.37 Um sistema *CBA* de 100 volts alimenta uma carga equilibrada e possui wattímetros ligados às linhas *A* e *B*. Determinar as leituras dos mesmos, sabendo que a corrente na linha *B* é $\mathbf{I}_B = 10{,}9\angle -40^\circ$ ampères.
Resp.: –189 watts; 835 watts.

14.38 Uma carga em triângulo, com $\mathbf{Z}_{AB} = 10\angle 30^\circ$, $\mathbf{Z}_{BC} = 25\angle 0^\circ$ e $\mathbf{Z}_{CA} = 20\angle -30^\circ$ ohms, está ligada a um sistema trifásico *ABC*, a três condutores, 500 volts. Calcular as correntes de linha e a potência total.
Resp.: $75\angle 90^\circ$ A; $53{,}9\angle -68{,}2^\circ$ A; $32\angle 231{,}3^\circ$ A; 42,4 kW.

14.39 Um sistema *ABC* trifásico, a três condutores, 208 volts, alimenta uma carga ligada em triângulo, onde $\mathbf{Z}_{AB} = 5\angle 0^\circ$, $\mathbf{Z}_{BC} = 4\angle 30^\circ$ e $\mathbf{Z}_{CA} = 6\angle -15^\circ$ ohms. Determinar as correntes de linha e as leituras dos wattímetros nas linhas *A* e *C*.
Resp.: $70{,}5\angle 99{,}65^\circ$ A; $90{,}5\angle -43{,}3^\circ$ A; $54{,}6\angle 187{,}9^\circ$ A; 13,7 kW e 11,25 kW.

14.40 Uma carga em estrela, com $\mathbf{Z}_A = 3 + j0$, $\mathbf{Z}_B = 2 + j3$ e $\mathbf{Z}_C = 2 - j1$ ohms, está ligada a um sistema *CBA* trifásico, de 100 volts, a quatro condutores. Determinar as correntes de linha e no neutro, supondo positivo o sentido que se dirige para a carga.
Resp.: $19{,}25\angle -90^\circ$ A; $16\angle -26{,}3^\circ$ A; $25{,}8\angle 176{,}6^\circ$ A e $27{,}3\angle 63{,}3^\circ$ A.

14.41 Uma carga em estrela, com $\mathbf{Z}_A = 12\angle 45^\circ$, $\mathbf{Z}_B = 10\angle 30^\circ$ e $\mathbf{Z}_C = 8\angle 0^\circ$ ohms, está ligada a um sistema de 208 volts, a quatro condutores. Calcular a potência total.
Resp.: 3898 watts.

14.42 Em um sistema *ABC* trifásico de 220 volts a três condutores, as correntes de linha são $\mathbf{I}_A = 43{,}5\angle 116{,}6^\circ$, $\mathbf{I}_B = 43{,}3\angle -48^\circ$ e $\mathbf{I}_C = 11{,}39\angle 218^\circ$ ampères. Determinar as leituras de pares de wattímetros colocados nas linhas (*a*) *A* e *B*, (*b*) *B* e *C*, (*c*) *A* e *C*.
Resp.: (*a*) 5270 W, 6370 W; (*b*) 9310 W, 2330 W; (*c*) 9550 W, 1980 W.

14.43 As correntes de linha em um sistema *ABC* trifásico a três condutores e 440 volts são $\mathbf{I}_A = 19{,}72\angle 90^\circ$, $\mathbf{I}_B = 57{,}3\angle -9{,}9^\circ$ e $\mathbf{I}_C = 57{,}3\angle -189{,}9^\circ$ ampères. Determinar as leituras de pares de wattímetros colocados nas linhas (*a*) *A* e *B*, (*b*) *B* e *C*.
Resp.: (*a*) 7,52 kW, 24,8 kW; (*b*) 16,15 kW, 16,15 kW.

14.44 O diagrama
tensões de
Sendo 10 a
carga, supo
Resp.: 20/9

14.45 O circuito d
da carga lig
ABC e o sis
Resp.: 284/

14.46 Um alterna
ampères p
alternador
0,65, quant
Resp.: 26,6

14.47 No diagram
têm amplit
potência to
Resp.: 1,47

14.44 O diagrama de fasores da Fig. 14-44 apresenta as correntes de linha e as tensões de fase de um sistema *ABC* trifásico, a três condutores, 346 volts. Sendo 10 ampères a amplitude da corrente de linha, calcular a impedância da carga, suposta em estrela.
Resp.: $20\angle 90^\circ$ ohms.

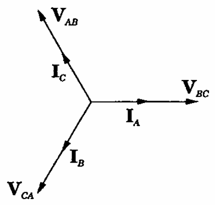


Figura 14-44

14.45 O circuito da Fig. 14-45 indica uma impedância infinita (circuito aberto) na fase *B* da carga ligada em estrela. Determinar o fasor tensão $\mathbf{V}_{OB}$, sendo a seqüência *ABC* e o sistema de 208 volts.
Resp.: $284\angle 150^\circ$.

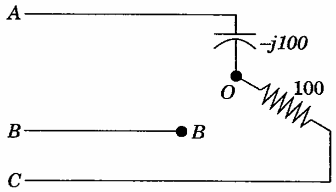


Figura 14-45

14.46 Um alternador trifásico de 440 volts, ligado em estrela, tem um limite de 35 ampères por bobina. (*a*) Qual é o regime da máquina em kVA? (*b*) Se o alternador fornece corrente de linha de 20 ampères com fator de potência de 0,65, quantos kVA por fase fornece a máquina?
Resp.: 26,6 kVA; 5,08 kVA.

14.47 No diagrama de fasores da Fig. 14-46, as correntes de linha são equilibradas e têm amplitude de 10 ampères e a tensão de linha é 120 volts. Determinar a potência total correspondente e os volts-ampères totais.
Resp.: 1,47 kW; 208 kVA.

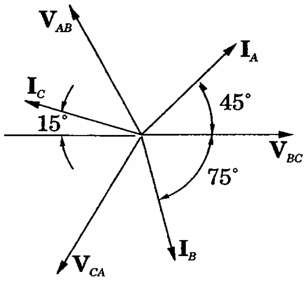


Figura 14-46

14.48 Uma carga em estrela, com $\mathbf{Z}_A = 10\angle 0^\circ$, $\mathbf{Z}_B = 10\angle 60^\circ$ e $\mathbf{Z}_C = 10\angle -60^\circ$ ohms, está ligada a um sistema *ABC* trifásico a três condutores e 200 volts. Determinar as tensões $\mathbf{V}_{AO}$, $\mathbf{V}_{BO}$ e $\mathbf{V}_{CO}$ nas impedâncias da carga.
Resp.: $173\angle 90^\circ$, $100\angle 0^\circ$, $100\angle 180^\circ$ volts.

14.49 Uma carga em estrela, com $\mathbf{Z}_A = 10\angle -60^\circ$, $\mathbf{Z}_B = 10\angle 0^\circ$ e $\mathbf{Z}_C = 10\angle 60^\circ$ ohms, está ligada a um sistema *CBA* trifásico, a três condutores e 208 volts. Calcular as tensões nas impedâncias da carga.
Resp.: $208\angle -120^\circ$; $0{,}208\angle 180^\circ$ volts.

14.50 Um sistema *ABC* trifásico, de 480 volts, alimenta uma carga em estrela, com $\mathbf{Z}_A = 10\angle 0^\circ$, $\mathbf{Z}_B = 5\angle -30^\circ$ e $\mathbf{Z}_C = 5\angle 30^\circ$ ohms. Determinar as leituras de wattímetros nas linhas *A* e *B*.
Resp.: 8,92 kW; 29,6 kW.

14.51 Um sistema *CBA* trifásico, de 100 volts, alimenta uma carga em estrela em que $\mathbf{Z}_A = 3 + j0$, $\mathbf{Z}_B = 2 + j3$ e $\mathbf{Z}_C = 2 - j1$ ohms. Determinar as tensões nas impedâncias da carga.
Resp.: $31{,}6\angle -67{,}9^\circ$; $84{,}3\angle 42{,}7^\circ$; $68{,}6\angle 123{,}8^\circ$ volts.

14.52 Três impedâncias idênticas de $15\angle 60^\circ$ ohms estão ligadas em estrela a um sistema trifásico de 240 volts, a três condutores. As impedâncias das linhas entre a fonte e a carga são de $2 + j1$ ohms. Determinar a amplitude da tensão de linha na carga.
Resp.: 213 volts.

14.53 Repetir o Probl. 14.52 para impedâncias idênticas de $15\angle -60^\circ$ ohms, ligadas em estrelas, e comparar os resultados, traçando os diagramas dos fasores tensão.
Resp.: 235 volts.

ANÁLISE DE FORMAS DE ONDAS PELO MÉTODO DE FOURIER

Introdução

Nos circuitos examinados até aqui, consideramos a resposta, em regime estacionário, a excitações constantes ou de forma senoidal. Nesses casos, uma expressão simples descrevia as funções excitadoras para qualquer valor do tempo, isto é, v = constante para CC e $v = V_{max}$ sen ωt para CA para qualquer t, como mostram as Figs. 15-1(a) e (b).

Certas formas de ondas periódicas, das quais a dente-de-serra da Fig. 15-1(c) é um exemplo, só podem ser descritas por uma função simples dentro de um intervalo. Assim, a dente-de-serra é expressa por $f(t) = (V/T)t$ no intervalo $0 < t < T$ e por $f(t) = (V/T)(t - T)$ no intervalo $T < t < 2T$. Embora tais expressões descrevam satisfatoriamente a forma de onda, não permitem a determinação da resposta do circuito. Entretanto, se uma função periódica puder ser expressa como a soma de um número finito ou infinito de funções senoidais, as respostas de estruturas lineares a excitações não-senoidais poderão ser determinadas por aplicação do teorema da superposição. O método de Fourier fornece o meio de se resolver esse tipo de problema.

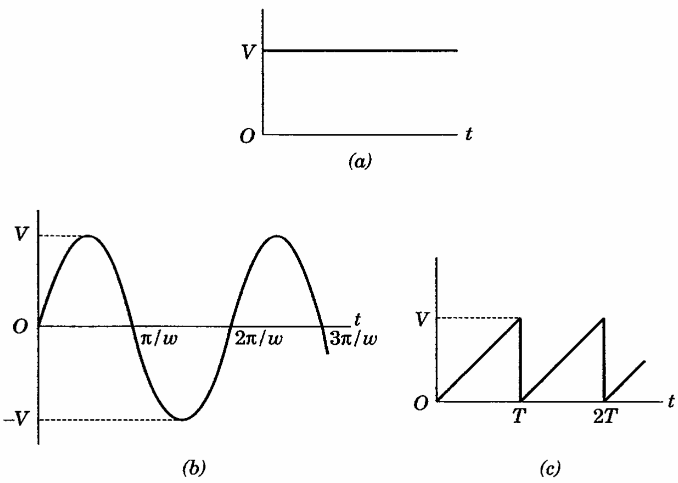


Figura 15-1

Série Trigonométrica de Fourier

Toda forma de onda periódica, isto é, para a qual $f(t) = f(t + T)$, pode ser expressa por uma série de Fourier, desde que:

(*1*) sendo descontínua, haja um número finito de descontinuidades, no período T;

(*2*) tenha um valor médio finito, no período T;

(*3*) tenha um número finito de máximos positivos e negativos.

Satisfeitas essas condições, chamadas *condições de Dirichlet*, existe a série de Fourier, que pode ser escrita, na forma trigonométrica:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \ldots$$
$$+ b_1 \operatorname{sen} \omega t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega t + b_3 \operatorname{sen} 3\omega t + \ldots \qquad (1)$$

Os coeficientes de Fourier, a's e b's, são determinados, para uma dada forma de onda, pelo cálculo de integrais. Obtém-se a integral para os coeficientes co-senoidais multiplicando ambos os membros de (*1*) por cos $n\omega t$ e integrando para todo o período. O período da fundamental, $2\pi/\omega$, é o período da série, já que a freqüência de cada termo da série é um múltiplo da fundamental.

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(t)\ \cos\ n\omega t\ dt =$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{2}a_0\ \cos\ n\omega t\ dt + \int_0^{2\pi/\omega} a_1\ \cos\ \omega t\ \cos\ n\omega t\ dt + \ldots$$

$$+ \int_0^{2\pi/\omega} a_n\ \cos^2\ n\omega t\ dt + \ldots + \int_0^{2\pi/\omega} b_1\ \text{sen}\ \omega t\ \cos\ n\omega t\ dt$$

$$+ \int_0^{2\pi/\omega} b_2\ \text{sen}\ 2\omega t\ \cos\ n\omega t\ dt + \ldots \tag{2}$$

As integrais definidas do segundo membro de (*2*) são todas nulas, com exceção de $+ \int_0^{2\pi/\omega} a_n\ \cos^2\ n\omega t\ dt$ que tem para valor $\frac{\pi}{\omega}a_n$. Então:

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(t)\ \cos\ n\omega t\ dt = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(t)\ \cos\ n\omega t\ dt \tag{3}$$

Multiplicando (*1*) por sen $n\omega t$ e integrando como acima, obtém-se a integral dos coeficientes senoidais. Assim:

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(t)\ \text{sen}\ n\omega t\ dt = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(t)\ \text{sen}\ n\omega t\ dt \tag{4}$$

Outra forma dessas integrais com a variável ωt e o período correspondente de 2π radianos é:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\ \cos\ n\omega t\ d(\omega t) \tag{5}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\ \text{sen}\ n\omega t\ d(\omega t) \tag{6}$$

Os limites de integração devem incluir um período completo, mas não precisam ser 0 a T ou de 0 a 2π. A integração pode ser feita entre $-T/2$ e $T/2$, $-\pi$ e $+\pi$, ou qualquer outro período completo que simplifique a operação. A constante a_0 é obtida de (*3*) ou (*5*), para $n = 0$; entretanto, como $\frac{1}{2}a_0$ é o valor médio da função, pode-se determiná-la, muitas vezes, por simples inspeção da forma de onda. A série com os coeficientes obtidos pelas integrais descritas converge uniformemente para a função em todos os pontos contínuos e converge para o valor médio nos pontos de descontinuidade.

Exemplo 1 Determinar a série de Fourier para a forma de onda mostrada na Fig. 15-2.

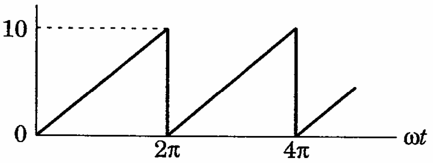


Figura 15-2

A forma de onda é contínua para $0 < \omega t < 2\pi$ e dada por $f(t) = (10/2\pi)\omega t$, com descontinuidades em $\omega t = n2\pi$, onde $n = 0, 1, 2, \ldots$ As condições de Dirichlet são satisfeitas e os coeficientes de Fourier são calculados por intermédio de (*5*) e (*6*). O valor médio da função é 5, por inspeção, e portanto, $\frac{1}{2}a_0 = 5$. Pela equação (*5*), então:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{10}{2\pi}\right)\omega t \cos n\omega t \; d(\omega t) = \frac{10}{2\pi^2}\left[\frac{\omega t}{n} \operatorname{sen} n\omega t + \frac{1}{n^2}\cos n\omega t\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{10}{2\pi^2 n^2}(\cos n2\pi - \cos 0) = 0 \text{ para qualquer valor inteiro de } n.$$

A série não contém termos co-senoidais. Empregando a equação (*6*), obtemos

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{10}{2\pi}\right)\omega t \operatorname{sen} n\omega t \; d(\omega t) = \frac{10}{2\pi^2}\left[-\frac{\omega t}{n}\cos n\omega t + \frac{1}{n^2}\operatorname{sen} n\omega t\right]_0^{2\pi} = -\frac{10}{\pi n}$$

Empregando esses coeficientes dos termos senoidais e o termo médio, a série fica

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi}\,\text{sen}\ \omega t - \frac{10}{2\pi}\,\text{sen}\ 2\omega t - \frac{10}{3\pi}\,\text{sen}\ 3\omega t - \ldots = 5 - \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}\ n\omega t}{n}$$

Os termos senoidais e co-senoidais da mesma freqüência podem ser combinados em um único termo senoidal ou co-senoidal com um ângulo de fase. Resultam, assim, duas alternativas para a forma da série trigonométrica:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum C_n \cos(n\omega t - \theta_n) \tag{7}$$

e

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum C_n\,\text{sen}\,(n\omega t + \phi_n) \tag{8}$$

onde $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\theta_n = \text{arc tg}\ (b_n/a_n)$ e $\phi_n = \text{arc tg}\ (a_n/b_n)$. Em (*7*) e (*8*) C_n é a amplitude do harmônico e os ângulos de fase do harmônico são θ_n ou ϕ_n.

Série Exponencial de Fourier

Se cada um dos termos em seno e co-seno da série trigonométrica for expresso na sua forma exponencial, obtém-se uma série de termos exponenciais:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right) + a_2\left(\frac{e^{j2\omega t} + e^{-j2\omega t}}{2}\right) + \ldots$$

$$+ b_1\left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right) + b_2\left(\frac{e^{j2\omega t} - e^{-j2\omega t}}{2j}\right) + \ldots \tag{9}$$

Reagrupando, temos:

$$f(t) = \ldots + \left(\frac{a_2}{2} - \frac{b_2}{2j}\right)e^{-j2\omega t} + \left(\frac{a_1}{2} - \frac{b_1}{2j}\right)e^{-j\omega t}$$

$$+ a_0 + \left(\frac{a_1}{2} + \frac{b_1}{2j}\right)e^{j\omega t} + \left(\frac{a_2}{2} + \frac{b_2}{2j}\right)e^{j2\omega t} + \ldots \qquad (10)$$

Definiremos, agora, uma nova constante complexa **A**, tal que:

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{2}a_0, \;\; \mathbf{A}_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \;\; \mathbf{A}_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \qquad (11)$$

e reescreveremos (*10*) como:

$$f(t) = \left\{\ldots + \mathbf{A}_{-2}e^{-j2\omega t} + \mathbf{A}_{-1}e^{-j\omega t} + \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 e^{j\omega t} + \mathbf{A}_2 e^{j2\omega t} + \ldots\right\} \qquad (12)$$

Para obter as integrais dos coeficientes $\mathbf{A}_n$, multiplicam-se ambos os membros de (*12*) por $e^{-j\omega t}$ e integra-se no intervalo de um período completo:

$$\int_0^{2\pi} f(t)\; e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) = \ldots + \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_{-2}\; e^{-j2\omega t}\, e^{-jn\omega t}\, d(\omega t)$$

$$+ \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_{-1}\, e^{-j\omega t}\, e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) + \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_0 e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) +$$

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{A}_1\, e^{j\omega t}\, e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) + \ldots + \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_n\, e^{jn\omega t}\, e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) + \ldots \qquad (13)$$

Todas as integrais definidas do segundo membro são nulas, exceto $\int_0^{2\pi} \mathbf{A}_n\, d(\omega t)$, que tem o valor $2\pi\mathbf{A}_n$. Assim, $\mathbf{A}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-jn\omega t}\, d(\omega t)$ ou, com t como variável: $\mathbf{A}_n = \frac{1}{T}\int_0^{T} f(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt \qquad (14)$

Do mesmo modo que no cálculo das integrais de a_n e b_n, os limites de integração em (*14*) devem abranger um período completo que seja conveniente, não necessariamente 0 a 2π ou 0 a T.

Os coeficientes da série trigonométrica são obtidos a partir dos coeficientes da série exponencial, somando-se e subtraindo-se as expressões de $\mathbf{A}_n$ e $\mathbf{A}_{-n}$ em (*11*). Assim, temos:

$$\mathbf{A}_n + \mathbf{A}_{-n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n + a_n + jb_n)$$

onde: $$a_n = \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_{-n} \qquad (15)$$

e $$\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_{-n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n - a_n - jb_n)$$

ou $$b_n = j(\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_{-n}) \qquad (16)$$

Exemplo 2 Determinar a série exponencial de Fourier para a forma de onda mostrada na Fig. 15-3. Empregando os coeficientes dessa série exponencial, obter a_n e b_n para a série trigonométrica e comparar com o exemplo 1.

No intervalo $0 < \omega t < 2\pi$, a função é definida por $f(t) = (10/2\pi)\omega t$. Por inspeção, verifica-se que o valor médio da função é 5. Substituindo $f(t)$ em (*14*), obtêm-se os coeficientes $\mathbf{A}_n$:

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi}\left(\frac{10}{2\pi}\right)\omega t\, e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) = \frac{10}{(2\pi)^2}\left[\frac{e^{-jn\omega t}}{(-jn)^2}(-jn\omega t - 1)\right]_0^{2\pi} = j\frac{10}{2\pi n}$$

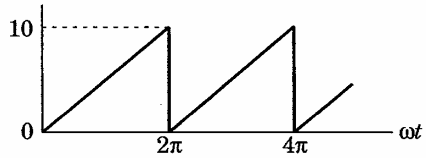


Figura 15-3

Introduzindo os coeficientes $\mathbf{A}_n$ em (*12*), a forma exponencial da série de Fourier para a onda dada fica:

$$f(t) = \ldots - j\frac{10}{4\pi}e^{-j2\omega t} - j\frac{10}{2\pi}e^{-j\omega t} + 5 + j\frac{10}{2\pi}e^{j\omega t} + j\frac{10}{4\pi}e^{j2\omega t} + \ldots \qquad (17)$$

O coeficiente do termos co-seno da série trigonométrica é:

$$a_n = \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_{-n} = j\frac{10}{2\pi n} + j\frac{10}{2\pi(-n)} = 0$$

e o coeficiente do termo em seno é:

$$b_n = j(\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_{-n}) = j\left(j\frac{10}{2\pi n} - j\frac{10}{2\pi(-n)}\right) = -\frac{10}{\pi n}$$

Assim, a série trigonométrica não tem os termos em co-seno, pois $a_n = 0$ para qualquer valor de n e os coeficientes dos termos em seno são $-10/(\pi n)$. O valor médio é 5 e a série é dada por:

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi}\text{ sen } \omega t - \frac{10}{2\pi}\text{ sen } 2\omega t - \frac{10}{3\pi}\text{ sen } 3\omega t - \ldots$$

igual à do exemplo 1.

Simetria das Formas de Onda

A série obtida no exemplo 1, além do termo constante, continha apenas termos em seno. Outras formas de onda conterão apenas termos em co-seno e, às vezes, existem apenas harmônicos ímpares. Isso resulta de certos tipos de simetria associados à forma de onda. O conhecimento dessa simetria acarreta simplificação nos cálculos para a determinação da série. As definições que se seguem são importantes para esse fim:

1. Uma função $f(x)$ diz-se par se $f(x) = f(-x)$

A função $f(x) = 2 + x^2 + x^4$ é um exemplo de função par, pois são iguais os seus valores para x e $-x$. O co-seno é uma função par, pois pode ser expresso em série sob a forma:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$$

A soma de duas ou mais funções pares é uma função par e a adição de uma constante mantém a natureza par da função.

Na Fig. 15-4, as formas de onda representam funções pares. São simétricas em relação ao eixo vertical.

2. Uma função $f(x)$ diz-se ímpar se $f(x) = -f(-x)$.

A função $f(x) = x + x^3 + x^5$ é um exemplo de função ímpar, pois são de sinais opostos seus valores para x e $-x$. O seno é uma função ímpar, pois pode ser expresso em série sob a forma:

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$$

A soma de duas ou mais funções ímpares é uma função ímpar, porém a adição de uma constante elimina a natureza ímpar da função, uma vez que $f(x)$ não mais será igual a $-f(-x)$. O produto de duas funções ímpares é uma função par.

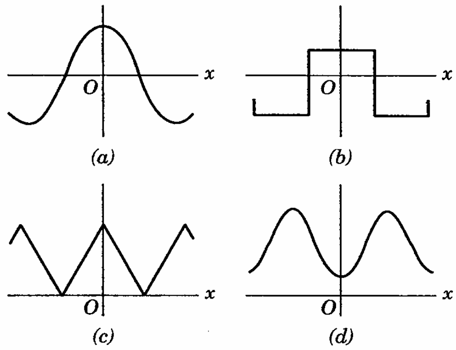


Figura 15-4

As formas de onda apresentadas na Fig. 15-5 representam funções ímpares.

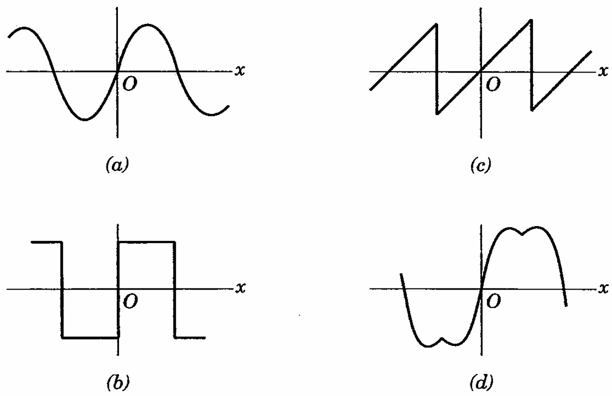
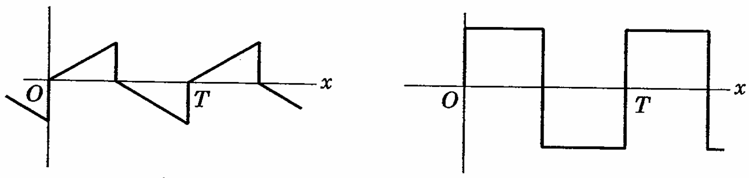


Figura 15-5

3. Uma função periódica $f(x)$ diz-se possuindo simetria de meia onda se $f(x) = -f(x + T/2)$, onde T é o período. Na Fig. 15-6, são vistas duas formas de ondas possuindo simetria de meia onda.



(a) *(b)*

Figura 15-6

Quando o tipo de simetria de uma onda é determinado, chega-se às seguintes conclusões: se a forma de onda é par, todos os termos da série correspondente são co-senoidais além de, possivelmente, uma constante, caso a forma de onda possua um valor médio. Portanto, não há necessidade de calcularem-se as integrais para os coeficientes b_n, pois não podem existir termos em seno. Se é ímpar, a série contém, apenas, termos em seno. A onda pode ser ímpar somente depois de eliminado o termo constante, caso em que sua representação conterá apenas essa constante e uma série de termos senoidais. Caso a onda possua simetria de meia-onda, existem apenas harmônicos ímpares. Salvo na hipótese em que a função seja também ímpar ou par, a série conterá termos em seno e em co-seno; em qualquer caso, a_n e b_n são nulos para $n = 2, 4, 6 \ldots$ em toda forma de onda que possua simetria de meia onda.

Determinadas formas de ondas podem ser pares ou ímpares, dependendo da localização do eixo vertical. A onda quadrada da Fig. 15-7(*a*) satisfaz a condição de função par, isto é, $f(x) = f(-x)$. Um deslocamento do eixo vertical para a posição indicada na Fig. 15-7(*b*) resulta numa função ímpar, onde $f(x) = -f(-x)$. Se o eixo vertical estiver situado em qualquer outro ponto que não os indicados na Fig. 15-7, a onda quadrada não será nem par nem ímpar. Sua série conterá termos em seno e em co-seno. Assim, na análise de funções periódicas, desde que a forma da onda o permita, o eixo vertical deve ser convenientemente escolhido, de modo a acarretar uma função par ou uma função ímpar.

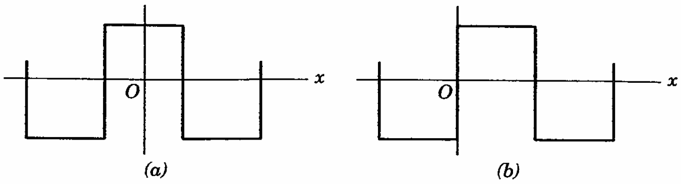


Figura 15-7

O deslocamento do eixo horizontal pode simplificar a representação da função em série. Como exemplo, a forma de onda da Fig. 15-8(a) só satisfaz os requisitos de uma função ímpar, depois de removido seu valor médio, como mostra a Fig. 15-8(b). Assim, sua série conterá um termo constante e todos os termos em seno.

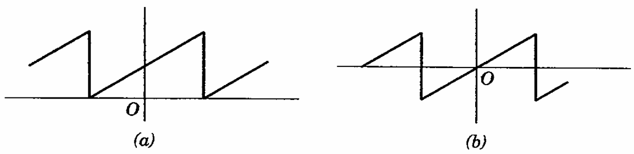


Figura 15-8

Como o equivalente exponencial do seno é um imaginário puro e o do co-seno é real puro, as considerações de simetria feitas acima poderão ser empregadas para verificar os coeficientes da série exponencial. Em uma forma de onda par só contendo termos em co-seno na sua série trigonométrica, os coeficientes de sua exponencial de Fourier devem ser números reais puros. Do mesmo modo, uma função ímpar, cuja série trigonométrica conste de termos senoidais, tem coeficientes imaginários puros na sua série exponencial.

Espectro de Linha

Chama-se *espectro de linha* a uma representação gráfica das amplitudes dos harmônicos da onda. As linhas diminuem mais depressa para as ondas cujas séries convergem rapidamente. As ondas que possuem descontinuidades, como a dente-de-serra e a onda quadrada, possuem espectro com amplitudes que decrescem lentamente, já que suas séries possuem os harmônicos muito altos. Seus harmônicos de décima ordem possuirão, às vezes, amplitudes com valor significativo, comparadas com o fundamental. Por outro lado, as séries das formas de onda sem descontinuidades e de conformação suave convergem rapidamente para a função e apenas alguns termos são suficientes para reproduzir a onda. Essa convergência rápida fica evidente pelo espectro de linha, pois as amplitudes dos harmônicos decrescem rapidamente, de modo que, depois do 5º ou do 6º, deixam de ter importância.

O conteúdo harmônico e o espectro de linha são parte integrante da própria natureza da onda e não se modificam com o método de análise. O deslocamento do eixo zero dá um espectro completamente diferente à série trigonométrica, variando grandemente, também, os coeficientes da série exponencial, mas os mesmos harmônicos sempre aparecem na série e sua amplitude, dada por $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, permanece constante.

A Fig. 15-9 mostra a onda dente-de-serra do exemplo 1 e seu espectro. Como só havia termos em seno na série, as amplitudes C_n dos harmônicos são iguais a b_n.

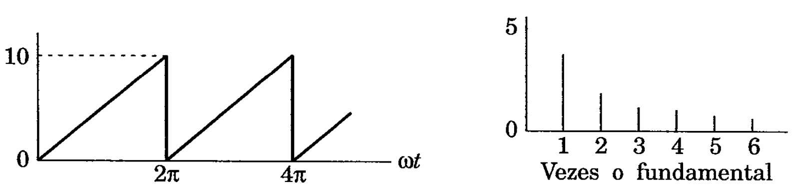


Figura 15-9

A série exponencial da onda dente-de-serra possui termos com freqüências $+ n\omega$ e $- n\omega$ [ver equação (*17*)] e o espectro é o apresentado na Fig. 15-10. A amplitude de um determinado harmônico é a soma das duas amplitudes, uma em $+ n\omega$ e outra em $-n\omega$. No espectro da Fig. 15-10, em $n = -2$ e $n = +2$, encontram-se linhas de amplitude $10/4\pi$. Somando-as obtém-se $10/2\pi$ para a amplitude total desse harmônico, o que concorda com o espectro da Fig. 15-9.

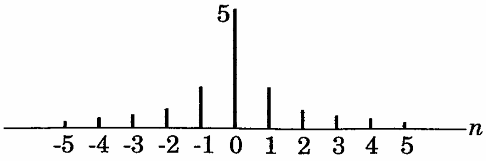


Figura 15-10

Síntese da Forma de Onda

Síntese é a reunião dos componentes, de modo a reconstituir o todo. Na análise de Fourier, ela é a recombinação dos termos da série trigonométrica, geralmente os primeiros quatro ou cinco, de modo a reproduzir a onda original. Às vezes, somente depois de sintetizar uma onda fica o estudante convencido de que a série de Fourier exprime, de fato, a onda periódica para a qual foi obtida.

A série trigonométrica para a onda dente-de-serra do exemplo 1, com amplitude máxima igual a 10, é:

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi} \text{ sen } \omega t - \frac{10}{2\pi} \text{ sen } 2\omega t - \frac{10}{3\pi} \text{ sen } 3\omega t - \ldots$$

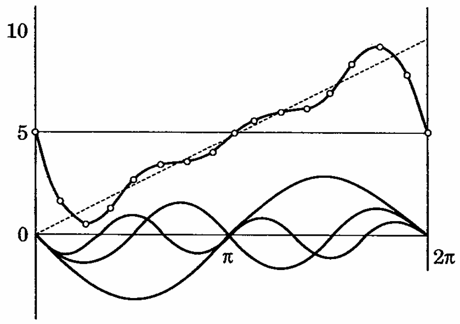


Figura 15-11

Na Fig. 15-11, esses quatro termos estão representados e somados e, apesar de o resultado não ser uma onda dente-de-serra perfeita, constata-se que, com a inclusão de mais termos, a representação tenderá para aquela onda. Como essa onda possui descontinuidades, sua série não converge rapidamente e, conseqüentemente, a síntese, empregando apenas quatro termos, não conduz a um resultado muito bom. O termo seguinte, de freqüência 4ω, tem amplitude $10/4\pi$, que, certamente, ainda é significativa, comparada com a amplitude $10/\pi$ do harmônico fundamental. Como, na síntese da forma de onda, cada termo é adicionado, reduzem-se as irregularidades da resultante e melhora a aproximação à onda original. Isso era o que queríamos expressar quando dizíamos que a *série converge para a função em todos os pontos e para o valor médio nos pontos de descontinuidades.*

Na Fig. 15-11, é claro que o valor 5 permanece nos pontos 0 e 2π, já que todos os termos em seno são nulos nesses pontos. Esses são pontos de descontinuidade; o valor da função é 10 quando deles nos aproximamos pela esquerda e 0 quando pela direita, com o valor médio 5.

Valor Eficaz e Potência

Uma onda de corrente periódica e não-senoidal passando por um resistor, produz uma potência determinada pelo valor eficaz ou rms da onda. No Capítulo 2, viu-se que o valor eficaz de uma função tal como

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \ldots + b_1 \operatorname{sen} \omega t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega t + \ldots$$

era:

$$F_{\text{rms}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a_0\right)^2 + \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{2}a_2^2 + \ldots + \frac{1}{2}b_1^2 + \frac{1}{2}b_2^2 + \ldots} \qquad (18)$$

Exprimindo a amplitude do harmônico por $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ e chamando c_0 ao valor médio, temos, da equação (*18*):

$$F_{\text{rms}} = \sqrt{c_0^2 + \frac{1}{2}c_1^2 + \frac{1}{2}c_2^2 + \frac{1}{2}c_3^2 + \ldots}$$

Supondo um circuito linear com uma tensão periódica aplicada, a corrente resultante terá o mesmo conteúdo harmônico da tensão, porém com diferentes amplitudes relativas desses harmônicos, já que as impedâncias variam com $n\omega$. É possível que alguns harmônicos não apareçam na corrente, pois a ressonância paralela acarreta impedância infinita. Em geral, pode-se escrever:

$$v = V_0 + \sum V_n \text{ sen } (n\omega t + \phi_n) \text{ e } i = I_0 + \sum I_n \text{ sen } (n\omega t + \psi_n) \qquad (19)$$

com os correspondentes valores eficazes:

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{V_0^2 + \frac{1}{2}V_1^2 + \frac{1}{2}V_2^2 + \ldots} \text{ e } I_{\text{rms}} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2}I_1^2 + \frac{1}{2}I_2^2 + \ldots} \qquad (20)$$

A potência média P decorre da integração da potência instantânea, obtida pelo produto de v e i, logo:

$$p = vi = \left[V_0 + \sum V_n \text{ sen } (n\omega t + \phi_n)\right]\left[I_0 + \sum I_n \text{ sen } (n\omega t + \psi_n)\right] \qquad (21)$$

Como v e i têm períodos de T segundos, seu produto deve conter em T um número inteiro de períodos. (Lembrar que, para uma onda senoidal simples de tensão, o produto i tem um período igual à metade daquele da onda de tensão.) A potência média é:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \left[V_0 + \sum V_0 \text{ sen } (n\omega t + \phi_n)\right]\left[I_0 + \sum I_n \text{ sen } (n\omega t + \psi_n)\right] dt \qquad (22)$$

O exame dos termos possíveis no produto das duas séries infinitas mostra que eles são dos seguintes tipos: o produto de duas constantes, o produto de uma constante por uma função senoidal, o produto de duas funções senoidais de freqüências diferentes e o quadrado de funções senoidais. Após a integração, o produto das duas constantes permanece V_0I_0, e as funções senoidais ao quadrado, aplicados os limites de integração, aparecem como $(V_nI_n/2) \cos (\phi_n - \psi_n)$. Todos os outros produtos, integrados no período T, são nulos. A potência média é, então, dada por:

$$P = V_0I_0 + \frac{1}{2}V_1I_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2}V_2I_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2}V_3I_3 \cos \theta_3 + \ldots \qquad (23)$$

onde $\theta_n = (\phi_n - \psi_n)$ é o ângulo da impedância equivalente da estrutura na freqüência $n\omega$ rad/s e V_n e I_n são os valores máximos das respectivas funções senoidais. Nos circuitos de CA de uma só freqüência viu-se que a potência média é $P = VI \cos \theta$, a qual está incluída em *(23)*, pois V é um valor eficaz

($V = V_{max}/\sqrt{2}$ e $I = I_{max}/\sqrt{2}$), de modo que $P = 1/2\ V_{max}\ I_{max} \cos\theta$. Nos circuitos de *CC* a potência é *VI*, incluída em (*23*) como $V_0 I_0$. A equação (*23*) é, portanto, perfeitamente geral, incluindo circuitos de CC, circuitos de CA de uma só freqüência e ondas periódicas não-senoidais. Observa-se também de (*23*) que tensão e corrente de freqüências diferentes não contribuem para a potência média. Com relação à potência, portanto, cada harmônico atua independentemente.

Aplicações na Análise de Circuitos

Sugeriu-se acima que, aplicados os termos da série de uma tensão a uma estrutura linear, obtêm-se os termos harmônicos correspondentes da série da corrente. Este resultado é obtido por superposição. Portanto, cada termo da série de Fourier que representa a tensão é considerado como uma fonte isolada, como indica a Fig. 15-12. Em seguida, cada impedância equivalente da estrutura, na freqüência do respectivo harmônico, $n\omega$, é empregada para o cálculo da corrente nesse harmônico. A soma dessas respostas individuais é a resposta total *i* sob a forma de série, devida à tensão aplicada.

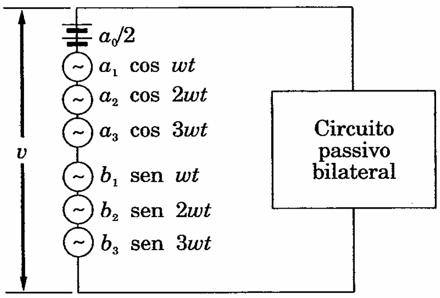


Figura 15-12

Exemplo 3 Um circuito *RL* série, em que $R = 5$ ohms e $L = 0{,}02$ H, tem uma tensão aplicada $v = 100 + 50 \text{ sen } \omega t + 25 \text{ sen } 3\omega t$, onde $\omega = 500$ rad/s. Achar a corrente e a potência média.

Calcula-se a impedância equivalente do circuito em cada freqüência. Em seguida, calculam-se as respectivas correntes.

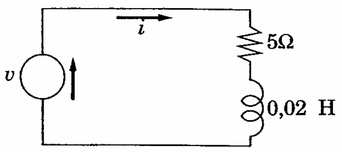


Figura 15-13

Em $\omega = 0$, $\mathbf{Z} = 5$ e, portanto:

$I_0 = V_0/R = 100/5 = 20$

Em $\omega = 500$ rad/s, $\mathbf{Z}_1 = 5 + j(0{,}02)\,(500) = 5 + j10$ e, então:

$$i_1 = \frac{V_{1max}}{|\mathbf{Z}_1|}\,\text{sen}\,(\omega t - \theta_1) = \frac{50}{11{,}15}\,\text{sen}\,(\omega t - 63{,}4^\circ) = 4{,}48\,\text{sen}\,(\omega t - 63{,}4^\circ)$$

Em $3\omega = 1500$ rad/s, $\mathbf{Z}_3 = 5 + j30$ e, então:

$$i_3 = \frac{V_{3max}}{|\mathbf{Z}_3|}\,\text{sen}\,(3\omega t - \theta_3) = \frac{25}{30{,}4}\,\text{sen}\,(3\omega t - 80{,}54^\circ) =$$

$$= 0{,}823\,\text{sen}\,(3\omega t - 80{,}54^\circ)$$

A soma das correntes harmônicas é a resposta total procurada:

$$i = 20 + 4{,}48\,\text{sen}\,(\omega t - 63{,}4^\circ + 0{,}823\,\text{sen}\,(3\omega t - 80{,}54^\circ))$$

Seu valor eficaz é:

$$I_{rms} = \sqrt{20^2 + 4{,}48^2/2 + 0{,}823^2/2} = \sqrt{410{,}6} = 20{,}25$$

que acarreta, no resistor de 5 ohms, a potência:

$$P = I^2_{rms} R = (410{,}6)5 = 2053\ \text{W}$$

Como verificação, calcula-se a potência média total calculando-se a potência com que cada harmônico contribui e somando-se as mesmas. Temos:

Para $\omega = 0$, $\qquad P = V_0 I_0 = 100(20) = 2000$ W

Para $\omega = 500$ rad/s, $P = \frac{1}{2} V_1 I_1 \cos\theta_1 = \frac{1}{2}(50)(4{,}48)\cos 63{,}4° = 50{,}1$ W

Para $3\omega = 1500$ rad/s,

$$P = \frac{1}{2} V_3 I_3 \cos\theta_3 = \frac{1}{2}(25)(0{,}823)\cos 80{,}54° = 1{,}69 \text{ W}$$

Portanto: $$P_T = 2000 + 50{,}1 + 1{,}69 = 2052 \text{ W}$$

Outro método A expressão em série da tensão no resistor é:

$$v_R = Ri = 100 + 22{,}4 \text{ sen } (\omega t - 63{,}4°) + 4{,}11 \text{ sen } (3\omega t - 80{,}54°)$$

e

$$V_R = \sqrt{100^2 + \frac{1}{2}(22{,}4)^2 + \frac{1}{2}(4{,}11)^2} = \sqrt{10259} = 101{,}3$$

A potência entregue pela fonte é $P = V_R^2/R = (101{,}3)^2/5 = 2052$ W.

A série exponencial de Fourier é empregada da mesma maneira, exceto que, freqüentemente, a impedância do circuito pode ser expressa em termos de $n\omega$ e os coeficientes I_n da série da corrente podem ser calculados a partir de $\mathbf{V}_n/\mathbf{Z}_n$, como mostra o exemplo 4, a seguir.

Exemplo 4 Uma tensão representada pela onda triangular da Fig. 15-14 é aplicada em um capacitor de C farads. Determinar a corrente resultante.

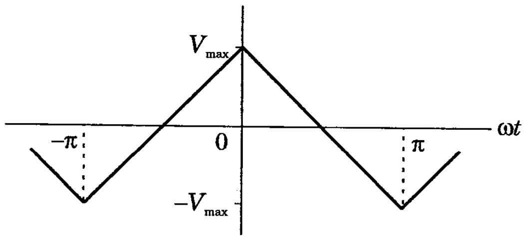


Figura 15-14

No intervalo $-\pi < \omega t < 0$ a tensão é representada pela função $v = V_{max} + (2V_{max}/\pi)\omega t$ e, para $0 < \omega t < \pi$, $v = V_{max} - (2V_{max}/\pi)\omega t$. Os coeficientes da série exponencial são determinados por:

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\left[V_{\max} + (2V_{\max}/\pi)\omega t\right] e^{-jn\omega t}\, d(\omega t)$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left[V_{\max} - (2V_{\max}/\pi)\omega t\right] e^{-jn\omega t}\, d(\omega t)$$

donde: $\mathbf{A}_n = \dfrac{4V_{\max}}{\pi^2 n^2}$ para n ímpar e $\mathbf{A}_n = 0$ para n par.

A impedância do circuito $\mathbf{Z} = 1/j\omega C$ pode ser expressa como função de n, ou seja: $\mathbf{Z} = 1/jn\omega C$. Assim, temos:

$$\mathbf{I}_n = \frac{\mathbf{V}_n}{\mathbf{Z}_n} = \frac{4V_{\max}}{\pi^2 n^2}(jn\omega C) = j\left(\frac{4V_{\max}\omega C}{\pi^2 n}\right)$$

e a série da corrente é:

$$i = j\left(\frac{4V_{\max}\omega C}{\pi^2}\right)\sum \frac{e^{jn\omega t}}{n} \text{ para } n \text{ ímpar, apenas.}$$

A série poderia ser convertida para a forma trigonométrica e resumida, para mostrar a forma de onda da corrente. Entretanto, esse é o mesmo aspecto do resultado do Probl. 15.8, onde o coeficiente $\mathbf{A}_n$ é $\mathbf{A}_n = -j(2V/n\pi)$, apenas para n ímpar. Aqui o sinal é negativo, indicando que a onda de corrente é o negativo da onda quadrada do Probl. 15.8, com o valor máximo $(2V_{\max}\omega C)/\pi$.

Problemas Resolvidos

15.1 Determinar a série trigonométrica de Fourier para a onda quadrada da Fig. 15-15 e traçar o espectro de linha.

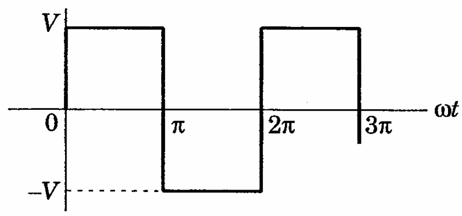


Figura 15-15

No intervalo $0 < \omega t < \pi$, $f(t) = V$ e, para $\pi < \omega t < 2\pi$, $f(t) = -V$. O valor médio da onda é zero; assim, $a_0/2 = 0$. Os coeficientes co-senoidais são obtidos pelo cálculo integral como se segue:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} V \cos n\omega t \, d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} (-V) \cos n\omega t \, d(\omega t)\right\} =$$

$$= \frac{V}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{n} \operatorname{sen} n\omega t\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{\pi} \operatorname{sen} n\omega t\right]_{\pi}^{\pi 2}\right\} = 0 \text{ para qualquer } n$$

A série contém termos co-senoidais. Procedendo à integração para os termos senoidais, temos:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} V \operatorname{sen} n\omega t \, d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} (-V) \operatorname{sen} n\omega t \, d(\omega t)\right\}$$

$$= \frac{V}{\pi}\left\{\left[-\frac{1}{n} \cos n\omega t\right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{\pi} \cos n\omega t\right]_{\pi}^{2\pi}\right\}$$

$$= \frac{V}{\pi n}(-\cos n\pi + \cos 0 + \cos n2\pi - \cos n\pi) = \frac{2V}{\pi n}(1 - \cos n\pi)$$

Então $b_n = 4V/\pi n$ para $n = 1, 3, 5, \ldots$, e $b_n = 0$ para $n = 2, 4, 6, \ldots$. A série para a onda quadrada é:

$$f(t) = \frac{4V}{\pi} \operatorname{sen} \omega t + \frac{4V}{3\pi} \operatorname{sen} 3\omega t + \frac{4V}{5\pi} \operatorname{sen} 5\omega t + \ldots$$

A Fig. 15-16 mostra o espectro de linha para essa série. A série contém apenas termos harmônicos senoidais ímpares, o que poderia ser antecipado pelo exame da simetria da forma da onda. Como a onda da Fig. 15-15 é ímpar, sua série só contém termos senoidais; e como possui também simetria de meia onda, apenas os harmônicos ímpares estão presentes.

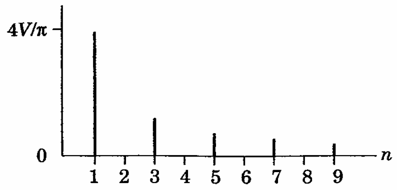


Figura 15-16

15.2 Determinar a série trigonométrica de Fourier para a onda triangular da Fig. 15-17 e traçar o espectro.

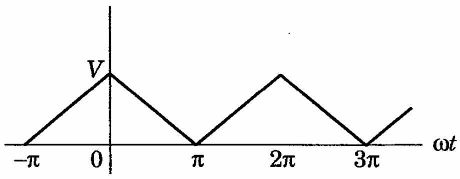


Figura 15-17

A onda é uma função par, pois $f(t) = f(-t)$ e, se for suprimido o valor médio $V/2$, ela terá, também, simetria de meia onda, ou seja, $f(t) = -f(t + T/2)$. No intervalo $-\pi < \omega t < 0$, $f(t) = V + (V/\pi)\omega t$; para $0 < \omega t < \pi$, $f(t) = V - (V/\pi)\omega t$. Como as ondas pares só contêm termos co-senoidais, $b_n = 0$ para qualquer n inteiro. Logo:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} [V + (V/\pi)\omega t] \cos n\omega t \; d(\omega t) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} [V - (V/\pi)\omega t] \cos n\omega t \; d(\omega t)$$

$$= \frac{V}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\omega t \; d(\omega t) + \int_{-\pi}^{0} \frac{\omega t}{\pi} \cos n\omega t \; d(\omega t) - \int_{0}^{\pi} \frac{\omega t}{\pi} \cos n\omega t \; d(\omega t)\right\}$$

$$= \frac{V}{\pi^2}\left\{\left[\frac{1}{n^2} \cos n\omega t + \frac{\omega t}{n} \operatorname{sen} n\omega t\right]_{-\pi}^{0} - \left[\frac{1}{n^2} \cos n\omega t + \frac{\omega t}{n} \operatorname{sen} n\omega t\right]_{0}^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{V}{\pi^2 n^2}\{\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0\} = \frac{2V}{\pi^2 n^2}(1 - \cos n\pi)$$

Como indicava a simetria de meia onda, a série só contém termos ímpares, pois $a_n = 0$ para $n = 2, 4, 6, \ldots$ Para $n = 1, 3, 5, \ldots, a_n = 4V/\pi^2 n^2$. Logo, a série pedida é:

$$f(t) = \frac{V}{2} + \frac{4V}{\pi^2}\cos\omega t + \frac{4V}{(3\pi)^2}\cos 3\omega t + \frac{4V}{(5\pi)^2}\cos 5\omega t + \ldots$$

Os coeficientes diminuem com $1/n^2$ e, portanto, a série converge mais rapidamente que a do Probl. 15.1. Tal fato é evidenciado pelo espectro de linha da Fig. 15-18.

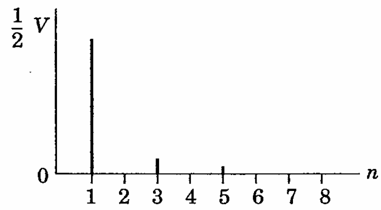


Figura 15-18

15.3 Determinar a série trigonométrica de Fourier para a onda dente-de-serra da Fig. 15-19 e traçar o espectro.

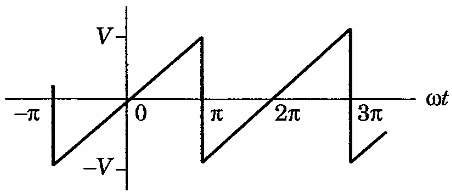


Figura 15-19

Pela inspeção, verifica-se que o valor médio da onda é zero e que a onda é ímpar. Conseqüentemente, a série conterá apenas termos senoidais. Uma única expressão, $f(t) = (V/\pi)\omega t$, descreve a onda no período entre $-\pi$ e $+\pi$, e esses limites serão utilizados na integração para o cálculo de b_n.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(V/\pi)\omega t \operatorname{sen} n\omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2}\left[\frac{1}{n^2}\operatorname{sen} n\omega t - \frac{\omega t}{n}\cos n\omega t\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$= -\frac{2V}{n\pi}$ (c

Cos $n\pi$ é
portanto, c

$f(t) = \frac{2V}{\pi}$

Os coeficie
como most
zero e do
Compare-
a semelha

15.4 Determina
e traçar o

No interv
observaçã
ímpar, a s
temos:

$$= -\frac{2V}{n\pi}(\cos n\pi)$$

Cos $n\pi$ é positivo para n par e negativo para n ímpar, alternando-se, portanto, os sinais dos coeficientes. A série pedida é:

$$f(t) = \frac{2V}{\pi}\left\{\text{sen } \omega t - \frac{1}{2}\text{ sen } 2\omega t + \frac{1}{3}\text{ sen } 3\omega t - \frac{1}{4}\text{ sen } 4\omega t + \ldots\right\}$$

Os coeficientes diminuem com $1/n$; portanto, a série converge lentamente, como mostra o espectro da Fig. 15-20. Exceto pelo deslocamento do eixo zero e do termo médio, esta forma de onda é a mesma do exemplo 1. Compare-se o espectro de linha da Fig. 15-9 com o da Fig. 15-20 e note-se a semelhança.

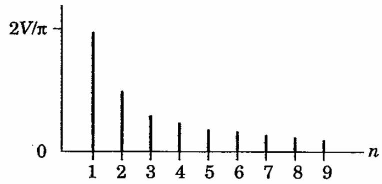


Figura 15-20

15.4 Determinar a série trigonométrica de Fourier para a onda mostrada na Fig. 15-21 e traçar o espectro.

No intervalo $0 < \omega t < \pi$, $f(t) = (V/\pi)\omega t$; para $\pi < \omega t < 2\pi$, $f(t) = 0$. Pela observação, o valor médio da onda é $V/4$. Como a onda não é par nem ímpar, a série conterá termos em seno e em co-seno. No intervalo de 0 a π, temos:

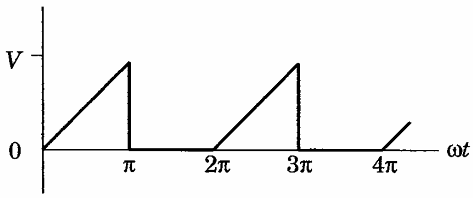


Figura 15-21

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (V/\pi)\omega t \cos n\omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2}\left[\frac{1}{n^2}\cos n\omega t + \frac{\omega t}{n}\,\text{sen}\, n\omega t\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{V}{\pi^2 n^2}(\cos n\pi - 1)$$

Se n é par, $(\cos n\pi - 1) = 0$ e $a_n = 0$. Se n é ímpar, $a_n = -2V/(\pi^2 n^2)$. Os coeficientes b_n são:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (V/\pi)\omega t \,\text{sen}\, n\omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2}\left[\frac{V}{n^2}\,\text{sen}\, n\omega t - \frac{\omega t}{n}\cos n\omega t\right]_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{V}{\pi n}(\cos n\pi)$$

O sinal é alternadamente negativo em $b_n = -V/\pi n$ para n par e $b_n = +V/\pi n$ para n ímpar. Assim, a série pedida é:

$$f(t) = \frac{V}{4} - \frac{2V}{\pi^2}\cos \omega t - \frac{2V}{(3\pi)^2}\cos 3\omega t - \frac{2V}{(5\pi)^2}\cos 5\omega t - \ldots$$

$$+ \frac{V}{\pi}\,\text{sen}\, \omega t - \frac{V}{2\pi}\,\text{sen}\, 2\omega t + \frac{V}{3\pi}\,\text{sen}\, 3\omega t - \ldots$$

As amplitudes dos harmônicos pares dadas diretamente pelos coeficientes b_n, já que não existem termos pares em co-seno. Entretanto, as amplitudes dos harmônicos ímpares devem ser calculadas de $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

Assim, $C_1 = \sqrt{(2V/\pi^2)^2 + (V/\pi)^2} = V(0{,}377)$. Do mesmo modo $C_3 = V(0{,}109)$ e $C_5 = V(0{,}064)$. A Fig. 15-22 mostra o espectro de linha.

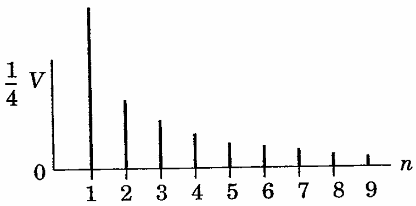


Figura 15-22

15.5 Determina
ficada, mo

A onda
termos
observaç

$a_0 = \frac{1}{\pi}$

A seguir

$a_n = \frac{1}{\pi}$

Para n
esta exp
para a_1.

$a_1 = \frac{1}{\pi}$

A segui

$b_n = \frac{1}{\pi}$

15.5 Determinar a série trigonométrica de Fourier para a meia-onda senoidal retificada, mostrada na Fig. 15-23, e traçar o espectro de linha.

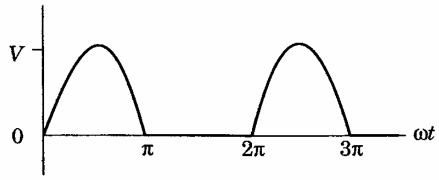


Figura 15-23

A onda não apresenta simetria; assim, espera-se que a série contenha termos em seno e em co-seno. Como o valor médio não é obtido por observação, calcula-se a_0 para o termo $a_0/2$ da série. Logo:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V \text{ sen } \omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi}\left[-\cos \omega t\right]_0^{\pi} = \frac{2V}{\pi}$$

A seguir, calcula-se a_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V \text{ sen } \omega t \cos n\omega t \, d(\omega t)$$

$$= \frac{V}{\pi}\left[\frac{-n \text{ sen } \omega t \text{ sen } n\omega t - \cos n\omega t \cos \omega t}{-n^2 + 1}\right]_0^{\pi} = \frac{V}{\pi(1-n^2)}(\cos n\pi + 1)$$

Para n par, $a_n = 2V/\pi(1-n^2)$; para ímpar, $a_n = 0$. Entretanto, para $n = 1$ esta expressão é indeterminada; assim, deve-se integrar separadamente para a_1.

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V \text{ sen } \omega t \cos \omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2} \text{ sen } 2\omega t \, d(\omega t) = 0$$

A seguir, calcula-se b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V \text{ sen } \omega t \text{ sen } n\omega t \, d(\omega t) =$$

$$= \frac{V}{\pi}\left[\frac{n \text{ sen } \omega t \cos n\omega t - \text{ sen } n\omega t \cos \omega t}{-n^2 + 1}\right]_0^{\pi} = 0$$

Também aqui, a expressão é indeterminada para $n = 1$; calcula-se b_1 separadamente.

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V \text{ sen}^2\, \omega t\, d(\omega t) = \frac{V}{\pi}\left[\frac{\omega t}{2} - \frac{\text{sen } 2\omega t}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{V}{2}$$

A série de Fourier pedida é:

$$f(t) = \frac{V}{\pi}\left\{1 + \frac{\pi}{2}\text{sen }\omega t - \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t - \frac{2}{35}\cos 6\omega t - \ldots\right\}$$

O espectro da Fig. 15-24 mostra o forte termo fundamental da série e as amplitudes rapidamente decrescentes dos harmônicos de ordem superior.

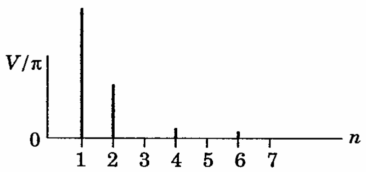


Figura 15-24

15.6 Determinar a série trigonométrica de Fourier para a meia onda senoidal retificada da Fig. 15-25, na qual o eixo vertical foi deslocado de sua posição em relação ao Probl. 15.5.

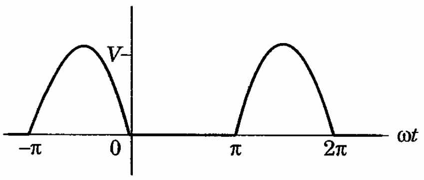


Figura 15-25

No intervalo $-\pi < \pi\omega t < 0$ a função é descrita por $f(t) = -V \text{ sen } \omega t$. O valor médio é o mesmo do Probl. 15.5, ou seja, $a_0 = 2V/\pi$. Para os coeficientes a_n, tem-se:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-V \text{ sen } \omega t) \cos n\omega t \; d(\omega t) = \frac{V}{\pi(1 - n^2)} (1 + \cos n\pi)$$

Para n par, $a_n = 2\ V/\pi(1 - n^2)$; e para n ímpar, $a_n = 0$, exceto para $n = 1$, que deve ser examinado separadamente. Temos:

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-V \text{ sen } \omega t) \cos \omega t \; d(\omega t) = 0$$

Para os coeficientes b_n, tem-se:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-V \text{ sen } \omega t) \text{ sen } n\omega t \; d(\omega t) = 0$$

Novamente esta expressão é indeterminada para $n = 1$; tem-se de calcular b_1 em separado. Temos:

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-V) \text{ sen}^2\, \omega t \; d(\omega t) = -\frac{V}{2}$$

A série é, portanto, dada por:

$$f(t) = \frac{V}{\pi}\left\{1 - \frac{\pi}{2}\text{sen } \omega t - \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t - \frac{2}{35}\cos 6\omega t - \dots\right\}$$

Esta série é idêntica à do Probl. 15.5, exceto no termo fundamental, que, aqui, é negativo. Obviamente, o espectro é idêntico ao da Fig. 15-24.

15.7 Determinar a série trigonométrica de Fourier para o impulso retangular mostrado na Fig. 15-26 e locar o espectro.

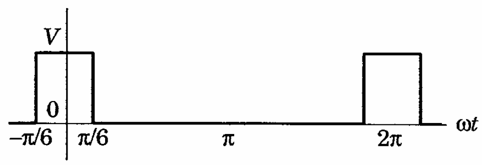


Figura 15-26

Com a posição indicada para o eixo zero, a onda é par e a série conterá apenas o termo constante e os termos em co-seno. Para o cálculo das integrais, é usado o período de $-\pi$ a $+\pi$ e a função é nula, exceto no intervalo de $-\pi/6$ a $+\pi/6$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} V\,d(\omega t) = \frac{V}{3},\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} V\cos n\omega t\,d(\omega t) = \frac{2V}{n\pi}\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{6}$$

Como sen $n\pi/6 = 1/2, \sqrt{3}/2, 1, \sqrt{3}/2, 1/2, 0, -1/2, \ldots$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ respectivamente, a série é:

$$f(t) = \frac{V}{6} + \frac{2V}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\cos\omega t + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\cos 2\omega t + 1\left(\frac{1}{3}\right)\cos 3\omega t + \right.$$

$$\left.\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\cos 4\omega t + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)\cos 5\omega t - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)\cos 7\omega t - \ldots\right\}$$

ou

$$f(t) = \frac{V}{6} + \frac{2V}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\text{sen}\,(n\pi/6)\,\cos n\omega t$$

Como mostra a Fig. 15-27, o espectro de linha para esta onda decresce muito lentamente, pois a série converge muito lentamente para a função. É de particular interesse o fato de que as amplitudes dos 8º, 9º e 10º harmônicos são superiores à do 7º. Nas ondas até aqui consideradas, as amplitudes dos harmônicos de ordem superior eram progressivamente menores.

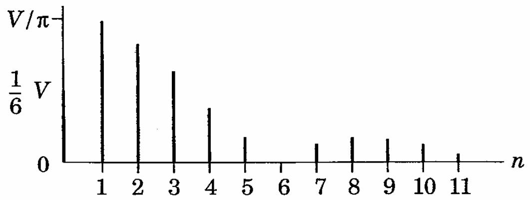


Figura 15-27

15.8 Determinar a série exponencial de Fourier para a onda quadrada da Fig. 15-28 e traçar o espectro de linha. Achar os coeficientes da série trigonométrica e comparar com o Probl. 15.1.

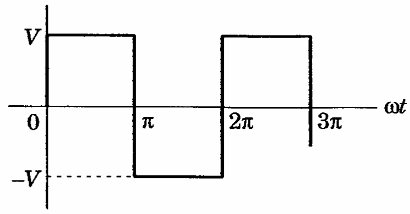


Figura 15-28

No intervalo $-\pi < \omega t < 0$, $f(t) = -V$; para $0 < \omega t < \pi$, $f(t) = V$. O valor médio da onda é zero. A onda é ímpar; portanto, os coeficientes $\mathbf{A}_n$ serão imaginários puros.

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} (-V)\, e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) + \int_{0}^{\pi} V e^{-jn\omega t}\, d(\omega t)\right\}$$

$$= \frac{V}{2\pi}\left\{-\left[\frac{1}{(-jn)} e^{-jn\omega t}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{1}{(-jn)} e^{-jn\omega t}\right]_{0}^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{V}{(-j2\pi n)}(-e^{0} + e^{jn\pi} + e^{-jn\pi} - e^{0}) = j\frac{V}{n\pi}(e^{jn\pi} - 1)$$

Para n par, $e^{jn\pi} = +1$ e $\mathbf{A}_n = 0$; para n ímpar, $e^{jn\pi} = -1$ e $\mathbf{A}_n = -j(2V/\pi)$. A série pedida é:

$$f(t) = \ldots + j\frac{2V}{3\pi} e^{-j3\omega t} + j\frac{2V}{\pi} e^{-j\omega t} - j\frac{2V}{\pi} e^{j\omega t} - j\frac{2V}{3\pi} e^{j3\omega t} - \ldots$$

O espectro da Fig. 15-29 mostra as amplitudes para as freqüências positivas e negativas.Combinando-se os valores para $+n$ e $-n$, obtém-se a mesma representação da série trigonométrica da Fig. 15-16.

Os coeficientes co-senoidais da série trigonométrica são:

$$a_n = \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_{-n} = -j\frac{2V}{n\pi} + \left(-j\frac{2V}{(-n\pi)}\right) = 0$$

e

$$b_n = j\,[\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_{-n}] = j\left[j\,\frac{4V}{n\pi} + j\,\frac{2V}{(-n\pi)}\right] = \frac{4V}{n\pi} \text{ apenas } n \text{ ímpar}$$

Isto está de acordo com os coeficientes da série trigonométrica do Probl. 15.1.

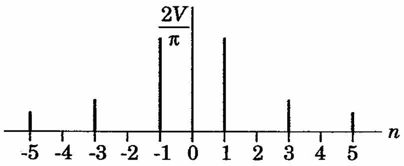


Figura 15-29

15.9 Determinar a série exponencial de Fourier para a onda triangular da Fig. 15-30 e traçar o espectro.

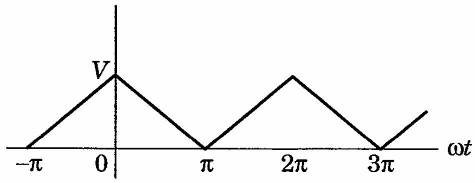


Figura 15-30

No intervalo $-\pi < \omega t < 0$, $f(t) = V + (V/\pi)\omega t$; para $0 < \omega t < \pi$, $f(t) = V - (V/\pi)\omega t$. A onda é par e, conseqüentemente, os coeficientes $\mathbf{A}_n$ serão reais. Pela inspeção, o valor médio é $V/2$.

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} [V + (V/\pi)\omega t]\, e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) + \int_{0}^{\pi} [V - (V/\pi)\omega t]\, e^{-jn\omega t}\, d(\omega t)\right\}$$

$$= \frac{V}{2\pi^2}\left\{\int_{-\pi}^{0} \omega t\, e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) + \int_{0}^{\pi} (-\omega t)\, e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) + \int_{-\pi}^{\pi} \pi\, e^{-jn\omega t}\, d(\omega t)\right\}$$

$$= \frac{V}{2\pi^2}\left\{\left[\frac{e^{-jn\omega t}}{(-jn)^2}(-jn\omega t - 1)\right]_{-\pi}^{0} - \left[\frac{e^{jn\omega t}}{(-jn)^2}(-jn\omega t - 1)\right]_{0}^{\pi}\right\} = \frac{V}{\pi^2 n^2}[1 - e^{jn\pi}]$$

Para n par, $e^{jn\pi} = +1$ e $\mathbf{A}_n = 0$; para n ímpar, $\mathbf{A}_n = 2V/\pi^2 n^2$. Portanto, a série é:

$$f(t) = \ldots + \frac{2V}{(-3\pi)^2} e^{-j3\omega t} + \frac{2V}{(-\pi)^2} e^{-j\omega t} + \frac{V}{2} + \frac{2V}{(\pi)^2} e^{j\omega t} + \frac{2V}{(3\pi)^2} e^{j3\omega t} + \ldots$$

A Fig. 15-31 é o espectro com as linhas em $-n$ e $+n$ que, uma vez somadas, representam as mesmas amplitudes do espectro da Fig. 15-18.

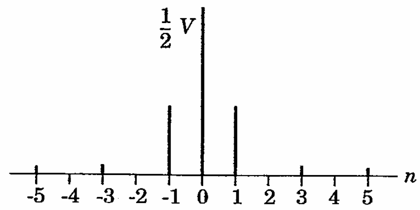


Figura 15-31

Os coeficientes da série trigonométrica são:

$$a_n = \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_{-n} = \frac{2V}{\pi^2 n^2} + \frac{2V}{\pi^2(-n)^2} = \frac{4V}{\pi^2 n^2} \quad \text{para } n \text{ ímpar}$$

$$\text{e} \qquad b_n = j\left[\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_{-n}\right] = j\left[\frac{2V}{\pi^2 n^2} - \frac{2V}{\pi^2(-n)^2}\right] = 0$$

Esses coeficientes concordam com os resultados do Probl. 15.2.

15.10 Determinar a série exponencial de Fourier para a meia-onda senoidal retificada da Fig. 15-32.

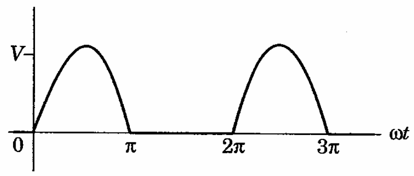


Figura 15-32

No intervalo $0 < \omega t < \pi$, $f(t) = V \text{ sen } \omega t$; de π a 2π, $f(t) = 0$. Então, temos:

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} V \text{ sen } \pi t\, e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) =$$

$$= \frac{V}{2\pi}\left[\frac{e^{-jn\omega t}}{(1-n^2)}(-jn \text{ sen } \omega t - \cos \omega t)\right]_0^{\pi} = \frac{V}{2\pi(1-n^2)}(e^{-jn\pi}+1)$$

Para n par, $\mathbf{A}_n = V/\pi(1-n^2)$; para n ímpar, $e^{-jn\pi} = -1$ e $\mathbf{A}_n = 0$. Entretanto, para $n = \pm 1$, a expressão de $\mathbf{A}_n$ fica indeterminada. A regra de L'Hôpital pode ser aplicada, ou seja, o numerador e o denominador de $\dfrac{V}{2\pi(1-n^2)}(e^{-jn\pi}+1)$ são diferenciados separadamente em relação a n, faz-se n tender para 1, de onde resulta que $\mathbf{A}_1 = -j(V/4)$ e $\mathbf{A}_{-1} = j(V/4)$.

O valor médio é:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} V \text{ sen } \omega t\, d(\omega t) = \frac{V}{2\pi}[-\cos \omega t\,]_0^{\pi} = \frac{V}{\pi}$$

A série exponencial de Fourier é:

$$f(t) = \ldots - \frac{V}{15\pi}e^{-j4\omega t} - \frac{V}{3\pi}e^{-j2\omega t} + j\frac{V}{4}e^{-j\omega t} + \frac{V}{\pi} - j\frac{V}{4}e^{j\omega t} -$$

$$- \frac{V}{3\pi}e^{j2\omega t} - \frac{V}{15\pi}e^{j4\omega t} - \ldots$$

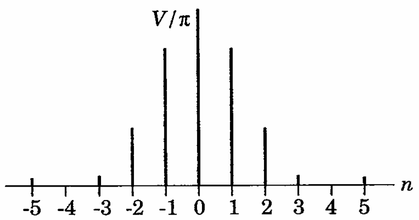


Figura 15-33

É interessante ressaltar que a série só contém dois coeficientes imaginários, em $n = \pm 1$, e que o termo em seno na série trigonométrica do Probl. 15.6 tem o coeficiente $b_1 = j(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_{-1}) = j[-j(V/4) - j(V/4)] = 1/2\ V$.

O espectro de linha da Fig. 15-33 mostra as amplitudes dos harmônicos da onda. Convém compará-lo com o da Fig. 15-24.

15.11 Calcular a potência média em uma resistência R = 10 ohms, sendo a série da corrente $i = 10 \text{ sen } \omega t + 5 \text{ sen } 3\omega t + 2 \text{ sen } 5\omega t$.

O valor eficaz da corrente é $I = \sqrt{\frac{1}{2}(10)^2 + \frac{1}{2}(5)^2 + \frac{1}{2}(2)^2} = \sqrt{64{,}5} = 8{,}03$. A potência média é, portanto: $P = I^2R = (64{,}5)10 = 645$ W.

Outro método. A potência total é a soma das potências dos harmônicos, que são dadas por $\frac{1}{2}\, V_{max} I_{max} \cos \theta$. Porém, na resistência, a tensão e a corrente estão em fase para todos os harmônicos $\theta_n = 0$. Logo, temos:

$$v_R = Ri = 100 \text{ sen } \omega t + 50 \text{ sen } 3\omega t + 20 \text{ sen } 5\omega t$$

e $$P = \frac{1}{2}(10)(100) + \frac{1}{2}(5)(50) + \frac{1}{2}(2)(20) = 645 \text{ W.}$$

15.12 Determinar a potência média entregue a uma estrutura, sabendo que a tensão aplicada e a corrente resultante são:

$$v = 50 + 50 \text{ sen } 5 \times 10^3 t + 30 \text{ sen } 10^4 t + 20 \text{ sen } 2 \times 10^4 t$$

$$i = 11{,}2 \text{ sen } (5 \times 10^3 t + 63{,}4^\circ) + 10{,}6 \text{ sen } (10^4 t + 45^\circ) + \\ + 8{,}97 \text{ sen } (2 \times 10^4 t + 26{,}6^\circ)$$

A potência média total é a soma das potências devidas aos harmônicos:

$$P = \frac{1}{2}(50)(11{,}2) \cos 63{,}4^\circ + \frac{1}{2}(30)(10{,}6) \cos 45^\circ +$$

$$+ \frac{1}{2}(20)(8{,}97) \cos 26{,}6^\circ = 317{,}7 \text{ W}$$

15.13 Determinar as constantes do circuito série de dois elementos no qual a tensão aplicada e a corrente resultante são as dadas no Probl. 15.12.

A série da tensão contém um termo constante igual a 50, porém não existe termo correspondente na série da corrente; logo, um dos elementos é um capacitor. Como o circuito absorve potência, o outro elemento deve ser um resistor.

A corrente eficaz é $I = \sqrt{\frac{1}{2}(11{,}2)^2 + \frac{1}{2}(10{,}6)^2 + \frac{1}{2}(8{,}97)^2} = 12{,}6$.

A potência média $P = I^2R$; donde $R = P/I^2 = 317{,}7/159{,}2 = 2$ ohms.

Para $\omega = 5 \times 10^3$, $|\mathbf{Z}| = V_{max}/I_{max} = 50/11{,}2 = 4{,}47$. Como $|\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + X_C^2}$, $X_C = \sqrt{(4{,}47)^2 - 4} = 4$.

Logo, $X_C = 1/(\omega C)$ e $C = 1/(\omega X_C) = 1/(4 \times 5 \times 10^3) = 50\,\mu F$

15.14 A onda de tensão da Fig. 15-34 é aplicada a um circuito série de $R = 2000$ ohms e $L = 10$ H. Achar a tensão no resistor, empregando a série trigonométrica de Fourier. Traçar o espectro de linha da tensão aplicada e de v_R para mostrar o efeito da indutância sobre os harmônicos, sendo $\omega = 377$ rad/s.

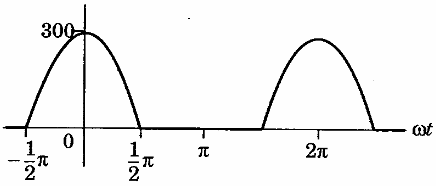


Figura 15-34

Como no Probl. 15.5, a tensão aplicada tem valor médio V_{max}/π. A função é par e a série, portanto, contém apenas termos em co-seno, cujos coeficientes são obtidos pela integração que se segue:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 300 \cos \omega t \cos n\omega t \; d(\omega t) = \frac{600}{\pi(1 - n^2)} \cos n\pi/2$$

Cos $n\pi/2$ tem valor -1 para $n = 2, 6, 10, \ldots$ e $+1$ para $n = 4, 8, 12, \ldots$ Para n ímpar, cos $n\pi/2 = 0$. Entretanto, para $n = 1$ a expressão é indeterminada e deve ser calculada separadamente. Temos:

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 300 \cos^2 \omega t \; d(\omega t) = \frac{300}{\pi}\left[\frac{\omega t}{2} + \frac{\text{sen } 2\omega t}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{300}{2}$$

Assim, a série da tensão é:

$$v = \frac{300}{\pi}\left\{1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega t + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \ldots\right\}$$

A impedância total do circuito em série, $\mathbf{Z} = R + jn\omega L$, é calculada para cada harmônico na expressão da tensão. Os resultados constam do quadro a seguir, onde k representa 10^3.

n	$n\omega$	R	$n\omega L$	$\lvert\mathbf{Z}\rvert$	θ
0	0	2 k	0	2 k	0°
1	377	2 k	3,77 k	4,26 k	62°
2	754	2 k	7,54 k	7,78 k	75,1°
4	1508	2 k	15,08 k	15,2 k	82,45°
6	2262	2 k	22,62 k	22,6 k	84,92°

Calculando os coeficientes para a série da corrente (observando os ângulos de atraso), temos:

$$n = 0, \quad I_0 = \frac{300/\pi}{2\text{ k}};$$

$$n = 1, \quad i_1 = \frac{300/2}{4{,}26\text{ k}} \cos(\omega t - 62°);$$

$$n = 2, \quad i_2 = \frac{600/3\pi}{7{,}78\text{ k}} \cos(2\omega t - 75{,}1°) \text{ etc.}$$

A série da corrente é, então:

$$i = \frac{300}{2\text{ k}\pi} + \frac{300}{(2)4{,}26\text{ k}} \cos(\omega t - 62°) + \frac{600}{3\pi(7{,}78\text{ k})} \cos(2\omega t - 75{,}1°) -$$

$$- \frac{600}{15\pi(15{,}2\text{ k})} \cos(4\omega t - 82{,}45°) + \frac{600}{35\pi(22{,}6\text{ k})} \cos(6\omega t - 84{,}92°) - \ldots$$

A tensão no resistor de 2 k é $i(2\text{ k})$ ou:

$$v_R = 95{,}5 + 70{,}4 \cos(\omega t - 62°) + 16{,}4 \cos(2\omega t - 75{,}1°)$$

$$- 1{,}67 \cos(4\omega t - 82{,}45°) + 0{,}483 \cos(6\omega t - 84{,}92°) - \ldots$$

Na Fig. 15-35, o espectro da tensão aplicada e V_R mostram claramente como as amplitudes dos harmônicos ficaram reduzidas pela indutância de 10 H em série.

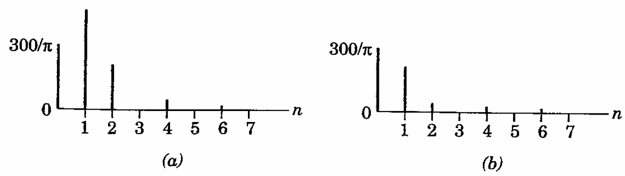


Figura 15-35

15.15 A corrente numa indutância $L = 0{,}01$ H tem a forma de onda mostrada na Fig. 15-36. Determinar a série trigonométrica da tensão na indutância, v_L, sendo $\omega = 500$ rad/s.

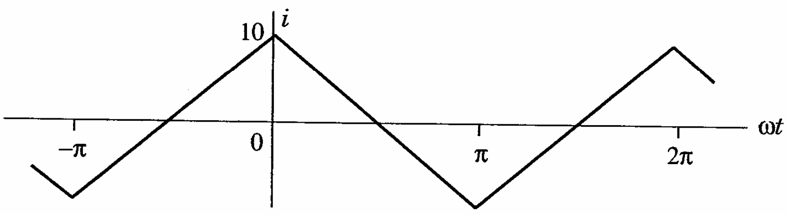


Figura 15-36

O valor médio da corrente é zero e a onda é par. Portanto, a série conterá apenas termos em co-seno. No intervalo $-\pi < \omega t < 0$, $i = 10 + (20/\pi)\,\omega t$; para $0 < \omega t < \pi$, $i = 10 - (20/\pi)\omega t$. Temos, portanto:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} [10 + (20/\pi)\omega t] \cos n\omega t \, d(\omega t) + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\pi} [10 - (20/\pi)\omega t] \cos n\omega t \, d(\omega t)\right\}$$

$$= \frac{40}{\pi^2 n^2}(1 - \cos n\pi) = \frac{80}{\pi^2 n^2} \text{ para } n \text{ ímpar, apenas.}$$

A série da corrente é, então:

$$i = \frac{80}{\pi^2}\left\{\cos \omega t + \frac{1}{9}\cos 3\omega t + \frac{1}{25}\cos 5\omega t + \frac{1}{49}\cos 7\omega t + \ldots\right\}$$

A tensão na indutância é:

$$v_L = L\frac{di}{dt} = 0{,}01\left(\frac{80}{\pi^2}\right)\frac{d}{dt}\left\{\cos\omega t + \frac{1}{9}\cos 3\omega t + \frac{1}{25}\cos 5\omega t + \ldots\right\}$$

$$= \frac{400}{\pi^2}\left\{-\operatorname{sen}\omega t - \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3\omega t - \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5\omega t - \frac{1}{7}\operatorname{sen} 7\omega t - \ldots\right\}$$

A forma de onda poderia ser obtida por síntese, porém esta série difere daquela do Probl. 15.1 pelo sinal menos; v_L é, portanto, uma onda quadrada igual à da Fig. 15-15 multiplicada por menos um.

Problemas Propostos

15.16 Faça a síntese da forma de onda cuja série trigonométrica de Fourier é:

$$f(t) = \frac{8V}{\pi^2}\left\{\operatorname{sen}\omega t - \frac{1}{9}\operatorname{sen} 3\omega t + \frac{1}{25}\operatorname{sen} 5\omega t - \frac{1}{49}\operatorname{sen} 7\omega t + \ldots\right\}$$

15.17 Faça a síntese da forma de onda cuja série de Fourier é:

$$f(t) = 5 - \frac{40}{\pi^2}\left(\cos\omega t + \frac{1}{9}\cos 3\omega t + \frac{1}{25}\cos 5\omega t + \ldots\right)$$

$$+ \frac{20}{\pi}\left(\operatorname{sen}\omega t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\omega t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3\omega t - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\omega t + \ldots\right)$$

15.18 Faça a síntese da forma de onda da seguinte série de Fourier:

$$f(t) = V\left\{\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\cos\omega t - \frac{1}{3\pi}\cos 2\omega t + \frac{1}{2\pi}\cos 3\omega t - \right.$$

$$- \frac{1}{15\pi}\cos 4\omega t - \frac{1}{6\pi}\cos 6\omega t +$$

$$\left. + \ldots + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\omega t - \frac{2}{3\pi}\operatorname{sen} 2\omega t + \frac{4}{15\pi}\operatorname{sen} 4\omega t - \ldots\right\}$$

15.19 Determinar a série trigonométrica de Fourier para a onda dente-de-serra da Fig. 15-37 e traçar o espectro de linha. Comparar com o exemplo 1.

Resp.: $f(t) = \frac{V}{2} + \frac{V}{\pi}\left\{\operatorname{sen}\omega t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\omega t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3\omega t + \ldots\right\}$

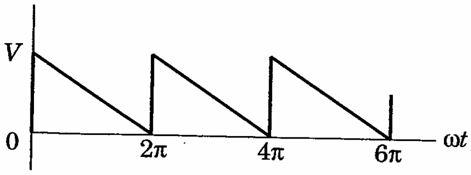


Figura 15-37

15.20 Determinar a série trigonométrica de Fourier para a onda dente-de-serra da Fig. 15-38 e traçar o espectro. Comparar com o resultado do Probl.15.3.

Resp.: $f(t) = \dfrac{-2V}{\pi}\left\{ \operatorname{sen}\omega t + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}2\omega t + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}3\omega t + \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}4\omega t + \dots \right\}$

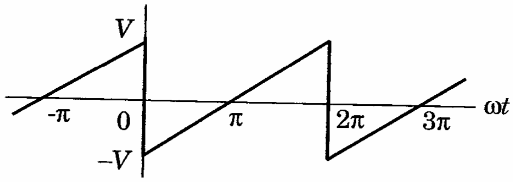


Figura 15-38

15.21 Determinar a série trigonométrica de Fourier para a forma de onda da Fig. 15-39 e traçar o espectro.

Resp.: $f(t) = \dfrac{4V}{\pi^2}\left\{ \cos\omega t + \dfrac{1}{9}\cos 3\omega t + \dfrac{1}{25}\cos 5\omega t + \dots \right\} -$

$- \dfrac{2V}{\pi}\left\{ \operatorname{sen}\omega t + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}3\omega t + \dfrac{1}{5}\operatorname{sen}5\omega t + \dots \right\}$

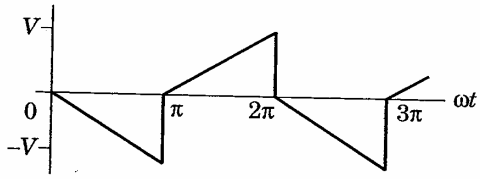


Figura 15-39

15.22 Determin
o espectr
Resp.: f(

15.23 Determin
Figs. 15-4
Resp.:
$f_1(t) = \frac{5}{1}$
$f_2(t) = \frac{5}{6}$

15.24 Determin
ficada da
dos Probl

15.22 Determinar a série trigonométrica de Fourier para a onda da Fig. 15-40 e traçar o espectro. Comparar com o resultado do Probl. 15.1.

Resp.: $f(t) = \dfrac{4V}{\pi}\left\{\cos \omega t - \dfrac{1}{3}\cos 3\omega t + \dfrac{1}{5}\cos 5\omega t - \dfrac{1}{7}\cos 7\omega t + \ldots\right\}$

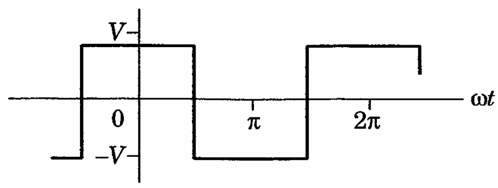


Figura 15-40

15.23 Determinar as séries trigonométricas de Fourier para as ondas mostradas nas Figs. 15-41(*a*) e (*b*). Traçar os espectros respectivos e compará-los.

Resp.:

$$f_1(t) = \frac{5}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{10}{n\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{12}\right)\cos n\omega t + \frac{10}{n\pi}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{12}\right)\operatorname{sen} n\omega t\right\}$$

$$f_2(t) = \frac{50}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{10}{n\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{n5\pi}{3}\right)\cos n\omega t + \frac{10}{n\pi}\left(1 - \cos\frac{n5\pi}{3}\right)\operatorname{sen} n\omega t\right\}$$

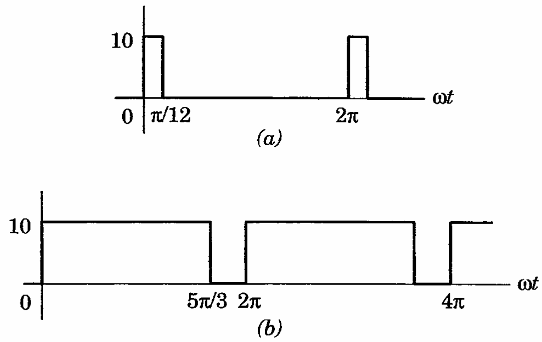


Figura 15-41

15.24 Determinar a série trigonométrica de Fourier para a meia onda senoidal retificada da Fig. 15-42 e traçar o espectro. Comparar a resposta com os resultados dos Probls. 15.5 e 15.6.

Resp.:

$$f(t) = \frac{V}{\pi}\left\{1 + \frac{\pi}{2}\cos\omega t + \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t + \frac{2}{35}\cos 6\omega t - \ldots\right\}$$

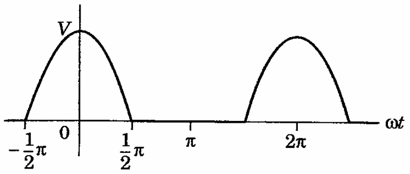


Figura 15-42

15.25 Determinar a série trigonométrica de Fourier para a onda completa senoidal retificada da Fig. 15-43 e traçar o espectro.

Resp.: $f(t) = \dfrac{2V}{\pi}\left\{1 + \dfrac{2}{3}\cos 2\omega t - \dfrac{2}{15}\cos 4\omega t + \dfrac{2}{35}\cos 6\omega t - \ldots\right\}$

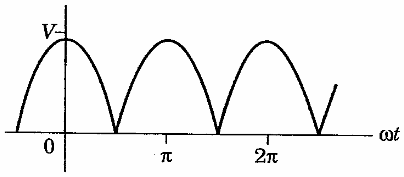


Figura 15-43

15.26 A onda da Fig. 15-44 é semelhante à do Probl. 15.25, com a posição do eixo zero modificada. Determinar a série de Fourier e comparar os dois resultados.

Resp.: $f(t) = \dfrac{2V}{\pi}\left\{1 - \dfrac{2}{3}\cos 2\omega t - \dfrac{2}{15}\cos 4\omega t + \dfrac{2}{35}\cos 6\omega t - \ldots\right\}$

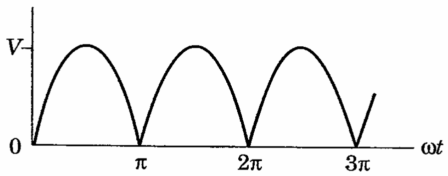


Figura 15-44

15.27 Determinar a série trigonométrica de Fourier para a onda da Fig. 15-45.
Resp.:

$$f(t) = \frac{V}{2\pi} - \frac{V}{2\pi}\cos\omega t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{V}{\pi(1-n^2)}(\cos n\pi + n\,\text{sen}\,n\pi/2)\cos n\omega t +$$

$$+\frac{V}{4}\,\text{sen}\,\omega t + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{-nV\cos n\pi/2}{\pi(1-n^2)}\right]\text{sen}\,n\omega t$$

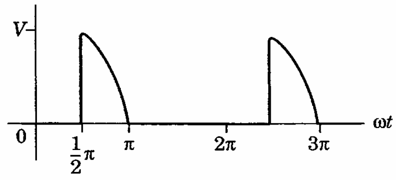


Figura 15-45

15.28 Determinar a série trigonométrica de Fourier para a onda da Fig. 15-46. Somá-la com a do Probl. 15.27 e comparar o resultado com a série obtida no Probl. 15.5.
Resp.:

$$f(t) = \frac{V}{2\pi} + \frac{V}{2\pi}\cos\omega t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{V[n\,\text{sen}\,n\pi/2 - 1]}{\pi(n^2-1)}\cos n\omega t$$

$$+\frac{V}{4}\,\text{sen}\,\omega t + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{Vn\cos n\pi/2}{\pi(1-n^2)}\,\text{sen}\,n\omega t$$

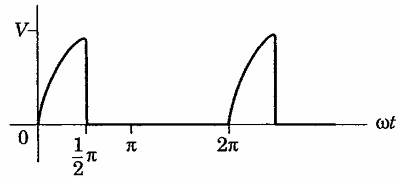


Figura 15-46

15.29 Determinar a série exponencial de Fourier para a onda da Fig. 15-47 e traçar o espectro. Transformar os coeficientes obtidos em coeficientes da série trigonométrica, escrever esta série e compará-la com o resultado do Probl. 15.4.

Resp.:

$$f(t) = V\left\{ \ldots - \left(\frac{1}{9\pi^2} - j\frac{1}{6\pi}\right)e^{-j3\omega t} - j\frac{1}{4\pi}e^{-j2\omega t} - \left(\frac{1}{\pi^2} - j\frac{1}{2\pi}\right)e^{-j\omega t} + \frac{1}{4} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{\pi^2} + j\frac{1}{2\pi}\right)e^{j\omega t} + j\frac{1}{4\pi}e^{j2\omega t} - \left(\frac{1}{9\pi^2} + j\frac{1}{6\pi}\right)e^{j3\omega t} - \ldots \right\}$$

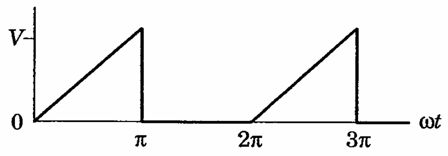


Figura 15-47

15.30 Determinar a série exponencial de Fourier para a onda da Fig. 15-48 e traçar o espectro.
Resp.:

$$f(t) = V\left\{ \ldots + \left(\frac{1}{9\pi^2} + j\frac{1}{6\pi}\right)e^{-j3\omega t} + j\frac{1}{4\pi}e^{-j2\omega t} + \left(\frac{1}{\pi^2} + j\frac{1}{2\pi}\right)e^{-j\omega t} + \frac{1}{4} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\pi^2} - j\frac{1}{2\pi}\right)e^{j\omega t} - j\frac{1}{4\pi}e^{j2\omega t} + \left(\frac{1}{9\pi^2} - j\frac{1}{6\pi}\right)e^{j3\omega t} + \ldots \right\}$$

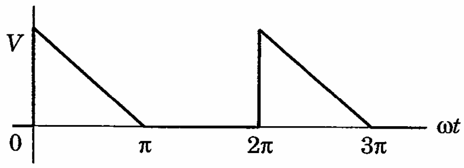


Figura 15-48

15.31 Determinar a série exponencial de Fourier para a onda quadrada da Fig. 15-49 e traçar o espectro. Somar as séries exponenciais dos Probls. 15.29 e 15.30 e comparar a soma com a série aqui obtida.
Resp.:

$$f(t) = V\left\{\ldots + j\frac{1}{3\pi}e^{-j3\omega t} + j\frac{1}{\pi}e^{-j\omega t} + \frac{1}{2} - j\frac{1}{\pi}e^{j\omega t} - j\frac{1}{3\pi}e^{j3\omega t} - \ldots\right\}$$

15.32 Determinar
15-50 e traç
da série trig
obtida no Pr
Resp.:
$f(t) = V\{\ldots$

15.33 Determinar
espectro. T
Probl. 15.2
cientes da s
Resp.:
$f(t) = V\{\ldots$

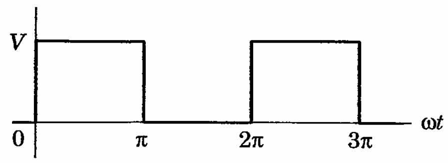


Figura 15-49

15.32 Determinar a série exponencial de Fourier para a onda dente-de-serra da Fig. 15-50 e traçar o espectro. Transformar os coeficientes obtidos em coeficientes da série trigonométrica, escrever esta série e comparar o resultado com a série obtida no Probl. 15.19

Resp.:

$$f(t) = V\left\{\ldots + j\frac{1}{4\pi}e^{-j2\omega t} + j\frac{1}{2\pi}e^{-j\omega t} + \frac{1}{2} - j\frac{1}{2\pi}e^{j\omega t} - j\frac{1}{4\pi}e^{j2\omega t} - \ldots\right\}$$

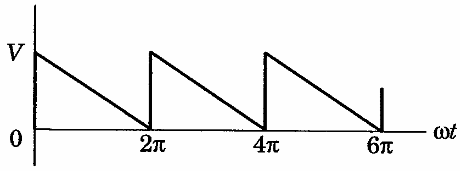


Figura 15-50

15.33 Determinar a série exponencial de Fourier para a onda da Fig. 15-51 e traçar o espectro. Transformar os coeficientes da série trigonométrica encontrada no Probl. 15.20 em coeficientes da série exponencial e compará-los com os coeficientes da série aqui obtida.

Resp.:

$$f(t) = V\left\{\ldots - j\frac{1}{2\pi}e^{-j2\omega t} - j\frac{1}{\pi}e^{-j\omega t} + j\frac{1}{\pi}e^{j\omega t} + j\frac{1}{2\pi}e^{j2\omega t} + \ldots\right\}$$

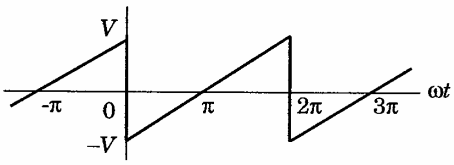


Figura 15-51

15.34 Determinar a série exponencial de Fourier para a onda da Fig. 15-52 e traçar o espectro. Transformar os coeficientes para a série trigonométrica, escrever esta série e compará-la com a obtida no Probl. 15.21.
Resp.:

$$f(t) = V\left\{ \ldots + \left(\frac{2}{9\pi^2} - j\frac{1}{3\pi}\right)e^{-j3\omega t} + \left(\frac{2}{\pi^2} - j\frac{1}{\pi}\right)e^{-j\omega t} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2}{\pi^2} + j\frac{1}{\pi}\right)e^{j\omega t} + \left(\frac{2}{9\pi^2} + j\frac{1}{3\pi}\right)e^{j3\omega t} + \ldots \right\}$$

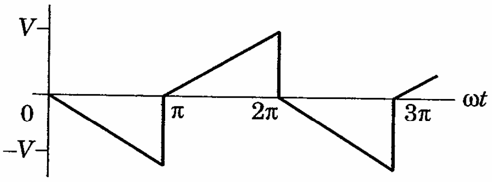


Figura 15-52

15.35 Determinar a série exponencial de Fourier para a onda quadrada da Fig. 15-53 e traçar o espectro. Transformar os coeficientes da série trigonométrica do Probl. 15.22 para a série exponencial e compará-los com os coeficientes aqui obtidos.
Resp.:

$$f(t) = \frac{2V}{\pi}\left\{\ldots + \frac{1}{5}e^{-j5\omega t} - \frac{1}{3}e^{-j3\omega t} + e^{-j\omega t} + e^{j\omega t} - \frac{1}{3}e^{j3\omega t} + \frac{1}{5}e^{j5\omega t} - \ldots\right\}$$

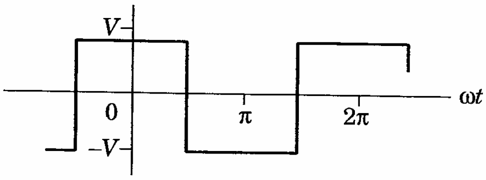


Figura 15-53

15.36 Determinar a série exponencial de Fourier para a onda da Fig. 15-54 e traçar o espectro.
Resp.:

$$f(t) = \ldots - \frac{V}{2\pi}\,\text{sen}\left(\frac{-2\pi}{6}\right)e^{-j2\omega t} - \frac{V}{\pi}\,\text{sen}\left(\frac{-\pi}{6}\right)e^{-j\omega t} + \frac{V}{6} +$$

$+ \frac{V}{\pi}$

15.37 Determinar
da Fig. 15-
ver essa s
Resp.:
$f(t) = \ldots$

15.38 Determinar
traçar o es
Resp.: $f(t)$

$$+\ \frac{V}{\pi}\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)e^{j\omega t} + \frac{V}{2\pi}\ \text{sen}\left(\frac{2\pi}{6}\right)e^{j2\omega t} + \ldots$$

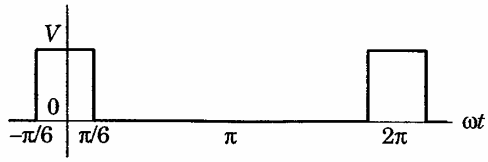


Figura 15-54

15.37 Determinar a série exponencial de Fourier para a meia-onda senoidal retificada da Fig. 15-55. Transformar seus coeficientes para a série trigonométrica, escrever essa série e compará-la com o resultado do Probl. 15.24.

Resp.:

$$f(t) = \ldots - \frac{V}{15\pi}e^{-j4\omega t} + \frac{V}{3\pi}e^{-j2\omega t} + \frac{V}{4}e^{-j\omega t} + \frac{V}{\pi} + \frac{V}{4}e^{j\omega t} + \frac{V}{3\pi}e^{j2\omega t} - \frac{V}{15\pi}e^{j4\omega t} + \ldots$$

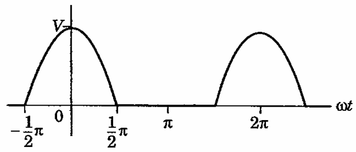


Figura 15-55

15.38 Determinar a série exponencial de Fourier para a onda completa da Fig. 15-56 e traçar o espectro.

Resp.: $f(t) = \ldots - \frac{2V}{15\pi}e^{-j4\omega t} + \frac{2V}{3\pi}e^{-j2\omega t} + \frac{2V}{\pi} + \frac{2V}{3\pi}e^{j2\omega t} - \frac{2V}{15\pi}e^{j4\omega t} + \ldots$

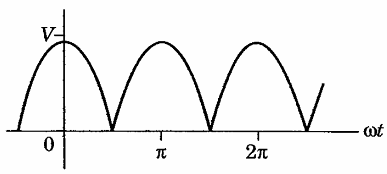


Figura 15-56

15.39 Calcular a tensão eficaz, a corrente eficaz e a potência média fornecidas a uma estrutura passiva sendo $V = 200 + 100 \cos (500t + 30^\circ) + 75 \cos (1500 + 60^\circ)$ a tensão aplicada e $i = 3{,}53 \cos (500t + 75^\circ) + 3{,}55 \cos (1500 + 78{,}45^\circ)$ a corrente resultante.
Resp.: 218,5 V; 3,54 A; 250,8 W

15.40 Uma tensão $v = 50 + 25 \text{ sen } 500t + 10 \text{ sen } 1500t + 5 \text{ sen } 2500t$ é aplicada nos terminais de uma estrutura passiva e a corrente resultante é $i = 5 + 2{,}23 \text{ sen } (500t - 26{,}6^\circ) + 0{,}556 \text{ sen } (1500t - 56{,}3^\circ) + 0{,}186 \text{ sen } (2500t - 68{,}2^\circ)$. Determinar a tensão eficaz, a corrente eficaz e a potência média.
Resp.: 53,6 V; 5,25 A; 276,5 W.

15.41 Um circuito em série de três elementos com $R = 5$ ohms, $L = 0{,}005$ H e $C = 50$ μF tem uma tensão aplicada $v = 150 \text{ sen } 1000t + 100 \text{ sen } 2000t + 75 \text{ sen } 3000t$. Determinar a corrente eficaz e a potência média. Traçar os espectros da tensão e da corrente e notar o efeito da ressonância série.
Resp.: 16,58 A; 1374 W.

15.42 Em um circuito em série de dois elementos, com $R = 10$ ohms e $L = 0{,}02$ H, a corrente é $i = 5 \text{ sen } 100t + 3 \text{ sen } 300t + 2 \text{ sen } 500t$. Determinar a tensão eficaz aplicada e a potência média.
Resp.: 48 V; 190 W.

15.43 A onda triangular de corrente da Fig. 15-57, onde $\omega = 500$ rad/s, existe em uma indutância pura $L = 0{,}01$ H. Determinar a série exponencial de Fourier para a corrente e achar a expressão da série para a tensão na indutância, v_L. Comparar a resposta com o resultado do Probl. 15.8.

Resp.: $v_L = \dfrac{200}{\pi^2}\left\{\cdots - j\dfrac{1}{3}e^{-j3\omega t} - je^{-j\omega t} + je^{j\omega t} + j\dfrac{1}{3}e^{j3\omega t} + \cdots\right\}$

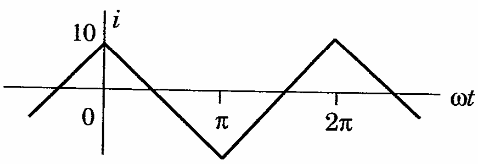


Figura 15-57

15.44 Uma tensão com a forma de onda da Fig. 15-58 está aplicada em uma indutância pura $L = 0{,}01$ H. Determinar a série da corrente na forma trigonométrica e identificar a forma de onda da corrente.

Resp.: i =

15.45 A Fig. 15-5
aos termin
rad/s. Em
indutor e n

Resp.: i =

15.46 Um circuit
combinaçã
pondentes
1000t, det
Resp.: i =

Resp.: $i = \dfrac{20}{\pi}\left\{\text{sen } \omega t - \dfrac{1}{9} \text{ sen } 3\omega t + \dfrac{1}{25} \text{ sen } 5\omega t - \dfrac{1}{49} \text{ sen } 7\omega t + \ldots\right\}$

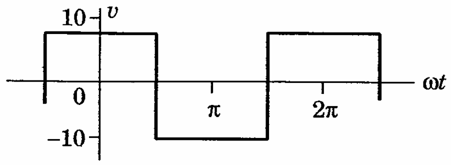


Figura 15-58

15.45 A Fig. 15-59 apresenta uma onda completa senoidal retificada, suposta aplicada aos terminais de um circuito LC. O valor máximo da tensão é 170 V e ω = 377 rad/s. Empregar a série trigonométrica de Fourier e determinar a tensão no indutor e no capacitor. Traçar o espectro de cada uma.

Resp.: $i = \dfrac{20}{\pi}\left\{\text{sen } \omega t - \dfrac{1}{9} \text{ sen } 3\omega t + \dfrac{1}{25} \text{ sen } 5\omega t - \dfrac{1}{49} \text{ sen } 7\omega t + \ldots\right\}$

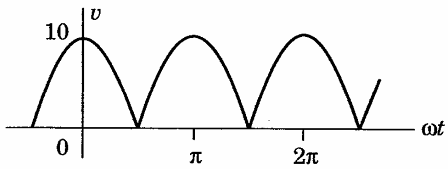


Figura 15-59

15.46 Um circuito de três elementos é constituído por R = 5 ohms em série com uma combinação em paralelo de L e C. Com ω = 500 rad/s as reatâncias correspondentes são $j2$ e $-j8$. Sendo a tensão aplicada $v = 50 + 20 \text{ sen } 500t + 10 \text{ sen } 1000t$, determinar a corrente total.
Resp.: $i = 10 + 3{,}53 \text{ sen } (500t - 28{,}1°)$.

Capítulo 16

MAKRON
Books

TRANSITÓRIOS EM CIRCUITOS

Introdução

Quando um circuito é comutado de uma condição para outra, seja por uma mudança da tensão aplicada, seja por uma variação em um dos elementos do circuito, ocorre um período de transição, durante o qual as correntes nos ramos e as quedas de tensão variam de seus valores iniciais para novos valores. Depois desse intervalo de transição, chamado de *transitório*, diz-se que o circuito atinge o estado estacionário.

A aplicação da lei de Kirchhoff para as tensões a um circuito que contenha elementos capazes de armazenar energia resulta em uma equação diferencial que pode ser resolvida por diversos métodos. Tal solução consta de duas partes, a *função complementar* e a *solução particular*. Para as equações na análise de circuitos, a função complementar sempre tende a zero em um período de tempo relativamente curto e constitui a parte transitória da solução. A solução particular é a resposta em estado estacionário que foi o objeto de nossa atenção nos capítulos anteriores.

Os métodos por meio dos quais a solução particular é obtida neste capítulo são, geralmente, longos e trabalhosos e não tão diretos como os métodos anteriormente usados. Entretanto, pela aplicação desses métodos, obtém-se o significado físico da resposta em estado estacionário, completando a resposta.

ɪpítulo 16

ɔutra, seja por
dos elementos
correntes nos
novos valores.
z-se que o cir-

n circuito que
uma equação
ıção consta de
ɜs equações na
ɜm um período
da solução. A
ıbjeto de nossa

ɜ obtida neste
como os méto-
odos, obtém-se
ıdo a resposta.

Transitórios em Corrente Contínua

Transitório RL

O circuito RL em série da Fig. 16-1 fica com uma tensão constante V aplicada, ao se fechar o interruptor. A lei de Kirchhoff para as tensões dá a seguinte equação diferencial:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V \qquad (1)$$

Reagrupando e empregando o operador $D = d/dt$, vem:

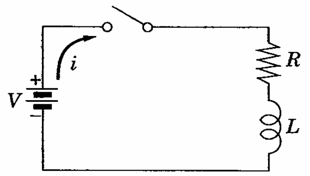


Figura 16-1

$$(D + \frac{R}{L})i = \frac{V}{L} \qquad (2)$$

A equação (2) é uma equação diferencial linear de primeira ordem do tipo:

$$\frac{dy}{dx} - ay = R \quad \text{ou} \quad (D - a)y = R \qquad (3)$$

onde $D = d/dx$, a é uma constante e R pode ser uma função de x, mas não de y. A solução completa de (3), composta da função complementar e da solução particular, é:

$$y = y_c + y_p = ce^{ax} + e^{ax}\int e^{-ax}\, R\, dx \qquad (4)$$

onde c é uma constante arbitrária, determinada com o conhecimento das condições iniciais. Pela equação (4) a solução de (2) é:

$$i = ce^{-(R/L)t} + e^{-(R/L)t}\int e^{(R/L)t}\left(\frac{V}{L}\right) dt = ce^{-(R/L)t} + \frac{V}{R} \qquad (5)$$

Para determinar c faz-se $t = 0$ em (*5*) e substitui-se i pela corrente inicial i_0. Essa corrente inicial é a corrente imediatamente após o fechamento do interruptor. A tensão e a corrente ligam-se à indutância pelas relações $v = L\, di/dt$ e $i = 1/L \int v dt$. A segunda expressão nos assegura que, seja qual for a tensão aplicada, a corrente em um indutor deve ser uma função contínua. Como a corrente era nula em $t = 0\,-$, deve ser nula, também, em $t = 0\,+$. Substituindo em (*5*), temos:

$$i_0 = 0 = c(1) + V/R \text{ ou } c = -V/R \tag{6}$$

Substituindo esse valor de c em (*5*), vem:

$$i = -\frac{V}{R}e^{-(R/L)t} + \frac{V}{R} = \frac{V}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \tag{7}$$

Este tipo de equação é uma exponencial crescente, como mostra a Fig. 16-2.

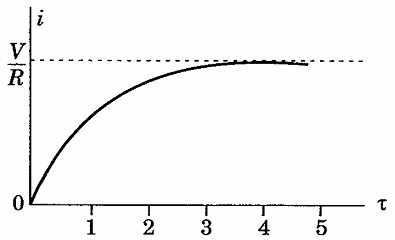


Figura 16-2

O traçado mostra o período de transição, durante o qual a corrente se ajusta, desde o seu valor inicial zero, ao valor final V/R, o estado estacionário. A constante de tempo* τ de uma função tal como (*7*) é o tempo que faz o expoente de e igual à unidade. Assim, para o circuito RL, a constante de tempo é $\tau = L/R$ segundos. Para 1 τ a quantidade que figura entre parêntes em (*7*) tem para valor $(1 - e^{-1}) = (1 - 0{,}368) = 0{,}632$. Decorrido esse tempo, a corrente é 63,2% do seu valor final. Do mesmo modo, para 2 τ, $(1 - e^{-2}) = (1 - 0{,}135) = 0{,}865$. E a corrente é 86,5% de seu valor final. Decorridos 5 τ, geralmente, considera-se terminado o regime transitório. Por conveniência, usa-se a constante de tempo como unidade para representação gráfica da equação (*7*) da corrente.

* N. R. Em alguns exercícios o autor costuma abreviar "Constante de Tempo" por CT.

Outro e

onde a constant
para τ = 1, tem
valor inicial A.
considera-se ter

As tens
partir da correr

e a tensão no ir

v

A tens
tempo que a c
porém com a n
Kirchhoff, dura

Outro exemplo: no decréscimo exponencial da Fig. 16-3, cuja equação é:

$$f(t) = Ae^{-\alpha t} \tag{8}$$

onde a constante de tempo (tempo que torna unitário o expoente de e) é $\tau = \alpha t$ para $\tau = 1$, tem-se $e^{-1} = 0{,}368$, isto é, a função reduziu-se para 36,8% do seu valor inicial A. Para $\tau = 2$, $e^{-2} = 0{,}135$ e a função é 13,5% de A. Após 5 τ, considera-se terminado o regime transitório.

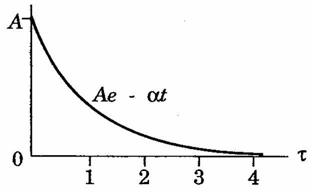


Figura 16-3

As tensões transitórias nos elementos do circuito *RL* são obtidas a partir da corrente. Assim, a tensão no resistor é:

$$v_R = Ri = V(1 - e^{-(R/L)t}) \tag{9}$$

e a tensão no indutor é:

$$v_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\left\{\frac{V}{R}(1 - e^{-(R/L)t})\right\} = Ve^{-(R/L)t}) \tag{10}$$

A tensão transitória no resistor cresce com a mesma constante de tempo que a corrente, enquanto a tensão no indutor cai exponencialmente, porém com a mesma constante de tempo. A soma de v_R e v_L satisfaz à lei de Kirchhoff, durante o período transitório. Ver a Fig. 16-4

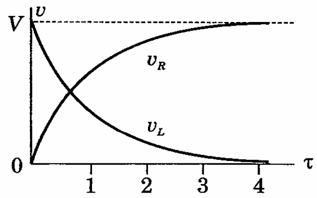


Figura 16-4

$$v_R + v_L = V(1 - e^{-(R/L)t}) + Ve^{-(R/L)t} = V \tag{11}$$

A potência instantânea em qualquer elemento de circuito é dada pelo produto da tensão pela corrente. Assim, a potência no resistor é:

$$p_R = v_R i = V(1 - e^{-(R/L)t})\,\frac{V}{R}\,(1 - e^{-(R/L)t}) =$$
$$= \frac{V^2}{R}(1 - 2e^{-(R/L)t} + e^{-2(R/L)t}) \tag{12}$$

e na indutância:

$$p_L = v_L i = Ve^{-(R/L)t}\,\frac{V}{R}\,(1 - e^{-(R/L)t}) = \frac{V^2}{R}(e^{-(R/L)t} - e^{-2(R/L)t}) \tag{13}$$

A potência total é, então:

$$p_T = p_R + p_L = \frac{V^2}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \tag{14}$$

A Fig. 16-5 mostra essas três funções, onde p_R e p_T têm V^2/R ou I^2R para o valor estacionário, enquanto I é o valor estacionário da corrente. A potência transitória na indutância tem zero para os valores inicial e final, e é a potência que responde pela energia armazenada no campo magnético da bobina. Verifica-se isso integrando p_L desde zero ao infinito.

$$W = \int_0^{\infty} \frac{V^2}{R}(e^{-(R/L)t} - e^{-2(R/L)t})\,dt = \frac{V^2}{R}\left[-\frac{L}{R}e^{-(R/L)t} + \frac{L}{2R}e^{-2(R/L)t}\right]_0^{\infty}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{V^2}{R}\left(\frac{L}{R}\right) = \frac{1}{2}LI^2\ [J] \tag{15}$$

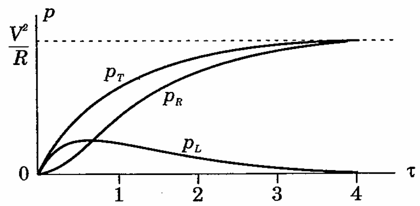


Figura 16-5

No circuito RL da Fig. 16-6, existe uma corrente inicial $i_0 = V/R$. Quando $t = 0$, o interruptor é deslocado para a posição 2, desligando a fonte e,

ao mesmo temp
da lei de Kirch
equação:

cuja solução é:

Para t
a equação da c

A Fig
pondentes na

mostradas na
tensão aplica
tâneas p_R =
Integrando-se
tamente aque
transitório an
essa energia é

ao mesmo tempo, pondo em curto-circuito o ramo de R e L em série. A aplicação da lei de Kirchhoff para as tensões ao circuito, agora livre da fonte, resulta na equação:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad \text{ou} \quad \left(D + \frac{R}{L}\right)i = 0 \tag{16}$$

cuja solução é: $i = ce^{-(R/L)}$ (*17*)

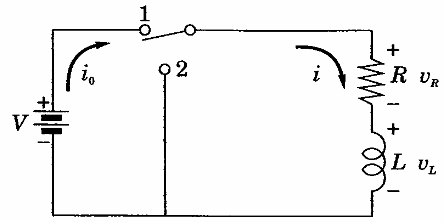


Figura 16-6

Para $t = 0$, a corrente inicial é $i_0 = V/R$. Substituindo em (*17*), $c = V/R$ e a equação da corrente é:

$$i = \frac{V}{R}e^{-(R/L)t} \tag{18}$$

A Fig. 16-7(*a*) é a representação dessa equação. As tensões correspondentes na resistência e na indutância são:

$$v_R = Ri = Ve^{-(R/L)t} \quad \text{e} \quad v_L = L\frac{di}{dt} = -Ve^{-(R/L)t} \tag{19}$$

mostradas na Fig. 16-7(*b*). A soma $v_R + v_L$ satisfaz à lei de Kirchhoff, já que a tensão aplicada é nula com o interruptor na posição 2. As potências instantâneas $p_R = \frac{V^2}{R}e^{-2(R/L)t}$ e $p_L = -\frac{V^2}{R}e^{-2(R/L)t}$ são mostradas na Fig. 16-7(*c*). Integrando-se p_L de zero ao infinito, verifica-se que a energia liberada é exatamente aquela que foi armazenada no campo magnético durante o período transitório anterior, isto é, $\frac{1}{2}LI^2$. Durante o período transitório de decréscimo, essa energia é transferida ao resistor.

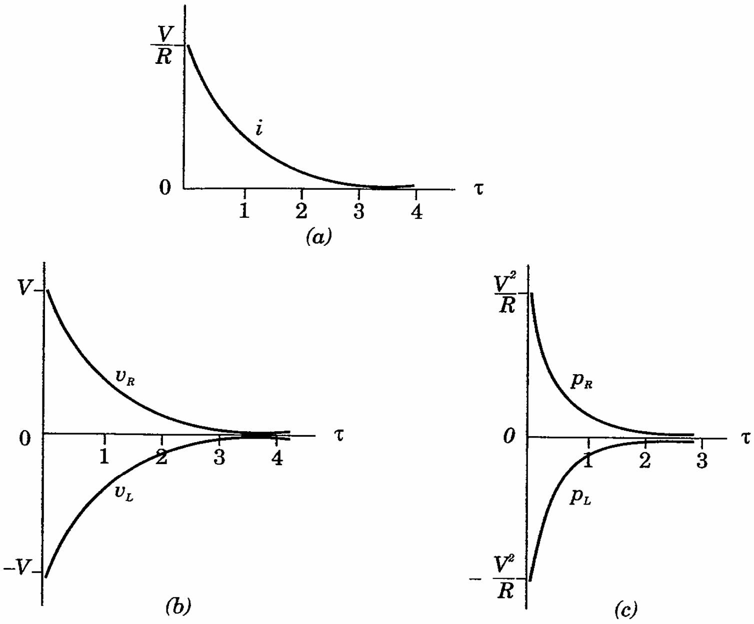


Figura 16-7

Transitório RC

Da aplicação da lei de Kirchhoff para as tensões ao circuito em série RC da Fig. 16-8 resulta a seguinte equação diferencial:

$$\frac{1}{C}\int i\,dt + Ri = V \tag{20}$$

e, após diferenciação, temos:

$$\frac{i}{C} + R\frac{di}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad \left(D + \frac{1}{RC}\right) i = 0 \tag{21}$$

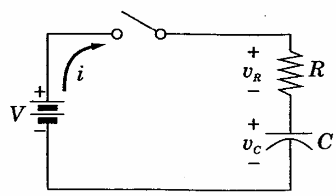


Figura 16-8

A solução dessa equação homogênea é constituída apenas pela função complementar, pois a solução particular é zero. Assim, temos:

$$i = ce^{-t/RC} \tag{22}$$

Para determinar a constante c, observa-se que, na equação (*20*), para $t = 0$, $Ri_0 = V$ ou $i_0 = V/R$. Substituindo o valor de i_0 em (*22*), tem-se, para $t = 0$, $c = V/R$. Então:

$$i = \frac{V}{R} e^{-t/RC} \tag{23}$$

Para o circuito RC, a constante de tempo é $\tau = RC$ segundos.

A equação (*23*) tem para representação uma exponencial decrescente, como mostra a Fig. 16-9(*a*).

As tensões transitórias correspondentes são:

$$v_R = Ri = Ve^{-t/RC}$$

e

$$v_C = \frac{1}{C} \int i\, dt = V(1 - e^{-t/RC}) \tag{24}$$

e estão representadas na Fig. 16-9(*b*). As potências instantâneas são dadas por:

$$p_R = v_R i = \frac{V^2}{R} e^{-2t/RC} \quad \text{e} \quad p_C = v_C i = \frac{V^2}{R}(e^{-t/RC} - e^{-2t/RC}) \tag{25}$$

A potência transitória p_C, de valores inicial é final nulos, é responsável pela energia que é armazenada no campo elétrico do capacitor. A integração de p_C desde zero até o infinito verifica essa afirmativa:

$$\varepsilon = \int_0^\infty \frac{V^2}{R}(e^{-t/RC} - e^{-2t/RC})\, dt = \frac{1}{2} CV^2 \tag{26}$$

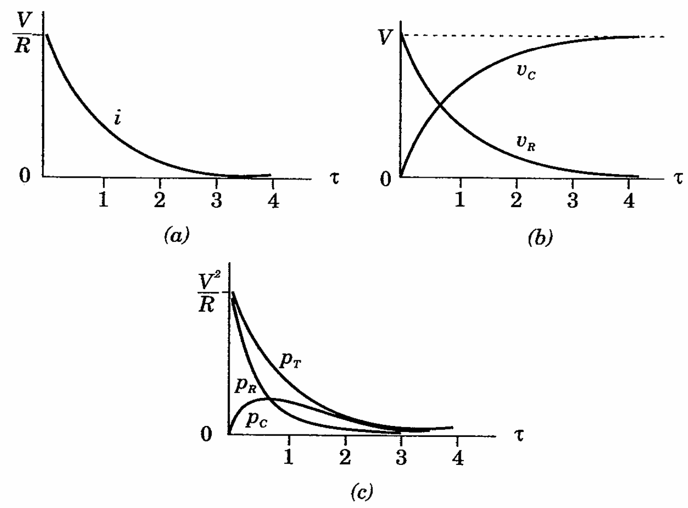


Figura 16-9

O interruptor do circuito em série RC da Fig. 16-10 é mantido na posição 1 por um tempo suficiente para o estabelecimento do regime estacionário e, no instante $t = 0$, é mudado para a posição 2. Nessa situação, a equação do circuito é:

$$\frac{1}{C}\int i\,dt + Ri = 0$$

ou

$$(D + \frac{1}{RC})\,i = 0 \qquad (27)$$

cuja solução é:

$$i = ce^{-t/RC} \qquad (28)$$

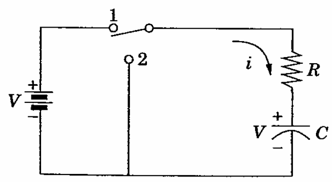


Figura 16-10

Para determinar a constante c faz-se $t = 0$ em *(28)* e substitui-se a corrente inicial i_0. Como o capacitor é carregado a uma tensão V, com a polaridade indicada no diagrama, a corrente inicial, na situação 2, é oposta a i; então, $i_0 = -V/R$. Logo, $c = -V/R$ e a corrente é:

$$i = -\frac{V}{R}e^{-t/RC} \tag{29}$$

A Fig. 16-11(*a*) representa esse transitório decrescente. As tensões transitórias correspondentes nos elementos de circuito são:

$$v_R = Ri = -Ve^{-t/RC} \quad \text{e} \quad v_C = \frac{1}{C}\int i\,dt = Ve^{-t/RC} \tag{30}$$

e estão representadas na Fig. 16-11(*b*). Observe-se que $v_R = v_C = 0$, satisfazendo à lei de Kirchhoff, uma vez que não há tensão aplicada, enquanto o interruptor está na posição 2. As potências transitórias

$$p_R = v_R i = \frac{V^2}{R}e^{-2t/RC} \quad \text{e} \quad p_C = v_C i = -\frac{V^2}{R}e^{-2t/RC} \tag{31}$$

aparecem na Fig. 16-11(*c*). Não há fonte responsável por p_R, porém é evidente que a energia armazenada no capacitor se transfere para o resistor, durante esse transitório. Deixa-se ao leitor a integração de p_C entre os limites zero e infinito, resultando em $-1/2(CV^2)$.

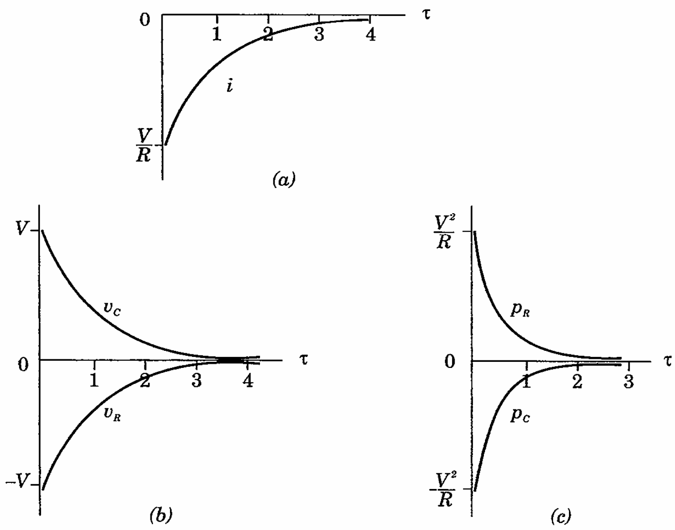


Figura 16-11

Carga no Transitório RC

Algumas vezes é conveniente, num circuito em série RC, conhecer a equação que representa a carga transitória q. Como a corrente e a carga estão relacionadas por $i = dq/dt$, pode-se, se necessário, determinar i por diferenciação.

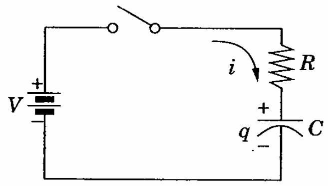


Figura 16-12

O capacitor da Fig. 16-12 carrega-se com a polaridade indicada, já que q tem o mesmo sentido de i na Fig. 16-8. A equação do circuito em função da corrente

$$\frac{1}{C}\int i\,dt + Ri = V \qquad (32)$$

pode ser escrita em função da carga, fazendo-se $i = dq/dt$. Assim,

$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = V \quad \text{ou} \quad \left(D + \frac{1}{RC}\right)q = \frac{V}{R} \qquad (33)$$

Empregando o método descrito na obtenção da equação (*5*), a solução é:

$$q = ce^{-t/RC} + CV \qquad (34)$$

Para $t = 0$, a carga inicial no capacitor é $q_0 = 0$ e, portanto:

$$q_0 = 0 = c(1) + CV \quad \text{ou} \quad c = -CV \qquad (35)$$

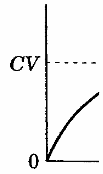
Substituindo esse valor de c em (*34*), obtém-se:

$$q = CV(1 - e^{-t/RC}) \qquad (36)$$

A carga cresce exponencialmente para um valor final VC. Assim, se um circuito decrescente, como o da Fig. 16-10, é analisado, sob o ponto de vista da

carga, conclui-se
com a equação:

As funç
estão traçadas
Fig. 16-13(*b*). C
$t'(+)$, enquanto



Transitóri

A aplic
da Fig. 16-14 co

carga, conclui-se que a carga cai exponencialmente, desde o valor CV, de acordo com a equação:

$$q = CVe^{-t/RC} \tag{37}$$

As funções representativas do crescimento e do decrescimento da carga estão traçadas na Fig. 16-13(a) e as correntes correspondentes aparecem na Fig. 16-13(b). Como a carga deve ser uma função contínua, $q = CV$ para $t'(-)$ e $t'(+)$, enquanto $i = 0$ para $t'(-)$ e para $t'(+)$ tem valor $-V/R$.

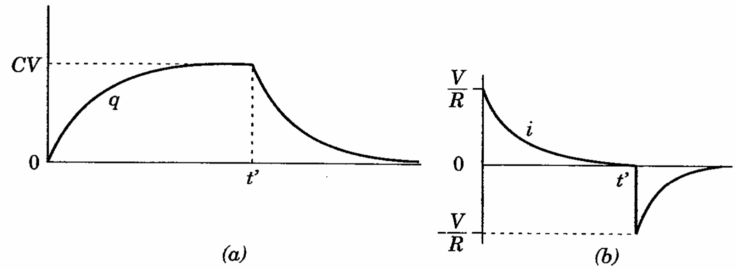


Figura 16-13

Transitório RLC

A aplicação da lei de Kirchhoff para as tensões ao circuito RLC em série da Fig. 16-14 conduz à seguinte equação:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = V \tag{38}$$

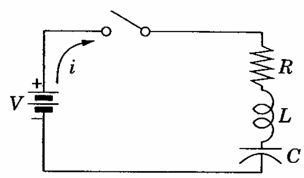


Figura 16-14

Diferenciando, obtém-se:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad \text{ou} \quad \left(D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC}\right)i = 0 \tag{39}$$

Esta equação diferencial linear de segunda ordem é homogênea e tem solução particular nula. A função complementar pode ser qualquer dos três tipos, dependendo das amplitudes relativas de R, L e C. Os coeficientes na equação característica $D^2 + (R/L)\,D + 1/LC = 0$ são constantes e as raízes da equação são:

$$D_1 + \frac{-R/L + \sqrt{(R/L)^2 - 4/LC}}{2} \quad \text{e} \quad D_2 = \frac{-R/L - \sqrt{(R/L)^2 - 4/LC}}{2} \tag{40}$$

Fazendo $\alpha = -R/2L$ e $\beta = \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}$, temos:

$$D_1 = \alpha + \beta \ \text{ e } \ D_2 = \alpha - \beta \tag{41}$$

O radicando de β pode ser positivo, nulo ou negativo e a solução será superamortecida, criticamente amortecida ou subamortecida (oscilatória).

Caso 1 $(R/2L)^2 > 1/LC$. D_1 e D_2 são raízes reais e desiguais, produzindo o superamortecimento. A equação (*39*) pode, então, ser escrita, e a corrente será:

$$[D - (\alpha + \beta)]\,[D - (\alpha - \beta)]i = 0 \tag{42}$$

$$i = c_1 e^{(\alpha + \beta)t} + c_2 e^{(\alpha - \beta)t} \quad \text{ou} \quad i = e^{\alpha t}(c_1 e^{\beta t} + c_2 e^{-\beta t}) \tag{43}$$

Caso 2 $(R/2L)^2 = 1/LC$. As raízes D_1 e D_2 são iguais, resultando o caso de amortecimento crítico. Pode-se escrever a equação (*39*) como:

$$(D - \alpha)(D - \alpha)i = 0 \tag{44}$$

A solução é:

$$i = e^{\alpha t}(c_1 + c_2 t) \tag{45}$$

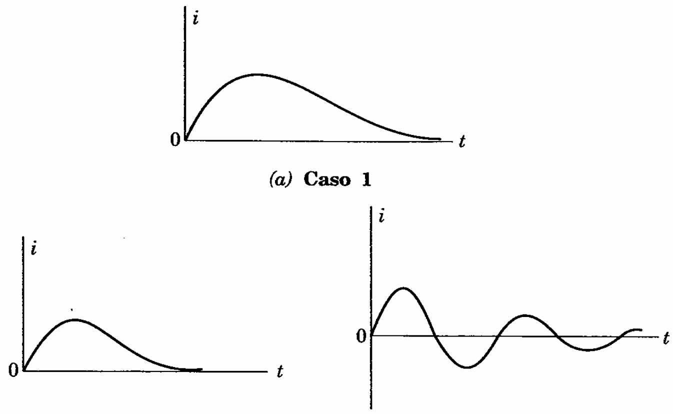
Caso 3 $(R/2L)^2 < 1/LC$. As raízes D_1 e D_2 são complexos conjugados; a solução é subamortecida ou oscilatória. Fazendo $\beta = \sqrt{1/LC - (R/2L)^2}$ e α como anteriormente, a equação (*39*) se torna:

$$[D - (\alpha + j\beta)]\,[D - (\alpha - j\beta)]i = 0 \tag{46}$$

A solução é:

$$i = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \operatorname{sen} \beta t) \tag{47}$$

Em todos os casos, a corrente contém o fator $e^{\alpha t}$ e, como $\alpha = -R/2L$, o valor final é zero, assegurando que a função complementar cai num tempo relativamente curto. Os três casos estão representados na Fig. 16-15 com o valor inicial nulo e a inclinação positiva nesse instante.



(a) **Caso 1**

(b) **Caso 2**

(c) **Caso 3**

Figura 16-15

Transitórios em Corrente Alternada

Transitório RL Senoidal

Ao fechar-se o interruptor do circuito *RL* da Fig. 16-16, aplica-se uma tensão senoidal. A função tensão poderia estar em qualquer ponto do período no instante do fechamento do circuito. Portanto, o ângulo de fase ϕ pode ter qualquer valor desde 0 a 2π rad/s. Aplicando-se a lei de Kirchhoff para as tensões, obtém-se a equação:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_{max}\,\text{sen}\,(\omega t + \phi)\ \text{ou}$$

$$\left(R + \frac{R}{L}\right)i = \frac{V_{max}}{L}\,\text{sen}\,(\omega t + \phi) \qquad (48)$$

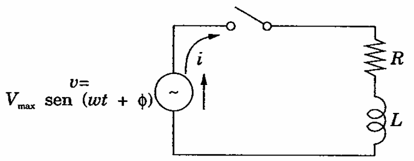


Figura 16-16

A função complementar é $i_C = ce^{-(R/T)t}$, e a solução particular é:

$$i_p = e^{-(R/L)t}\int e^{-(R/L)t}\,\frac{V_{max}}{L}\,\text{sen}\,(\omega t + \phi)\,dt =$$

$$= \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\,\text{sen}\,(\omega t + \phi - \text{arc tg}\,\omega L/R)$$

A solução completa é:

$$i = i_C + i_p = ce^{-(R/L)t} + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\,\text{sen}\,(\omega t + \phi - \text{arc tg}\,\omega L/R) \qquad (49)$$

A indutância impede qualquer variação brusca da corrente; e como, antes de se fechar o interruptor, a corrente era nula, segue-se que $i_0 = 0$. Então, para $t = 0$, temos:

$$i_0 = 0 = c(1) + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\,\text{sen}\,(\phi - \text{arc tg}\,\omega L/R)\ \text{e}$$

$$c = \frac{-V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\,\text{sen}(\phi - \text{arc tg}\,\omega L/R)$$

Substituindo em (*49*), a corrente fica:

$$i = e^{-(L/R)t}\left[\frac{-V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\ \text{sen}\ (\phi - \text{arc tg}\ \omega L/R)\right] +$$

$$+ \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\ \text{sen}\ (\omega t + \phi - \text{arc tg}\ \omega L/R) \qquad (50)$$

A primeira parte de (*50*) contém o fator $e^{-(R/L)t}$, que se anula em tempo relativamente curto. A expressão entre colchetes é de uma constante cuja amplitude depende do instante no ciclo ϕ em que se fecha o interruptor. Se $(\phi - \text{arc tg}\ \omega L/R) = n\pi$, onde $n = 1, 2, 3, \ldots$, a constante é nula e a corrente vai diretamente para o regime estacionário. Se $(\phi - \text{arc tg}\ \frac{\omega L}{R}) = (1 + 2n)\pi/2$, o transitório terá a maior amplitude possível.

A segunda parte de (*50*) é a corrente em regime estacionário, atrasada de arc tg ($\omega L/R$) em relação à tensão aplicada. Esta solução particular, obtida por integração, pode ser encontrada pelo método dos coeficientes a determinar. O método se aplica quando a função introduzida é senoidal, co-senoidal ou exponencial, pois, para tais funções, as diferenciações sucessivas originam funções semelhantes. Para aplicar o método à equação (*48*), cujo segundo membro é V_{max} sen $(\omega t + \phi)$, admitimos uma corrente particular dada por:

$$i_p = A\cos\ (\omega t + \phi) + B\ \text{sen}\ (\omega t + \phi) \qquad (51)$$

onde A e B são constantes. A primeira derivada é, então:

$$i'_p = -A\omega\ \text{sen}\ (\omega t + \phi) + B\omega\cos\ (\omega t + \phi) \qquad (52)$$

Substituindo essas expressões de i_p e i'_p em (*48*), obtemos:

$$\{-A\,\omega\ \text{sen}\ (\omega t + \phi) + B\omega\cos\ (\omega t + \phi)\}$$

$$+ \frac{R}{L} A\cos\ (\omega t + \phi) + B\ \text{sen}\ (\omega t + \phi) = \frac{V_{max}}{L}\ \text{sen}\ (\omega t + \phi) \qquad (53)$$

Reunindo os termos semelhantes, temos:

$$(-A\omega + BR/L)\ \text{sen}\ (\omega t + \phi) + (B\omega + AR/L)\cos(\omega t + \phi) =$$

$$= \frac{V_{\max}}{L}\ \text{sen}\ (\omega t + \phi) \tag{54}$$

Igualando, agora, os coeficientes dos termos semelhantes obtemos duas equações em A e B, a saber:

$$-A\omega + BR/L = V_{\max}/L \quad \text{e} \quad B\omega + AR/L = 0 \tag{55}$$

$$\text{onde: } A = \frac{-\omega L V_{\max}}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad \text{e} \quad B = \frac{RV_{\max}}{R^2 + \omega^2 L^2} \tag{56}$$

Substituindo esses valores na equação (*51*), a corrente particular fica:

$$i_p = \frac{-\omega L V_{\max}}{R^2 + \omega^2 L^2}\cos(\omega t + \phi) + \frac{RV}{R^2 + \omega^2 L^2}\ \text{sen}\ (\omega t + \phi) \tag{57}$$

$$\text{ou } i_p = \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\ \text{sen}\ (\omega t + \phi - \text{arc tg}\ \omega L/R) \tag{58}$$

que é a mesma solução particular obtida anteriormente por integração.

Transitório RL Senoidal

O circuito RC da Fig. 16-17 fica com uma tensão senoidal aplicada, ao fechar-se o interruptor. Aplicando-se a lei de Kirchhoff, obtém-se:

$$Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = V_{\max}\ \text{sen}\ (\omega t + \phi) \tag{59}$$

Diferenciando e empregando o operador, obtém-se:

$$\left(D + \frac{1}{RC}\right)i = \frac{\omega V_{max}}{R} \cos\ (\omega t + \phi) \qquad (60)$$

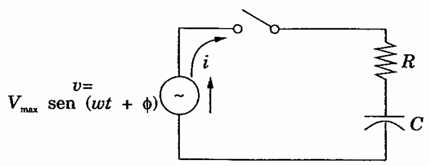


Figura 16-17

A função complementar é:

$$i_c = ce^{-t/RC} \qquad (61)$$

e a solução particular, obtida, seja integração, seja pelos coeficientes a determinar, é dada por:

$$i_p = \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \text{sen}\ (\omega t + \phi + \text{arc tg}\ 1/\omega CR) \qquad (62)$$

A solução completa é:

$$i = ce^{-t/RC} + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \text{sen}\ (\omega t + \phi + \text{arc tg}\ 1/\omega CR) \qquad (63)$$

Para determinar a constante c, façamos $t = 0$ na equação *(59)*. A corrente inicial fica $i_0 = \frac{V_{max}}{R}$ sen ϕ. Substituindo na equação *(63)* e fazendo-se $t = 0$, obtém-se:

$$\frac{V_{max}}{R} \text{sen}\ \phi = c(1) + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \text{sen}\ (\phi + \text{arc tg}\ 1/\omega CR) \qquad (64)$$

$$\text{ou} \quad c = \frac{V_{max}}{R} \text{sen}\ \phi - \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \text{sen}\ (\phi + \text{arc tg}\ 1/\omega CR) \qquad (65)$$

Substituindo esse valor de c em (*63*), obtém-se a corrente completa:

$$i = e^{-t/RC}\left[\frac{V_{max}}{R}\,\text{sen}\;\phi - \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}\,\text{sen}\;(\phi + \text{arc tg}\;1/\omega CR)\right] +$$

$$+ \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}\,\text{sen}\;(\omega t + \phi + \text{arc tg}\;1/\omega CR) \qquad (66)$$

O primeiro termo é o transitório com o fator de decrescimento $e^{-t/RC}$. Os termos entre colchetes constituem uma constante. O segundo termo é a corrente em regime estacionário, adiantada de arc tg $(1/\omega CR)$ em relação à tensão aplicada.

Transitório RLC Senoidal

Ao fechar-se o interruptor do circuito série *RLC* da Fig. 16-18, aplica-se uma tensão senoidal. A equação que se obtém é:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = V_{max}\;\text{sen}\;(\omega t + \phi) \qquad (67)$$

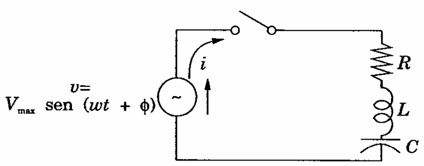


Figura 16-18

Diferenciando e introduzindo o operador, obtém-se, portanto:

$$\left(D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC}\right)i = \frac{\omega V_{max}}{L}\cos\;(\omega t + \phi) \qquad (68)$$

A solução particular é obtida pelo método dos coeficientes a determinar, como se segue. Faz-se $i_p = A \cos(\omega t + \phi) + B \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$. A seguir, calculam-se i'_p e i''_p e substituem-se os resultados na equação *(67)*. Os valores de A e B são encontrados igualando-se os coeficientes dos termos semelhantes, como se fez anteriormente no caso do circuito RL. Exprimindo o resultado como uma função senoidal simples, a solução particular fica:

$$i_p = \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}} \operatorname{sen}\left(\omega t + \phi + \operatorname{arc\,tg} \frac{(1/\omega C - \omega L)}{R}\right) \qquad (69)$$

A função complementar é idêntica à do circuito em série RLC em CC, já examinada anteriormente, cujo resultado era superamortecido, criticamente amortecido ou oscilatório, dependendo de R, L e C.

Caso 1 $(R/2L)^2 > 1/LC$. As raízes são reais e desiguais, acarretando o caso de superamortecimento. $D_1 = \alpha + \beta$ e $D_2 = \alpha - \beta$, sendo $\alpha = -R/2L$ e $\beta = \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}$. A solução completa é dada por:

$$i = e^{\alpha t}(c_1 e^{\beta t} + c_2 e^{-\beta t}) +$$

$$\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}} \operatorname{sen}\left(\omega t + \phi + \operatorname{arc\,tg} \frac{(1/\omega C - \omega L)}{R}\right) \qquad (70)$$

Caso 2 $(R/2L)^2 = 1/LC$. As raízes são reais e iguais, produzindo-se o caso de amortecimento crítico. A corrente completa é:

$$i = e^{\alpha t}(c_1 + c_2 t) +$$

$$\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}} \operatorname{sen}\left(\omega t + \phi + \operatorname{arc\,tg} \frac{(1/\omega C - \omega L)}{R}\right) \qquad (71)$$

Caso 3 $(R/2L)^2 < 1/LC$. As raízes são complexos conjugados, produzindo-se o caso de oscilação. A corrente completa é:

$$i = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \operatorname{sen} \beta t) +$$

$$\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}} \operatorname{sen}\left(\omega t + \phi + \operatorname{arc\,tg} \frac{(1/\omega C - \omega L)}{R}\right)$$

onde $$\beta = \sqrt{1/LC - (R/2L)^2}. \qquad (72)$$

As soluções particulares das equações (*70*), (*71*) e (*72*) são iguais, ao passo que a corrente transitória, dada pela função complementar, difere em cada caso. No caso 3, por exemplo, o transitório contém um par de funções senoidais, de frequência β rad/s, uma função, geralmente, diferente de ω da solução particular. O aparecimento da corrente, durante o período transitório, é, conseqüentemente, impossível de se predizer, possuindo, quase sempre, uma forma muito irregular. Depois que o fator de decrescimento anula o transitório, a corrente fica adiantada ou atrasada em relação à tensão aplicada, dependendo dos valores absolutos das reatâncias $1/\omega C$ e L em arc tg $(1/\omega C - \omega L)/R$.

Transitórios em Malha Dupla

Aplicando-se a lei de Kirchhoff para as tensões à estrutura de duas malhas da Fig. 16-9, obtém-se o seguinte conjunto de equações diferenciais simultâneas:

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_2 = V$$
$$R_1 i_1 + (R_1 + R_2) i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = V \qquad (73)$$

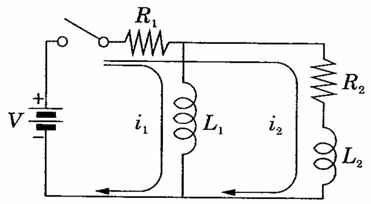


Figura 16-19

Empregando a notação com operador e reagrupando, temos:

$$(D + R_1/L_1) i_1 + (R_1/L_1) i_2 = V/L_1$$

$$(R_1/L_2)i_1 + \left(D + \frac{R_1 + R_2}{L_2}\right)i_2 = V/L2$$

$$\text{ou} \quad \begin{bmatrix} D + R_1/L_1 & R_1/L_1 \\ R_1/L_2 & D + \dfrac{R_1 + R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V/L_1 \\ V/L_2 \end{bmatrix} \tag{74}$$

Com o fim de obter uma equação de i_1 independente de i_2, empregamos determinantes. Temos, portanto:

$$\begin{vmatrix} D + R_1/L_1 & R_1/L_1 \\ R_1/L_2 & D + \dfrac{R_1 + R_2}{L_2} \end{vmatrix} i_1 = \begin{vmatrix} V/L_1 & R_1/L_1 \\ V/L_2 & D + \dfrac{R_1 + R_2}{L_2} \end{vmatrix} \tag{75}$$

O determinante do primeiro membro é desenvolvido e ordenado em potências decrescentes de D. No desenvolvimento do determinante da direita aparece um termo $D(V/L_1)$ que é nulo, já que $D = d/dt$ e V/L_1 é uma constante. Logo:

$$\left[D^2 + \left(\frac{R_1L_1 + R_2L_1 + R_1L_2}{L_1L_2}\right)D + \frac{R_1R_2}{L_1L_2}\right] i_1 = VR_2/L_1L_2 \tag{76}$$

A equação característica é da forma $D_2 + AD + B = 0$, porém, como neste caso $A^2 - 4AB > 0$ para todos os valores das constantes do circuito (com exceção do valor zero para L_1 ou L_2), a função complementar é da forma dada na equação (*43*). Como a função aplicada é constante, uma solução particular é a constante que satisfaz a equação, logo:

$$\left(\frac{R_1R_2}{L_1L_2}\right)i_{1p} = VR_2/L_1L_2$$

ou

$$i_{1p} = V/R_1 \tag{77}$$

Aplicando os mesmos métodos para i_2, obtemos:

$$\begin{vmatrix} D + R_1/L_1 & R_1/L_1 \\ R_1/L_2 & D + \dfrac{R_1 + R_2}{L_2} \end{vmatrix} i_2 = \begin{vmatrix} D + R_1/L_1 & V/L_1 \\ R_1/L_2 & V/L_2 \end{vmatrix} \qquad (78)$$

Após a expansão dos dois determinantes, chega-se ao seguinte resultado:

$$\left[D^2 + \left(\frac{R_1L_1 + R_2L_1 + R_1L_2}{L_1L_2}\right) D + \frac{R_1R_2}{L_1L_2}\right] i_2 = 0$$

A equação característica é a mesma da equação (*76*); conseqüentemente, as funções complementares são iguais. Entretanto, a solução particular de i_2 é nula, já que a equação é homogênea.

O exame do circuito mostra que isso é perfeitamente razoável, já que no regime estacionário L_1 aparece como um curto-circuito no ramo R_2L_2, anulando a corrente nesse ramo. R_1 é, portanto, a única limitação à corrente em regime estacionário, cujo valor é $i_1 = V/R_1$, dado na equação (*77*).

Problemas Resolvidos

16.1 Fechando-se um interruptor, aplica-se, no instante $t = 0$, uma tensão constante $V = 100$ V a um circuito em série *RL*, onde $R = 50$ ohms e $L = 10$ H. Determinar: (*a*) as equações de i, v_R e v_L; (*b*) a corrente em $t = 0{,}5$ s e (*c*) o instante em que $v_R = v_L$.

(*a*) A equação diferencial do circuito é:

$$50i + 10\frac{di}{dt} = 100 \quad \text{ou} \quad (D + 5)i = 10 \qquad (1)$$

e a solução completa é:

$$i = i_C + i_p = ce^{-5t} + 2 \qquad (2)$$

Quando $t = 0$, $i_0 = 0$ e $0 = C(1) + 2$ ou $C = -2$. Então,

$$i = 2(1 - e^{-5t}) \qquad (3)$$

mostrado na Fig. 16-20(*a*).

As tensões correspondentes nos elementos de circuito são:

$$v_R = Ri = 100(1 - e^{-5t}) \quad \text{e} \quad v_L = L\frac{di}{dt} = 100e^{-5t} \qquad (4)$$

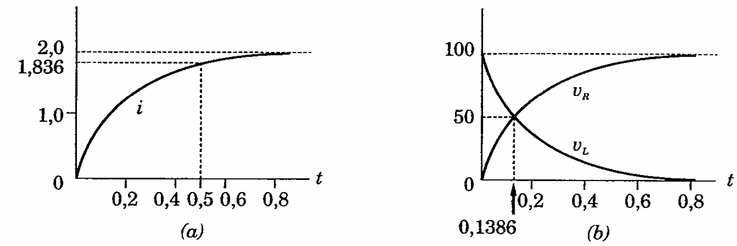


Figura 16-20

(*b*) Fazendo $t = 0,5$ s em (*3*), obtém-se $i = 2(1 - e^{-5(0,5)}) = 2(1 - 0,082) = 1,836$ ampères.

(*c*) Quando $v_R = v_L$, cada um será 50 volts; como a tensão aplicada é 100, faz-se v_R ou v_L igual a 50 V resolve-se para t. De (*4*), $v_L = 50 = 100e^{-5t}$. Assim, $e^{-5t} = 0,5$ ou $5t = 0,693$, e $t = 0,1386$ s.

16.2 Achar as equações de p_R e p_L no Probl. 16.1 e mostrar que a potência na indutância responde pela energia de regime estacionário, armazenada no campo magnético.

Empregando a tensão e a corrente, obtidas no Probl. 16.1, as potências instantâneas ficam:

$$p_R = v_R i = 100(1 - e^{-5t})\,2(1 - e^{-5t}) = 200(1 - 2e^{-5t} + e^{-10t})$$

$$p_L = v_L i = 100e^{-5t}\,2(1 - e^{-5t}) = 200(e^{-5t} - e^{-10t})$$

$$p_T = p_R + p_L = 200(1 - e^{-5t})$$

A energia de regime estacionário, armazenada no campo magnético, é $W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}(10)(2)^2 = 20$ joules.

A integral de p_L de $t = 0$ a $t = \infty$ é $W = \int_0^\infty 200(e^{-5t} - e^{-10t})\,dt = 20$ joules.

16.3 No circuito em série da Fig. 16-21, fecha-se o interruptor na posição 1, no instante $t = 0$, aplicando-se a fonte de 100 volts ao ramo *RL*; quando $t = 500\ \mu s$, o interruptor é levado para a posição 2. Obter as equações da corrente nos dois intervalos e discutir o transitório.

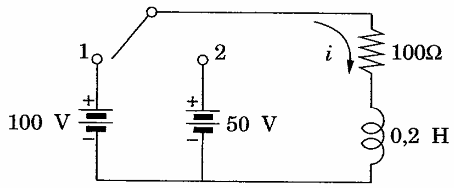


Figura 16-21

Com o interruptor na posição 1, a equação é:

$$100i + 0{,}2\frac{di}{dt} = 100 \quad \text{ou} \quad (D + 500)i = 500 \qquad (1)$$

e a corrente completa é: $i = c_1 e^{-500t} + 1{,}0$ (2)

Para $t = 0$, $i = 0$. Usando a condição inicial em (2), $0 = c_1(1) + 1{,}0$ ou $c_1 = 1{,}0$. A corrente é, então:

$$i = 1{,}0(1 - e^{-500t}) \qquad (3)$$

Aos 500 µs esse transitório é interrompido e a corrente fica:

$$i = 1{,}0(1 - e^{-500(500 \times 10^{-6})}) = 1{,}0(1 - 0{,}779) = 0{,}221 \text{ A.} \qquad (4)$$

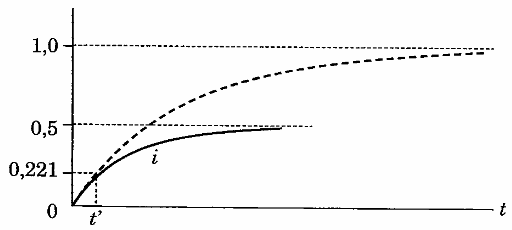


Figura 16-22

Com o ir
polarida

100*i* + (

que dá

onde *t'* =
como em

i = 0,22

Então, p

A equaçã
16-22 te
a corren
equação
figura.

16.4 Repetir o

A primei
obtida n
t = 500 µ

Invertid

100*i* + (

cuja solu

Para *t* =
= *c*(1) – (

= 0,721

A Fig. 16
seu sent
como po

Com o interruptor na posição 2, a tensão aplicada é 50 V, com a mesma polaridade da fonte de 100 V e a equação é:

$$100i + 0{,}2\frac{di}{dt} = 50 \quad \text{ou} \quad (D + 500)i = 250 \tag{5}$$

que dá $\quad i = c_2 e^{-500(t - t')} + 0{,}5 \qquad (6)$

onde $t' = 500\ \mu s$. Quando $t = t'$ na equação (*6*), a corrente é 0,221 ampères como em (*4*). Logo:

$$i = 0{,}221\, c_2(1) + 0{,}5 \text{ e } c_2 = -0{,}279$$

Então, para $t > t'$, $\; i = -0{,}279\, e^{-500(t - t')} + 0{,}5 \qquad (7)$

A equação (*3*) aplica-se para $0 < t < t'$ e o transitório tracejado da Fig. 16-22 tende para o valor 1,0 em regime estacionário. Assim, em t', quando a corrente é 0,221 A, o interruptor é deslocado para a posição 2 e a equação (*7*) aplica-se para $t > t'$ com o valor final 0,5 A, como mostra a figura.

16.4 Repetir o Probl. 16.3 invertendo a polaridade da fonte de 50 volts.

A primeira parte do transitório com o interruptor na posição 1 é a mesma obtida no Probl. 16.3, isto é, $i = 1{,}0(1 - e^{-500t})$ com $i = 0{,}221$ ampères em $t = 500\ \mu s$.

Invertida a polaridade da fonte de 50 V, resulta a seguinte equação:

$$100i + 0{,}2\frac{di}{dt} = -50 \quad \text{ou} \quad (D + 500)i = -250 \tag{1}$$

cuja solução é $i = c\, e^{-500(t - t')} - 0{,}5 \qquad (2)$

Para $t = t'$ a corrente é 0,221 ampères. Substituindo na equação (*2*), $0{,}221 = c(1) - 0{,}5$ ou $c = 0{,}721$. A equação da corrente para $t > t'$ é, portanto:

$$= 0{,}721\, e^{-500(t - t')} - 0{,}5$$

A Fig. 16-23 mostra a corrente transitória, cujo valor final é – 0,5 A, já que seu sentido, aplicada a fonte de 50 V, é oposto ao sentido de i admitido como positivo.

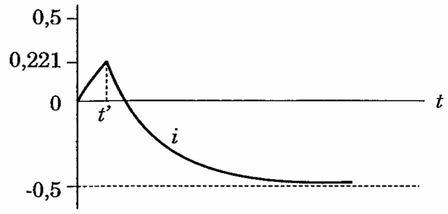


Figura 16-23

16.5 Uma tensão constante $V = 100$ volts é aplicada, no instante $t = 0$, a um circuito série *RC*, onde $R = 5000$ ohms e $C = 20\ \mu F$. É nula a carga inicial no capacitor. Determinar as equações de i, v_R e v_C.

Ao fechar-se o interruptor, a equação é:

$$5000i + \frac{1}{20 \times 10^{-6}} \int i\, dt = 100 \qquad (1)$$

Diferenciando e empregando a notação de operador, temos:

$$(D + 10)i = 0 \text{ com uma solução } i = c\, e^{-10t} \qquad (2)$$

Fazendo $t = 0$ na equação (*1*), tem-se a corrente inicial $i_0 = 100/5000 = 0{,}02$ ampères. Substituindo-se em (*2*), obtém-se $c = 0{,}02$. A corrente é, então:

$$i = 0{,}02\, e^{-10t} \qquad (3)$$

e as tensões transitórias nos elementos de circuito são:

$$v_R = Ri = 5000(0{,}02\, e^{-10t}) = 100\, e^{-10t}$$

$$v_C = \frac{1}{C} \int i\, dt = \frac{1}{20 \times 10^{-6}} \int 0{,}02\, e^{-10t}\, dt = 100(1 - e^{-10t})$$

A Fig. 16-24 mostra os transitórios. Em regime estacionário, $v_R = 0$ e $v_C = 100$ V.

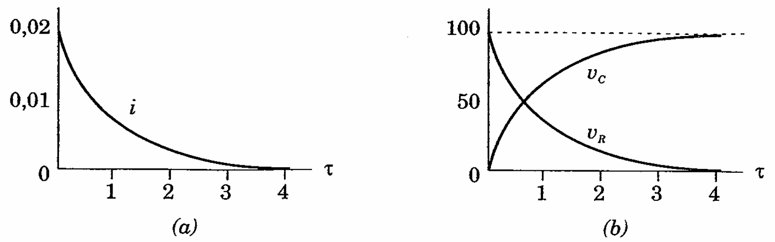


Figura 16-24

16.6 O capacitor de 20 μF do circuito *RC* mostrado na Fig. 16-25 tem uma carga inicial q_0 = 500 microcoulombs, com a polaridade mostrada no diagrama. Fecha-se o circuito quando $t = 0$, aplicando-se a tensão constante $V = 50$ volts. Determinar a corrente transitória.

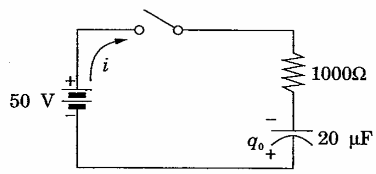


Figura 16-25

Ao fechar-se o interruptor, a equação é:

$$1000i + \frac{1}{20 \times 10^{-6}} \int i\,dt = 50 \qquad \text{ou} \qquad (D + 50)i = 0 \tag{1}$$

e a solução é: $\quad i = c\,e^{-50t}$ (2)

A fonte de 50 volts debita uma corrente no sentido indicado no diagrama, carregando com carga + a placa superior do capacitor. A carga inicial q_0 do capacitor tem uma tensão equivalente $V_0 = q_0/C = (500 \times 10^{-6})/(20 \times 20^{-6})$ = 25 volts, que também envia uma corrente no sentido de i. Então, em $t = 0$, a corrente inicial é $i_0 = (V + q_0/C)/R = (50 + 25)/1000 = 0{,}075$ ampères. Substituindo na equação (2), encontra-se $c = 0{,}075$; então, $i = 0{,}075\,e^{-50t}$.

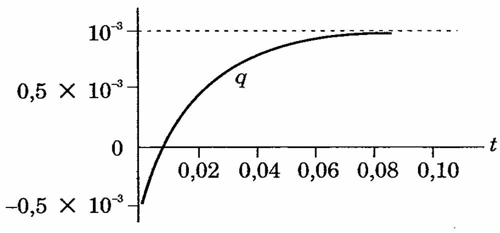
16.7 Repetir o Probl. 16.6, partindo da equação da carga transitória.

A equação em função da carga é:

$$1000\,\frac{dq}{dt} + \frac{q}{20 \times 10^{-6}} = 50 \qquad \text{ou} \qquad (D + 50)\,q = 0{,}05 \qquad (1)$$

cuja solução é: $\quad q = c\,e^{-50t} + 10^{-3} \qquad (2)$

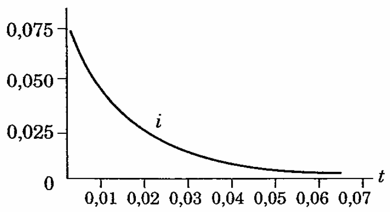
Quando $t = 0$, o capacitor possui uma carga positiva de $0{,}5 \times 10^{-3}$ coulombs, na placa inferior. A polaridade da carga depositada, durante o transitório, é positiva na placa superior. Assim, faz-se $q_0 = -0{,}5 \times 10^{-3}$ e $t = 0$, na equação (*2*), achando-se $c = -1{,}5 \times 10^{-3}$. Então, $q_0 = -1{,}5 \times 10^{-3}\,e^{-50t} + 10^{-3}$ e a corrente transitória é $i = dq/dt = 0{,}075\,e^{-50t}$.



(a)

Figura 16-26 (*a*)

O diagrama da Fig. 16-26(*a*) mostra que o capacitor tem uma carga inicial de $0{,}5 \times 10^{-3} C$, positiva na placa inferior, e uma carga final de $1{,}0 \times 10^{-3} C$, positiva na placa superior. A Fig. 16-26(*b*) mostra a corrente transitória $i = dq/dt$.



(b)

Figura 16-26 (*b*)

16.8 No circuito da Fig. 16-27, o interruptor é fechado na posição 1, quando $t = 0$, e, decorrida uma constante de tempo, é deslocado para a posição 2. Determinar a corrente transitória completa.

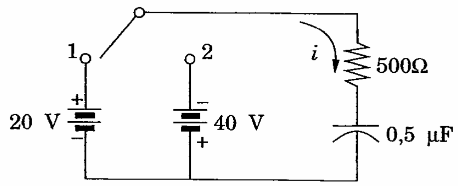


Figura 16-27

Estando o interruptor na posição 1, a equação diferencial, obtida por aplicação ao circuito da lei de Kirchhoff para as tensões, é:

$$i = c_1\, e^{-t/RC} = c_1\, e^{-4000t} \qquad (1)$$

Quando $t = 0$, $i_0 = V/R = 20/500 = 0{,}04$ ampères. Substituindo em (*1*), $c_1 = 0{,}04$ e a corrente no intervalo $0 < t < 1\,CT$ é:

$$i = 0{,}04\, e^{-4000t} \qquad (2)$$

Esse transitório prossegue até $t = 1$ CT $= RC = 500\,(0{,}5 \times 10^{-6}) = 250$ microssegundos. Nesse ponto a corrente tem o valor $i = 0{,}04\, e^{-1} = 0{,}0147$ ampères.

Quando o interruptor é movido para a posição 2, o capacitor tem carga nas placas, acarretando uma tensão $v_C = 20(1 - e^{-1}) = 12{,}65$ volts. Essa tensão e a fonte de 40 volts debitam corrente em sentido contrário ao da corrente originária da fonte de 20 volts. Fazendo $t' = 1$ CT, a equação da corrente para o segundo transitório é:

$$i = c_2\, e^{-4000(t-t')} \qquad (3)$$

Quando $t = t'$, $i = -(40 + 12{,}65)/500 = -0{,}1053$ ampères. Substituindo em (*3*): $c_2 = -0{,}1053$ e a corrente é:

$$i = -0{,}1053\, e^{-4000\,(t\,-\,t')}$$

A corrente transitória completa está mostrada na Fig. 16-28. Após $1/\tau$, a corrente tem para valor máximo $-0{,}1053$ ampères.

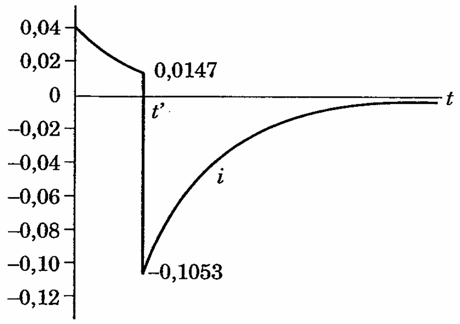


Figura 16-28

16.9 Determinar a carga transitória do Probl. 16.8 e diferenciá-la para obter a corrente.

A equação da carga, estando o interruptor na posição 1, é:

$$500\,\frac{dq}{dt} + \frac{q}{0{,}5 \times 10^{-6}} = 20 \quad \text{ou} \quad (D + 4000)\,q = 0{,}04 \qquad (1)$$

e a solução é: $q = c_1\,e^{-4000t} + 10 \times 10^{-6}$ (2)

Quando $t = 0$, $q_0 = 0$. Usando essa condição inicial em (2), obtém-se $c_1 = -10 \times 10^{-6}$ e, então, temos:

$$q = 10 \times 10^{-6}\,(1 - e^{-4000t}) \qquad (3)$$

Esta equação se aplica para $0 < t < t'$, onde $t' = 1\,\tau$. Para $1\,\tau$ a carga no capacitor é $q = 10 \times 10^{-6}\,(1 - e^{-1}) = 6{,}32 \times 10^{-6}$ coulombs.

Quando o interruptor está em 2, a equação diferencial é:

$$500\,\frac{dq}{dt} + \frac{q}{0{,}5 \times 10^{-6}} = -40 \quad \text{ou} \quad (D + 4000)\,q = 0{,}08 \qquad (4)$$

e a solução é: $q = c_2\,e^{-4000\,(t-t')} - 20 \times 10^{-6}$ (5)

Determina-se agora c_2 pela substituição do valor de q a $1\,\tau$ e fazendo $t = 1\,\tau$ na equação (5). Assim, $6{,}32 \times 10^{-6} = c_2(1) - 20 \times 10^{-6}$ ou $c_2 = 26{,}32 \times 10^{-6}$. Então, temos:

$$q = 26{,}32 \times 10^{-6}\,e^{-4000(t-t')} - 20 \times 10^{-6} \qquad (6)$$

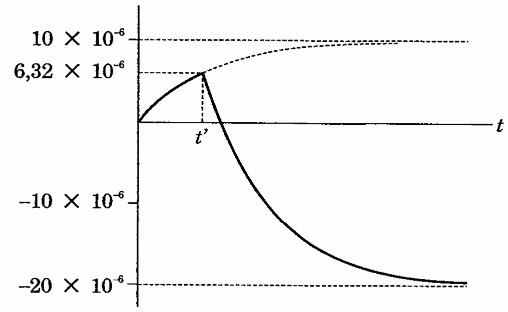


Figura 16-29

A Fig. 16-29 mostra a carga transitória completa. Obtém-se a corrente transitória correspondente pela diferenciação das equações (*3*) e (*6*). Assim, no intervalo $0 < t < t'$, corrente é:

$$i = \frac{d}{dt}\{10 \times 10^{-6}(1 - e^{-4000t})\} = 0{,}04\ e^{-4000t}$$

e quando $t > t'$, temos:

$$i = \frac{d}{dt}\{26{,}32 \times 10^{-6}\ e^{-4000(t-t')} - 20 \times 10^{-6}\} = -0{,}1053\ e^{-4000(t-t')}$$

Resultados idênticos foram obtidos na equação (*2*) e (*4*) do Probl. 16.8.

16.10 Uma tensão constante $V = 50$ volts é aplicada, no instante $t = 0$, em um circuito *RLC* em série, em que $R = 3000$ ohms, $L = 10$ henrys e $C = 200$ microfarads. Determinar a corrente transitória e o valor máximo da corrente, admitindo que o capacitor não tem carga inicial.

Depois de fechado o interruptor, a equação é:

$$3000i + 10\frac{di}{dt} + \frac{1}{200 \times 10^{-6}}\int 1\,dt = 50 \quad \text{ou} \quad (D^2 + 300D + 500)i = 0 \qquad (1)$$

As raízes da equação característica são $D_1 = -298{,}3$ e $D_2 = -1{,}67$, e

$$i = c_1\ e^{-1{,}67t} + c_2\ e^{-298{,}3t} \qquad (2)$$

Para determinar c_1 e c_2 utilizamos duas condições iniciais. Como o circuito contém indutância, a função corrente deve ser contínua. Portanto, como $i = 0$ quando $t = 0-$, i deve ser zero, também, quando $t = 0+$. Assim, da equação (*1*), $10\,di/dt = 50$ e $di/dt = 5$. Escrevendo, agora, a equação (*2*) para $t = 0$: $0 = c_1\,(1) + c_2\,(1)$ ou $c_1 + c_2 = 0$. Fazendo $t = 0$ na primeira derivada de (*2*) e fazendo $di/dt = 5$, tem-se $5 = -\,1{,}67\,c_1 - 298{,}3\,c_2$. Resolvendo as duas equações, encontramos $c_1 = 0{,}0168$ e $c_2 = -\,0{,}0168$. Então, temos:

$$i = 0{,}0168\,e^{-1{,}67t} - 0{,}0168\,e^{-298{,}3t} \qquad (3)$$

Determinamos a corrente máxima fazendo $di/dt = 0$ e resolvendo em relação a t.

$di/dt = (0{,}0168)\,(-\,1{,}67)e^{-1{,}67t} - (0{,}0168)\,(-298{,}3)e^{-298{,}3t} = 0$ ou $t = 0{,}0175$ segundos.

Levando este valor de t à equação (*3*), obtemos 0,0161 ampères.

16.11 Uma tensão constante $V = 100$ volts é aplicada, no instante $t = 0$, em um circuito *RLC* em série, em que $R = 50\ \Omega$, $L = 0{,}1$ H e $C = 50\ \mu$F. Determinar a corrente transitória, supondo nula a carga inicial do capacitor.

Depois de fechado o circuito, é a seguinte a equação diferencial:

$$50i + 0{,}1\,\frac{di}{dt} + \frac{1}{50 \times 10^{-6}} \int i\,dt = 100 \text{ ou } (D^2 + 500D + 2 \times 10^5)i = 0 \qquad (1)$$

As raízes da equação característica são $D_1 = -\,250 + j371$ e $D_2 = -\,250 - j371$; portanto, a corrente é:

$$i = e^{-250t}\,(c_1 \cos 371t + c_2 \operatorname{sen} 371t) \qquad (2)$$

A corrente é nula quando $t = 0$. Logo, de (*2*), $i_0 = 0 = (1)(c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0)$ e $c_1 = 0$.

A equação (*2*) fica $\quad i = e^{-250t}\,c_2 \operatorname{sen} 371t \qquad (3)$

Diferenciando (*3*), temos:

$$di/dt = c_2\,\{e^{-250t}\,(371) \cos 371t + e^{-250t}\,(-250) \operatorname{sen} 371t\} \qquad (4)$$

De (*1*) para $t = 0$, $01(di/dt) = 100$ ou $di/dt = 1000$. Substituindo em (*4*) para $t = 0$, $di/dt = 1000 = c_2\,371 \cos 0$ e $c_2 = 2{,}7$. Logo, a corrente é $i = e^{-250t}$ $(2{,}7 \operatorname{sen} 371t)$.

16.12 Uma tensão senoidal $v = 150$ sen $(500t + \phi)$ é aplicada, no instante em que $\phi = 0$, em um circuito RL em série, em que $R = 50\ \Omega$ e $L = 0{,}2$ H. Determinar a equação completa da corrente.

Depois de fechado o circuito, a equação é:

$$50i + 0{,}2\frac{di}{dt} = 150 \text{ sen } 500t \quad \text{ou} \quad (D + 250)i = 750 \text{ sen } 500t \qquad (1)$$

A função complementar é $i_c = c\, e^{-250t}$.

Para determinar a solução particular, empregaremos o método dos coeficientes a determinar e suporemos uma corrente particular; logo:

$$i_p = A \cos 500t + B \text{ sen } 500t \qquad (2)$$

Então $$i'_p = -500A \text{ sen } 500t + 500B \cos 500t \qquad (3)$$

Substituindo na equação (*1*) essas expressões de i e i', obtemos:

$$(-500A \text{ sen } 500t + 500B \cos 500t) + 250(A \cos 500t + B \text{ sen } 500t) = $$
$$= 750 \text{ sen } 500t$$

Igualando os coeficientes de sen $500t$ e de cos $500t$, obtemos:

$$-500A + 250B = 750 \quad \text{e} \quad 500B + 250A = 0 \qquad (4)$$

Resolvendo o sistema, encontramos $A = -1{,}2$ e $B = 0{,}6$. Então, temos:

$$i_p = -1{,}2 \cos 500t + 0{,}6 \text{ sen } 500t = 1{,}34 \text{ sen } (500t - 63{,}4^\circ) \qquad (5)$$

A corrente completa é: $i = c\, e^{-250t} + 1{,}34 \text{ sen } (500t - 63{,}4^\circ)$ (*6*)

Para $t = 0$, $i = 0 = c(1) + 1{,}34$ sen $(-63{,}4^\circ)$ e $c = 1{,}2$. Daí, temos:

$$i = 1{,}2\, e^{-250t} + 1{,}34 \text{ sen } (500t - 63{,}4^\circ) \qquad (7)$$

A Fig. 16-30 i, i_p e sua soma i. Cessado o regime transitório (aproximadamente para $t = 5$ CT), a corrente é senoidal e está atrasada, em relação à tensão aplicada, de $\theta = \text{arc tg } \omega L/R = 63{,}4^\circ$.

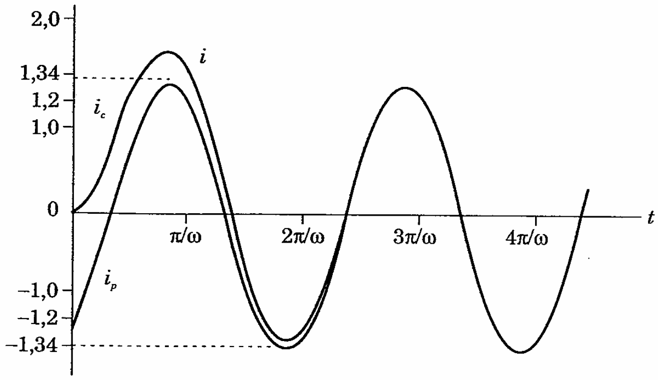


Figura 16-30

16.13 Que valor deverá ter o ângulo ϕ, no instante em que se fechar o interruptor do circuito descrito no Probl. 16.12, para que a corrente vá diretamente ao regime estacionário, sem transitório?

Se $\phi \neq 0$, tem-se, da equação (*6*) do Probl. 16.12:

$$i = c\ e^{-250t} + 1{,}34\ \text{sen}\ (500t + \phi - 63{,}4°)$$

Para $t = 0$, $0 = c(1) + 1{,}34\ \text{sen}\ (\phi - 63{,}4°)$. Se a constante c é nula, o transitório é zero; isso ocorre quando $\phi = (63{,}4° + n180°)$, para $n = 0, 1, 2, ...$

16.14 Uma fonte de tensão senoidal $v = 250\ \text{sen}\ (500t + \phi)$ é aplicada a um circuito série *RC*, em que $R = 100$ ohms e $C = 25\ \mu\text{F}$, no instante em que $\phi = 0°$. Determinar a corrente, admitindo que não haja carga inicial no capacitor.

Ao fechar-se o interruptor, a equação diferencial do circuito é:

$$100i + \frac{1}{25 \times 10^{-6}} \int i\ dt = 250\ \text{sen}\ 500t \quad \text{ou} \quad (D + 400)i = 1250 \cos 500t \qquad (1)$$

A função complementar é $i_c = c\ e^{-400}$.

Para determinar a solução particular, faz-se o 2º membro da equação em função do operador ser a parte real de 1250 e^{j500t} e, então, supõe-se uma corrente particular dada por:

$$i_p = \mathbf{K}\, e^{j500t} \qquad (2)$$

Logo:

$$i'_p = j500\ \mathbf{K}\, e^{j500t} \tag{3}$$

Substituindo esses valores de i e i' na equação (1), obtemos

$$j500\ \mathbf{K}\, e^{j500t} + 400(\mathbf{K}\, e^{j500t}) = 1250\, e^{j500t} \tag{4}$$

donde $\mathbf{K} = 1{,}955\underline{/-51{,}3^\circ}$. Este valor de $\mathbf{K}$ é levado à equação (*2*), porém, como a tensão aplicada era a parte real de $1250\, e^{j500t}$, a corrente é a parte real de (*2*) e $i_p = 1{,}955 \cos (500t - 51{,}3^\circ)$. A corrente completa é:

$$i = c^{-400t} + 1{,}955 \cos (500t - 51{,}3^\circ) \tag{5}$$

Para $t = 0$, equação (*1*) é $100i = 250$ sen 0 ou $i = 0$. Empregando a equação (*5*) com $t = 0$, temos $c = -1{,}22$. Logo:

$$i = -1{,}22\, e^{-400t} + 1{,}955 \cos (500t - 51{,}3^\circ) =$$

$$= -1{,}22 e^{-400t} + 1{,}955 \text{ sen } (500t + 38{,}7^\circ)$$

16.15 Fechando-se o interruptor do circuito *RC* da Fig. 16-31, no instante em que $\phi = 45^\circ$, aplica-se a fonte de tensão senoidal $v = 25$ sen $(500t + \phi)$. Existe uma carga inicial $q_0 = 5000 \times 10^{-6}$ coulombs no capacitor com a polaridade mostrada no diagrama. Determinar a corrente completa.

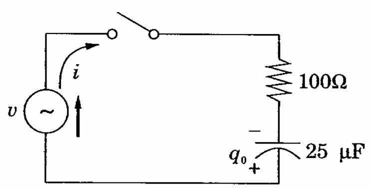


Figura 16-31

O circuito e a tensão senoidal são os mesmos do Probl. 16.14, com $\phi = 45^\circ$. A equação diferencial expressa por operador é:

$$(D + 400)i = 1250 \cos (500t + 45^\circ) \tag{1}$$

A função complementar é a mesma do Probl. 16.14 e a corrente particular é deslocada de 45°, isto é, $i_p = 1{,}955$ sen $(500t + 83{,}7^\circ)$. A corrente completa é, então:

$$i = c\ e^{-400t} + 1{,}955 \text{ sen } (500t + 83{,}7^\circ) \tag{2}$$

Quando $t = 0$, há duas tensões aplicadas. A tensão do capacitor carregado é $V = q_0/C = (5000 \times 10^{-6})/(25 \times 10^{-6}) = 200$ volts. A tensão instantânea da fonte é $v = 250$ sen $45° = 176{,}7$ volts. O exame do circuito mostra que essas tensões têm a mesma polaridade; portanto, a corrente inicial é $i_0 = (200 + 176{,}7)/100 = 3{,}77$ ampères. Usando a equação (*2*) com $i = 3{,}77$, quando $t = 0$, encontra-se $c = 1{,}83$; por conseguinte, a corrente procurada é:

$$i = 1{,}83\, e^{-400t} + 1{,}955 \text{ sen } (500t + 83{,}7°)$$

16.16 O circuito em série *RLC* da Fig. 16-32 tem uma fonte de tensão senoidal $v = 100$ sen $(1000t + \phi)$. Sendo o interruptor fechado quando $\phi = 90°$, determinar a corrente, supondo nula a carga inicial do capacitor.

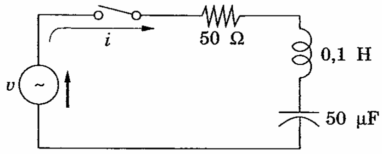


Figura 16-32

Depois de fechado o interruptor, a equação do circuito é:

$$50i + 0{,}1\frac{di}{dt} + \frac{1}{50 \times 10^{-6}} \int i\, dt = 100 \text{ sen } (1000t + 90°)$$

$$\text{ou} \quad (D^2 + 500D + 2 \times 10^5)i = 10^6 \cos (1000t + 90°) \qquad (1)$$

O cálculo das raízes da equação característica é deixado como exercício para o leitor.

A corrente complementar é $i_c = e^{-250t}(c_1 \cos 371t + c_2 \text{ sen } 371t)$, e a corrente particular, determinada pelo método empregado no Probl. 16.14., é $i_p = 1{,}06$ sen $(1000t + 32°)$. A corrente completa é, portanto:

$$i = e^{250t}(c_1 \cos 371t + c_2 \text{ sen } 371t) + 1{,}06 \text{ sen } (1000t + 32°) \qquad (2)$$

Da equação (*1*) para $t = 0$, $i_0 = 0$ e $di/dt = 1000$. Substituindo em (*2*) encontra-se $c_1 = -0{,}562$. Diferenciando (*2*), obtém-se:

$$\frac{di}{dt} = e^{-250t}(-371c_1 \text{ sen } 371t + 371c_2 \cos 371t) +$$

$$+ (c_1 \cos 371t + c \text{ sen } 371t)(-250e^{-250t}) + 1{,}06\,(1000) \cos (1000t + 32°) \qquad (3)$$

Substituindo $t = 0$, $c_1 = -0{,}562$ e $di/dt = 1000$ na equação (*3*), acha-se $c_2 = -0{,}104$. A equação (*2*) fica, finalmente:

$$i = e^{-250t}(-0{,}562 \cos 371t - 0{,}104 \text{ sen } 371t) + 1{,}06 \text{ sen }(1000t + 32^\circ)$$

16.17 Um circuito *RLC* em série, com R = 100 ohms, L = 0,1 henry e C = 50 microfarads, tem uma fonte de tensão senoidal $v = 100 \text{ sen }(1000t + \phi)$. Se o interruptor for fechado quando $\phi = 90^\circ$, determinar a corrente, supondo que não haja carga inicial no capacitor.

Fechado o interruptor, a equação do circuito é:

$$100i + 0{,}1\frac{di}{dt} + \frac{1}{50 \times 10^{-6}}\int i\,dt = 100 \text{ sen }(1000t + 90^\circ)$$

$$\text{ou} \quad (D^2 + 1000D + 2 \times 10^3)i = 10^6 \cos(1000t + 90^\circ) \qquad (1)$$

As raízes da equação característica são $D_1 = -276{,}5$ e $D_2 = -723{,}5$.

A função complementar é $i_c = c_1 e^{-276{,}5t} = c_2 e^{-723{,}5t}$ e a solução particular, obtida pelo método empregado no Probl. 16.14, é $i_p = 0{,}781 \text{ sen }(1000t + 51{,}4^\circ)$. A corrente completa é, portanto:

$$i = c_1 e^{-276{,}5t} + c_2 e^{-723{,}5t} + 0{,}781 \text{ sen }(1000t + 51{,}4^\circ) \qquad (2)$$

Para determinar as constantes c_1 e c_2, calculam-se i e di/dt para $t = 0$, na equação (*1*). Substituindo os resultados, $i = 0$ e $di/dt = 1000$, na equação (*2*), obtém-se:

$$i_0 = 0 = c_2(1) + c_2(1) + 0{,}781 \text{ sen } 51{,}4^\circ \quad \text{ou} \quad c_1 + c_2 = -0{,}610 \qquad (3)$$

Diferenciando (*2*) e fazendo $t = 0$ e $di/dt = 1000$, temos:

$$di/dt = 1000 = -276{,}5c_1 - 723{,}5c_2 + 781 \cos 51{,}4^\circ \quad \text{ou}$$

$$= 276{,}5c_1 + 723{,}5c_2 = -513 \qquad (4)$$

Resolvendo (*3*) e (*4*) simultaneamente, $c_1 = 0{,}161$ e $c_2 = -0{,}771$. Então:

$$i = 0{,}161\, e^{-276{,}5t} - 0{,}771\, e^{-723{,}5t} + 0{,}781 \text{ sen }(1000t + 51{,}4^\circ)$$

16.18 O interruptor da estrutura de duas malhas, apresentada na Fig. 16-33, é fechado quando $t = 0$. Determinar as correntes transitórias de malha, i_1 e i_2, e a tensão transitória no capacitor, v_C.

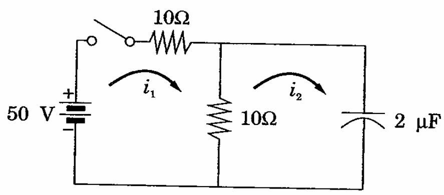


Figura 16-33

Aplicando às duas malhas a lei de Kirchhoff para as tensões, tem-se:

$$20i_1 - 10i_2 = 50 \quad \text{ou} \quad 2Di_1 = Di_2 \qquad (1)$$

$$-10i_1 + 10i_2 + \frac{1}{2\times 10^{-6}}\int i_2\,dt = 0 \quad \text{ou} \quad -Di_1 + (D + 5\times 10^4)\,i_2 = 0 \qquad (2)$$

Da equação (*1*), $Di_1 = \frac{1}{2}Di_2$. Substituindo em (*2*), obtém-se:

$$-\left(\frac{1}{2}Di_2\right) + (D + 5\times 10^4)i_2 = 0 \quad \text{ou} \quad (D + 10^5)i_2 = 0 \qquad (3)$$

A solução da equação (*3*) contém uma função complementar, já que a equação é homogênea. Então:

$$i_2 = c\ e^{-10^5 t} \qquad (4)$$

Fazendo $t = 0$ na equação (*2*), $-10i_1 + 10i_2 = 0$ ou $i_1 = i_2$. Assim, a equação (*1*) para $t = 0$ fica $20i_1 - 10i_1 = 50$ ou $i_1 = i_2 = 5$ amp. Substituindo em (*4*), obtém-se $c = 5$. Então:

$$i_2 = 5\ e^{-10^5 t} \qquad (5)$$

Obtém-se a corrente transitória i_1 substituindo (*5*) na equação (*1*). Assim:

$$20i_1 - 10(5\ e^{-10^5 t}) = 50 \quad \text{ou} \quad i_1 = 2{,}5 + 2{,}5\ e^{-10^5 t}$$

A tensão transitória no capacitor, v_C, é obtida pela integral da corrente de malha i_2. Tem-se:

$$v_C = \frac{1}{C}\int i_2\,dt = \frac{1}{2\times 10^{-6}}\int 5\ e^{-10^5 t}\,dt = 25(1 - e^{-10^5 t})$$

16.19 Na estrutu
e a fonte
malha i_1 e

Aplicand
as equaçõ

$10i_2 + 1$

ou

$(D + 150$

$15i_2 + 1$

Da equaç

Substitui

$(D + 833$

A solução

$i_1 = c\ e^{-}$

Substitui

$i_2 = -\frac{2}{3}c$

16.19 Na estrutura de duas malhas da Fig. 16-34, o interruptor é fechado quando $t = 0$ e a fonte de tensão é dada por $v = 150$ sen $1000t$. Determinar as correntes de malha i_1 e i_2, mostradas no diagrama.

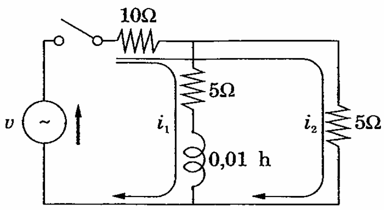


Figura 16-34

Aplicando-se às duas malhas a lei de Kirchhoff para as tensões, obtêm-se as equações:

$$10i_2 + 15i_1 + 0{,}01\,\frac{di_1}{dt} = 150 \text{ sen } 1000t$$

ou

$$(D + 1500)i_1 + 1000i_2 = 15000 \text{ sen } 1000t \qquad (1)$$

$$15i_2 + 10i_1 = 150 \text{ sen } 1000t \qquad (2)$$

Da equação (*2*) tira-se: $i_2 = 10 \text{ sen } 1000t - \frac{2}{3} i_1$ (*3*)

Substituindo em (*1*), obtém-se a equação diferencial:

$$(D + 833)i_1 = 5000 \text{ sen } 1000t \qquad (4)$$

A solução completa, obtida pelo método do Probl. 16.14, é:

$$i_1 = c\, e^{-833t} + 3{,}84 \text{ sen } (1000t - 50{,}2^\circ) \qquad (5)$$

Substituindo este valor de i_1 na equação (*3*), obtém-se:

$$i_2 = -\frac{2}{3} c\, e^{-833t} - 2{,}56 \text{ sen } (1000t - 50{,}2) + 10 \text{ sen } 1000t$$

$$= -\frac{2}{3} c \; e^{-833t} + 8{,}58 \text{ sen } (1000t + 13{,}25^\circ) \qquad (6)$$

A corrente de malha i_1 passa numa indutância e deve ser zero para $t = 0$. Substituindo na equação (5), $0 = c(1) + 3{,}84 \text{ sen } (-50{,}2^\circ)$ e $c = 2{,}95$. As duas equações das correntes de malha são:

$$i_1 = 2{,}95 \, e^{-833t} + 3{,}84 \text{ sen } (1000t - 50{,}2^\circ) \text{ e } i_2 = -1{,}97 \, e^{-833t} + 8{,}58 \text{ sen}(1000t + 13{,}25^\circ)$$

Problemas Propostos

16.20 O interruptor S_1 da Fig. 16-35 é fechado quando $t = 0$. Após 4 milissegundos, abre-se S_2. Determinar a corrente nos intervalos $0 < t < t'$ e $t > t'$ sendo $t' = 4$ milissegundos.
Resp.: $i = 2(1 - e^{-500t})$; $i = 1{,}06 \, e^{-1.500(t - t')} + 0{,}667$.

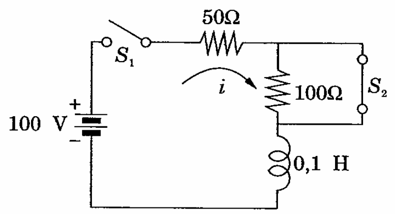


Figura 16-35

16.21 Fechando-se um interruptor, aplica-se uma tensão constante a um circuito RL série. A tensão em L é 25 volts quando $t = 0$ e cai para 5 volts quando $t = 0{,}025$ segundos. Sendo $L = 2$ H, qual deve ser o valor de R ?
Resp.: 128,8 ohms.

16.22 No circuito da Fig. 16-36, o interruptor S_1 é fechado, quando $t = 0$, e S_2 é aberto, quando $t = 0{,}2$ s. Determinar as expressões da corrente transitória, nos dois intervalos.
Resp.: $i = 10(1 = 6 - e^{-10t})$; $i = 6{,}97 \, e^{-60(t - t')} + 1{,}67$.

16.23 No circu
desloca-
a corren
Resp.: 1

16.24 No circu
suficient
é levadc
50 ohm
durante
Resp.:

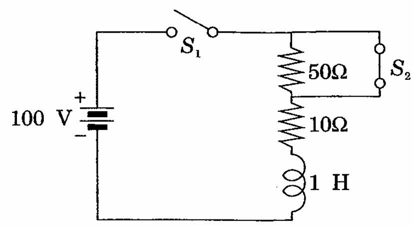


Figura 16-36

16.23 No circuito da Fig. 16-37, liga-se o interruptor na posição 1, quando t = 0, e desloca-se para a posição 2, após 1 milissegundo. Determinar o instante em que a corrente se anula, mudando de sentido.
Resp.: 1,261 milissegundos.

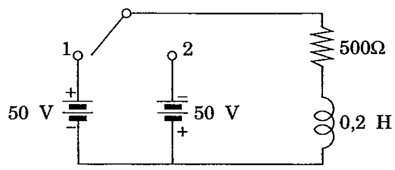


Figura 16-37

16.24 No circuito da Fig. 16-38, o interruptor é ligado na posição 1, durante tempo suficiente para que a corrente atinja o regime estacionário. Quando o interruptor é levado para a posição 2, existe uma corrente transitória nos dois resistores de 50 ohms, durante curto tempo. Determinar a energia dissipada nos resistores durante esse transitório.
Resp.: 8 joules.

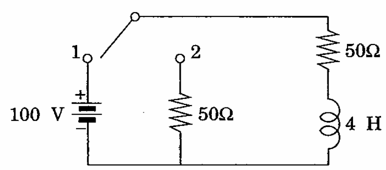


Figura 16-38

16.25 O capacitor do circuito *RC*, mostrado na Fig. 16-39, tem uma carga inicial $q_0 = 800 \times 10^{-6}$ coulombs, com a polaridade indicada. Determinar a corrente e a carga transitória que ocorrem quando o interruptor é fechado.
Resp.: $i = -10\, e^{-2,5\times10^{4}t}$; $q = 400\,(1 + e^{-2,5\times10^{4}t})\, 10^{-6}$ coulombs.

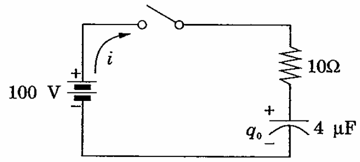


Figura 16-39

16.26 Um capacitor de 2 μF com uma carga inicial $q_0 = 100 \times 10^{-6}$ coulombs é ligado aos terminais de um resistor de 100 ohms, quando $t = 0$. Calcular o tempo necessário para que a tensão nos terminais do resistor caia de 40 para 10 volts.
Resp.: 277,4 microssegundos.

16.27 O interruptor do circuito na Fig. 16-40 é fechado na posição 1, quando $t = 0$, e deslocado para a posição 2, após 1τ. Determinar as expressões da corrente transitória nos intervalos $0 < t < t'$ e $t' < t$.
Resp.: $i = 0{,}5\, e^{-200t}$; $i = -0{,}516\, e^{-200(t-t')}$.

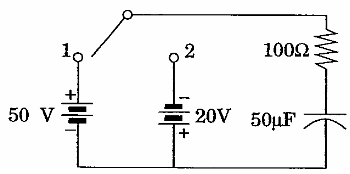


Figura 16-40

16.28 Resolver a equação diferencial relativa ao Probl. 16.27, em função da carga. A partir das funções transitórias da carga, obter as expressões da corrente e comparar os resultados.

16.29 No circuito da Fig. 16.41, o interruptor é mantido na posição 1 por tempo suficiente para que se estabeleça o regime estacionário e, então, é levado à posição 2. Estabelece-se uma corrente transitória, durante a qual a energia é dissipada nos dois resistores. Determinar essa energia e compará-la com a que foi armazenada no capacitor, durante o primeiro período.
Resp.: 0,20 joules.

16.30 O capacit
$\times 10^{-6}$ cou
transitória
Resp.: $i =$

16.31 Determin
Mostrar q
Resp.: v_C

16.32 O capacit
interrupto
transitória
Resp.: 1

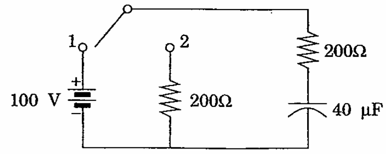


Figura 16-41

16.30 O capacitor C_1 do circuito mostrado na Fig. 16-42 tem uma carga inicial $q_0 = 300 \times 10^{-6}$ coulombs. Se o interruptor for fechado quando $t = 0$, determinar a corrente transitória, a carga transitória e a tensão final no capacitor C_1.
Resp.: $i = 2{,}5\, e^{-2{,}5\times 10t}$; $q = 200(1 + 0{,}5\, e^{-2{,}5\times 10})\, 10^{-6}$ coulombs; 33,3 volts.

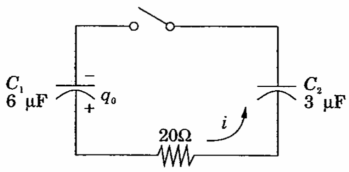


Figura 16-42

16.31 Determinar as tensões transitórias v_{C1}, v_{C2} e v_R, referentes ao problema 16.30. Mostrar que sua soma é nula.
Resp.: $v_{C1} = 33{,}3 + 16{,}7\, e^{-2{,}5\times 10^4 t}$; $v_{C2} = -33{,}3(1 - e^{-2{,}5\times 10^4 t}$; $v_R = -50\, e^{-2{,}5\times 10^4 t}$;

16.32 O capacitor do circuito em série *RC* da Fig. 16-43 tem uma carga inicial q_0 e o interruptor é fechado quando $t = 0$. Determinar q_0, sabendo que a potência transitória no resistor é $p_R = 360\, e^{-10^5 t}$.
Resp.: 120×10^{-6} coulombs.

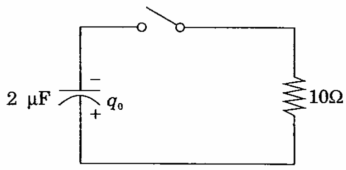


Figura 16-43

16.33 Quando $t = 0$, aplica-se uma tensão $V = 200$ volts a um circuito em série *RLC*, onde $R = 200$ ohms, $L = 0{,}1$ H e $C = 100$ μF. Determinar a corrente, admitindo que o capacitor não tenha carga inicial.
Resp.: $i = 1{,}055\ e^{-52t} - 1{,}055\ e^{-1948t}$.

16.34 Deve-se tornar criticamente amortecido um circuito *RLC* série onde $R = 200$ ohms e $L = 0{,}1$ H, pela escolha conveniente da capacitância. Determinar esse valor de *C*.
Resp.: 10 μF.

16.35 Determinar a freqüência natural de um circuito *RLC* em série, em que $R = 200$ ohms, $L = 0{,}1$ H e $C = 5$ μF.
Resp.: 1000 rad/s.

16.36 Uma tensão constante $V = 10$ volts é aplicada, quando $t = 0$, em um circuito série *RLC*, em que $R = 5$ ohms, $L = 0{,}1$ H e $C = 500$ μF. Determinar a corrente transitória resultante.
Resp.: $i = 0{,}72\ e^{-25t}$ sen $139t$.

16.37 Uma tensão senoidal $v = 100 \cos (100t + \phi)$ é aplicada em um circuito série *RL*, em que $R = 300$ ohms e $L = 1{,}0$ H. Supondo que o interruptor é fechado quando $\phi = 45°$, determinar a corrente transitória resultante.
Resp.: $i = -\ 0{,}282\ e^{-300t} + 0{,}316 \cos (100t + 26{,}6°)$.

16.38 O circuito *RL* da Fig. 16-44 está operando em regime estacionário senoidal, com o interruptor na posição 1. O interruptor é deslocado para a posição 2, quando a tensão da fonte é $v = 100 \cos (100t + 45°)$. Determinar a corrente transitória e representar o último meio ciclo do regime estacionário, juntando com o transitório, para mostrar a transição.
Resp.: $i = 0{,}282\ e^{-300t}$.

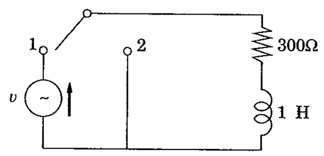


Figura 16-44

16.39 No circuito *RC* da Fig. 16-45, o capacitor tem uma carga inicial $q_0 = 25 \times 10^{-6}$ coulombs, com polaridade indicada. A tensão senoidal $v = 100$ sen $(1\,000t + \phi)$ é aplicada no circuito no instante em que $\phi = 30°$. Determinar a corrente transitória.
Resp.: $i = 0{,}1535\ e^{-4\times 10^3 t} + 0{,}484$ sen $(1000t + 106°)$.

16.40 Quando (
capacitor
haver um
Resp.: 1:

16.41 Mostrar q
solução p

$i_p = \sqrt{R^2}$

16.42 Uma tens
quando ϕ
Resp.: $i =$

16.43 Um circui
fonte de t
30°, deter
Resp.: $i =$

16.44 Um circui
fonte de t
determina
Resp.: $i =$

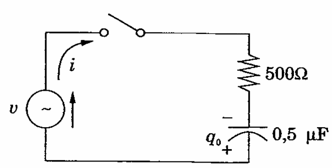


Figura 16-45

16.40 Quando o interruptor do Probl. 16.39 for fechado, que valor de carga inicial no capacitor fará com que a corrente atinja, diretamente, o regime estacionário sem haver um transitório?
Resp.: $13{,}37 \times 10^{-6}$ coulombs, + na placa de cima.

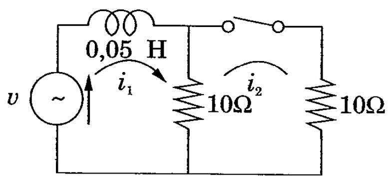


Figura 16-46

16.41 Mostrar que um circuito em série *RLC*, cuja fonte é $v = V_{max}$ sen $(\omega t + \phi)$ tem uma solução particular para sua equação diferencial dada por:

$$i_p = \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}} \text{ sen } \left(\omega t + \phi + \text{tg}^{-1} \frac{(1/\omega C - \omega L)}{R}\right)$$

16.42 Uma tensão senoidal $v = 100$ sen $(250t + \phi)$ é aplicada em um circuito série *RLC* quando $\phi = 0°$. Sendo $R = 5$ ohms, $L = 0{,}1$ H e $C = 500$ μF, determinar a corrente.
Resp.: $i = e^{-25t}(5{,}42 \cos 139t - 1{,}89 \text{ sen } 139t) + 5{,}65 \text{ sen } (250t - 73{,}3°)$.

16.43 Um circuito *RLC* em série onde $R = 200$ ohms, $L = 0{,}5$ H e $C = 100$ μF tem uma fonte de tensão senoidal $v = 300$ sen $(500t + \phi)$. Fechado o circuito quando $\phi = 30°$, determinar a corrente resultante.
Resp.: $i = 0{,}517\, e^{-341{,}4t} - 0{,}197\, e^{-58{,}6t} + 0{,}983 \text{ sen } (500t - 19°)$.

16.44 Um circuito *RLC* em série onde $R = 50$ ohms, $L = 0{,}1$ H e $C = 50$ μF tem uma fonte de tensão senoidal $v = 100$ sen $(500t + \phi)$. Fechado o circuito em $\phi = 45°$, determinar a corrente resultante.
Resp.: $i = e^{-250t}(-1{,}09 \cos 371t - 1{,}025 \text{ sen } 371) + 1{,}96 \text{ sen } (500t + 33{,}7°)$.

16.45 A fonte de tensão da malha 1, na estrutura de duas malhas da Fig. 16-46, é dada por $v = 100$ sen $(200t + \phi)$. Determinar as correntes transitórias de malha, i_1 e i_2, supondo que o interruptor é fechado quando $\phi = 0°$.
Resp.: $i_1 = 3{,}01\ e^{-100t} + 8{,}96$ sen $(200t - 63{,}4°)$;
$i_2 = 1{,}505\ e^{-100t} + 4{,}48$ sen $(200t - 63{,}4°)$.

16.46 Determinar as correntes de malha i_1 e i_2 da estrutura representada na Fig. 16-47, supondo o interruptor fechado quando $t = 0$.
Resp.: $i_1 = 0{,}101\ e^{-100t} + 9{,}899\ e^{-9950t}$; $i_2 = -5{,}05\ e^{-100t} + 5 + 0{,}05\ e^{-9950t}$.

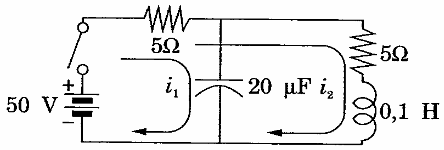


Figura 16-47

16.47 O interruptor da estrutura representada na Fig. 16-48 é fechado quando $t = 0$. Determinar as correntes resultantes i_1 e i_2.
Resp.: $i_1 = 1{,}67\ e^{-6{,}67t} + 5$; $i_2 = -0{,}555\ e^{-6{,}67t} + 5$.

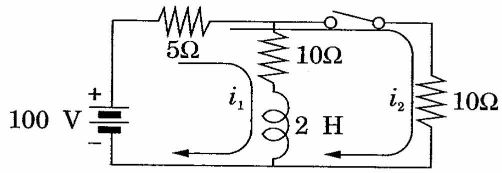


Figura 16-48

MAKRON
Books

Introduç

No C
contêm elem
tais circuitos
dependendo
métodos clás
nientes.

Nest
Laplace, que
algumas fun
métodos clás

Este
formada de
complexas s
transitórios.

MAKRON
Books

TRANSITÓRIOS PELO MÉTODO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Introdução

No Capítulo 16, analisamos as correntes transitórias nos circuitos que contêm elementos armazenadores de energia. A aplicação da lei de Kirchhoff a tais circuitos acarreta uma ou duas equações diferenciais no domínio do tempo, dependendo da configuração do circuito. Essas equações foram resolvidas pelos métodos clássicos. Em muitos casos, entretanto, tais métodos não são convenientes.

Neste capítulo, introduziremos o chamado método da transformada de Laplace, que fornece soluções mais diretas às equações diferenciais. Além disso, algumas funções irregulares, que não podem ser resolvidas com facilidade pelos métodos clássicos, têm uma solução proporcionada pelo método de Laplace.

Este capítulo indica, apenas, aplicações básicas do método da transformada de Laplace. As deduções matemáticas formais e as aplicações mais complexas são deixadas por conta dos textos que se dedicam à análise dos transitórios.

A Transformada de Laplace

Se $f(t)$ é uma função de t, definida para todo $t > 0$, a transformada de Laplace de $f(t)$, indicada pelo símbolo $\mathcal{L}\,[f(t)]$, é definida por:

$$\mathcal{L}\,[f(t)] = \mathbf{F}(\mathrm{s}) = \int_0^{\infty} f(t)\; e^{-st}\, dt \qquad (1)$$

onde o parâmetro s pode ser real ou complexo. Nas aplicações em circuitos, supomos $\mathrm{s} = \sigma + j\omega$.

A operação $\mathcal{L}\,[f(t)]$ transforma uma função $f(t)$ do *domínio do tempo* numa função $\mathbf{F}(\mathrm{s})$ do *domínio da freqüência complexa*, ou simplesmente *domínio* s. As duas funções $f(t)$ e $\mathbf{F}(\mathrm{s})$ constituem um par de transformada. Esses pares são tabelados. As transformadas apresentadas na tabela 17-1, no final do capítulo, são suficientes para os nossos objetivos.

São condições suficientes para a existência da transformada de Laplace que a função $f(t)$ seja (a) contínua em intervalos e (b) de ordem exponencial. A função $f(t)$ é de ordem exponencial se $|f(t)| < A\,e^{\alpha t}$ para todo $t > t_0$, onde A e t_0 são constantes positivas. Quando tais condições são satisfeitas, a integral de transformação direta é convergente para todo $\sigma > \alpha$ e $\mathbf{F}(\mathrm{s})$ existe. Na análise de circuitos todas as funções satisfazem aos requisitos (a) e (b).

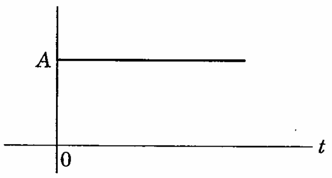


Figura 17-1

Exemplo 1 A função apresentada na Fig. 17-1 é chamada *função degrau* ("step") e é definida por $f(t) = A,\ t > 0$. Determinar a transformada de Laplace correspondente.

Aplicando a equação (1) à função $f(t) = A$), tem-se

$$\mathcal{L}\,[A] = \int_0^{\infty} A\; e^{-st}\, dt = \left[\frac{-A}{\mathrm{s}}\; e^{-st}\right]_0^{\infty} \frac{A}{\mathrm{s}}$$

Exemplo 2 Obter a transformada de Laplace de $f(t) = e^{-at}$, onde a é uma constante.

$$\mathcal{L}\,[e^{-at}] = \int_0^\infty e^{-at}\, e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{-(a+s)t}\, dt =$$

$$\left[-\frac{1}{(a+s)}\, e^{-(a+s)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{s+a}$$

Exemplo 3 Achar a transformada de Laplace de $f(t) = \text{sen}\ \omega t$.

$$\mathcal{L}\,[\text{sen}\ \omega t] = \int_0^\infty \text{sen}\ \omega t\ e^{-st}\, dt = \left[\frac{-s(\text{sen}\ \omega t)e^{-st} - e^{-st}\ \omega \cos \omega t}{s^2 + \omega^2}\right]_0^\infty = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Exemplo 4 Achar a transformada de Laplace da derivada df/dt.

$$\mathcal{L}\,[df/dt] = \int_0^\infty (df/dt)\, e^{-st}\, dt$$

Integrar por partes, usando $\int u\, dv = uv - \int v\, du$, onde $u = e^{-st}$, $dv = df$, $v = f$. Assim,

$$\mathcal{L}\,[df/dt] = \left[e^{-st}\, f\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(-se^{-st})\, dt =$$

$$= -f(0+) + s\int_0^\infty f e^{-st}\, dt = -f(0+) + s\mathbf{F}(s)$$

onde $f(0+)$ é o valor da função quando o zero é atingido pela direita, isto é, o valor da função para $t = (0+)$.

Exemplo 5 Achar a transformada de Laplace da integral $\int f(t)\, dt$.

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)\ dt\right] = \int_0^\infty \int f(t)\ dt\ e^{-st}\, dt$$

Integra-se por partes $u = \int f(t)\, dt$ e $dv = e^{-st}dt$. Assim,

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)\ dt\right] = \left[\int f(t)\ dt\left(\frac{-1}{s}\, e^{-st}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s}\, e^{-st}\right) f(t)\, dt$$

$$= \left| \frac{1}{s} \int f(t)\, dt \right|_{0+} + \frac{1}{s}\, \mathbf{F}(s)$$

onde $\int f(t)\, dt \mid_{0+}$ é o valor da integral para 0+, que também se escreve $f^{-1}(0+)$. Assim, a transformada de Laplace de uma integral é:

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)\, dt\right] = \frac{1}{s}\mathbf{F}(s) + \frac{1}{s} f^{-1}(0+)$$

Os pares obtidos nestes exemplos aparecem na tabela 17-1.

Aplicações na Análise de Circuitos

O capacitor que aparece no circuito RC série da Fig. 17-2 tem uma carga inicial q_0 com a polaridade indicada. Quando o interruptor é fechado, a fonte de tensão constante V é aplicada ao circuito, cuja equação diferencial é, então,

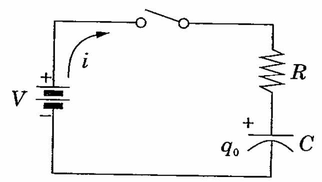


Figura 17-2

$$Ri + \frac{1}{C}\int i\, dt = V \qquad (2)$$

Chamando $I(s)$ à corrente no domínio s, tomamos a transformada de Laplace de cada termo da equação *(2)*.

$$\mathcal{L}\,[Ri] + \mathcal{L}\left[\frac{1}{C}\int i\, dt\right] = \mathcal{L}\,[V] \qquad (3)$$

$$RI(s) + \frac{I(s)}{Cs} + \frac{f^{-1}(0+)}{Cs} = \frac{V}{s} \qquad (4)$$

Assin
superior do ca
sinal é, portar

Reagı

I(s)

A equ
domínio do ter
transformada
nos à tabela 1
da equação (7
tabela, temos:

$\mathcal{L}^{-1}$ [I(s)

A equ
ce, quando o
carga inicial q
s; conseqüente
já contém as c

Obser
função I(s) foi
obter a transfo

A fun
($V - q_0/C)/R$. S
origina uma te
sinal de q_0/C n

Assim, $f^{-1}(0+) = \int i \, dt \, |_{0+} = q(0+)$. A carga inicial q é positiva na placa superior do capacitor, a mesma polaridade da carga depositada pela fonte V. O sinal é, portanto, positivo. Substituindo q_0 na equação (*4*) obtemos:

$$RI(\mathrm{s}) + \frac{I(\mathrm{s})}{C\mathrm{s}} + \frac{q_0}{C\mathrm{s}} = \frac{V}{\mathrm{s}} \tag{5}$$

Reagrupando os termos e fatorando I(s), temos:

$$I(\mathrm{s})(R + \frac{1}{C\mathrm{s}}) = \frac{V}{\mathrm{s}} - \frac{q_0}{C\mathrm{s}} \tag{6}$$

$$I(\mathrm{s}) = \frac{1}{\mathrm{s}}(V - q_0/C)\frac{1}{(R + 1/\mathrm{s}C)} = \frac{V - q_0/C}{R}\frac{1}{(\mathrm{s} + 1/RC)} \tag{7}$$

A equação (*7*) no domínio s tem uma equação correspondente i no domínio do tempo. A operação pela qual **F**(s) é transformada em $f(t)$ é chamada transformada inversa de Laplace, designada por $\mathcal{L}^{-1}$ [**F**(s)] = $f(t)$. Reportando-nos à tabela 17-1, vemos que **F**(s) do par 3 é equivalente ao termo $1/(\mathrm{s} + 1/RC)$ da equação (*7*). Assim, da definição de transformada inversa de Laplace e da tabela, temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\,[I(\mathrm{s})] = i = \left(\frac{V - q_0/C}{R}\right)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s} + 1/RC}\right] = \frac{V - q_0/C}{R}\,e^{-t/RC} \tag{8}$$

A equação (*8*) é a corrente transitória no domínio do tempo que aparece, quando o interruptor é fechado, no circuito RC, cujo capacitor tem uma carga inicial q_0. As condições iniciais foram inseridas na equação (*5*) no domínio s; conseqüentemente, após tomar a transformada inversa, a equação resultante já contém as constantes.

Observe-se que, após operações algébricas nas equações (*6*) e (*7*), a função I(s) foi reduzida a uma forma encontrada na tabela, permitindo-nos obter a transformada inversa de Laplace.

A função tempo está mostrada na Fig. 17-3, com uma corrente inicial $(V - q_0/C)/R$. Se $q_0/C = V$, não há transitório, já que a carga inicial no capacitor origina uma tensão igual à tensão aplicada V. Se q_0 for de polaridade oposta, o sinal de q_0/C muda, acarretando uma corrente inicial comparativamente grande.

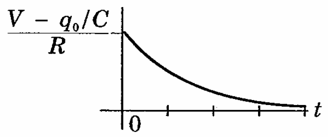


Figura 17-3

Quando o interruptor é fechado, aplica-se uma fonte de tensão constante V ao circuito RL da Fig. 17-4. Aplicação da lei de Kirchhoff, após o fechamento, resulta na seguinte equação:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V \tag{9}$$

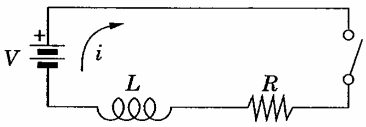


Figura 17-4

Aplicando a transformada de Laplace a cada termo, tem-se

$$\mathcal{L}[Ri] + \mathcal{L}\left[L\frac{di}{dt}\right] = \mathcal{L}[V] \tag{10}$$

$$RI(\mathrm{s}) + \mathrm{s}L\,I(\mathrm{s}) - Li(0+) = V/\mathrm{s} \tag{11}$$

A corrente inicial $i(0+)$ num circuito em série RL, cuja corrente era nula antes do fechamento do interruptor, é também nula para $t = 0+$. Fazendo $i(0+) = 0$ na equação (*11*), tem-se:

$$I(\mathrm{s})\,(R + \mathrm{s}L) + V/\mathrm{s} \tag{12}$$

$$I(\mathrm{s}) = \frac{V}{\mathrm{s}}\,\frac{1}{(R + \mathrm{s}L)} = \frac{V}{L}\left(\frac{1}{\mathrm{s}}\right)\frac{1}{(\mathrm{s} + R/L)} \tag{13}$$

A função da equação (*13*) não aparece na tabela 17-1; porém, se ela puder ser modificada para a forma $A/\mathrm{s} + B/(\mathrm{s} + R/L)$, os pares 1 e 3 podem ser usados nas duas partes e o par 16 indica que a função tempo total é a soma de duas funções tempo, isto é, $\mathcal{L}^{-1}[\mathbf{F}_1(s) + \mathbf{F}_2(s)] = f_1(t) + f_2(t)$. Para obter a soma desejada, fazemos o segundo membro de (*13*), excluída a constante V/L, igual à soma das frações, como se segue:

$$\frac{1}{s(s + R/L)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s + R/L)} = \frac{A(s + R/L) + Bs}{s(s + R/L)} \qquad (14)$$

Dos numeradores tiramos a seguinte equação em s:

$$1 = (A + B)s + AR/L \qquad (15)$$

Igualando os coeficientes dos termos da mesma potência em s, obtemos:

$$A + B = 0, \quad A = L/R, \quad B = -L/R \qquad (16)$$

Empregando as frações parciais indicadas com A e B determinados acima, a equação (*13*) fica:

$$I(s) = \frac{V}{L}\left(\frac{L/R}{s} + \frac{-L/R}{s + R/L}\right) = \frac{V}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L}\right) \qquad (17)$$

A aplicação das transformadas 1 e 3 da tabela 17-1 dá a expressão da transformada inversa da corrente. Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = i = \frac{V}{R}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + R/L}\right]\right\} \qquad (18)$$

$$i = \frac{V}{R}\,(1 - e^{(-R/L)t}) \qquad (19)$$

A equação (*19*) representa o conhecido crescimento exponencial com o valor V/R para a corrente em regime estacionário.

Métodos de Desenvolvimento

Na análise de circuitos, o desenvolvimento de quocientes na soma de várias frações é freqüentemente necessário para a obtenção da transformada inversa de Laplace, já que, geralmente, a corrente no domínio s é a relação de dois polinômios em s,

$$I(\mathrm{s}) = P(\mathrm{s})/Q(\mathrm{s}) \tag{20}$$

em que $Q(\mathrm{s})$ é de grau superior ao de $P(s)$. A equação (*14*) foi um exemplo de desenvolvimento de quociente.

Examinaremos, agora, a aplicação do método de desenvolvimento em frações parciais aos diferentes casos que ocorrem no desenvolvimento de quocientes de polinômios. Apresentaremos, também, um outro método, chamado fórmula de desenvolvimento de Heaviside. Sua aplicação conduz a um caminho diferente no cálculo da transformada inversa de Laplace de quocientes de polinômios.

1. Método de Desenvolvimento em Frações Parciais

A equação (*20*) pode ser escrita como uma soma de frações cujos denominadores sejam, cada um, um dos fatores de $Q(\mathrm{s})$ e cujos numeradores sejam constantes. Desenvolvendo o quociente $P(\mathrm{s})/Q(\mathrm{s})$ devemos considerar as raízes de $Q(\mathrm{s})$. Elas podem ser reais ou complexas, dando origem a três casos.

Caso 1 As raízes de $Q(\mathrm{s})$ são reais e desiguais.

Consideremos a seguinte expressão da corrente do domínio s:

$$I(\mathrm{s}) = \frac{P(\mathrm{s})}{Q(\mathrm{s})} = \frac{\mathrm{s} - 1}{\mathrm{s}^2 + 3\mathrm{s} + 2} \tag{21}$$

Fatorando $Q(s)$, a equação (*21*) pode ser escrita como:

$$I(\mathrm{s}) = \frac{\mathrm{s} - 1}{(\mathrm{s} + 2)(\mathrm{s} + 1)} = \frac{A}{\mathrm{s} + 2} + \frac{B}{\mathrm{s} + 1} \tag{22}$$

Para $\mathrm{s} = -2$ e $\mathrm{s} = -1$, a expressão se torna infinita e diz-se que existem *pólos simples* para esses valores de s. O coeficiente de um pólo simples $\mathrm{s} = \mathrm{s}_0$ é dado por $I(s)\,(s - s_0)\,|_{s\,=\,s_0}$. Assim, para determinar o coeficiente A, multiplicam-se ambos os membros de (*22*) por (s + 2):

$$\frac{s-1}{(s+2)(s+1)}(s+2) = A + \frac{B}{(s+1)}(s+2) \qquad (23)$$

Fazendo-se s = –2,

$$A = \left.\frac{s-1}{s+1}\right|_{s\,=\,-2} = 3$$

Do mesmo modo,

$$B = \left.\frac{s-1}{s+2}\right|_{s\,=\,-1} = -2$$

Substituindo em (*22*) a corrente do domínio s fica:

$$I(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{-2}{s+1} \qquad (24)$$

A transformada inversa de Laplace para $I(s)$ obtida da tabela 17-1 é $i = 3e^{-2t} - 2e^{-t}$.

Outro método Multiplicando ambos os membros de (*22*) por (s + 2)(s + 1):

$$s - 1 = A(s+1) + B(s+2) = (A+B)s + A + 2B$$

Igualando os coeficientes das potências iguais de s, tem-se $A + B = 1$ e $A + 2B = -1$. Assim, $A = 3$ e $B = -2$, os mesmos valores obtidos antes. Este método sempre conduz a equações simultâneas, que devem ser resolvidas para se chegar aos coeficientes procurados, ao passo que o primeiro método resulta em equações simples e independentes para cada coeficiente.

Caso 2 As raízes de $Q(s)$ são reais e iguais.

Consideremos a seguinte expressão para a corrente do domínio s:

$$I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s(s^2+6s+9)} = \frac{1}{s(s+3)^2} \qquad (25)$$

Logo,

$$\frac{1}{s(s + 3)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 3} + \frac{C}{(s + 3)^2} \qquad (26)$$

Multiplicando ambos os membros de (*26*) por s e fazendo s = 0, temos:

$$A = \left.\frac{1}{(s + 3)^2}\right|_{s = 0} = \frac{1}{9}$$

No caso de raízes repetidas, o coeficiente do termo quadrado é dado por $I(s)\,(s - s_0)^2 \,|_{s = s_0}$. Então,

$$C = \left.\frac{1}{s}\right|_{s = -3} = -\frac{1}{3}$$

Assim, o coeficiente do termo linear é dado por $\frac{d}{ds}\,[I(s)\,(s - s_0)^2] \;|\, s = s_0$

$$\text{Portanto, } B = \frac{d}{ds} = \left.\left(\frac{1}{s}\right)\right|_{s = -3} = \left.-\frac{1}{s^2}\right|_{s = -3} = -\frac{1}{9}$$

Substituindo na equação (2.6), a corrente é:

$$I(s) = \frac{\frac{1}{9}}{s} - \frac{\frac{1}{9}}{s + 3} - \frac{\frac{1}{3}}{(s + 3)^2} \qquad (27)$$

e a transformada inversa de Laplace é $i = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}e^{-3t} - \frac{1}{3}te^{-3t}$.

Outro método Multiplicando ambos os membros de (*26*) por $s(s + 3)^2$, tem-se:

$$1 = A(s + 3)^2 + Bs(s + 3) + Cs = (A + B)s^2 + (6A + 3B\ C)s + 9A$$

Igualando os coeficientes das potências iguais de s, $A + B = 0$, $6A + 3B + C = 0$ e $9A = 1$; então, $A = \frac{1}{9}$, $B = -\frac{1}{9}$ e $C = -\frac{1}{3}$, resultados já obtidos anteriormente.

Caso 3 As raízes de $Q(s)$ são complexas.

Consideremos a seguinte expressão para a corrente do domínio s:

$$I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s^2 + 4s + 5} = \frac{1}{(s + 2 + j)(s + 2 - j)} \tag{28}$$

Como $Q(s)$ tem raízes complexas conjugadas, as constantes nos numeradores das frações parciais são também complexos conjugados. Assim,

$$\frac{1}{(s + 2 + j)(s + 2 - j)} = \frac{A}{s + 2 + j} + \frac{A*}{s + 2 - j} \tag{29}$$

Multiplicando ambos os membros de (*29*) por $(s + 2 + j)$ e fazendo $s = -2 - j$, obtém-se:

$$A = \left.\frac{1}{s + 2 - j}\right|_{s\,=\,-2-j} = j\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad A* = -j\frac{1}{2}$$

Substituindo na equação (*29*), a corrente fica

$$I(s) = \frac{j\frac{1}{2}}{s + 2 + j} + \frac{-j\frac{1}{2}}{s + 2 - j} \tag{30}$$

A transformada inversa de Laplace é $i = e^{-2t}$ sen t.

Outro método Multiplicando ambos os membros de (*29*) por $(s + 2 + j)$ $(s + 2 - j)$ obtém-se:

$$1 = A(s + 2 - j) + A*(s + 2 + j)$$

Igualando os coeficientes das potências iguais de s, $A + A* = 0$ e $A(2 - j) + A*(2 + j) = 1$, então

2. Fórmula de Desenvolvimento de Heaviside

A fórmula de Heaviside estabelece que a transformada inversa de Laplace do quociente $I(s) = P(s)/Q(s)$ é dada por:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}\, e^{a_k t} \tag{31}$$

onde a_k são as n raízes distintas de $Q(s)$.

Aplicando a fórmula de Heaviside à expressão da corrente do domínio s, dada no caso 1, temos:

$$I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s - 1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s - 1}{(s + 2)(s + 1)} \tag{32}$$

Para $P(s) = s - 1$, $Q(s) = s^2 + 3s + 2$ e $Q'(s) = 2s + 3$. As raízes são $a_1 = -2$ e $a_2 = -1$. De (*31*) temos, então,

$$i = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = \frac{P(-2)}{Q'(-2)} e^{-2t} + \frac{P(-1)}{Q'(-1)} e^{-t} =$$

$$= \frac{-3}{-1} e^{-2t} + \frac{-2}{1} e^{-t} = 3e^{-2t} - 2\,e^{-t}$$

Teorema do Valor Inicial

Do exemplo 4,

$$\mathcal{L}\,[df/dt] = \int_0^\infty (df/dt)\, e^{-st}\, dt = s\mathbf{F}(s) - f(0+) \tag{33}$$

Em (*33*), tomando o limite para $s \to \infty$, tem-se

$$\lim_{s \to \infty} \int_0^\infty (df/dt)\, e^{-st}\, dt = \lim_{s \to \infty} \{s\, \boldsymbol{F}(s) - f(0+)\} \tag{34}$$

O integrando contém e^{-st}, que tende para zero quando $s \to \infty$. Então,

$$\lim_{s \to \infty} \{s\, \boldsymbol{F}(s) - f(0+)\} = 0 \tag{35}$$

Como $f(0+)$ é uma constante, pode-se escrever (*35*) como

$$f(0+) = \lim_{s \to \infty} \{ s\, \mathbf{F}(s) \} \tag{36}$$

A equação (*36*) exprime o teorema do valor inicial. Podemos achar o valor inicial de uma função do tempo $f(t)$ multiplicando a função correspondente do domínio s, $\mathbf{F}(s)$, por s e tomando o limite, quando $s \to \infty$.

Exemplo 6 No circuito RC da Fig. 17-2, a corrente do domínio s é $I(\mathrm{s}) = \dfrac{V - q_0/C}{R}\left(\dfrac{1}{(\mathrm{s} + 1/RC)}\right)$. Ver equação (*7*). Determinar a corrente inicial $i(0+)$ empregando o teorema do valor inicial. Da equação (*36*),

$$i(0+) = \lim_{\mathrm{s} \to \infty} \left\{\frac{V - q_0/C}{R}\left(\frac{\mathrm{s}}{(\mathrm{s} + 1/\mathrm{RC})}\right)\right\} = \frac{V - q_0/C}{R}$$

Este resultado foi mostrado na Fig. 17-3.

Teorema do Valor Final

Do exemplo 4,

$$\mathcal{L}\,[df/dt] = \int_0^\infty (df/dt)\, e^{-st}\, dt = \mathrm{s}\mathbf{F}(\mathrm{s}) - f(0+) \qquad (37)$$

Tomando o limite de (*37*) para $\mathrm{s} \to 0$, tem-se:

$$\lim_{\mathrm{s} \to 0} \int_0^\infty (df/dt)\, e^{-st}\, dt = \lim_{\mathrm{s} \to 0} \left\{ \mathrm{s}\, \boldsymbol{F}(\mathrm{s}) - f(0+) \right\} \qquad (38)$$

Como

$$\lim_{\mathrm{s} \to 0} \int_0^\infty (df/dt)\, e^{-st}\, dt = \int_0^\infty df = f(\infty) - f(0) \text{ e } \lim_{\mathrm{s} \to 0} f(0+) = f(0+),$$

a equação (*38*) fica $f(\infty) - f(0) = -f(0+) + \lim_{\mathrm{s} \to 0} \left\{ \mathrm{s}\, \boldsymbol{F}(\mathrm{s}) \right\}$ (*39*)

ou $f(\infty) = \lim_{\mathrm{s} \to 0} \left\{ \mathrm{s}\, \boldsymbol{F}(\mathrm{s}) \right\}$ (*40*)

A equação (*40*) exprime o teorema do valor final. Por analogia com a aplicação do teorema do valor inicial, pode-se encontrar o valor final de uma função do tempo, $f(t)$, multiplicando por s a função correspondente do domínio s, $f(\mathrm{s})$, e tomando o limite, quando $\mathrm{s} \to 0$. A equação (*40*), entretanto, só pode ser aplicada quando todas as raízes do denominador de s $\mathbf{F}(\mathrm{s})$ tiverem as partes reais negativas. Esta restrição exclui as funções senoidais, mas como estas são indeterminadas no infinito (periódicas) o teorema anterior não pode ser aplicado às mesmas.

Exemplo 7 No circuito RL da Fig. 17-4 a corrente do domínio s, $I(s) = \frac{V}{R}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L}\right\}$ [ver equação (*17*)]. Determinar o valor da corrente, em regime estacionário.

Da equação (*40*),

$$i(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{V}{R}\left\{\frac{s}{s} - \frac{s}{s + R/L}\right\} = V/R$$

Circuitos do Domínio S

A equação para o circuito em série RLC, mostrada na Fig. 17-5, é

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = v \qquad (41)$$

Esta equação foi resolvida no Capítulo 16, empregando-se os métodos clássicos.

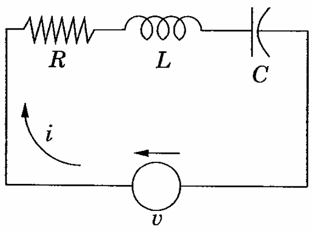


Figura 17-5

No regime estacionário senoidal, os três elementos de circuito, R, L e C, têm impedâncias complexas que, em função de ω, são respectivamente R, $j\omega L$ e $1/j\omega C$. A equação do circuito passa, então, do domínio do tempo para o da freqüência e, com tal transformação, as tensões e as correntes se tornam fasores. Assim, a equação do circuito série RLC mostrado na Fig. 17-6 é:

$$R\mathbf{I} + j\omega L\mathbf{I} + (1/j\omega C)\mathbf{I} = \mathbf{V} \qquad (42)$$

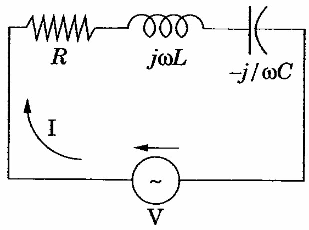


Figura 17-6

A vantagem obtida com a transformação reside no fato de que a equação transformada pode ser tratada algebricamente para a determinação do fasor **I**. As diversas quedas de tensão são simples produtos do fasor corrente pela impedância do respectivo elemento de circuito.

O método da transformada de Laplace resulta na transformação da queda de tensão Ri, do domínio do tempo, em $RI(\mathrm{s})$, do domínio s. Do mesmo modo, a tensão na indutância, $L(di/dt)$, torna-se $\mathrm{s}LI(\mathrm{s}) - Li(0+)$ e a queda de tensão no capacitor, $1/C \int idt$, torna-se $\dfrac{1}{\mathrm{s}\,C}\, I(\mathrm{s}) + \dfrac{q_0}{\mathrm{s}\,C}$. Assim, a equação do circuito da Fig. 17-7 fica:

$$RI(\mathrm{s}) + \mathrm{s}LI(\mathrm{s}) - Li(0+) + \frac{1}{\mathrm{s}C} I(\mathrm{s}) + \frac{q_0}{\mathrm{s}C} = V(\mathrm{s}) \qquad (43)$$

$$I(\mathrm{s})\left\{R + \mathrm{s}L + 1/\mathrm{s}C\right\} = V(\mathrm{s}) - q_0/\mathrm{s}C + Li(0+) \qquad (44)$$

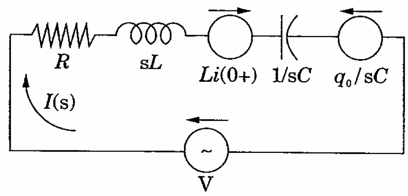


Figura 17-7

Na equação *(44)*, $R + \mathrm{s}L + 1/\mathrm{s}C$ é a impedância $Z(\mathrm{s})$ do domínio s, relação entre a excitação e a resposta. $Z(\mathrm{s})$ tem a mesma forma da impedância complexa de regime estacionário senoidal, $R + j\omega L + 1/j\omega C$. Tanto as equações do método de análise pela corrente de malha como as do método das tensões nos nós podem ser aplicadas com facilidade aos circuitos no domínio s, desde que se observem convenientemente os sinais a empregar nos termos das condições iniciais, $Li(0+)$ e q_0/sC.

Consideremos o circuito da Fig. 17-8(*a*), onde existe uma corrente inicial i_0, com o interruptor na posição 1. Quando $t = 0$, o interruptor é levado para a posição 2, introduzindo-se no circuito uma fonte constante V e um capacitor com uma carga inicial q_0. O sentido positivo da corrente i foi arbitrado como indica o diagrama.

Na Fig. 17-8(*b*), a fonte constante foi transformada em V/s e a corrente resultante é $I(s)$. Os termos da condição inicial são, agora, fontes com os sentidos indicados, e a equação correspondente seria idêntica à equação (*44*). Para uma corrente inicial i_0 de sentido oposto ou uma carga inicial q_0 de sinal contrário, os sinais dos termos $Li(0+)$ e q_0/sC mudariam também.

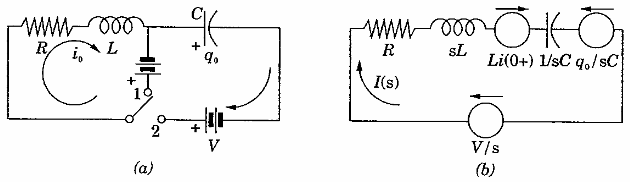


Figura 17-8

Os exemplos que se seguem mostram a semelhança entre as equações do domínio s e as equações dos fasores, examinadas anteriormente, em outro capítulo. Todos os teoremas sobre estruturas, desenvolvidos e aplicados no regime estacionário senoidal, têm seus correspondentes no domínio s.

Exemplo 8 O diagrama da estrutura de duas malhas da Fig. 17-9 mostra as correntes de malha do domínio s, escolhidos arbitrariamente. Fechando-se o interruptor quando $t = 0$, determinar as equações de I_1 (s) e I_2(s).

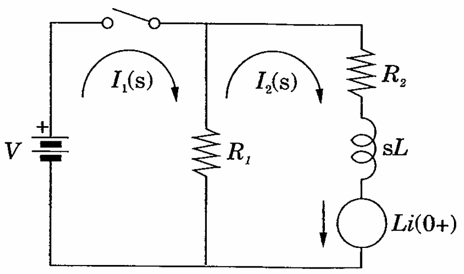


Figura 17-9

Ao fechar-se o interruptor, a fonte V/s é aplicada à estrutura e as duas equações de malha são:

$$R_1 I_1(s) - R_1 I_2(s) = V/s$$

e $(R_1 + R_2 + sL)I_2(s) - R_1 I_1(s) = Li(0+)$

Como a corrente inicial na indutância é nula, as equações, sob a forma matricial, são:

$$\begin{bmatrix} R_1 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + sL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V/s \\ 0 \end{bmatrix}$$

As equações independentes de I_1(s) e I_2(s) são obtidas por substituição ou pelo determinante, tendo-se:

$$I_1(s) = \frac{V}{s}\left[\frac{R_1 + R_2 + sL}{R_1\,(R_2 + sL)}\right] \quad \text{e} \quad I_2(s) = \frac{V}{s}\,\frac{1}{(R_2 + sL)}$$

Exemplo 9 Escrever a equação do domínio s para as tensões de nó, na estrutura da Fig. 17-10.

O nó e a referência foram escolhidos como mostra a figura. Quando o interruptor é fechado, a equação do nó é

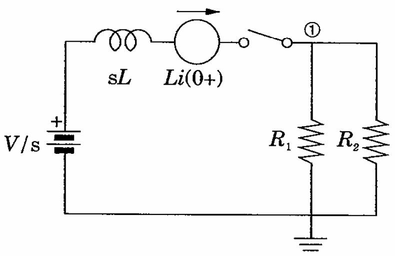


Figura 17-10

$$\frac{V_1(s) - V/s - Li(0+)}{sL}$$

$$\text{ou} \; + \frac{V_1(s)}{R_1} + \frac{V_1(s)}{R_2} = 0$$

$$\text{ou} \; (1/sL + 1/R_1 + 1/R_2)V_1(s) = \frac{V/s + Li(0+)}{sL}$$

A corrente inicial na indutância é nula; logo, a equação da tensão de nó $V_1(s)$ é

$$V_1(s) = \frac{V}{s}\left(\frac{R_1R_2}{R_1R_2 + sLR_2 + sLR_1}\right)$$

Exemplo 10 Escrever as equações do domínio s das correntes de malha da estrutura apresentada na Fig. 17-11. Supor que o capacitor tem uma carga inicial q_0, no instante em que o interruptor é fechado.

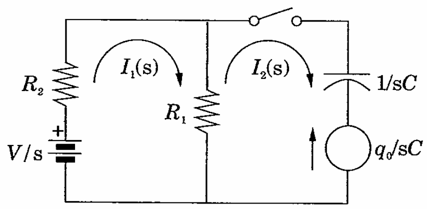


Figura 17-11

O diagrama apresenta os sentidos que foram arbitrados para as correntes de malha. Aplicando a lei de Kirchhoff a ambas as malhas, temos:

$$(R_1 + R_2)I_1(\mathrm{s}) - R_1 I_2(\mathrm{s}) = V/\mathrm{s}$$

$$(R_1 + 1/\mathrm{s}C)I_2(\mathrm{s}) - R_1 I_1(\mathrm{s}) = -q_0/\mathrm{s}C$$

Escrevendo-as na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + 1/\mathrm{s}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(\mathrm{s}) \\ I_2(\mathrm{s}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V/\mathrm{s} \\ -q_0/\mathrm{s}C \end{bmatrix}$$

Problemas Resolvidos

17.1 Determinar a transformada de Laplace de $e^{-at}\cos \omega t$, onde a é uma constante.

Aplicando a equação de definição $\mathcal{L}\,[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ à equação dada, tem-se:

$$\mathcal{L}\,[e^{-at}\cos \omega t] = \int_0^\infty \cos \omega t\; e^{-(\mathrm{s}+a)t}\,dt$$

$$= \left[\frac{-(\mathrm{s}+a)\cos \omega t\; e^{-(\mathrm{s}+a)t} + e^{-(\mathrm{s}+a)t}\,\omega t \text{ sen } \omega}{(\mathrm{s}+a)^2 + \omega^2}\right]_0^\infty$$

$$\frac{\mathrm{s}+a}{(\mathrm{s}+a)^2 + \omega^2}$$

17.2 Se $\mathcal{L}\,[f(t)] = \mathbf{F}(\mathrm{s})$, mostrar que $\mathcal{L}\,[e^{-at}f(t)] = \mathbf{F}(\mathrm{s}+a)$. Aplicar o resultado ao Probl. 17.1.

Por definição, $\mathcal{L}\,[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt = \mathbf{F}(\mathrm{s})$. Logo,

$$\mathcal{L}\,[e^{-at}f(t)] = \int_0^\infty e^{-at}\,[f(t)\,e^{-st}]\,at = \int_0^\infty f(t)\,e^{-(\mathrm{s}+a)t}\,dt = \mathbf{F}(\mathrm{s}+a) \qquad (1)$$

Como $\mathcal{L}[\cos \omega t] = \dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$ (ver tabela 17-1), segue-se de (*1*) que

$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \dfrac{s + a}{(s + a)^2 + \omega}$, conforme foi determinado no Probl. 17.1.

17.3 Obter a transformada de Laplace de $f(t) = 1 - e^{-at}$, onde a é uma constante.

Temos

$$\mathcal{L}[1 - e^{-at}] = \int_0^\infty (1 - e^{-at})\, e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{-st}\, dt - \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\, dt$$

$$= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} + \frac{1}{s + a} e^{-(s+a)t} \right]_\infty^0 = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + a} = \frac{a}{s(s + a)}$$

17.4 Determinar $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2 - a^2)}\right]$.

Empregando o método das frações parciais, temos:

$$\frac{1}{s(s^2 - a^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + a} + \frac{C}{s - a}$$

e os coeficientes são:

$$A = \left.\frac{1}{s^2 - a^2}\right|_{s=0} = -\frac{1}{a^2} \qquad B = \left.\frac{1}{s(s - a)}\right|_{s=-a} = \frac{1}{2a^2}$$

$$C = \left.\frac{1}{s(s + a)}\right|_{s=a} = \frac{1}{2a^2}$$

Assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 - a^2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1/a^2}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1/2a^2}{s + a}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/2a^2}{s - a}\right]$$

As funções do tempo correspondentes são encontradas na tabela 17-1:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 - a^2)}\right] = -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} e^{-at} + \frac{1}{2a^2} e^{at}$$

$$= -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2}\left(\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right) = \frac{1}{a^2}(\cos h\ at - 1)$$

17.5 Determinar $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s + 1}{s(s^2 + 4s + 4)}\right]$.

Empregando o método das frações parciais, temos:

$$\frac{s + 1}{s(s + 2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 2} + \frac{C}{(s + 2)^2}$$

Logo, $A = \left.\dfrac{s + 1}{(s + 2)^2}\right|_{s=0} = \dfrac{1}{4}$ e $C = \left.\dfrac{s + 1}{s}\right|_{s=-2} = \dfrac{1}{2}$

O coeficiente do termo quadrado é:

$$B = \left.\frac{d}{ds}\left[\frac{s + 1}{s}\right]\right|_{s=-2} = \left.-\frac{1}{s^2}\right|_{s=-2} = -\frac{1}{4}$$

Assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + 1}{s(s^2 + 4s + 4)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{4}}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{4}}{s + 2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}}{(s + 2)^2}\right]$$

As funções do tempo correspondentes são encontradas na tabela 17-1. Assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + 1}{s(s^2 + 4s + 4)}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t}$$

17.6 A carga inicial do capacitor do circuito *RC* em série da Fig. 17-12 é $q_0 = 2500 \times 10^{-6}$ coulombs. Quando $t = 0$, fecha-se o interruptor, aplicando-se ao circuito uma fonte de tensão constante $V = 100$ volts. Empregar o método da transformada de Laplace e determinar a corrente.

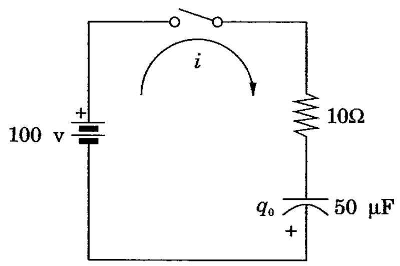


Figura 17-12

Depois do fechamento do circuito, a equação do domínio do tempo é:

$$Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = V$$

ou

$$10i + \frac{1}{50 \times 10^{-6}}\int i\ dt = 100 \qquad (1)$$

Tomando a transformada de Laplace dos termos de (*1*), obtém-se a equação do domínio s

$$10I(\mathrm{s}) + \frac{I(\mathrm{s})}{50 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}} + \frac{q_0}{50 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}} = \frac{100}{\mathrm{s}} \qquad (2)$$

A polaridade de q_0, mostrada no diagrama, é oposta à da carga que a fonte deposita no capacitor; assim, a equação do domínio s é:

$$10I(\mathrm{s}) + \frac{I(\mathrm{s})}{50 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}} - \frac{2500 \times 10^{-6}}{50 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}} = \frac{100}{\mathrm{s}} \qquad (3)$$

$$\text{Reagrupando, } I(\mathrm{s})\left\{\frac{10\mathrm{s} + 2 \times 10^4}{\mathrm{s}}\right\} = \frac{150}{\mathrm{s}} \qquad (4)$$

ou

$$I(\mathrm{s}) = \frac{15}{\mathrm{s} + 2 \times 10^3} \qquad (5)$$

Obtém-se a função do tempo tomando a transformada inversa de Laplace de (*5*)

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = i = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{15}{s + 2 \times 10^3}\right] = 15e^{-2\times 10^3 t}$$

Se a carga inicial q_0 for positiva na placa superior do capacitor, é positivo o sinal de q_0/sC na equação (*3*). O segundo membro da equação (*4*) fica igual a 50/s, acarretando uma corrente transitória $i = 5\,e^{-2} \times 10^{3t}$.

17.7 O interruptor do circuito *RL* da Fig. 17-13 é mantido na posição 1 durante tempo bastante para que se estabeleçam condições de regime estacionário e, quando $t = 0$, é deslocado para a posição 2. Determinar a corrente resultante.

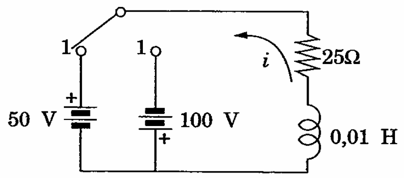


Figura 17-13

Admitindo para a corrente o sentido indicado no diagrama, a corrente inicial é $i_0 = -50/25 = -2$ A.

A equação do domínio do tempo é

$$25i + 0{,}01\,(di/dt) = 100 \qquad (1)$$

Tomando a transformada de Laplace,

$$25I(s) + 0{,}01s\,I(s) - 0{,}01\,i(0+) = 100/s \qquad (2)$$

Substituindo $i(0+)$,

$$25I(s) + 0{,}01s\,I(s) + 0{,}01\,(2) = 100/s \qquad (3)$$

$$\text{e } I(s) = \frac{100}{s(0{,}01s + 25)} - \frac{0{,}02}{0{,}01s + 25} = \frac{10^4}{s(s + 2500)} - \frac{2}{s^2 + 2500} \qquad (4)$$

Desenvolvendo $\frac{10}{(s + 2500)}$ na equação (*4*) pelo método das frações parciais, temos:

$$\frac{10^4}{s(s + 2500)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 2500} \qquad (5)$$

$$\text{Então, } A = \frac{10^4}{s + 2500}\bigg|_{s=0} = 4 \quad \text{e} \quad B = \frac{10^4}{s}\bigg|_{s=-2500} = -4$$

Substituindo na equação (*4*),

$$I(s) = \frac{4}{s} - \frac{4}{s + 2500} - \frac{2}{s + 2500} = \frac{4}{s} - \frac{6}{s + 2500} \qquad (6)$$

Tomando a transformada inversa de Laplace da equação (*6*), temos $i = 4 - 6e^{-2500t}$.

17.8 Uma tensão exponencial $v = 50e^{-1000k}$ é aplicada ao circuito *RL* da Fig. 17-14, ao se fechar o interruptor, no instante $t = 0$. Determinar a corrente resultante.

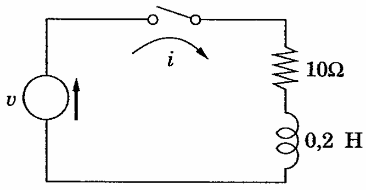


Figura 17-14

A equação do domínio do tempo para o circuito dado é:

$$Ri + L\,(di/dt) = v \qquad (1)$$

que no domínio s tem a forma

$$R\,I(s) + sL\,I(s) - Li(0+) = V(s) \qquad (2)$$

Substituindo as constantes de circuito e a transformada da fonte $V(s) = 50/(s + 100)$ em (*2*),

$$10I(s) + s(0{,}2)I(s) = \frac{50}{s + 100} \quad \text{ou} \quad I(s) = \frac{250}{(s + 100)(s + 50)} \qquad (3)$$

Pela fórmula de desenvolvimento de Heaviside,

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = \sum_{n=1,2} \frac{P(a_n)}{Q'(a_n)}\, e^{a_n t}, \text{ onde}$$

$P(s) = 250$, $Q(s) = s^2 + 150s + 5000$, $Q'(s) = 2s + 150$, $a_1 = -100$ e $a_2 = -50$.

$$\text{Então, } i = \mathcal{L}^{-1}[I(\text{s})] = \frac{250}{-50}\,e^{-100t} + \frac{250}{50}\,e^{-50t} = -5\,e^{-100t} + 5\,e^{-50t}$$

17.9 O circuito *RC* em série da Fig 17-15 tem uma fonte de tensão senoidal $v = 180$ sen $(2000t + \phi)$ e uma carga inicial $q_0 = 1250 \times 10^{-6}$ coulombs, no capacitor, com a polaridade indicada. Determinar a corrente supondo que o interruptor é fechado quando $\phi = 90^\circ$.

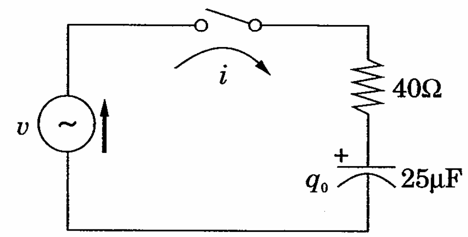


Figura 17-15

$$40i + \frac{1}{25 \times 10^{-6}} \int i\,dt = 180 \text{ sen } (2000t + 90^\circ) \qquad (1)$$

A transformada de Laplace da equação (*1*) resulta na equação do domínio s

$$40I(\text{s}) + \frac{1}{25 \times 10^{-6}\,\text{s}}\,I(\text{s}) + \frac{q_0}{25 \times 10^{-6}\,\text{s}} = 180\left\{\frac{\text{s sen } 90^\circ + 2000 \cos 90^\circ}{\text{s}^2 + 4 \times 10^6}\right\} \qquad (2)$$

Substituindo em (*2*) o valor da carga q_0, temos:

$$40I(\text{s}) + \frac{4 \times 10^4}{\text{s}}\,I(\text{s}) + \frac{1250 \times 10^{-6}}{25 \times 10^{-6}\,\text{s}} = \frac{180\,\text{s}}{\text{s}^2 + 4 \times 10^6}$$

ou

$$I(\text{s}) = \frac{4{,}5\,\text{s}^2}{(\text{s}^2 + 4 \times 10^6)(\text{s} + 10^3)} - \frac{1{,}25}{\text{s} + 10^3} \qquad (3)$$

Aplicando a fórmula de desenvolvimento de Heaviside ao termo

$$\frac{4{,}5\,\text{s}^2}{(\text{s}^2 + 4 \times 10^6)(\text{s} + 10^3)}:$$

$P(\text{s}) = 4{,}5\,\text{s}^2$, $Q(\text{s}) = \text{s}^3 + 10^3\text{s}^2 + 4 \times 10^6\,\text{s} + 4 \times 10^9$,

$$Q'(s) = 3\,s^2 + 2 \times 10^3\,s + 4 \times 10^6,$$

$$a_1 = -j\,2 \times 10^3,\; a_2 = j\,2 \times 10^3 \text{ e } a_3 = -10^3.$$

$$i = \frac{P(-j2 \times 10^3)}{Q'(-j2 \times 10^3)}\,e^{-j2\times 10^3 t} + \frac{P(j2 \times 10^3)}{Q'(j2 \times 10^3)}\,e^{j2 \times 10^3 t} +$$

$$+ \frac{P(-10^3)}{Q'(-10^3)}\,e^{-10^3 t} - 1{,}25\,e^{-10^3 t}$$

$$= (1{,}8 - j0{,}9)\,e^{-j2\times 10^3 t} + (1{,}8 + j0{,}9)\,e^{-j2\times 10^3 t} - 0{,}35\,e^{-10^3 t}$$

$$= -1{,}8 \text{ sen } 2000t + 3{,}6 \cos 2000t - 0{,}35e^{-10^3 t} \qquad (4)$$

$$= 4{,}02 \text{ sen } (2000t + 116{,}6°) - 0{,}35\,e^{-10^3 t}$$

Quando $t = 0$, a corrente é obtida pela tensão instantânea, constituída pela fonte de tensão e o capacitor carregado, dividida pela resistência. Assim,

$$i_0 = \left(180 \text{ sen } 90° - \frac{1250 \times 10^{-6}}{25 \times 10^{-6}}\right) \Big/ \; 40 = 3{,}25 \text{ ampères.}$$

O mesmo resultado é obtido quando se faz $t = 0$ na equação (*4*).

17.10 A fonte de tensão senoidal do circuito *RL* em série da Fig. 17-16 é dada por $v = 100$ sen $(500t + \phi)$. Determinar a corrente resultante supondo o interruptor fechado quando $\phi = 0$.

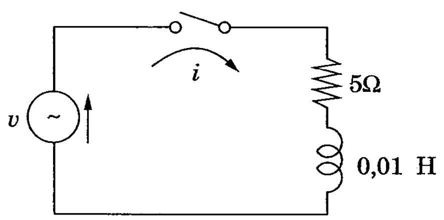


Figura 17-16

A equação geral do domínio s de um circuito RL em série é:

$$RI(\mathrm{s}) + \mathrm{s}LI(\mathrm{s}) - Li(0+) = V(\mathrm{s}) \qquad (1)$$

A transformada da fonte quando $\phi = 0$ é $V(\mathrm{s}) = \dfrac{500(100)}{\mathrm{s}^2 + (500)^2}$. Como não há corrente inicial na indutância, $Li(0+) = 0$. Substituindo na equação (*1*) as constantes do circuito, temos:

$$5\,I(\mathrm{s}) + 0{,}01\mathrm{s}\,I(\mathrm{s}) = \frac{5 \times 10}{\mathrm{s}^2 + 25 \times 10} \quad \text{e} \quad I(\mathrm{s}) = \frac{5 \times 10}{(\mathrm{s}^2 + 25 \times 10)\,(\mathrm{s} + 500)} \qquad (2)$$

Desenvolvendo (*2*) pelas frações parciais,

$$I(\mathrm{s}) = 5\left(\frac{-1 + j}{\mathrm{s} + j500}\right) + 5\left(\frac{-1 - j}{\mathrm{s} - j500}\right) + \frac{10}{\mathrm{s} + 500} \qquad (3)$$

A transformada inversa de (*3*) é

$$i = 10 \text{ sen } 500t - 10 \cos 500t + 10e^{-500t} =$$

$$= 10e^{-500t} + 14{,}14 \text{ sen } (500t - \pi/4)$$

17.11 Escrevendo-se a função tensão do Probl. 17.10 como

$$v = 100e^{j500t} \qquad (1)$$

introduz-se um termo co-senoidal na fonte de tensão. Determinar a corrente do circuito do Probl. 17.10, empregando a equação (*1*).

Para $v = 100e^{j500t}$, $V(\mathrm{s}) = 100/(\mathrm{s} - 500)$ e a equação do domínio s é

$$5\,I(\mathrm{s}) + 0{,}01s\,I(\mathrm{s}) = 100/(\mathrm{s} - j500) \text{ e } I(\mathrm{s}) = 10^4/(\mathrm{s} - j500)\,(\mathrm{s} + 500) \qquad (2)$$

Empregando frações parciais: $I(\mathrm{s}) = \dfrac{10 - j10}{\mathrm{s} - j500} + \dfrac{-10 + j10}{\mathrm{s} + 500}$ (*3*)

Tomando a transformada inversa de Laplace de (*3*), a correspondente função do tempo da corrente é:

$$i = (10 - j10)\,e^{j500t} + (-10 + j10)\,e^{-500t}$$

$$= 14{,}14\,e^{j(500t - \pi/4)} + (-10 + j10)\,e^{-500t}$$

$$= 14{,}14\,\{\cos(500t - \pi/4) + j \text{ sen } (500t - \pi/4)\} + (-10 + j10)\,e^{-500t} \qquad (4)$$

Como a fonte de tensão do Probl. 17.10 só continha a parte imaginária de (*1*), a corrente resultante é a parte imaginária da equação (*4*),

$$i = 14{,}14 \text{ sen } (500t - \pi/4) + 10e^{-500t}$$

17.12 Não há carga inicial no capacitor do circuito *RLC* em série da Fig. 17-7. Determinar a corrente resultante, admitindo que o interruptor é fechado quando $t = 0$.

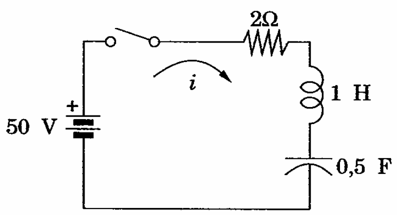


Figura 17-17

A equação do domínio do tempo para o circuito dado é:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = V \qquad (1)$$

A transformada de Laplace dos termos de (*1*) resulta na equação do domínio s

$$R\,I(\text{s}) + \text{s}L\,I(\text{s}) - Li(0+) + \frac{1}{\text{s}C}I(\text{s}) + \frac{q_0}{\text{s}C} = \frac{V}{\text{s}} \qquad (2)$$

Das condições limites iniciais, $Li(0+) = 0$ e $q_0/\text{s}C = 0$. Substituindo em (*2*) as constantes do circuito, temos:

$$2\,I(\text{s}) + 1\text{s}\;I(\text{s}) + \frac{1}{0{,}5\text{s}}I(\text{s}) = \frac{50}{\text{s}} \qquad (3)$$

ou

$$I(\text{s}) = \frac{50}{\text{s}^2 + 2\text{s} + 2} = \frac{50}{(\text{s} + 1 + j)(\text{s} + 1 - j)} \qquad (4)$$

Desenvolvendo (*4*) em frações parciais,

$$I(\text{s}) = \frac{j25}{(\text{s} + 1 + j)} - \frac{j25}{(\text{s} + 1 - j)} \qquad (5)$$

e a transformada inversa de Laplace da equação (*5*) resulta na equação do domínio do tempo para a corrente

$$i = j25\left\{e^{(-1-j)t} - e^{(-1+j)t}\right\} = 50\,e^{-t}\ \text{sen}\ t$$

17.13 As duas correntes de malha da estrutura da Fig. 17-18 foram escolhidas conforme está indicado. Escrever as equações do domínio s sob a forma matricial e representar o circuito correspondente.

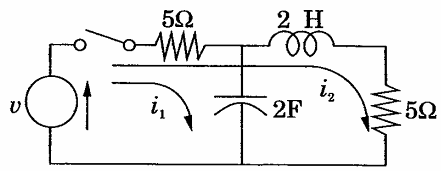


Figura 17-18

O par de equações no domínio do tempo é:

$$5i_1 + \frac{1}{2}\int i_1\,dt + 5i_2 = v \quad \text{e} \quad 10i_2 + 2(di_2/dt) + 5i_1 = v \qquad (1)$$

Tomando a transformada de Laplace de (*1*) para obter as equações correspondentes no domínio s, temos:

$$5\,I_1(\text{s}) + \frac{1}{2\text{s}}\,I_1(\text{s}) + \frac{q_0}{2\text{s}} + 5\,I_2(\text{s}) = V(\text{s})$$

$$10\,I_2(\text{s}) + 2\text{s}\,I_2(\text{s}) - 2\,i_2(0+) + 5\,I_1(\text{s}) = V(\text{s}) \qquad (2)$$

Quando este par de equações é escrito sob a forma matricial, o circuito procurado do domínio s pode ser determinado pelo exame das matrizes de $Z(\text{s})$, $I(\text{s})$ e $V(\text{s})$ (ver Fig. 17-19).

$$\begin{bmatrix} 5 + 1/2\text{s} & 5 \\ 5 & 10 + 2\text{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(\text{s}) \\ I_2(\text{s}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(\text{s}) - q_0/2\text{s} \\ V(\text{s}) + 2i_2(0+) \end{bmatrix}$$

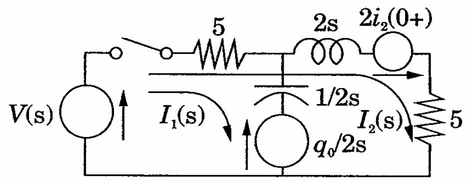


Figura 17-19

17.14 Determinar as correntes nas duas malhas da estrutura da Fig. 17-20, ao fechar-se o interruptor.

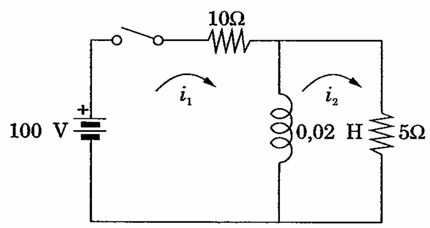


Figura 17-20

As equações no domínio do tempo são

$$10i_1 + 0{,}02\frac{di_1}{dt} - 0{,}02\frac{di_2}{dt} = 100 \qquad (1)$$

$$0{,}02\frac{di_2}{dt} + 5i_2 - 0{,}02\frac{di_1}{dt} = 0$$

Tomando a transformada de Laplace, temos:

$$(10 + 0{,}02s)I_1(s) - 0{,}02s\,I_2(s) = 100/s \qquad (2a)$$

$$(5 + 0{,}02s)I_2(s) - 0{,}02sI_1(s) = 0 \qquad (2b)$$

Da equação (*2b*) temos:

$$I_2(s) = I_1(s)\left(\frac{s}{s + 250}\right) \qquad (3)$$

que, substituída na equação (*2a*) nos dá:

$$(10 + 0{,}02s)\,I_1(s) - 0{,}02s\left\{I_1(s)\left(\frac{s}{s + 250}\right)\right\} = \frac{100}{s} \tag{4}$$

ou

$$I_1(s) = 6{,}67\left\{\frac{s + 250}{s(s + 166{,}7)}\right\} \tag{5}$$

Aplicando a (*5*) o método das frações parciais obtém-se:

$$I_1(s) = \frac{10}{s} - \frac{3{,}33}{s + 166{,}7} \quad \text{e} \quad i_1 = 10 - 3{,}33\,e^{-166{,}7t} \tag{6}$$

Finalmente, substituindo (*5*) em (*3*) obtém-se a equação do domínio s:

$$I_2(s) = 6{,}67\left\{\frac{s + 250}{s(s + 166{,}7)}\right\}\frac{s}{s + 250} = 6{,}67\left(\frac{1}{s + 166{,}7}\right) \quad \text{e} \quad i_2 = 6{,}67e^{-166{,}7t} \tag{7}$$

17.15 Aplicar os teoremas do valor inicial e do valor final às equações de $I_1(s)$ e $I_2(s)$, do domínio s, no Probl. 17.14.

As duas equações do domínio s no Probl. 17.14 são:

$$I_1(s) = 6{,}67\left\{\frac{s + 250}{s(s + 166{,}7)}\right\} \quad \text{e} \quad I_2(s) = 6{,}67\left(\frac{1}{s + 166{,}7}\right)$$

O valor inicial de i_1 é dado por

$$i_1(0) = \lim_{s \to \infty} [s\ I_1(s)] = \lim_{s \to \infty}\left[6{,}67\left(\frac{s + 250}{s + 166{,}7}\right)\right] = 6{,}67\ \text{A}$$

e o valor final

$$i_1(\infty) = \lim_{s \to \infty} [s\ I_1(s)] = \lim_{s \to \infty}\left[6{,}67\left(\frac{s + 250}{s + 166{,}7}\right)\right]\ 6{,}67(250/166{,}7) = 10\ \text{A}$$

O valor inicial de i_2 é dado por

$$i_2(0) = \lim_{s \to \infty} [s\ I_2(s)] = \lim_{s \to \infty}\left[6{,}67\left(\frac{s}{s + 166{,}7}\right)\right] = 6{,}67\ \text{A}$$

e o valor final

$$i_2(\infty) = \lim_{s \to \infty} [s\, I_2(s)] = \lim_{s \to \infty} \left[6{,}67 \left(\frac{s}{s + 166{,}7} \right) \right] = 0$$

Um exame do circuito da Fig. 17-20 verifica cada um desses valores iniciais e finais. No instante do fechamento, a indutância apresenta uma impedância infinita e a corrente $i_1 = i_2 = 100/(10 + 5) = 6{,}67$ A. Já em regime estacionário, a indutância aparece como um curto-circuito; então $i_1 = 10$ A e $i_2 = 0$.

17.16 Determinar a impedância equivalente à estrutura da Fig. 17-20 e representar o circuito, utilizando essa impedância.

No domínio s, a indutância de 0,02 H tem uma impedância $Z(s) = 0{,}02s$, que pode ser tratada da mesma forma que $j\omega L$ em regime estacionário senoidal. Portanto, a impedância equivalente da estrutura, vista da fonte, é:

$$Z(s) = 10 + \frac{0{,}02s(5)}{0{,}02s + 5} = \frac{0{,}3s + 50}{0{,}02s + 5} = 15 \left(\frac{s + 166{,}7}{s + 250} \right) \qquad (1)$$

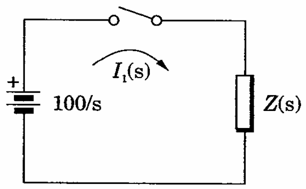


Figura 17-21

A Fig. 17-21 mostra o circuito com a impedância equivalente. A corrente é

$$I_1(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{100}{s} \left\{ \frac{s + 250}{15(s + 166{,}7)} \right\} = 6{,}67 \left\{ \frac{s + 250}{s(s + 166{,}7)} \right\} \qquad (2)$$

Esta expressão é idêntica à equação (5) do Probl. 17.14. Portanto, a função do tempo é $i_1 = 10 - 3{,}33e^{-166{,}7t}$.

17.17 Não há carga inicial no capacitor da estrutura de duas malhas da Fig. 17-22. Determinar as correntes de malha i_1 e i_2 que resultam no fechamento do circuito, no instante $t = 0$.

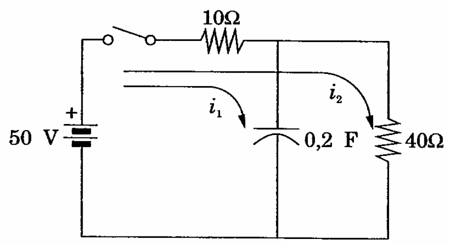


Figura 17-22

As equações do domínio do tempo são

$$10i_1 + \frac{1}{0{,}2}\int i_1\,dt + 10i_2 = 50 \quad \text{e} \quad 50i_2 + 10i_1 = 50 \qquad (1)$$

e as correspondentes no domínio s são:

$$10\,I_1(\mathrm{s}) + \frac{1}{0{,}2\mathrm{s}}\,I_1(\mathrm{s}) + 10I_2(\mathrm{s}) = 50/\mathrm{s} \quad \text{e} \quad 50\,I_2(\mathrm{s}) + 10\,I_1(\mathrm{s}) = 50/\mathrm{s} \qquad (2)$$

ou, sob a forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 10 + 1/0{,}2\mathrm{s} & 10 \\ 10 & 50 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(\mathrm{s}) \\ I_2(\mathrm{s}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50/\mathrm{s} \\ 50/\mathrm{s} \end{bmatrix}$$

donde $I_1(\mathrm{s}) = 5/(\mathrm{s} + 0{,}625)$ e $i_1 = 5e^{-0{,}625t}$

Para obter i_2, substituímos o valor de i_1 na segunda das equações de (*1*):

$$50i_2 + 10(5e^{-0{,}625t}) = 50 \quad \text{e} \quad i_2 = 1 - e^{-0{,}625t}$$

17.18 Obter a impedância equivalente da estrutura do Probl. 17.17, no domínio s, e determinar a corrente total e as correntes nos ramos, empregando a regra da divisão da corrente.

A impedância equivalente no domínio s é:

$$Z(\mathrm{s}) = 10 + \frac{40(1/0{,}2\mathrm{s})}{40 + 1/0{,}2\mathrm{s}} = \frac{80\mathrm{s} + 50}{8\mathrm{s} + 1} = 10\left(\frac{\mathrm{s} + 5/8}{\mathrm{s} + 1/8}\right) \qquad (1)$$

A Fig. 17-23 mostra o circuito; a corrente resultante é:

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{50}{s}\left\{\frac{s + 1/8}{10(s + 5/8)}\right\} = 5\,\frac{s + 1/8}{s(s + 5/8)} \qquad (2)$$

Exprimindo a equação (*2*) em termos de frações parciais,

$$I(s) = \frac{1}{s} + \frac{4}{s + 5/8}, \text{ donde } i = 1 + 4e^{-5t/8} \qquad (3)$$

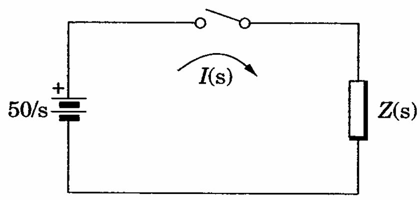


Figura 17-23

As correntes $I_1(s)$ e $I_2(s)$ podem, agora, ser determinadas pela regra da divisão. Da Fig. 17-24, temos:

$$I_1(s) = I(s)\left(\frac{40}{40 + 1/0{,}2s}\right) = \frac{5}{s + 5/8} \quad \text{e} \quad i_1 = 5e^{-0{,}625t}$$

$$I_2(s) = I(s)\left(\frac{1/0{,}2s}{40 + 1/0{,}2s}\right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 5/8} \quad \text{e} \quad i_2 = 1 - e^{-0{,}625t}$$

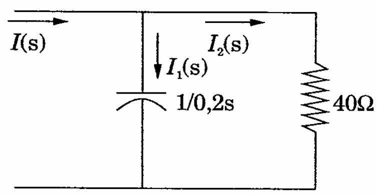


Figura 17-24

17.19 O interruptor da Fig. 17-25 é fechado quando $t = 0$ e não existe carga inicial nos capacitores. Determinar a corrente resultante, i, mostrada no diagrama.

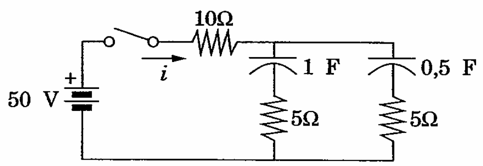


Figura 17-25

A estrutura tem para impedância equivalente no domínio s:

$$Z(s) = 10 + \frac{(5 + 1/s)(5 + 1/0{,}5s)}{(10 + 1/s + 1/0{,}5s)} = \frac{125s^2 + 45s + 2}{s(10s + 3)} \qquad (1)$$

e a corrente

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{50}{s}\,\frac{s(10s + 3)}{(125s^2 + 45s + 2)} = \frac{4(s + 0{,}3)}{(s + 0{,}308)\,(s + 0{,}052)} \qquad (2)$$

Exprimindo a corrente do domínio s em frações parciais,

$$I(s) = \frac{1/8}{s + 0{,}308} + \frac{31/8}{s + 0{,}052} \quad \text{e} \quad i = \frac{1}{8}e^{-0{,}308t} + \frac{31}{8}e^{-0{,}052t}$$

17.20 Aplicar teoremas do valor inicial e do valor final à corrente do Probl. 17.19, no domínio **s**.

Como $I(s) = \dfrac{1/8}{s + 0{,}308} + \dfrac{31/8}{s + 0{,}052}$, a corrente inicial é:

$$i(0) = \lim_{s\to\infty} [s\,I(s)] = \lim_{s\to\infty}\left[\frac{1}{8}\left(\frac{s}{s + 0{,}308}\right) + \frac{31}{8}\left(\frac{s}{s + 0{,}052}\right)\right] = 4 \text{ ampères}$$

e a corrente final é

$$i(\infty) = \lim_{s\to 0} [s\,I(s)] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{8}\left(\frac{s}{s + 0{,}308}\right) + \frac{31}{8}\left(\frac{s}{s + 0{,}052}\right)\right] = 0$$

Um exame do circuito da Fig. 17-25 mostra que, inicialmente, a resistência total do circuito é $R = 10 + 5(5)/10 = 12{,}5$ ohms; portanto, $i(0) = 50/12{,}5 =$ 4 A. Então, em regime estacionário, ambos os capacitores estão carregados a uma tensão equivalente de 50 volts e a corrente é nula.

Problemas Propostos

17.21 Determinar a transformada de Laplace de cada uma das funções:
Resp.: (*a*)-(*e*) Ver tabela 17-1 no final do capítulo.

(*a*) $f(t) = At$ (*c*) $f(t) = e^{-at}$ sen ωt (*e*) $f(t) = \cos h\ \omega t$

(*b*) $f(t) = te^{-at}$ (*d*) $f(t) = \text{sen h}\ \omega t$ (*f*) $f(t) = e^{-at}$ sen h ωt

17.22 Determinar a transformada inversa de Laplace de cada uma das funções:

(*a*) $\mathbf{F}(s) = \dfrac{s}{(s+2)(s+1)}$ (*e*) $\mathbf{F}(s) = \dfrac{s+5}{s^2+2s+5}$

(*b*) $\mathbf{F}(s) = \dfrac{1}{s^2+7s+12}$ (*f*) $\mathbf{F}(s) = \dfrac{2s+4}{s^2+4s+13}$

(*c*) $\mathbf{F}(s) = \dfrac{5s}{s^2+3s+2}$ (*g*) $\mathbf{F}(s) = \dfrac{2s}{(s^2+4)(s+5)}$

(*d*) $\mathbf{F}(s) = \dfrac{3}{s(s^2+6s+9)}$

Resp.: (*a*) $2e^{-2t} - e^{-t}$ (*d*) $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}e^{-3t} - te^{-3t}$

(*b*) $e^{-3t} - e^{-4t}$ (*e*) e^{-t} $(\cos 2t + 2\,\text{sen}\ 2t)$

(*c*) $10e^{-2t} - 5e^{-t}$ (*f*) $2\,e^{-2t} \cos 3t$

(*g*) $\dfrac{10}{29} \cos 2t + \dfrac{4}{29}\,\text{sen}\ 2t - \dfrac{10}{29}e^{-5t}$

17.23 Quando $t = 0$, aplica-se uma tensão constante $V = 50$ volts em um circuito série *RL* onde $R = 10$ ohms e $L = 0{,}2$ H. Determinar a corrente resultante empregando o método da transformada de Laplace.
Resp.: $i = 5 - 5e^{-50t}$.

17.24 O interruptor do circuito série *RL* da Fig. 17-26 é mantido na posição 1 durante tempo suficiente para que se estabeleça o regime estacionário; em seguida, é deslocado para a posição 2, quando $t = 0$. Determinar a corrente.
Resp.: $i = 5\,e^{-50t}$.

17.25 No circui
4 milisse
intervalo
Resp.: *i*

17.26 No circu
quando
Determir
Resp.: *i*

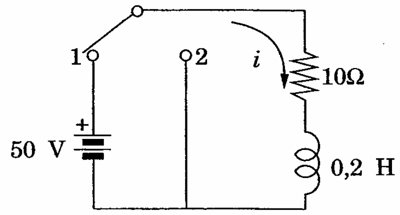


Figura 17-26

17.25 No circuito da Fig. 17-27, o interruptor 1 é fechado quando $t = 0$. Quando $t = t' =$ 4 milissegundos, abre-se o interruptor 2. Determinar a corrente transitória nos intervalos $0 < t < t'$ e $t' < t$.
Resp.: $i = 2\,(1 - e^{-500t})$; $i = 1{,}06\, e^{-1500(t - t')} + 0{,}667$.

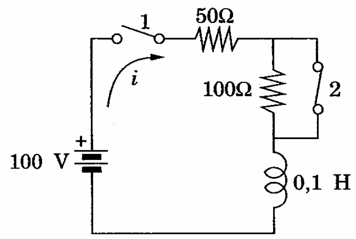


Figura 17-27

17.26 No circuito em série *RL* da Fig. 17-28, o interruptor é fechado na posição 1 quando $t = 0$ e quando $t = t' = 50$ microssegundos é deslocado para a posição 2. Determinar a corrente transitória nos intervalos $0 < t < t'$ e $t > t'$.
Resp.: $i = 0{,}1(-e^{-2000t})$; $i = 0{,}06\, e^{-2000(t - t')} - 0{,}05$.

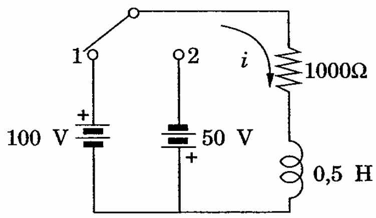


Figura 17-28

17.27 Aplica-se uma tensão constante V = 100 volts a um circuito em série RC, com R = 10 ohms e C = 4 μF, existindo no capacitor uma carga $q_0 = 800 \times 10^{-6}$ coulombs, no instante em que se fecha o interruptor. Determinar a corrente transitória resultante, supondo que a carga é (*a*) da mesma polaridade daquela que é depositada pela fonte; (*b*) de polaridade oposta.
Resp.: (*a*) $i = -10e^{-25 \times 10^3 t}$ A; (*b*) $i = 30e^{-25 \times 10^3 t}$ A.

17.28 O capacitor de um circuito em série RC com R = 1000 ohms e C = 20 μF tem uma carga inicial q_0, ao fechar-se o interruptor para aplicar uma tensão constante V = 50 volts. Supondo que a corrente resultante é $i = 0{,}075\ e^{-50t}$, determinar a carga q_0 e a sua polaridade.
Resp.: 500×10^{-6} coulombs, oposta à da carga depositada pela fonte.

17.29 O interruptor do circuito RC mostrado na Fig. 17-29 é fechado na posição 1, quando t = 0, e, em seguida, quando $t = t'$ = 1CT, é deslocado para a posição 2. Determinar a corrente transitória nos intervalos $0 < t < t'$ e $t < t'$.
Resp.: $i = 0{,}5e^{-200t}$; $i = 0{,}516e^{-200(t - t')}$.

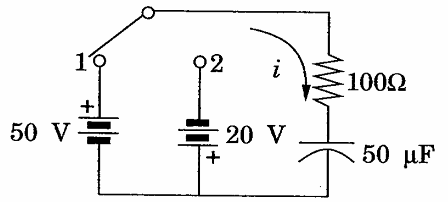


Figura 17-29

17.30 Ao fechar-se o interruptor do circuito da Fig. 17-30, o capacitor C_1 tem uma carga inicial $q_0 = 300 \times 10^{-6}$ coulombs. Determinar a corrente transitória resultante.
Resp.: $i = 2{,}5e^{-2{,}5 \times 10^4 t}$.

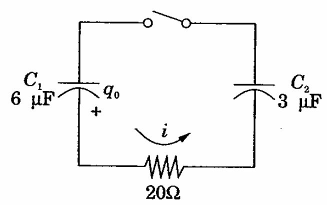


Figura 17-30

17.31 No circu
× 10^{-6}
Determ
quando
Resp.: i

17.32 Quando
onde R
Resp.: i

17.33 O capa
10^{-3} co
para qu
que occ
Resp.:

17.34 Quand
R = 5 o
Resp.:

17.31 No circuito em série *RC* da Fig. 17-31, o capacitor tem uma carga inicial $q_0 = 25 \times 10^{-6}$ coulombs e a fonte de tensão senoidal é $v = 100$ sen $(1000t + \phi)$. Determinar a corrente resultante, supondo que o interruptor é fechado quando $\phi = 30°$.
Resp.: $i = 0{,}1535e^{-4000t} + 0{,}0484$ sen $(1000t + 106°)$.

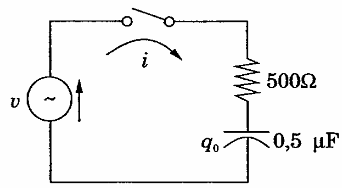


Figura 17-31

17.32 Quando $t = 0$, aplica-se uma tensão constante $V = 10$ volts em um circuito *RLC*, onde $R = 5$ ohms, $L = 01$ H e $C = 500$ μF. Determinar a corrente resultante.
Resp.: $i = 0{,}72e^{-25t}$ sen $139t$.

17.33 O capacitor do circuito em série *RLC* da Fig. 17-32 tem uma carga inicial $q_0 = 10^{-3}$ coulombs e o interruptor é mantido na posição 1 durante tempo suficiente para que se estabeleça o regime estacionário. Determinar a corrente transitória que ocorre quando, em $t = 0$, o interruptor é levado de 1 para 2.
Resp.: $i = e^{-25t}(2 \cos 222t - 0{,}45$ sen $222t)$.

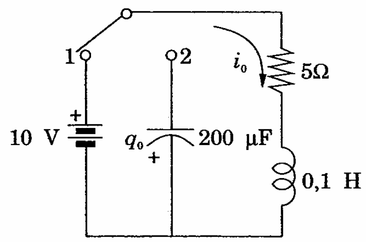


Figura 17-32

17.34 Quando $t = 0$, aplica-se uma tensão $v = 10e^{-100t}$ em um circuito série *RLC* com $R = 5$ ohms, $L = 0{,}2$ H e $C = 1$ μF. Determinar a corrente resultante.
Resp.: $i = -0{,}666e^{-100t} + 0{,}670e^{-24{,}8t} - 0{,}004\ e^{-0{,}2t}$.

17.35 Um circuito em série *RLC*, com $R = 200$ ohms, $L = 0{,}5$ H e $C = 100\ \mu F$, tem uma fonte de tensão senoidal $v = 300$ sen $(500t + \phi)$. Determinar a corrente transitória resultante, supondo que o interruptor é fechado quando $\phi = 30°$.
Resp.: $i = 0{,}517e^{-341{,}4t} - 0{,}197e^{-58{,}6t} + 0{,}983$ sen $(500t - 19°)$.

17.36 Um circuito em série *RLC* com $R = 5$ ohms, $L = 0{,}1$ H e $C = 500\ \mu F$ tem uma fonte de tensão senoidal $v = 100$ sen $(250t)$. Determinar a corrente resultante, supondo que o interruptor é fechado quando $t = 0$.
Resp.: $i = e^{-25t}(5{,}42 \cos 139t + 1{,}89$ sen $139t) + 5{,}65$ sen $(250t - 73{,}6°)$ (A)

17.37 Na estrutura de duas malhas da Fig. 17-33, as correntes foram escolhidas conforme mostra o diagrama. Escrever as equações do domínio do tempo, transformá-las nas equações correspondentes do domínio s e obter as correntes transitórias i_1 e i_2.
Resp.: $i_1 = 2{,}5\ (1 + e^{-10^5 t})$ e $i_2 = 5e^{-10^5 t}$.

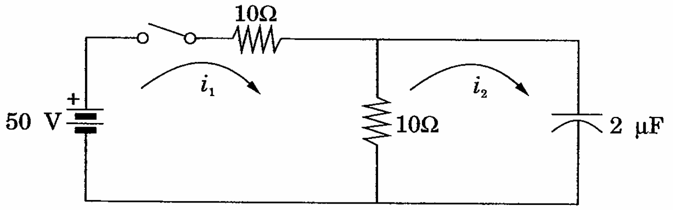


Figura 17-33

17.38 Determinar as correntes i_1 e i_2 que aparecem na estrutura de duas malhas da Fig. 17-34, quando se fecha o interruptor em $t = 0$.
Resp.: $i_1 = 0{,}101e^{-100t} + 9{,}899e^{-9950t}$, $i_2 = -\,5{,}05e^{-100t} + 5 + 0{,}05e^{-9950t}$.

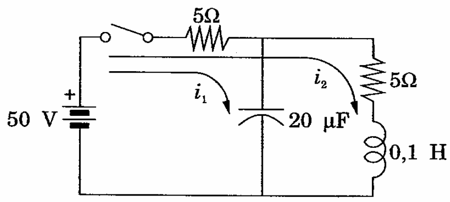


Figura 17-34

17.39 Na estrutura da Fig. 17-35, a fonte de 100 volts acarreta uma corrente contínua na primeira malha e o interruptor é fechado em $t = 0$, colocando o resistor de 10 ohms em paralelo com o ramo indutivo. Determinar as correntes resultantes.
Resp.: $i_1 = 1{,}67e^{-6{,}67t} + 5$; $i_2 = -\,0{,}555e^{-6{,}67t} + 5$.

17.40 A estrutu
$v = 100$ s
colocand
minar as
ma.
Resp.: i_1
(200t – 6

v

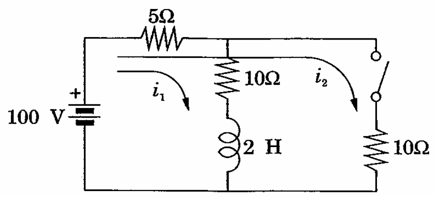


Figura 17-35

17.40 A estrutura de duas malhas da Fig. 17-36 contém uma fonte de tensão senoidal $v = 100$ sen $(200t + \phi)$. Quando $t = 0$, o ângulo $\phi = 0$ e o interruptor é fechado, colocando o segundo resistor de 10 ohms em paralelo com o primeiro. Determinar as correntes de malha resultantes, com os sentidos indicados no diagrama.

Resp.: $i_1 = 3{,}01e^{-100t} + 8{,}96$ sen $(200t - 63{,}4^\circ)$ (A), $i_2 = 1{,}505e^{-100t} + 4{,}48$ sen $(200t - 63{,}4^\circ)$ (A).

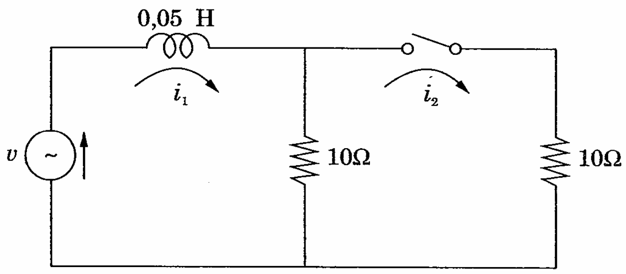


Figura 17-36

Tabela 17-1
TRANSFORMADAS DE LAPLACE

	$f(t)$	$\mathbf{F}(s)$
1.	$A \quad t \geqslant 0$	$\dfrac{A}{s}$
2.	$At \quad t \geqslant 0$	$\dfrac{A}{s^2}$
3.	e^{-at}	$\dfrac{1}{s + a}$
4.	te^{-at}	$\dfrac{1}{(s + a)^2}$
5.	$\text{sen}\ \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
6.	$\cos\ \omega t$	$\dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$
7.	$\text{sen}\ (\omega t\ \theta)$	$\dfrac{s\ \text{sen}\ \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
8.	$\cos\ (\omega t\ \theta)$	$\dfrac{s \cos \theta - \omega\ \text{sen}\ \theta}{s^2 + \omega^2}$
9.	$e^{-at}\ \text{sen}\ \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
10.	$e^{-at} \cos\ \omega t$	$\dfrac{(s + a)}{(s + a)^2 + \omega^2}$
11.	$\text{senh}\ \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
12.	$\cosh\ \omega t$	$\dfrac{s}{s^2 - \omega^2}$
13.	df/dt	$s\boldsymbol{F}(s) - f(0+)$
14.	$\int f(t)\ dt$	$\dfrac{\mathbf{F}(s)}{s} + \dfrac{f^{-1}(0+)}{s}$
15.	$f(t - t_1)$	$e^{-t_1 s}\,\mathbf{F}(s)$
16.	$f_1(t) + f_2(t)$	$\mathbf{F}_1(s) + \mathbf{F}_2(s)$

MAKRON
Books

MAKRON
Books

ÍNDICE ANALÍTICO

Impressão e acabamento:
GRÁFICA PAYM
Tel. (011) 4392-3344

CADASTRO PARA MALA-DIRETA

Favor preencher todos os campos

★ Devolvendo-nos este cadastro preenchido, você passará a receber informações dos nossos lançamentos, nas áreas que determinar. **INVISTA EM SEU FUTURO PROFISSIONAL.**

CADASTRO PARA MALA-DIRETA

Favor preencher todos os campos

★ Devolvendo-nos este cadastro preenchido, você passará a receber informações dos nossos lançamentos, nas áreas que determinar. **INVISTA EM SEU FUTURO PROFISSIONAL.**

Nome completo (não abreviar):

Número de seu cadastro em nosso mailing: **C.P.F.:** **R.G.:**

Endereço para correspondência:

Bairro: **Cidade:** **UF:** **Cep:** -

Telefone: **Celular:** **E-mail:** **Sexo:** F M

1. Escolaridade:

1º Grau	2º Grau	3º Grau	Pós-Graduação
MBA	Mestrado	Doutorado	Outros (especificar): ______

Quantos livros técnicos compra por mês?: ______ por ano? ______

2. Área de Interesse:

1. Informática	2. Marketing	3. Vendas	4. Administração
5. Economia	6. Recursos Humanos	7. Qualidade/Produtividade	8. Psicologia
9. Eng. Elétrica/Eletrônica	10. Engenharia Civil	11. Engenharia Mecânica	12. Comércio Exterior
13. Engenharia Química	14. Ecologia	15. Telecomunicações	16. Publicidade/Propaganda
17. Turismo	18. Ensino/Educação	19. Contabilidade	20. Finanças
21. Matemática	22. Outros (especificar): ______		

3. Profissão/Ocupação:

1. Presidente	2. Supervisor
3. Diretor	4. Gerente
5. Analista	6. Programador
7. Empresário	8. Consultor
9. Digitador	10. Estudante
11. Professor	12. Aposentado

Obra: Circuitos Elétricos
Autoria: Joseph A. Edminister

Pearson Education
Rua Emilio Goeldi, 747
05065-110 - São Paulo - SP - Brasil
Fone: (11) 3613-1222

DOBRE AQUI E COLE

ISR - 40 - 1248/89
UP - AC - ITAIM BIBI
DR/São Paulo

CARTA RESPOSTA

NÃO É NECESSÁRIO SELAR.

O selo será pago por

Pearson Education do Brasil Ltda.

04533-970 - São Paulo - SP

DOBRE AQUI

0 - 1248/89
- ITAIM BIBI
ão Paulo

CIRCUITOS ELÉTRICOS

OUTROS LIVROS NA ÁREA

Mariotto – Análise de Circuitos Elétricos
Cotrim – Instalações Elétricas
Gussow – Eletricidade Básica – 2ª Edição – Revisada e Ampliada
Lalond – Princípios de Dispositivos e Circuitos Eletrônicos – 2 Volumes
Malvino – Eletrônica – 4ª Edição – 2 Volumes
O'Malley – Análise de Circuitos – 2ª Edição
Phillips – Sistemas de Controle e Realimentação
Rashid – Eletrônica de Potência
Sedra – Microeletrônica – 2 Volumes

EDMINISTER
ELÉTRICOS

Pearson Education

www.makron.com.br
www.pearsonedbrasil.com

ISBN 0-07-460-6395
9 780074 606391