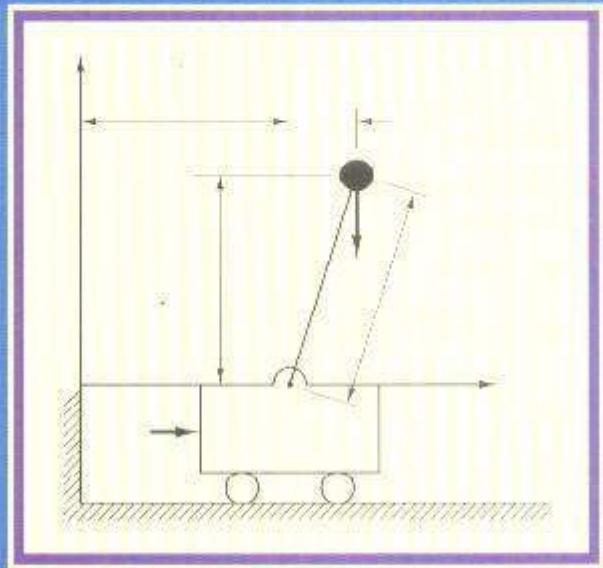


# ENGENHARIA DE CONTROLE MODERNO

Parte 1



KATSUHIKO OGATA

O28c Ogata, Katsuhiko.  
Engenharia de controle moderno /  
Katsuhiko Ogata; tradução de André Fábio  
Kohn, José Carlos Teixeira de Barros  
Moraes. — Rio de Janeiro: Prentice-Hall do  
Brasil, 1985.

Tradução de: Modern control engineering.  
Bibliografia.  
ISBN 85-7054-019-1

I. Controle automático I. Kohn, André  
Fábio II. Moraes, José Carlos Teixeira de  
Barros III. Título

85-0288

CDD — 629.8



Título do original em inglês  
*Modern Control Engineering*  
Copyright © 1970 by  
Prentice-Hall, Inc.  
Englewood Cliffs, N.J. USA

Direitos exclusivos para a língua portuguesa  
Copyright © by  
Editora Prentice/Hall do Brasil Ltda.  
Rio de Janeiro — RJ

1982 — 5 4 3 2

Reservados todos os direitos. É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, ou de partes do mesmo, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, ou outros), sem permissão expressa da Editora.

Fotocomposição da Editora Guanabara Koogan S.A.

# Prefácio

Este livro foi preparado para ser um texto completo de um primeiro estudo de engenharia de controle. Está redigido ao nível do último ano de engenharia elétrica, mecânica, aeronáutica ou química.

Este texto abrange tanto a teoria de controle clássico como a de controle moderno. Os três primeiros capítulos apresentam os conceitos fundamentais de sistemas de controle por realimentação e a base matemática elementar necessária para o entendimento do livro. O Cap. 4 trata de modelagem de sistemas físicos. Os próximos seis capítulos (5 a 10) apresentam métodos e técnicas convencionais para analisar e projetar sistemas de controle. Os dois capítulos seguintes (11 e 12) discutem sistemas não lineares. O Cap. 13 dá uma introdução a sistemas de tempo discreto e ao método da transformada z. Os últimos três capítulos (14 a 16) apresentam uma introdução à teoria de controle moderno baseada em conceitos de espaço de estados.

Supõe-se que o leitor esteja familiarizado com equações diferenciais e análise de circuitos em nível introdutório, bem como em mecânica.

Os primeiros 10 capítulos podem ser usados como texto, quer de um curso de um trimestre, quer de um semestre, com três aulas por semana, dependendo de quanta matéria será coberta. Os seis capítulos restantes podem ser usados como texto de um curso de um semestre. No Departamento de Engenharia da Universidade de Minnesota, a matéria deste livro é tratada em dois cursos: a maior parte dos capítulos de 1 a 10 é utilizada em um curso introdutório de um trimestre sobre engenharia de controle, e os Caps. 13 a 16 fazem parte de um curso de um trimestre sobre teoria de controle moderno, ambos os cursos no último ano de engenharia.

Este livro provê muitos exemplos ilustrativos para esclarecer a teoria apresentada. Acredito que a melhor maneira de aprofundar o entendimento da teoria de controle é dominar os fundamentos através da resolução de muitos problemas, cujas soluções estão disponíveis. Partindo deste ponto de vista, além de muitos exemplos, cada capítulo é seguido de inúmeros problemas resolvidos bem como outros não resolvidos. A resolução correta dos problemas não resolvidos demonstrará que o leitor compreendeu a matéria apresentada.

Gostaria de agradecer ao Dr. Richard C. Jordan, chefe do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Minnesota, pelo seu contínuo encorajamento, bem como deixar meu reconhecimento a muitos ex-alunos que resolveram muitos exemplos e problemas usados no livro. Gostaria também de expressar meu reconhecimento ao Mr. Richard F. Palas, do Departamento de Engenharia Química da Universidade de Minnesota, por ter feito muitos comentários construtivos bem como melhorado a apresentação do material.

Katsuhiko Ogata

<b>5 Ações de Controle Básicas e Controles Automáticos Industriais, 169</b>	<b>10 Técnicas de Projeto e Compensação, 540</b>
5.1 Introdução, 169	10.1 Introdução, 540
5.2 Controladores Proporcionais, 180	10.2 Considerações Preliminares de Projeto, 544
5.3 Obtenção de uma Ação de Controle Derivativa e Integral, 196	10.3 Compensação em Avanço, 548
5.4 Efeitos da Ação de Controle Integral e Derivativa no Desempenho do Sistema, 207	10.4 Compensação em Atraso, 562
5.5 Redução de Variações de Parâmetros pelo Uso de Realimentação, 215	10.5 Compensação Avanço-atraso, 575
5.6 Teoria de Sistemas Fluidos, 219	10.6 Sumário dos Métodos de Compensação de Sistemas de Controle, 587
Problemas Ilustrativos e Soluções, 225	Problemas Ilustrativos e Soluções, 593
Problemas, 240	Problemas, 600
<b>6 Análise de Resposta Transitoria, 246</b>	<b>11 Análise de Sistemas de Controle não Lineares por Função Descritiva, 603</b>
6.1 Introdução, 246	11.1 Introdução a Sistemas não Lineares, 603
6.2 Funções de Resposta ao Impulso, 247	11.2 Sistemas de Controle não Lineares, 609
6.3 Sistemas de Primeira-Ordem, 251	11.3 Funções Descritivas, 611
6.4 Sistemas de Segunda-Ordem, 255	11.4 Análise de Sistemas de Controle não Lineares Através da Função Descritiva, 620
6.5 Sistemas de Ordem Superior, 280	11.5 Comentários Conclusivos, 625
6.6 Critério de Estabilidade de Routh, 286	Problemas Ilustrativos e Soluções, 627
6.7 Computadores Analógicos, 292	Problemas, 637
Problemas Ilustrativos e Soluções, 305	
Problemas, 317	
<b>7 Análise de Erros e Introdução à Otimização de Sistemas, 321</b>	<b>12 Análise por Plano de Fase, 639</b>
7.1 Coeficientes de Erro Estático, 321	12.1 Introdução, 639
7.2 Coeficientes de Erro Dinâmico, 331	12.2 Métodos para Construir Trajetórias, 643
7.3 Critérios de Erro, 337	12.3 Obtenção de Soluções Temporais a Partir de Gráficos de Plano de Fase, 655
7.4 Introdução à Otimização de Sistemas, 342	12.4 Pontos Singulares, 660
Problemas Ilustrativos e Soluções, 348	12.5 Análise de Plano de Fase de Sistemas de Controle Lineares, 666
Problemas, 355	12.6 Análise de Plano de Fase de Sistemas de Controle não Lineares, 671
<b>8 O Método do Lugar das Raízes, 357</b>	12.7 Comentários Conclusivos, 684
8.1 Introdução, 357	Problemas Ilustrativos e Soluções, 684
8.2 Diagramas de Lugar das Raízes, 358	Problemas, 699
8.3 Dois Exemplos Ilustrativos, 366	
8.4 Sumário das Regras Gerais para Construção dos Lugares das Raízes, 377	<b>13 Sistemas de Tempo Discreto e o Método da Transformada <math>z</math>, 702</b>
8.5 Análise de Sistemas de Controle pelo Método do Lugar das Raízes, 385	13.1 Introdução a Sistemas de Tempo Discreto, 702
Problemas Ilustrativos e Soluções, 402	13.2 A Transformada $z$ , 706
Problemas, 420	13.3 Resolução de Equações de Diferença Usando o Método da Transformada $z$ , 713
<b>9 Métodos de Resposta em Freqüência, 424</b>	13.4 A Transformada $z$ Inversa, 716
9.1 Introdução, 424	13.5 Funções de Transferência Pulsada, 719
9.2 Gráficos Logarítmicos, 430	# 13.6 Análise de Estabilidade no Plano $z$ , 732
9.3 Gráficos Polares, 451	Problemas Ilustrativos e Soluções, 735
9.4 Gráficos do Log-Módulo Versus Fase, 462	Problemas, 748
9.5 Critério de Estabilidade de Nyquist, 465	
9.6 Análise de Estabilidade, 475	<b>14 Análise de Sistemas de Controle por Espaço de Estados, 749</b>
9.7 Estabilidade Relativa, 484	14.1 Introdução, 749
9.8 Resposta em Freqüência de Malha-fechada, 501	14.2 Representação de Sistemas por Espaço de Estados, 752
9.9 Determinação Experimental de Funções de Transferência, 514	14.3 Solução da Equação de Estado Invariante no Tempo, 766
Problemas Ilustrativos e Soluções, 520	14.4 Matriz de Transferência, 776
Problemas, 536	14.5 Sistemas Lineares Variantes no Tempo, 782
	14.6 Representação de Sistemas de Tempo Discreto por Espaço de Estados, 786

14.7 Resolução da Equação de Estado de Tempo Discreto, 790  
Problemas Ilustrativos e Soluções, 797  
Problemas, 807

**15 Análise de Estabilidade de Liapunov, 810**

- 15.1 Introdução, 810
- 15.2 Definições, 811
- 15.3 O Segundo Método de Liapunov, 815
- 15.4 Análise de Estabilidade de Sistemas Lineares, 819
- 15.5 Estimando o Comportamento de Resposta Transitoria de Sistemas Dinâmicos, 826
- 15.6 Análise de Estabilidade de Sistemas não Lineares, 830
- 15.7 Comentários Conclusivos, 837
- Problemas Ilustrativos e Soluções, 838
- Problemas, 846

**16 Sistemas de Controle Ótimo e Adaptativos, 848**

- 16.1 Introdução, 848
- 16.2 Controlabilidade, 852
- 16.3 Observabilidade, 862
- 16.4 Sistemas de Controle de Tempo Ótimo, 870
- 16.5 Sistemas de Controle Ótimo Baseados nos Índices de Desempenho Quadrático, 878
- 16.6 Sistemas de Controle de Referência-modelo, 888
- 16.7 Sistemas de Controle Adaptativo, 892
- Problemas Ilustrativos e Soluções, 899
- Problemas, 913

Referências, 916

Índice Alfabético, 923



**Engenharia  
de  
Controle  
Moderno**

# Índice

## 1 Introdução a Sistemas de Controle, 1

- 1.1 Introdução, 1
- 1.2 Definições, 2
- 1.3 Controle em Malha-fechada e Controle em Malha-aberta, 4
- 1.4 Exemplos Ilustrativos de Sistemas de Controle, 8
- 1.5 Princípios de Projeto em Sistemas de Controle, 13
- 1.6 Esboço do Texto, 15
- Problemas Ilustrativos e Soluções, 16
- Problemas, 18

## 2 Base Matemática—Transformada de Laplace, 20

- 2.1 Introdução, 20
- 2.2 Transformada de Laplace, 25
- 2.3 Teoremas da Transformada de Laplace, 29
- 2.4 Transformação Inversa de Laplace, 42
- 2.5 Solução de Equações Diferenciais Lineares pelo Método da Transformada de Laplace, 49
- Problemas Ilustrativos e Soluções, 50
- Problemas, 54

## 3 Base Matemática—Matrizes, 57

- 3.1 Introdução, 57
- 3.2 Definições de Matrizes, 57
- 3.3 Álgebra Matricial, 62
- 3.4 Inversão de Matriz, 65
- 3.5 Diferenciação e Integração de Matrizes, 70
- Problemas Ilustrativos e Soluções, 72
- Problemas, 74

## 4 Modelos Matemáticos de Sistemas Físicos, 76

- 4.1 Introdução, 76
- 4.2 Funções de Transferência, 79
- 4.3 Linearização de um Modelo Matemático não Linear, 91
- 4.4 Diagramas de Blocos, 96
- 4.5 Dedução de Funções de Transferência de Sistemas Físicos, 103
- 4.6 Sistemas Multivariáveis e Matrizes de Transferência, 129
- 4.7 Gráficos de Fluxo de Sinal, 133
- Problemas Típicos e Soluções, 141
- Problemas, 162

# Introdução a Sistemas de Controle

## 1.1 INTRODUÇÃO

Controle automático representa um papel vital no avanço da engenharia e da ciência. Além de possuir importância extrema em sistemas de pilotagem de avião, mísseis guiados, veículos espaciais etc., tornou-se uma parte integrante e importante dos processos industriais e de fabricação modernos. Por exemplo, controle automático é essencial em operações industriais para controle de pressão, temperatura, umidade, viscosidade e fluxo em processos industriais; manuseando, operando e montando partes mecânicas das indústrias de fabricação, entre muitas outras.

Desde que os avanços na teoria e na prática de controle automático propiciam meios para atingir-se desempenho ótimo de sistemas dinâmicos, bem como melhoria na qualidade e diminuição do custo de produção, aumento da taxa de produção, operações manuais repetitivas etc., a maioria dos engenheiros e cientistas deve entender e conhecer bem este campo.

**Revisão histórica.** O primeiro trabalho significativo em controle automático foi o de James Watt, que construiu um controlador centrífugo para controle de velocidade de uma máquina a vapor no século XVIII. Outros trabalhos importantes nos primeiros estágios de desenvolvimento da teoria de controle são os de Minorsky, Hazen e Nyquist, entre muitos outros. Em 1922, Minorsky trabalhou em controladores automáticos para pilotagem de navios e mostrou como poderia ser "determinada" a estabilidade a partir das equações diferenciais que descrevem o sistema. Em 1932, Nyquist desenvolveu um procedimento relativamente simples para determinar a estabilidade de sistemas de malha-fechada com base na resposta a entradas senoidais em regime permanente da malha-aberta. Em 1934, Hazen, que introduziu o termo "servomecanismos" para sistemas de controle de posição, discutiu o projeto de servomecanismos a relé capazes de seguir muito de perto uma entrada variável.

Durante a década de 1940, os métodos de resposta em frequência tornaram possível aos engenheiros projetar sistemas de controle realimentados lineares, que satisfaziam os requisitos de desempenho. Desde o final da década de 1940 até o

íncio dos anos 50, o método do lugar das raízes em projeto de sistemas de controle foi completamente desenvolvido.

Os métodos de resposta em freqüência e lugar das raízes que correspondem ao coração da teoria de controle clássica levaram a sistemas que são estáveis e satisfazem um conjunto de requisitos de desempenho mais ou menos arbitrários. Estes sistemas não são, em geral, ótimos no sentido lato. Desde a década de 1950, a ênfase nos problemas de projeto de controle tem sido transferida do projeto de um dos muitos sistemas que operam para o projeto de um sistema ótimo em algum sentido lato.

Em virtude de os processos modernos com muitas entradas e saídas tornarem-se mais e mais complexos, a descrição de um sistema de controle moderno exige um grande número de equações. A teoria de controle clássica, que trata apenas de sistemas de entrada-simples-saída-simples, tornou-se inteiramente impotente para sistemas de múltiplas-entradas-múltiplas-saídas. Desde 1960, aproximadamente, a teoria de controle moderna tem sido desenvolvida para competir com a complexidade crescente de processos modernos e requisitos rigorosos e estreitos em precisão, peso e custo em aplicações militares, espaciais e industriais.

Devido à real disponibilidade de computadores digitais, analógicos e híbridos eletrônicos para uso em cálculos complexos, a utilização de computadores no projeto de sistemas de controle e o uso de computadores *on-line* na operação de sistemas de controle constituem atualmente uma prática comum.

Pode-se dizer que os desenvolvimentos mais recentes na teoria de controle moderna estão na direção do controle ótimo tanto de sistemas determinísticos como estocásticos, bem como para controle de aprendizado e adaptativo de sistemas complexos. Aplicações da teoria de controle moderna em áreas não de engenharia, tais como biologia, economia, medicina e sociologia, estão em desenvolvimento, e resultados interessantes e significativos podem ser esperados em um futuro próximo.

## 1.2 DEFINIÇÕES

Nesta seção definiremos a terminologia necessária para descrever sistemas de controle.

**Plantas (Plants)\*.** Uma planta é uma parte de equipamento, eventualmente um conjunto de itens de uma máquina, que funcionam conjuntamente, cuja finalidade é desempenhar uma dada operação. Neste livro designaremos qualquer objeto físico a ser controlado (tais como uma nave espacial, um reator químico ou uma caldeira para aquecimento) como uma *planta*.

**Processos (Processes)\*.** O Dicionário Merriam-Webster define um processo como uma operação ou desenvolvimento natural, que evolui progressivamente, caracterizado por uma série de mudanças graduais que se sucedem, uma em relação às outras, de um modo relativamente fixo e objetivando um particular resultado ou meta; ou uma operação artificial ou voluntária, que evolui progressivamente e se constitui por uma série de ações controladas ou movimentos sistematicamente dirigidos objetivando um particular resultado ou meta. Neste livro designaremos

qualquer operação a ser controlada como um *processo*. Exemplos são processos químicos, econômicos e biológicos.

**Sistemas.** Um sistema é uma combinação de componentes que atuam conjuntamente e realizam um certo objetivo. Um sistema não é limitado a algo físico. O conceito de sistema pode ser aplicado a fenômenos abstratos, dinâmicos, tais como os encontrados em economia. A palavra "sistema" deve, portanto, ser interpretada para designar sistemas físicos, biológicos, econômicos etc.

**Distúrbios.** Um distúrbio é um sinal que tende a afetar adversamente o valor da saída de um sistema. Se um distúrbio é gerado dentro do sistema, ele é denominado *interno*; ao passo que um distúrbio externo é gerado fora do sistema e constitui uma entrada.

**Controle realimentado.** Controle realimentado é uma operação que, na presença de distúrbios, tende a reduzir a diferença entre a saída de um sistema e a entrada de referência (ou um estado desejado, arbitrariamente variado) e que opera com base nesta diferença. Aqui, apenas distúrbios não previsíveis (isto é, aqueles não conhecidos *a priori*) são designados como tais, desde que com distúrbios conhecidos ou previsíveis é sempre possível incluir compensação dentro do sistema de modo que aquelas medidas sejam desnecessárias.

**Sistemas de controle realimentados.** Um sistema de controle realimentado é aquele que tende a manter uma relação prescrita entre a saída e a entrada de referência, comparando-as e utilizando a diferença como um meio de controle.

Note que os sistemas de controle realimentados não são limitados ao campo da engenharia mas podem ser encontrados em várias outras áreas, tais como economia e biologia. Por exemplo, o organismo humano, sob certo aspecto, é análogo a uma planta química intrincada com uma grande variedade de operações unitárias. O controle de processo desta rede de reação química e transporte envolve uma variedade de laços de controle. De fato, o organismo humano é um sistema de controle realimentado extremamente complexo.

**Servomecanismos.** Um servomecanismo é um sistema de controle realimentado no qual a saída é alguma posição mecânica, velocidade ou aceleração. Portanto, os termos *servomecanismos* e *sistema de controle de posição* (ou de velocidade, ou de aceleração) são sinônimos. Servomecanismos são muito usados na indústria moderna. Por exemplo, a operação automática completa de máquinas operatrizes, juntamente com instruções programadas, pode ser desempenhada com o uso de servomecanismos.

**Sistemas reguladores automáticos.** Um sistema regulador automático é um sistema de controle realimentado no qual a entrada de referência, ou a saída desejada, ou é constante ou varia lentamente com o tempo, e no qual a finalidade principal é manter a saída real em um valor desejado, na presença de distúrbios.

Um sistema de aquecimento residencial que utiliza um termostato como controlador é um exemplo de um sistema regulador automático. Neste sistema, o ajuste do termostato (a temperatura desejada) é comparado com a temperatura real do ambiente. Uma variação na temperatura externa é um distúrbio neste sistema. O objetivo é manter a temperatura desejada no ambiente fixa e independente de variações na temperatura externa. Há muitos outros exemplos de sistemas reguladores automáticos, alguns dos quais são os controles automáticos de pressão e de grandezas elétricas tais como tensão, corrente e freqüência.

\*N. do T.: Devido à inexistência na língua portuguesa do vocábulo "planta" com a conotação necessária em Sistema de Controle, utilizar-se-á preferencialmente o termo "processo" englobando *plant* e *process*, a não ser onde possa causar dificuldade de interpretação.

**Sistemas de controles de processos.** Um sistema regulador automático no qual a saída é uma variável tal como uma temperatura, pressão, fluxo, nível de líquido ou pH é denominado um *sistema de controle de processo*. Controle de processo é exaustivamente aplicado na indústria. Controles programados, tal como controle de temperatura de fornos para aquecimento nos quais a temperatura do forno é controlada de acordo com um programa pré-selecionado, são muitas vezes usados nestes sistemas. Por exemplo, um programa pré-selecionado pode ser tal que a temperatura do forno (ou, eventualmente, em uma caldeira) é aumentada até uma dada temperatura, em um dado intervalo de tempo, e então diminui para uma outra dada temperatura em algum outro intervalo de tempo conhecido. Em um controle programado como este, o ponto de ajuste pode ser variado de acordo com o tempo preestabelecido desejado. O controlador, então, tem a função de manter a temperatura no forno próxima ao ponto de ajuste variável. Deve ser observado que muitos sistemas de controle de processos incluem servomecanismos como uma parte integral.

### 1.3 CONTROLE EM MALHA-FECHADA E CONTROLE EM MALHA-ABERTA

Definiremos inicialmente sistemas de controle em malha-fechada e em malha-aberta. Faremos posteriormente uma comparação destes dois tipos. Finalmente, serão introduzidos os conceitos de controle adaptativo e controle de aprendizado.

**Sistema de controle em malha-fechada.** Um sistema de controle em malha-fechada é aquele no qual o sinal de saída possui um efeito direto na ação de controle. Isto é, sistemas de controle em malha-fechada são sistemas de controle realimentados. O sinal erro atuante, que é a diferença entre o sinal de entrada e o sinal realimentado (que pode ser o sinal de saída ou uma função do sinal de saída e suas derivadas), é alimentado no controlador de modo a reduzir o erro e manter a saída do sistema em um valor desejado. Em outras palavras, o termo "malha-fechada" implica o uso de ação de realimentação com a finalidade de reduzir o erro do sistema. A Fig. 1.1 mostra a relação entrada-saída do sistema de controle em malha-fechada. A representação indicada na figura é denominada *diagrama de blocos*. Para ilustrar o conceito de sistemas de controle em malha-fechada, considere o sistema térmico mostrado na Fig. 1.2, onde um ser humano atua como o controlador. Ele deseja manter a temperatura da água quente em um dado valor. O termômetro instalado na tubulação de saída da água quente mede a temperatura real. Esta temperatura é a saída do sistema. Se o operador observa o termômetro e

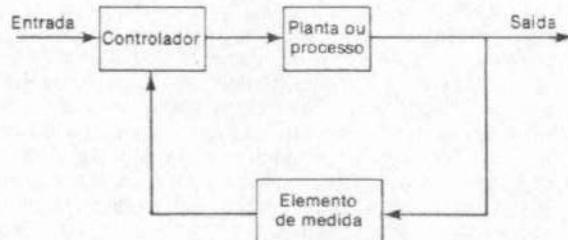


Fig. 1.1 Sistema de controle em malha-fechada.

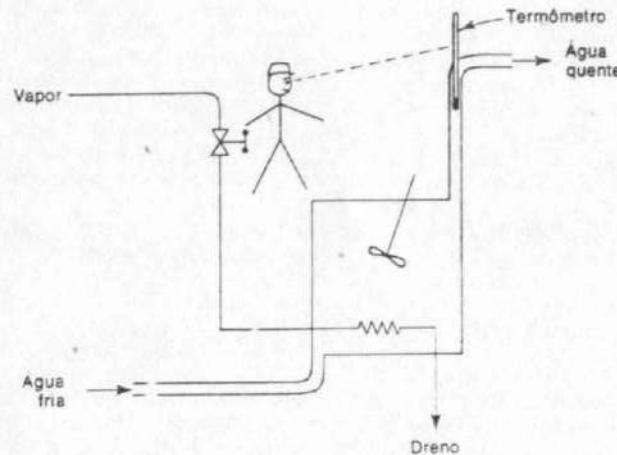


Fig. 1.2 Controle realimentado manual de um sistema térmico.

verifica que a temperatura é maior do que a desejada, ele reduz a quantidade de suprimento de vapor de modo a diminuir esta temperatura. É bem possível que a temperatura se torne demasiado baixa, necessitando repetir a sequência de operações no sentido oposto.

Esta ação de controle é baseada na operação de malha-fechada. Desde que tanto a realimentação da saída (temperatura da água), para comparação com a entrada de referência, como a ação de controle ocorrem através de ações do operador, este é um sistema de controle em malha-fechada. Sistemas como este podem ser denominados sistemas de controle em malha-fechada manuais ou com realimentação manual.

Se for utilizado um controlador automático para substituir o operador humano, conforme é mostrado na Fig. 1.3, o sistema de controle torna-se automático, isto é, um sistema de controle em malha-fechada automático ou com realimentação automática. A posição do dispositivo de seleção de temperatura (um *dial*, por exemplo) no controlador automático seleciona a temperatura desejada. A saída, a temperatura real da água quente, que é medida pelo dispositivo de medida de temperatura, é comparada com a temperatura desejada de modo a gerar um sinal de erro atuante. Desta forma, a temperatura de saída é convertida nas mesmas unidades da entrada (ponto de ajuste) por meio de um transdutor. (Um transdutor é um dispositivo que converte um sinal de uma forma para outra.) O sinal erro produzido no controlador automático é amplificado, e a saída do controlador é enviada a uma válvula de controle para variar a abertura da válvula e, consequentemente, o suprimento de vapor de modo a corrigir a temperatura real da água. Se não houver erro, nenhuma variação é necessária na abertura da válvula.

Nos sistemas aqui considerados, as variações na temperatura ambiente, a temperatura de água fria na tubulação de entrada, etc. podem ser considerados distúrbios externos.

Os sistemas de controle com realimentação manual e realimentação automática anteriormente citados operam de maneira similar. Os olhos do operador

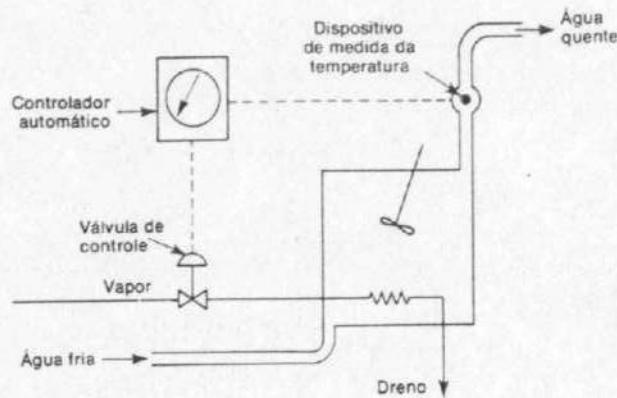


Fig. 1.3 Controle realimentado automático de um sistema térmico.

constituem o dispositivo análogo ao medidor de erro; seu cérebro, o análogo do controlador automático; e seus músculos, o análogo do atuador.

O controle de um sistema complexo por um operador humano não é eficiente devido às inúmeras inter-relações entre as diversas variáveis. Note que mesmo em um sistema simples, um controlador automático eliminará quaisquer erros humanos de operação. Se for necessária alta precisão de controle, o controle deve ser automático.

Inúmeros sistemas de controle em malha-fechada podem ser encontrados na indústria e em residências. Alguns exemplos são todos os servomecanismos, a maioria dos sistemas de controle de processos, refrigeradores residenciais, aquecedores de água automáticos e sistemas de aquecimento residenciais automáticos com controle termostático.

**Sistemas de controle em malha-aberta.** Sistemas de controle em malha-aberta são sistemas de controle nos quais a saída não tem efeito na ação do controle. Isto é, em um sistema de controle em malha-aberta, a saída nem é medida nem é realimentada para comparação com a entrada. A Fig. 1.4 indica a relação entrada-saída de um sistema deste tipo. Um exemplo prático é uma máquina de lavar roupa. As operações de molhar, lavar e enxaguar em uma máquina de lavar roupa são efetuadas em uma mesma base de tempo. A máquina não mede o sinal de saída, isto é, a limpeza das roupas.

Em qualquer sistema de controle em malha-aberta a saída não é comparada com a entrada de referência. Consequentemente, a cada entrada de referência corresponde uma condição de operação fixa. Ou seja, a precisão do sistema depende de uma calibração. (Sistemas de controle em malha-aberta devem ser cuidadosamente calibrados e devem manter esta calibração de forma a serem úteis.) Na presença de distúrbios, um sistema de controle em malha-aberta não desempenhará a tarefa desejada. O controle de malha-aberta, na prática, somente pode ser usado se a relação entre a entrada e a saída for conhecida e não houver distúrbios internos ou externos. É claro que estes sistemas não são sistemas de controle realimentados. Note que qualquer sistema de controle que opera em uma base de tempo é de malha-aberta. Por exemplo, controle de tráfego por meio de sinais operados em uma base de tempo é um outro tipo de controle em malha-aberta.

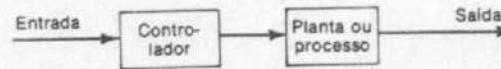


Fig. 1.4 Sistema de controle em malha-aberta.

**Sistemas de controle em malha-fechada versus malha-aberta.** Uma vantagem do sistema de controle em malha-fechada é que o uso de realimentação torna a resposta do sistema relativamente insensível a distúrbios externos e variações internas em parâmetros do sistema. É portanto possível a utilização de componentes baratos e sem muita precisão para obter o controle preciso de um dado processo; isto é impossível no caso de malha-aberta.

Do ponto de vista de estabilidade, é mais fácil construir o sistema de controle em malha-aberta desde que a estabilidade não constitui um problema significativo. Por outro lado, a estabilidade é sempre um problema fundamental no sistema de controle em malha-fechada já que pode tender a corrigir erros e causar oscilações de amplitudes constantes ou variáveis.

Deve ser enfatizado que, para sistemas nos quais as entradas são conhecidas antecipadamente no tempo e nos quais não há distúrbios, é aconselhável usar controle em malha-aberta. Sistemas de controle em malha-fechada possuem vantagens apenas quando distúrbios imprevisíveis e/ou variações imprevisíveis em componentes do sistema estão presentes. Note que a potência de saída determina parcialmente o custo, peso e dimensão de um servomecanismo (ou investimento de capital, capacidade humana etc. em um sistema comercial). De maneira a diminuir a potência necessária de um sistema, pode ser utilizado controle em malha-aberta, quando aplicável. Uma combinação apropriada de controle em malha-aberta e em malha-fechada normalmente é mais barata e fornece um desempenho global do sistema bastante satisfatório.

**Controles direto versus indireto.** Note que para obter o melhor resultado é desejável medir e controlar diretamente as variáveis que indicam o estado do sistema ou a qualidade do produto. No caso de sistemas de controle de processos podemos querer medir e controlar diretamente a qualidade do produto. Entretanto, isto pode constituir um problema difícil, desde que esta qualidade pode ser difícil de medir. Se este for o caso, torna-se necessário controlar uma variável secundária. Por exemplo, variáveis (tais como temperatura e pressão) que são diretamente relacionadas com a qualidade podem ser controladas. Como outras variáveis podem afetar a relação entre a qualidade e a variável medida, o controle indireto de um sistema não é normalmente tão eficiente quanto o controle direto. Embora possa ser difícil, sempre deve ser tentado controlar a variável primária tão diretamente quanto possível.

**Sistemas de controle adaptativos.** As características dinâmicas da maioria dos sistemas de controle não são constantes devido a várias razões, tais como deterioração de componentes ao longo do tempo ou variações em parâmetros e ambiente (por exemplo, variações na massa e condições atmosféricas de um sistema de controle de nave espacial). Embora os efeitos de pequenas variações sobre as características dinâmicas sejam atenuados em um sistema de controle realimentado, se as variações nos parâmetros do sistema e ambiente forem significativas, um sistema satisfatório deve possuir a habilidade de adaptação. A adaptação implica a habilidade de se auto-ajustar ou automodificar de acordo com variações imprevisíveis nas condições de ambiente ou estrutura. Os sistemas de controle que possuem

uma habilidade franca de adaptação são denominados sistemas de controle adaptativos.

Em um sistema de controle adaptativo, as características dinâmicas devem ser identificadas em todos os instantes de modo que os parâmetros do controlador possam ser ajustados de maneira a manter desempenho ótimo. Este conceito possui um grande atrativo para o projetista de sistema desde que um sistema de controle adaptativo, além de acomodar variações ambientais, também acomodará erros ou incertezas de projeto de engenharia moderados e compensará falhas de componentes do sistema de pequena monta, aumentando consequentemente a confiabilidade global do sistema.

**Sistemas de controle de aprendizado.** Muitos sistemas de controle, aparentemente de malha-aberta, podem ser convertidos em um sistema de controle em malha-fechada se um operador humano é considerado como controlador, comparando a entrada e a saída e efetuando a ação corretiva baseada no erro ou diferença resultante.

Se tentarmos analisar estes sistemas de controle em malha-fechada operados-pelo-homem, encontraremos o difícil problema de escrever as equações que descrevem o comportamento de um ser humano. Um dos muitos fatores complicados neste caso é a habilidade de aprendizado do operador humano. Conforme o operador ganha mais experiência, ele se tornará melhor controlador, e isto deve ser levado em consideração na análise de tal sistema. Sistemas de controle que possuem uma habilidade para aprender são denominados sistemas de controle de aprendizado. Este conceito é relativamente novo e ainda não foi completamente explorado.

Recentes progressos em aplicações de controle adaptativos e de aprendizado foram relatados na literatura, porém grandes segmentos da atividade de engenharia permanecem disponíveis para futuros estudos.

#### 1.4 EXEMPLOS ILUSTRATIVOS DE SISTEMAS DE CONTROLE

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos ilustrativos de sistemas de controle em malha-fechada.

**Sistemas de controle de pressão.** A Fig. 1.5 mostra um sistema de controle de pressão. A pressão na caldeira é controlada pela posição do regulador. Esta pressão é medida por um elemento medidor de pressão. O sinal então obtido é enviado ao controlador para comparação com o valor desejado. Se houver qualquer diferença ou erro, a saída do controlador é enviada ao atuador que posiciona o regulador convenientemente de modo a reduzir o erro.

**Sistemas de controle de velocidade.** O princípio básico do regulador de Watt para máquinas a vapor é ilustrado no diagrama esquemático da Fig. 1.6. A quantidade de vapor admitida no cilindro da máquina é ajustada de acordo com a diferença entre as velocidades real e desejada.

A seqüência de ações pode ser estabelecida como segue: a entrada de referência (ponto de ajuste) é selecionada de acordo com a velocidade desejada. Se a velocidade real cair abaixo da velocidade desejada, então o decréscimo na força centrífuga do regulador de velocidade faz com que a válvula de controle se move para cima, suprindo mais vapor, e a velocidade da máquina aumenta até o valor desejado ser atingido. Por outro lado, se a velocidade da máquina aumentar acima da velocidade desejada, o aumento na força centrífuga do regulador causa um movimento para baixo da válvula de controle. Este movimento diminui o suprimento de vapor e a velocidade da máquina se reduz até atingir o valor desejado.

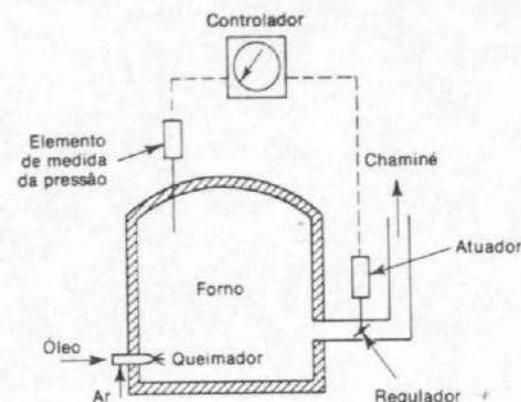


Fig. 1.5 Sistema de controle de pressão.

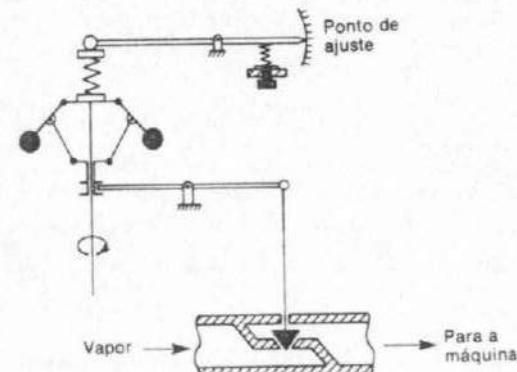


Fig. 1.6 Sistema de controle de velocidade.

**Sistemas de controle numéricos.** Controle numérico é um método de controle dos movimentos de componentes de máquinas pelo uso de números. Em controle numérico o movimento de uma ferramenta pode ser controlado pela informação binária contida em uma fita.

Neste controle, valores numéricos simbólicos são convertidos em valores físicos (dimensões ou grandezas) por meio de sinais elétricos (ou outros) que são deslocados em um movimento linear ou circular. Estes sinais são digitais (pulsos) ou analógicos (tensões variáveis no tempo).

O sistema mostrado na Fig. 1.7 opera como segue: uma fita é preparada na forma binária representando a parte P desejada. Para iniciar o sistema, a fita é introduzida na leitora. O sinal de pulso de entrada modulado em frequência é comparado com o sinal de pulso realimentado. O conversor digital-analógico converte o pulso em um sinal analógico que representa um certo valor de tensão a qual

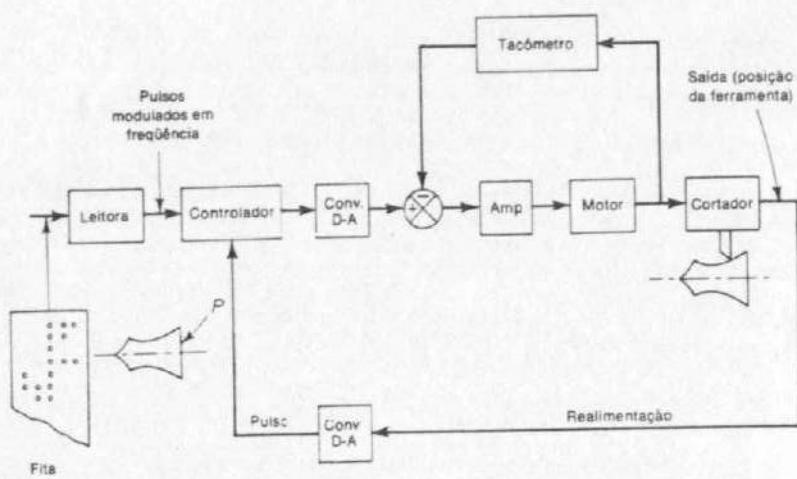


Fig. 1.7 Controle numérico de uma máquina.

por sua vez acarreta a rotação do servomotor. A posição da ferramenta é controlada de acordo com a entrada do servomotor. O transdutor acoplado à ferramenta converte o movimento em um sinal elétrico que é convertido a um sinal pulsado por meio de um conversor analógico-digital. Então este sinal é comparado com o sinal de pulso de entrada. O controlador elimina operações matemáticas nas diferenças dos sinais pulsados. Se houver qualquer diferença entre estes dois, um sinal é enviado ao servomotor para reduzi-lo.

Uma vantagem do controle numérico é que partes complexas podem ser produzidas com tolerâncias uniformes na máxima velocidade de perfuração.

**Sistemas de controle por computador.** A Fig. 1.8 mostra um diagrama esquemático do controle por computador de um autoforno. O autoforno é uma estrutura enorme com aproximadamente 30 metros de altura. Fornos modernos são construídos para produzir mais de 4.000 toneladas de lingote de ferro por dia e devem ser considerados em operação continua devido à natureza do processo de fusão.

O minério de ferro, coque e pedra calcária são carregados no forno em proporções apropriadas. (Aproximadamente 2 toneladas de minério, 1 tonelada de coque,  $\frac{1}{2}$  tonelada de fluxo e  $4\frac{1}{2}$  toneladas de ar são necessários para produzir 1 tonelada de lingote de ferro.) O ar, muito importante neste processo, é aquecido em fornos e injetado na fornalha. O calor na fornalha é produzido pela combustão do coque, da qual o gás de monóxido de carbono é gerado pelo processo de combustão parcial. Este gás, junto com o coque, reduz o minério de ferro na fornalha a um metal, e a pedra calcária atua como um fluxo, eliminando as impurezas. O ferro fundido escoa para a base da fornalha e as impurezas líquidas sobem para a superfície. O ferro fundido e as impurezas líquidas são periodicamente drenados para fora através de orifícios construídos para esta finalidade.

Desde que a presença de carbono, manganês, silício, enxofre, fósforo etc., depende muito da composição do minério, coque, e pedra calcária usados, é muito difícil para operadores humanos controlarem a composição química do lingote de ferro proveniente da fornalha.

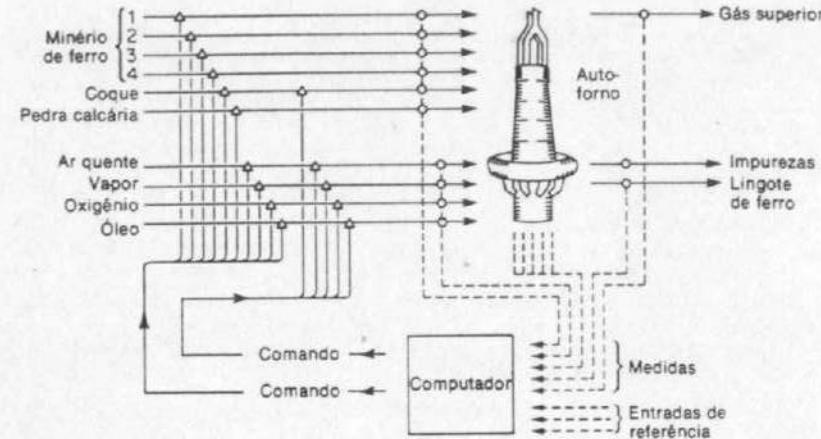


Fig. 1.8 Controle por computador de um autoforno.

No controle por computador destes fornos, as informações sobre composições de lingote de ferro, impurezas, gás, temperatura e pressão no forno, bem como composições do minério, coque e pedra calcária, são alimentadas no computador em certos intervalos de tempo. Os cálculos complexos para a determinação das quantidades ótimas dos vários materiais envolvidos a fim de se carregar o forno são efetuados pelo computador. Então é possível manter a composição do lingote de ferro conforme desejado. Também é possível manter a operação em regime permanente do autoforno em uma condição satisfatória.

Note que em um controle por computador deste processo é necessário possuir modelos matemáticos disponíveis. Porém a dedução de modelos convenientes pode ser um problema difícil pois não são conhecidos todos os fatores que afetam a dinâmica do sistema. Note também que a medida de todas as variáveis necessárias para o controle por computador pode ser difícil ou impossível, e nos casos das variáveis não mensuráveis devem-se fazer estimativas através de métodos estatísticos.

**Sistemas de controle de tráfego.** Conforme foi estabelecido na Seção 1.3, o controle de tráfego por meio de sinais de tráfego operados em uma base de tempo constitui um sistema de controle de malha-aberta. Se, entretanto, o número de carros parados em cada sinal de tráfego de uma área congestionada em uma cidade for medido continuamente e a informação enviada a um computador de controle central que controla os sinais de tráfego, então o sistema passa a ser de malha-fechada.

O movimento de tráfego em redes é muito complexo devido à variação no volume de tráfego depender fortemente da hora e do dia da semana, bem como de muitos outros fatores. Em alguns casos a distribuição de Poisson pode ser admitida para as chegadas de carros nos cruzamentos, porém isto não é necessariamente válido para todos os problemas de tráfego. De fato, a minimização do tempo de espera médio é um problema de controle muito complexo.

**Sistemas biológicos.** Considere a competição de duas espécies de bactérias cujas populações são  $x_1$  e  $x_2$ . As duas estão competindo no sentido em que consomem a mesma fonte de alimento. Sob certas condições, as populações  $x_1$  e  $x_2$  variam com o tempo de acordo com

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 - a_{12}x_1x_2$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_2 - a_{22}x_1x_2$$

onde  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  e  $a_{22}$  são constantes positivas e  $x_1$  e  $x_2$  são não negativas. Estas equações são as chamadas equações de competição de Volterra.

Se um dado agente químico é fornecido às espécies, as populações variam de acordo com as seguintes equações:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 - a_{12}x_1x_2 - b_1u$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_2 - a_{22}x_1x_2 - b_2u$$

onde  $b_1$  e  $b_2$  são constantes positivas e  $u$  é a entrada controlante (a quantidade de agente químico neste exemplo). Um problema interessante é minimizar, em um dado intervalo de tempo, a população  $x_1$ , enquanto se mantém a população  $x_2$  tão grande quanto possível. Este é um exemplo de um sistema biológico no qual pode ser aplicada a teoria de controle.

**Sistemas de controle de estoque.** A programação industrial da taxa de produção e nível de estoque é um outro exemplo de sistema de controle em malha-fechada. O nível de estoque real, que é a saída do sistema, é comparado com o nível de estoque desejado, que pode variar de tempos em tempos de acordo com o mercado. Se houver qualquer diferença entre o nível de estoque real e o nível de estoque desejado, então a taxa de produção é ajustada de modo que a saída sempre esteja no nível desejado ou próximo dele, o qual é escolhido para maximizar o lucro.

**Sistemas comerciais.** Um sistema comercial pode consistir em muitos grupos. Cada tarefa designada a um grupo representará um elemento dinâmico do sistema. Métodos com realimentação para relato das realizações de cada grupo devem ser estabelecidos neste sistema a fim de se obter uma operação apropriada. O inter-relacionamento entre grupos funcionais deve ser minimizado de modo a reduzir os atrasos indesejáveis no sistema. Quanto menor este inter-relacionamento, menores serão o fluxo de sinais e materiais de trabalho.

Um sistema comercial é um sistema de malha-fechada. Um bom projeto reduzirá o controle administrativo requerido. Note que os distúrbios neste sistema correspondem à carência de mão-de-obra ou materiais, interrupção de comunicação, erros humanos etc.

O estabelecimento de um sistema de estimativa bem fundamentado baseado em estatística é imperativo para uma administração apropriada. (Note que é um fato bem conhecido que o desempenho de um sistema deste tipo pode ser melhorado pelo uso de "tempo adiantado" ou "antecipação".)

Para aplicar a teoria de controle a fim de melhorar o desempenho de um sistema deste tipo, devemos representar as características dinâmicas dos grupos componentes do sistema por um conjunto de equações relativamente simples.

Embora seja certamente um problema difícil deduzir as representações ma-

temáticas dos grupos componentes, a aplicação de técnicas de otimização a sistemas comerciais representa uma área interessante na qual melhorias significativas em desempenho podem ser esperadas.

## 1.5 PRINCÍPIOS DE PROJETO EM SISTEMAS DE CONTROLE

**Requisitos gerais de um sistema de controle.** Qualquer sistema de controle deve ser estável. Esta é uma exigência fundamental. Além da estabilidade absoluta, um sistema de controle deve possuir uma estabilidade relativa razoável; isto é, a velocidade de resposta deve ser razoavelmente rápida e esta resposta deve possuir uma amortecimento razoável. Um sistema de controle também deve ser capaz de reduzir erros a zero ou a algum valor pequeno tolerável. Qualquer sistema de controle útil deve satisfazer estes requisitos.

A exigência de estabilidade relativa razoável e precisão em estado estacionário tendem a ser incompatíveis. Nos projetos de sistemas de controle deve-se, portanto, estabelecer o compromisso mais eficiente entre estes dois requisitos.

**Problemas básicos no projeto de sistema de controle.** A Fig. 1.9 representa um diagrama de blocos de um sistema de controle. O controlador produz sinais de controle baseado nas variáveis de entrada de referência e nas variáveis de saída. Nas situações práticas sempre haverá alguns distúrbios agindo na planta. Estes podem ser de origem externa ou interna e aleatórios ou previsíveis. O controlador deve levar em consideração quaisquer distúrbios que possam afetar as variáveis de saída.

Para determinar o sinal de controle ótimo é necessário definir o índice de desempenho. Este índice é uma medida quantitativa do desempenho, medindo o desvio em relação ao desempenho ideal. A especificação do sinal de controle durante o intervalo de tempo de operação é denominada *lei de controle*. Matematicamente, o problema de controle básico é determinar a lei de controle ótimo, sujeita a vários vínculos de engenharia e econômicos, que minimizam um dado índice de desempenho.

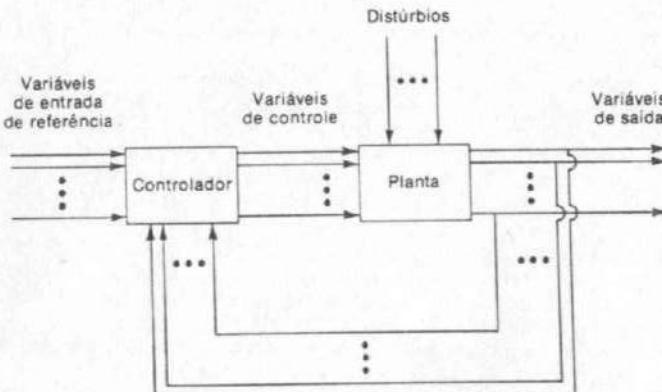


Fig. 1.9 Diagrama de blocos de um sistema de controle.

Para sistemas relativamente simples, a lei de controle pode ser obtida analiticamente. Para sistemas complexos pode ser necessário gerar uma lei de controle ótimo com um computador digital *on-line*.

**Análise.** Por análise de um sistema de controle designamos a investigação, sob condições específicas do desempenho, do sistema cujo modelo matemático é conhecido.

Desde que qualquer sistema é constituído por componentes, a análise deve iniciar com uma descrição matemática de cada componente. Uma vez que o modelo matemático do sistema completo foi obtido, a maneira pela qual a análise é conduzida independe de o sistema físico ser pneumático, elétrico, mecânico etc.

**Projeto.** Projetar um sistema significa determiná-lo de modo a desempenhar uma dada tarefa. Em geral o procedimento de projeto não é direto e requer métodos de tentativa-e-erro.

**Síntese.** Por síntese, interpretamos a determinação por um procedimento direto de um sistema que funcione de uma maneira específica. Normalmente este procedimento é inteiramente matemático desde seu início até o fim do processo do projeto. Procedimentos de síntese são atualmente disponíveis para redes lineares e para sistemas lineares ótimos.

**Abordagem básica em projetos de sistemas de controle.** A abordagem básica para o projeto de qualquer sistema de controle prático envolve, necessariamente, procedimentos de tentativa-e-erro. A síntese de sistemas de controle lineares é teoricamente possível, e o engenheiro de controle pode determinar sistematicamente os componentes necessários para desempenhar uma dada função e atingir o objetivo desejado. Na prática, entretanto, o sistema pode estar sujeito a muitos vínculos ou pode ser não linear, e, nestes casos, não existe nenhum método de síntese disponível até o presente. Além disso, as características dos componentes podem não ser conhecidas com precisão. Consequentemente, procedimentos de tentativa-e-erro sempre são necessários.

Na prática quase sempre são encontradas situações onde é fornecida uma certa planta, e o engenheiro de controle deve projetar o resto do sistema de modo que o conjunto apresente as especificações desejadas desempenhando uma dada tarefa. Note que as especificações devem ser interpretadas em termos matemáticos.

É importante lembrar que algumas das especificações podem não ser realistas. Neste caso, as especificações devem ser revistas nos estágios iniciais do projeto.

Em muitos casos, o projeto de um sistema de controle se desenvolve como segue: o engenheiro inicia o procedimento do projeto conhecendo as especificações ou índice de desempenho, a dinâmica da planta fornecida e a dinâmica dos componentes; este último envolve parâmetros de projeto. O engenheiro de controle aplica então, técnicas de síntese, se disponíveis, conjuntamente com outras técnicas a fim de elaborar um modelo matemático do sistema.

Uma vez formulado o problema do projeto em termos deste modelo, o engenheiro desenvolve um projeto matemático que fornece a solução da versão matemática do problema do projeto. (Neste estágio, é importante a simulação do modelo matemático em um computador. Note que a teoria de controle ótimo é muito útil neste estágio de projeto porque fornece o limite superior do desempenho do sistema para um dado índice de desempenho.)

Após haver sido completado o projeto matemático, o engenheiro de controle

simula um modelo em um computador a fim de testar o comportamento do sistema resultante em resposta a vários sinais e distúrbios. Normalmente, a configuração do sistema inicial não é satisfatória. O sistema deve então ser reprojeto e efetuada a análise correspondente. Este procedimento de projeto e análise é repetido até ser obtido um sistema satisfatório. Pode então ser construído um sistema físico protótipo.

Note que este procedimento para construir um protótipo é o inverso daquele utilizado na modelagem. O protótipo é um sistema físico que representa o modelo matemático com precisão razoável. Uma vez que o protótipo foi construído, o engenheiro o testa a fim de verificar se é ou não satisfatório. Se for, o projeto está concluído. Em caso contrário, o protótipo deve ser modificado e testado. Este procedimento continua até o protótipo estar completamente satisfatório.

## 1.6 ESBOÇO DO TEXTO

No projeto de um sistema de controle, o engenheiro de controle deve estar apto a determinar e analisar a resposta do sistema em relação a vários sinais e distúrbios. Portanto, iniciaremos com estes problemas de análise. Os Caps. 2-9 e 11-15 são fundamentalmente relacionados com estes problemas, ao passo que os Caps. 10 e 16 dizem respeito exclusivamente a problemas de projeto. Para auxiliar o leitor, discutiremos brevemente o conteúdo e a organização deste livro.

Os Caps. 2 e 3 apresentam uma revisão da base matemática necessária para o entendimento da teoria de controle apresentada neste livro.

O Cap. 4 discute os modelos matemáticos de sistemas físicos. Inicialmente definimos função de transferência e diagrama de bloco, apresentamos uma revisão de várias leis físicas básicas, e deduzimos as equações diferenciais e funções de transferência para vários sistemas físicos. Este capítulo inclui uma discussão básica de gráficos de fluxo de sinal.

O Cap. 5 apresenta vários modos de controle e a introdução de mecânica dos fluidos. O Cap. 6 é relacionado com a análise no domínio do tempo de sistemas de controle. É investigada em detalhes a resposta transitória de sistemas de controle. O critério de estabilidade de Routh é incluído neste capítulo. Também é incluída uma breve discussão sobre técnicas de simulação com computador analógico.

O Cap. 7 apresenta análises de erros e uma introdução à otimização de sistemas. O Cap. 8 introduz o método do lugar das raízes, enquanto o Cap. 9 apresenta as técnicas clássicas, porém muito usadas, conhecidas como métodos de resposta em frequência. O critério de estabilidade de Nyquist é deduzido e aplicado à análise de estabilidade em sistemas de controle.

O Cap. 10 apresenta técnicas de projeto e compensação. São apresentados exemplos de compensação de sistemas utilizando as técnicas do lugar das raízes e de resposta em frequência.

O Cap. 11 discute a análise por função-descritiva de sistemas de controle não lineares. O Cap. 12 é relacionado com o bem conhecido método do plano de fase. O Cap. 13 introduz sistemas discretos no tempo e apresenta o método da transformada-z.

Os Caps. 14-16 apresentam uma introdução à teoria de controle moderna. Especificamente, o Cap. 14 introduz o conceito de estado, variáveis de estado e espaço de estado. A representação no espaço de estados de sistemas de controle e a solução de equações de estado são então apresentadas. O Cap. 15 refere-se aos métodos de Liapunov para análise de estabilidade. Finalmente, O Cap. 16 apresenta os conceitos de controlabilidade e observabilidade, sistemas de controle ótimo e uma introdução a sistemas de controle adaptativo.

Os métodos de resposta em frequência, a parte fundamental da teoria de

controle clássica, são muito usados na indústria. São úteis no tratamento de sistemas de controle invariáveis no tempo com saída-simples-entrada-simples.

A teoria de controle moderna apresenta muitas vantagens em relação à teoria de controle clássica. A primeira é aplicável no projeto de sistemas multivariáveis e variáveis no tempo. Possibilita ao engenheiro de controle levar em conta condições iniciais arbitrárias na síntese de controle ótimo de sistemas. Nesta síntese necessitamos considerar apenas os aspectos analíticos do problema. Um computador digital pode ser programado para operar todos os cálculos numéricos necessários. Esta é uma das vantagens fundamentais da teoria de controle moderna.

É importante salientar que a teoria de controle moderna não substitui completamente a teoria de controle clássica. As duas abordagens complementam-se. A engenharia de controle moderna é baseada nos aspectos úteis das teorias de controle clássica e moderna. A finalidade deste livro é fornecer ao leitor uma boa base e o uso das ferramentas da engenharia de controle moderna.

## PROBLEMAS ILUSTRATIVOS E SOLUÇÕES

**Problema A.1.1** Liste as principais vantagens e desvantagens de sistemas de controle em malha-aberta.

**Solução.** As vantagens dos sistemas de controle em malha-aberta são as seguintes:

1. Construção simples e facilidade de manutenção.
2. Menos dispendioso do que um sistema em malha-fechada correspondente.
3. Não há problema de estabilidade.
4. Conveniente quando a saída é difícil de medir ou economicamente não disponível. (Por exemplo, seria bem caro desenvolver um dispositivo para medir a qualidade da saída de uma torradeira.)

As desvantagens de sistemas de controle em malha-aberta são as seguintes:

1. Distúrbios e variações na calibração acarretam erros, e a saída pode ser diferente da desejada.
2. Para manter a qualidade requerida na saída, é necessária a recalibração de tempos em tempos.

**Problema A.1.2** [A Fig. 1.10(a) representa um diagrama esquemático de um sistema de controle de nível de líquido. Neste diagrama o controlador automático mantém o nível do líquido comparando o nível real com um nível desejado e corrigindo qualquer erro pelo ajuste da abertura da válvula pneumática. A Fig. 1.10(b) apresenta um diagrama de blocos do sistema de controle.] Desenhe o diagrama de blocos correspondente para um sistema de controle de nível de líquido operado por um ser humano.

**Solução.** No sistema operado por um ser humano, os olhos, o cérebro e os músculos correspondem ao dispositivo de medida, controlador e válvula pneumática, respectivamente. Um diagrama de blocos é indicado na Fig. 1.11.

**Problema A.1.3** Um sistema organizacional de engenharia é composto de muitos grupos, tais como administração, pesquisa e desenvolvimento, projeto preliminar, experimentos, projeto do produto e desenhos, fabricação e montagem, e testes. Estes grupos são inter-relacionados a fim de constituir uma operação global conjunta.

O sistema pode ser analisado pela redução a um conjunto mais elemental de componentes necessários, os quais podem fornecer o detalhamento analítico exigido, bem como por um conjunto de equações simples que representam as características dinâmicas de cada componente. (O desempenho dinâmico de um sistema como este pode ser determinado a partir da relação entre a execução progressiva e o tempo.)

Desenhe um diagrama de blocos funcional mostrando um sistema organizacional de engenharia.

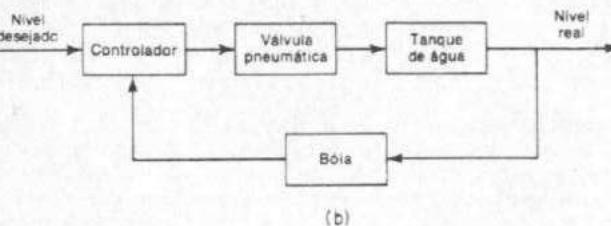
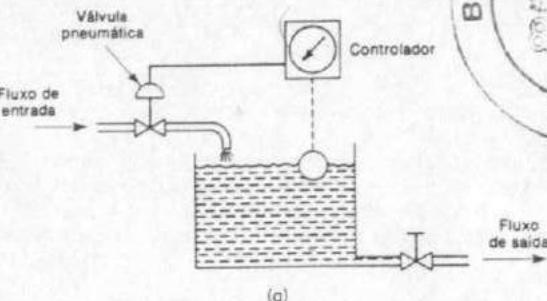


Fig. 1.10 (a) Sistema de controle de nível de líquido; (b) diagrama de blocos.

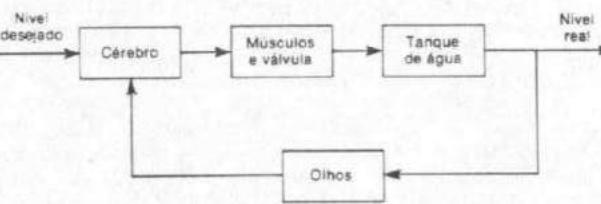


Fig. 1.11 Diagrama de blocos de um sistema de controle de nível de líquido operado por um ser humano.

**Solução.** Um diagrama de blocos funcional pode ser desenhado utilizando-se blocos para representarem as atividades funcionais e linhas de sinal de interligação para representarem a informação ou saída do produto da operação do sistema. Um diagrama de blocos possível é mostrado na Fig. 1.12.

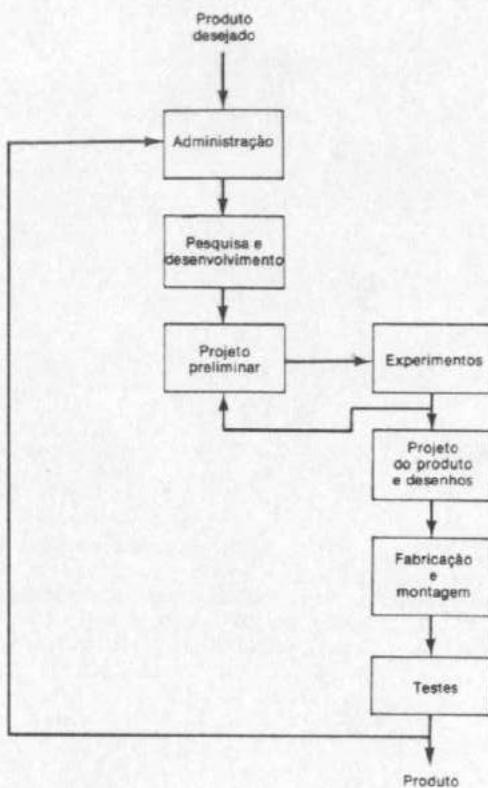


Fig. 1.12 Diagrama de blocos de um sistema organizacional de engenharia.

## PROBLEMAS

**Problema B.1.1** Muitos sistemas de controle em malha-aberta e em malha-fechada podem ser encontrados em uma residência. Relacione alguns exemplos e descreva-os.

**Problema B.1.2** Desenhe um diagrama de blocos de um sistema de aquecimento residencial. Note que um termostato é o controlador do sistema. Estabeleça quais distúrbios poderiam existir em tal sistema.

**Problema B.1.3** A Fig. 1.13 indica um sistema de controle de tensão. Explique a seqüência das ações de controle quando a velocidade de alimentação é variada subitamente em um curto intervalo de tempo.

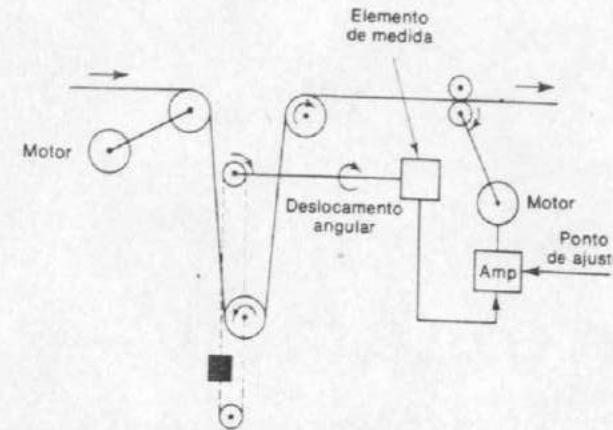


Fig. 1.13 Sistema de controle de tensão.

**Problema B.1.4** A Fig. 1.14 mostra um sistema de controle auto-operado. Explique sua operação.

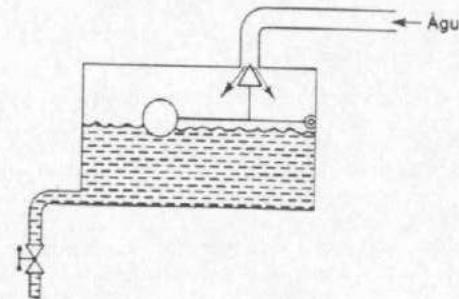


Fig. 1.14 Sistema de controle auto-operado.

# Base Matemática — Transformada de Laplace

## 2.1 INTRODUÇÃO

O método da transformada de Laplace é um método operacional que pode ser usado com vantagens para resolver equações diferenciais lineares. Usando transformadas de Laplace, podem-se converter muitas funções comuns, tais como funções senoidais, funções senoidais amortecidas, e funções exponenciais em funções algébricas de uma variável complexa. Operações como diferenciação e integração podem ser substituídas por operações algébricas no plano complexo. Desta forma, uma equação diferencial linear pode ser transformada em uma equação algébrica em uma variável complexa. A solução da equação diferencial pode então ser achada através do uso de uma tabela de transformadas de Laplace ou pelo uso da técnica de expansão em frações parciais, que é apresentada na Seção 2.4.

Uma vantagem do método da transformada de Laplace é que ele permite o uso de técnicas gráficas para prever o desempenho do sistema sem a necessidade de resolver as equações diferenciais deste. Outra vantagem do método da transformada de Laplace é que, quando se resolve a equação diferencial, tanto a componente transitória como a de regime permanente da solução podem ser obtidas simultaneamente.

**Revisão de variáveis complexas e funções complexas.** Antes de definir a transformada de Laplace da função do tempo  $f(t)$ , apresentamos uma revisão muito breve de variáveis complexas e funções complexas. Uma variável complexa  $s$  tem uma componente real  $\sigma$  e uma componente imaginária  $j\omega$ , ou  $s = \sigma + j\omega$ . Uma variável complexa  $s$  pode ser representada por um ponto no plano  $s$ . A Fig. 2.1 ilustra o plano  $s$  e um ponto representativo  $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ . Uma função complexa

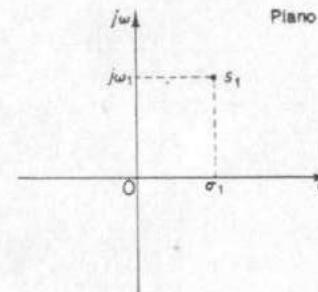


Fig. 2.1 Plano  $s$  e um ponto representativo.

$G(s)$ , uma função de  $s$ , tem uma parte real e uma parte imaginária, ou

$$G(s) = G_x + jG_y,$$

onde  $G_x$  e  $G_y$  são reais. O módulo de uma grandeza complexa ( $G_x + jG_y$ ) é dado por  $\sqrt{G_x^2 + G_y^2}$ , e o ângulo  $\theta$  de ( $G_x + jG_y$ ) é dado por  $\theta = \tan^{-1}(G_y/G_x)$ .\* A Fig. 2.2 mostra o plano complexo e dois valores complexos representativos. O ângulo  $\theta$  é medido a partir do eixo real positivo. Uma rotação em sentido anti-horário é definida como a direção positiva para fins de medição de ângulos.

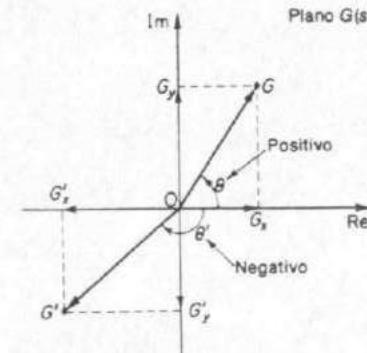


Fig. 2.2 Plano complexo e duas grandezas complexas representativas.

O complexo conjugado de  $G(s) = G_x + jG_y$  é definido como  $\bar{G}(s) = G_x - jG_y$ . Uma quantidade complexa e seu conjugado têm a mesma parte real, mas a parte imaginária de uma é o valor negativo da parte imaginária da outra.

As funções complexas  $G(s)$  normalmente encontradas em sistemas de controle linear são funções unívocas de  $s$  e são determinadasunicamente para um dado valor

\*Usaremos indistintamente a notação arctg ou  $\tan^{-1}$  (N. do T.)

de  $s$ . Uma função complexa  $G(s)$  é dita *analítica* em uma região se  $G(s)$  e todas suas derivadas existem naquela região. A derivada de uma função analítica  $G(s)$  é dada por

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}G(s) &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{G(s + \Delta s) - G(s)}{\Delta s} \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta s}\end{aligned}$$

O valor da derivada é independente da escolha da trajetória  $\Delta s$ . Uma vez que  $\Delta s = \Delta\sigma + j\Delta\omega$ ,  $\Delta s$  pode se aproximar de zero ao longo de um número infinito de diferentes trajetórias. Pode-se mostrar, embora não seja provado aqui, que se as derivadas tomadas ao longo de duas trajetórias quaisquer, especificamente  $\Delta s = \Delta\sigma$  e  $\Delta s = j\Delta\omega$ , são iguais, então a derivada é única para qualquer outra trajetória  $\Delta s = \Delta\sigma + j\Delta\omega$ .

Para uma particular trajetória  $\Delta s = \Delta\sigma$  (que significa que a trajetória é paralela ao eixo real).

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}G(s) &= \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta G_x}{\Delta\sigma} + j \frac{\Delta G_y}{\Delta\sigma} \right) \\ &= \frac{\partial G_x}{\partial \sigma} + j \frac{\partial G_y}{\partial \sigma}\end{aligned}$$

Para uma outra trajetória em particular  $\Delta s = j\Delta\omega$  (que significa que a trajetória é paralela ao eixo imaginário).

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}G(s) &= \lim_{j\Delta\omega \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta G_x}{j\Delta\omega} + j \frac{\Delta G_y}{j\Delta\omega} \right) \\ &= -j \frac{\partial G_x}{\partial \omega} + \frac{\partial G_y}{\partial \omega}\end{aligned}$$

Se estes dois valores da derivada são iguais,

$$\frac{\partial G_x}{\partial \sigma} + j \frac{\partial G_y}{\partial \sigma} = \frac{\partial G_x}{\partial \omega} - j \frac{\partial G_y}{\partial \omega}$$

ou se as duas condições seguintes:

$$\frac{\partial G_x}{\partial \sigma} = \frac{\partial G_x}{\partial \omega} \quad \text{e} \quad \frac{\partial G_y}{\partial \sigma} = -\frac{\partial G_y}{\partial \omega}$$

são satisfeitas, então a derivada  $dG(s)/ds$  é determinada unicamente. Estas duas condições são conhecidas como condições de Cauchy-Riemann.

Como um exemplo, considere o seguinte  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Então,

$$\begin{aligned}G(\sigma + j\omega) &= \frac{1}{\sigma + j\omega + 1} \\ &= G_x + jG_y\end{aligned}$$

onde

$$G_x = \frac{\sigma + 1}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2} \quad \text{e} \quad G_y = \frac{-\omega}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2}$$

Percebe-se que, exceto no ponto  $s = -1$  (explicitamente,  $\sigma = -1, \omega = 0$ ),  $G(s)$  satisfaz as condições de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_x}{\partial \sigma} &= \frac{\partial G_x}{\partial \omega} = \frac{\omega^2 - (\sigma + 1)^2}{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2]^2} \\ \frac{\partial G_y}{\partial \sigma} &= -\frac{\partial G_x}{\partial \omega} = \frac{2\omega(\sigma + 1)}{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2]^2}\end{aligned}$$

Portanto  $G(s) = 1/(s+1)$  é analítica em todo plano  $s$  exceto em  $s = -1$ . A derivada  $dG(s)/ds$ , exceto em  $s = -1$ , é

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}G(s) &= \frac{\partial G_x}{\partial \sigma} + j \frac{\partial G_y}{\partial \sigma} = \frac{\partial G_x}{\partial \omega} - j \frac{\partial G_y}{\partial \omega} \\ &= -\frac{1}{(\sigma + j\omega + 1)^2} \\ &= -\frac{1}{(s+1)^2}\end{aligned}$$

Note que a derivada de uma função analítica pode ser obtida simplesmente pela diferenciação de  $G(s)$  com relação a  $s$ . Neste exemplo,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+1}\right) = -\frac{1}{(s+1)^2}$$

Pontos do plano  $s$  em que a função  $G(s)$  é analítica são chamados de pontos *ordinários*, enquanto que pontos do plano  $s$  em que a função  $G(s)$  não é analítica são chamados de pontos *singulares*. Pontos singulares em que a função  $G(s)$  ou suas derivadas se aproximam de infinito são chamados *pólos*. Por exemplo,

$$G(s) = \frac{K(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)^2} \tag{2-1}$$

tem pólos em  $s = -p_1$  e  $s = -p_2$ .

Se  $G(s)$  tender a infinito quando  $s$  tender a  $-p$  e se a função

$$G(s)(s+p)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

tem um valor finito não nulo em  $s = -p$ , então  $s = -p$  é chamado um pôlo de ordem  $n$ . Se  $n = 1$ , o pôlo é chamado um pôlo simples. Se  $n = 2, 3, \dots$ , o pôlo é chamado de pôlo de segunda ordem, pôlo de terceira ordem etc.

Pontos em que a função  $G(s)$  é igual a zero são chamados de zeros. A função dada pela Eq. (2.1) tem um zero em  $s = -z$ . Se pontos no infinito são também contados,  $G(s)$  tem o mesmo número de pôlos que zeros. A função  $G(s)$  dada pela Eq. (2.1) tem dois zeros no infinito em adição ao zero finito em  $s = -z$ , pois

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{s^2} \rightarrow 0$$

Portanto,  $G(s)$  tem três pôlos e três zeros (um zero finito e dois infinitos).

**Mapeamento conforme.** Um mapeamento que preserva tanto o tamanho como o sentido dos ângulos é chamado *conforme*. Considere uma função analítica  $z = F(s)$ . A relação funcional  $z = F(s)$  pode ser interpretada como um mapeamento de pontos do plano  $s$  sobre pontos do plano  $z$  ou o plano  $F(s)$ . Para qualquer ponto  $P$  do plano  $s$  em que  $F(s)$  é regular (significando não-singular), corresponde um ponto  $P'$  no plano  $F(s)$ .  $P'$  é chamado de imagem de  $P$ , sendo dado pela função  $z = F(s)$ .

Um mapeamento dado por uma função analítica é *conforme*. Isto é, duas curvas suaves no plano  $s$  que se interceptam e formam um ângulo  $\theta$  são mapeadas sobre duas curvas suaves no plano  $F(s)$  que se interceptam e formam o mesmo ângulo  $\theta$ . (Note que pode ocorrer distorção da forma das duas curvas no mapeamento, embora os ângulos e o sentido dos mesmos sejam preservados.)

Se a função  $G(s)$  é regular e unívoca em um domínio  $\Gamma$ , então a imagem de uma curva contínua em  $\Gamma$  mapeada por  $z = F(s)$  também é uma curva contínua.

Para provar que o mapeamento associado com uma função analítica  $z = F(s)$  é conforme, considere uma curva suave  $s = s(\xi)$ , que passa por um ponto ordinário  $s_0$ . Se escrevermos  $z_0 = F(s_0)$ , então

$$z - z_0 = \frac{F(s) - F(s_0)}{s - s_0}(s - s_0)$$

Portanto,

$$|z - z_0| = \sqrt{\frac{F(s) - F(s_0)}{s - s_0}} + |s - s_0|$$

onde  $|s - s_0|$  é o ângulo entre o eixo real positivo e o vetor apontando de  $s_0$  a  $s$ . Se  $s$  tende a  $s_0$  ao longo da curva suave  $s(\xi)$ , então  $|s - s_0|$  é o ângulo  $\theta_1$  entre o eixo real positivo e a tangente à curva em  $s_0$ . Da mesma forma, à medida que  $z$  tende a  $z_0$ ,  $|z - z_0|$  tende ao ângulo  $\phi_1$ , que é o ângulo entre o eixo real positivo e a tangente a  $F(s)$  em  $s_0$ . Portanto, obtemos

$$\phi_1 = |F'(s_0)| + \theta_1$$

contanto que  $F'(s_0)$ , a derivada de  $F(s)$  calculada em  $s = s_0$  não é zero. (Note que a menos que  $F'(s_0) \neq 0$ ,  $|F'(s_0)|$  não pode ser definida.) Portanto

$$\phi_1 - \theta_1 = |F'(s_0)|$$

Observe também que  $\phi_1 - \theta_1$  depende não da curva suave  $s = s(\xi)$  escolhida em particular, mas sim do ponto  $s_0$ .

Usando uma outra curva suave  $s = s_2(\xi)$  passando pelo ponto  $s_0$ , podemos fazer uma análise similar, obtendo

$$\phi_2 - \theta_2 = |F'(s_0)|$$

Portanto

$$\phi_1 - \theta_1 = \phi_2 - \theta_2$$

ou

$$\phi_2 - \phi_1 = \theta_2 - \theta_1$$

Portanto, o tamanho e sentido dos ângulos são preservados neste mapeamento. Acabamos então de ver que o mapeamento dado pela função analítica  $z = F(s)$  é conforme em todos pontos em que  $F(s)$  é regular e  $F'(s) \neq 0$ .

Utilizaremos mapeamento conforme ao discutir os gráficos do método do lugar das raízes (Cap. 8) e o critério de estabilidade de Nyquist (Cap. 9).

Finalmente, observe que pode ser provado que um mapeamento não pode ser conforme em todos pontos de um domínio  $\Gamma$  a não ser que o mapeamento seja dado por uma função analítica  $z = F(s)$  que é regular no domínio. A conformidade de mapeamento é uma característica de funções analíticas.

## 2.2 TRANSFORMADA DE LAPLACE

Esta seção apresenta uma definição da transformada de Laplace, uma breve discussão da condição para a existência da transformada de Laplace, e exemplos para ilustrar a obtenção das transformadas de Laplace de várias funções comumente utilizadas.

Vamos definir

$f(t)$  = uma função do tempo  $t$  tal que  $f(t) = 0$  para  $t < 0$

$s$  = uma variável complexa

$\mathcal{L}$  = um símbolo operacional indicando que a quantidade que ele prefixa é para ser transformada pela integral de Laplace  $\int_0^\infty e^{-st} dt$

$F(s)$  = transformada de Laplace de  $f(t)$

Então a transformada de Laplace de  $f(t)$  é definida por

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt [f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

*Exemplo 2.1 Função exponencial.* Considere a seguinte função:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 && \text{para } t < 0 \\ &= Ae^{-st} && \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

onde  $A$  e  $\alpha$  são constantes. A transformada de Laplace de  $f(t)$  é obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{\infty} Ae^{-\alpha t} e^{-st} dt \\ &= A \int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)t} dt \\ &= \frac{A}{s+\alpha}\end{aligned}$$

Vemos então que a função exponencial produz um pôlo no plano complexo. Ao realizar esta integração, supusemos que a parte real de  $s$  era maior que  $-\alpha$ . (Observe que tal suposição é necessária para tornar a integral absolutamente convergente.)

A transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  existe se  $f(t)$  é seccionalmente contínua em todo intervalo finito na região  $t > 0$  e se a função é de ordem exponencial quando  $t$  tende a infinito. Em outras palavras, a integral de Laplace deve convergir. Uma função  $f(t)$  é de ordem exponencial se existe uma constante  $\sigma$  real e positiva tal que a função

$$e^{-\sigma t} |f(t)|$$

tende a zero quando  $t$  tende a infinito. Se o limite da função  $e^{-\sigma t}|f(t)|$  tende a zero para  $\sigma$  maior que  $\sigma_c$  e o limite tende a infinito para  $\sigma$  menor que  $\sigma_c$ , o valor  $\sigma_c$  é chamado de *abscissa de convergência*.

Para a função  $f(t) = Ae^{-\alpha t}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma t} |Ae^{-\alpha t}|$$

tende a zero se  $\sigma > -\alpha$ . A abscissa de convergência neste caso é  $\sigma_c = -\alpha$ . A integral  $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$  converge apenas se  $\sigma$ , a parte real de  $s$ , é maior que a abscissa de convergência  $\sigma_c$ . Portanto o operador  $s$  deve ser escolhido como uma constante tal que esta integral convirja.

Em termos dos pólos da função  $F(s)$ , a abscissa de convergência  $\sigma_c$  corresponde à parte real do pôlo localizado mais distante à direita no plano  $s$ . Por exemplo, para a seguinte função  $F(s)$ ,

$$F(s) = \frac{K(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

a abscissa de convergência  $\sigma_c$  é igual a  $-1$ . Pode-se ver que para funções como  $t$ ,  $\sin \omega t$ ,  $t \sin \omega t$  a abscissa de convergência é igual a zero. Para funções como  $e^{-ct}$ ,  $te^{-ct}$ ,  $e^{-ct} \sin \omega t$  etc., a abscissa de convergência é igual a  $-c$ . Para funções que crescem mais depressa que a função exponencial é impossível se achar valores adequados para a abscissa de convergência. Portanto, funções como  $e^t$  e  $te^t$  não possuem transformadas de Laplace.

O leitor deve ser alertado para o fato de que, embora  $e^t$  (para  $0 \leq t \leq \infty$ ) não possua uma transformada de Laplace, a função do tempo definida por

$$\begin{aligned}f(t) &= e^t && \text{para } 0 \leq t \leq T < \infty \\ &= 0 && \text{para } t < 0, T < t\end{aligned}$$

possui uma transformada de Laplace pois  $f(t) = e^t$  em apenas um intervalo limitado  $0 \leq t \leq T$  e não em  $0 \leq t \leq \infty$ . Tal tipo de sinal pode ser gerado fisicamente. Observe que os sinais que podemos gerar fisicamente sempre têm uma correspondente transformada de Laplace.

Ao derivar a transformada de Laplace de  $f(t) = Ae^{-\alpha t}$  no Exemplo 2.1, impussemos que a parte real de  $s$  fosse maior que  $-\alpha$  (a abscissa de convergência). Uma pergunta que pode surgir de imediato é se a transformada de Laplace obtida é válida ou não na região  $\sigma < -\alpha$  do plano  $s$ . Para responder a esta pergunta, devemos utilizar a teoria de variáveis complexas. Na teoria de variáveis complexas, há um teorema conhecido como o teorema de extensão analítica. Este diz que se duas funções analíticas são iguais em um comprimento finito ao longo de qualquer arco em uma região em que ambas são analíticas, então elas são iguais em todo lugar desta região. O arco de igualdade é normalmente o eixo real, ou uma porção deste. Usando este teorema, a forma de  $F(s)$ , determinada por uma integração em que  $s$  pode tomar qualquer valor real positivo maior que a abscissa de convergência, vale para quaisquer valores complexos de  $s$  em que  $F(s)$  é analítica. Portanto, embora façamos a exigência da parte real de  $s$  ser maior que a abscissa de convergência para fazer a integral  $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$  ser absolutamente convergente, uma vez que a transformada de Laplace é obtida,  $F(s)$  pode ser considerada válida ao longo de todo o plano  $s$  exceto nos pólos de  $F(s)$ .

Se uma função  $f(t)$  tem uma transformada de Laplace, então a transformada de Laplace de  $Af(t)$ , onde  $A$  é uma constante, é dada por

$$\mathcal{L}[Af(t)] = A\mathcal{L}[f(t)]$$

Isto é óbvio pela definição da transformada de Laplace. Da mesma forma, se as funções  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  têm transformadas de Laplace, então a transformada de Laplace da função  $f_1(t) + f_2(t)$  é dada por

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]$$

Novamente, a demonstração desta igualdade é evidente da definição da transformada de Laplace.

A seguir, derivamos transformadas de Laplace de algumas funções encontradas com freqüência. Note que a transformada de Laplace de qualquer função  $f(t)$  transformável segundo Laplace é obtida multiplicando-se  $f(t)$  por  $e^{-st}$  e então integrando o produto de  $t = 0$  a  $t = \infty$ . (Note também que uma vez que sabemos o método de obtenção da transformada de Laplace, não é necessário derivar a transformada de Laplace de  $f(t)$  a cada vez. Podem-se utilizar tabelas de transformada de Laplace para achar a transformada de uma dada função  $f(t)$ .)

*Exemplo 2.2 Função degrau.* Considere a seguinte função degrau:

$$\begin{aligned}f(t) &= 0 && \text{para } t < 0 \\ &= A = \text{constante} && \text{para } t > 0\end{aligned}$$

A função degrau aqui não é definida em  $t = 0$ . Mas isto é irrelevante pois

$$\int_{0-}^{0+} Ae^{-st} dt = 0$$

A transformada de Laplace de  $f(t)$  é dada por

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} Ae^{-st} dt = \frac{A}{s}$$

Ao fazer esta integração, supomos que a parte real de  $s$  é maior que zero (a abscissa de convergência) e portanto que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st}$  é zero. Como explicado anteriormente, a transformada de Laplace é válida em todo plano  $s$  exceto no pólo  $s = 0$ .

A função degrau cuja amplitude é unitária é chamada função *degrau unitário*. A função degrau unitário que ocorre em  $t = t_0$  é freqüentemente escrita como  $u(t - t_0)$  ou  $1(t - t_0)$ . Neste livro usaremos a notação  $1(t - t_0)$  a não ser que haja menção em contrário. A função degrau de amplitude  $A$  pode ser escrita como  $f(t) = A1(t)$ . A transformada de Laplace da função degrau unitário que é definida por

$$\begin{aligned} 1(t) &= 0 && \text{para } t < 0 \\ &= 1 && \text{para } t > 0 \end{aligned}$$

é  $1/s$ , ou

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$

Fisicamente, uma função degrau ocorrendo em  $t = 0$  corresponde a um sinal constante aplicado subitamente ao sistema no instante  $t$  igual a zero.

*Exemplo 2.3 Função rampa.* Considere a seguinte função rampa:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 && \text{para } t < 0 \\ &= At && \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

onde  $A$  é uma constante. A transformada de Laplace da função rampa é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= A \int_0^{\infty} te^{-st} dt \\ &= At \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} A \frac{e^{-st}}{-s} dt \\ &= \frac{A}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \frac{A}{s^2} \end{aligned}$$

*Exemplo 2.4 Função senoidal.* A transformada de Laplace da seguinte função senoidal:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 && \text{para } t < 0 \\ &= A \sin \omega t && \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

onde  $A$  e  $\omega$  são constantes, é obtida da seguinte forma:

$$\mathcal{L}[f(t)] = A \int_0^{\infty} (\sin \omega t) e^{-st} dt$$

Uma vez que

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

obtemos

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \frac{A}{2j} \int_0^{\infty} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-st} dt \\ &= \frac{A}{2j} \frac{1}{s - j\omega} - \frac{A}{2j} \frac{1}{s + j\omega} \\ &= \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

A transformada de Laplace de  $\cos \omega t$  pode ser obtida de forma semelhante.

## 2.3 TEOREMAS DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Nesta seção apresentamos vários teoremas da transformada de Laplace que são úteis no estudo de sistemas de controle linear.

**Função transladada.** Obteremos a transformada de Laplace da função translada  $f(t - \alpha)$ . Aqui supomos que  $f(t)$  é zero para  $t < 0$  ou  $f(t - \alpha) = 0$  para  $t < \alpha$ . As funções  $f(t)$  e  $f(t - \alpha)$  são mostradas graficamente na Fig. 2.3.

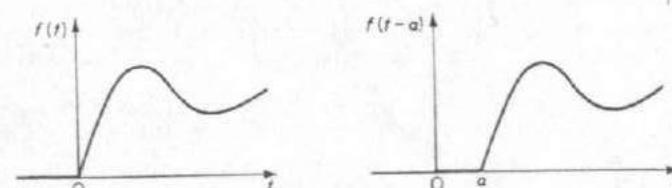


Fig. 2.3 Gráficos de  $f(t)$  e  $f(t - \alpha)$ .

Como  $f(t - \alpha) = 0$  para  $0 < t < \alpha$ ,

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= \int_{-\alpha}^{\infty} f(t - \alpha) e^{-s(t-\alpha)} dt \\ &= e^{-s\alpha} \int_0^{\infty} f(t - \alpha) e^{-st} dt \end{aligned}$$

onde  $t - \alpha = \tau$ . Portanto,

$$\mathcal{L}[f(t - \alpha)] = \int_0^{\infty} f(t - \alpha) e^{-st} dt = e^{-s\alpha} F(s)$$

Esta última equação diz que a translação da função do tempo  $f(t)$  de  $\alpha$  unidades de tempo corresponde à multiplicação da transformada  $F(s)$  por  $e^{-s\alpha}$ .

Para mostrar claramente a implicação de que  $f(t - \alpha)$  é zero para  $t < \alpha$ , é necessário escrever a função transladada como  $f(t - \alpha)l(t - \alpha)$ . Com esta notação,

$$\mathcal{L}[f(t - \alpha)l(t - \alpha)] = e^{-s\alpha} F(s)$$

*Exemplo 2.5 Função pulso.* Considere a seguinte função pulso:

$$\begin{aligned} f(t) &= A = \text{constante} && \text{para } 0 < t < t_0 \\ &= 0 && \text{para } t < 0, t_0 < t \end{aligned}$$

A transformada de Laplace de  $f(t)$  é obtida da seguinte forma: A função pulso  $f(t)$  pode ser considerada uma função degrau de amplitude  $A$  que começa em  $t = 0$  e que é superposta a um degrau negativo de altura  $A$  começando em  $t = t_0$ ; explicitamente,

$$f(t) = A1(t) - A1(t - t_0)$$

A transformada de Laplace de  $f(t)$  é então obtida como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[A1(t)] - \mathcal{L}[A1(t - t_0)] \\ &= \frac{A}{s} - \frac{A}{s} e^{-st_0} \\ &= \frac{A}{s}(1 - e^{-st_0}) \end{aligned}$$

*Exemplo 2.6 Função impulso.* A função impulso é um caso limite especial de uma função pulso. Considere a seguinte função impulso:

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{A}{t_0} && \text{para } 0 < t < t_0 \\ &= 0 && \text{para } t < 0, t_0 < t \end{aligned}$$

Como a amplitude da função impulso é  $A/t_0$  e a duração é  $t_0$ , a área sob o impulso é igual a  $A$ . Como a duração  $t_0$  tende a zero, a altura  $A/t_0$  tende a infinito, mas a área sob o impulso permanece igual a  $A$ . Note que o tamanho de um impulso é medido pela sua área.

A transformada de Laplace da função impulso  $f(t)$  pode ser obtida como segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{A}{t_0 s} (1 - e^{-st_0}) \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{d}{dt_0} \left[ A(1 - e^{-st_0}) \right] \\ &= \frac{d}{dt_0} \left( A(t_0 s) \right) \\ &= \frac{As}{s} \\ &= A \end{aligned}$$

Portanto, a transformada de Laplace da função impulso é igual à área sob o impulso.

A função impulso cuja área é igual à unidade é chamada função *impulso unitário* ou função delta de Dirac. A função impulso unitário, ocorrendo em  $t = t_0$ , é normalmente indicada por  $\delta(t - t_0)$ .  $\delta(t - t_0)$  satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \delta(t - t_0) &= 0 && \text{para } t \neq t_0 \\ \delta(t - t_0) &= \infty && \text{para } t = t_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt &= 1 \end{aligned}$$

Um impulso que tem amplitude infinita e duração nula é uma ficção matemática e não ocorre em sistemas físicos. Se, entretanto, a amplitude de um pulso de entrada a um sistema é muito grande e sua duração muito pequena comparada com as constantes de tempo do sistema, então podemos aproximar a entrada em pulso por uma entrada em função impulso. Por exemplo, se uma força ou torque de entrada  $f(t)$  é aplicada a um sistema por uma duração muito curta  $0 < t < t_0$ , com a magnitude de  $f(t)$  sendo suficientemente grande de tal forma a tornar a integral  $\int_0^{t_0} f(t) dt$  não desprezível, então esta entrada pode ser considerada uma entrada impulsiva. A entrada impulsiva fornece energia ao sistema em um tempo infinitesimal.

Deve-se observar que quando descrevemos a entrada impulsiva, a magnitude ou tamanho do impulso é de máxima importância, mas a forma do impulso normalmente é irrelevante. De fato, qualquer pulso de duração muito curta pode ser considerado um impulso unitário se ele satisfaz a condição de que a área embaixo da curva permanece unitária quando a largura do pulso tende a zero.

O conceito da função impulsiva é bastante útil na diferenciação de funções descontínuas. A função impulso unitário  $\delta(t)$  pode ser considerada como a derivada em função do tempo da função degrau unitário  $l(t)$  no ponto de descontinuidade, ou

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} l(t)$$

Ou inversamente, se a função impulso unitário  $\delta(t)$  é integrada, o resultado é a função degrau unitário  $l(t)$ . Com o conceito da função impulso, podemos diferenciar uma função contendo descontinuidades, obtendo impulsos, cujas magnitudes são iguais à magnitude de cada descontinuidade correspondente.

**Multiplicação de  $f(t)$  por  $e^{-\alpha t}$ .** Se  $f(t)$  é transformável por Laplace, com sua transformada de Laplace sendo  $F(s)$ , então a transformada de Laplace de  $e^{-\alpha t}f(t)$  é obtida como segue:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] &= \int_0^\infty e^{-st}f(t)e^{-\alpha t} dt \\ &= F(s + \alpha)\end{aligned}\quad (2-2)$$

Vemos que a multiplicação de  $f(t)$  por  $e^{-\alpha t}$  tem o efeito de substituir  $s$  por  $(s + \alpha)$  na transformada de Laplace. Ou, inversamente, mudando  $s$  para  $(s + \alpha)$  é equivalente a multiplicar  $f(t)$  por  $e^{-\alpha t}$ . (Note que  $\alpha$  pode ser real ou complexo.)

A relação dada pela Eq. (2.2) é muito útil para se determinar transformadas de Laplace de funções como  $e^{-\alpha t} \sin \omega t$  e  $e^{-\alpha t} \cos \omega t$ . Por exemplo, como

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = F(s)$$

então, da Eq. (2.2), segue-se que a transformada de Laplace de  $e^{-\alpha t} \sin \omega t$  é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \sin \omega t] &= F(s + \alpha) \\ &= \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

**Mudança de escala de tempo.** Ao analisar sistemas físicos, às vezes se deseja mudar a escala de tempo ou normalizar uma dada função do tempo. O resultado obtido em termos de tempo normalizado é útil porque pode ser aplicado diretamente a diferentes sistemas tendo equações matemáticas similares.

Se  $t$  é modificado para  $t/\alpha$ , onde  $\alpha$  é uma constante positiva, então a função  $f(t)$  é modificada para  $f(t/\alpha)$ . Se denotarmos a transformada de Laplace de  $f(t)$  por  $F(s)$ , então a transformada de Laplace de  $f(t/\alpha)$  pode ser obtida como visto abaixo:

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \int_0^\infty f\left(\frac{t}{\alpha}\right)e^{-st} dt$$

Fazendo  $t/\alpha = t_1$  e  $\alpha s = s_1$ , obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] &= \int_0^\infty f(t_1)e^{-s_1 t_1} d(\alpha t_1) \\ &= \alpha \int_0^\infty f(t_1)e^{-s_1 t_1} dt_1 \\ &= \alpha F(s_1)\end{aligned}$$

ou

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \alpha F(s_1)$$

Como um exemplo, considere  $f(t) = e^{-t}$  e  $f(t/5) = e^{-0.2t}$ . Obtemos

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[e^{-t}] = F(s) = \frac{1}{s+1}$$

Portanto

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{5}\right)\right] = \mathcal{L}[e^{-0.2t}] = 5F(5s) = \frac{5}{5s+1}$$

Este resultado pode ser verificado facilmente tomando-se a transformada de Laplace de  $e^{-0.2t}$  diretamente como segue:

$$\mathcal{L}[e^{-0.2t}] = \frac{1}{s+0.2} = \frac{5}{5s+1}$$

**Observação sobre o limite inferior da integral de Laplace.** Em alguns casos,  $f(t)$  possui uma função impulso em  $t = 0$ . Então o limite inferior da integral de Laplace deve ser claramente especificado, se é  $0_-$  ou  $0_+$ , pois as transformadas de Laplace de  $f(t)$  diferem para estes dois limites inferiores. Se tal distinção do limite inferior da integral de Laplace for necessária, então usaremos as seguintes notações:

$$\mathcal{L}_+[f(t)] = \int_{0+}^\infty f(t)e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}_-[f(t)] = \int_{0-}^\infty f(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}_+[f(t)] + \int_{0-}^{0+} f(t)e^{-st} dt$$

Se  $f(t)$  envolve uma função impulsiva em  $t = 0$ , então

$$\mathcal{L}_+[f(t)] \neq \mathcal{L}_-[f(t)]$$

pois

$$\int_{0-}^{0+} f(t)e^{-st} dt \neq 0$$

para tal caso. Obviamente, se  $f(t)$  não possui uma função impulso em  $t = 0$ ,

$$\mathcal{L}_+[f(t)] = \mathcal{L}_-[f(t)]$$

**Teorema da diferenciação.** A transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  é dada por

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0) \quad (2-3)$$

onde  $f(0)$  é o valor inicial de  $f(t)$ , calculado em  $t = 0$ .

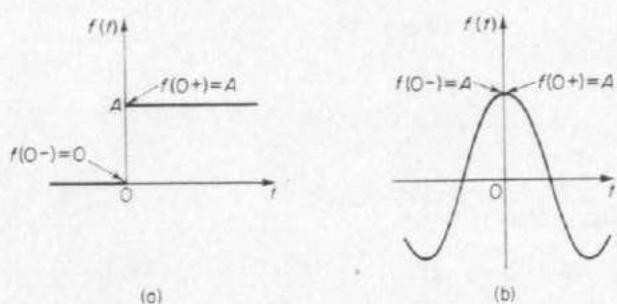


Fig. 2.4 (a) Função degrau; (b) função co-seno.

Para uma dada função  $f(t)$ , os valores de  $f(0_+)$  e  $f(0_-)$  podem ser iguais ou diferentes, como ilustrado na Fig. 2.4. A distinção entre  $f(0_+)$  e  $f(0_-)$  é importante quando  $f(t)$  tem uma descontinuidade em  $t = 0$ , porque em tal caso  $df(t)/dt$  vai ter uma função impulso em  $t = 0$ . Se  $f(0_+) = f(0_-)$ , a Eq. (2.3) deve ser modificada para

$$\mathcal{L}_+ \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0_+)$$

$$\mathcal{L}_- \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0_-)$$

Para demonstrar o teorema da diferenciação, procedemos como segue: Integrando a integral de Laplace por partes, obtemos

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = f(t) \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] \frac{e^{-st}}{-s} dt$$

Portanto,

$$F(s) = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s} \mathcal{L} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right]$$

Resultando

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0)$$

Da mesma forma obtemos as seguintes relações para a segunda derivada de  $f(t)$ :

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d^2}{dt^2} f(t) \right] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

onde  $f(0)$  é o valor de  $df(t)/dt$  calculado em  $t = 0$ . Para deduzir esta equação vamos definir

$$\frac{d}{dt} f(t) = g(t)$$

Então

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \frac{d^2}{dt^2} f(t) \right] &= \mathcal{L} \left[ \frac{d}{dt} g(t) \right] \\ &= s\mathcal{L}[g(t)] - g(0) \\ &= s\mathcal{L} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] - f(0) \\ &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

Similarmente, para a derivada  $n$ -ésima de  $f(t)$ , obtemos

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s^{n-2} f(n-2) - f(n-1)$$

onde  $f(0), f'(0), \dots, f(n-1)$  representam os valores de  $f(t)$ ,  $df(t)/dt, \dots, d^{n-1}f(t)/dt^{n-1}$ , respectivamente, calculados em  $t = 0$ . Se a distinção entre  $\mathcal{L}_+$  e  $\mathcal{L}_-$  é necessária, substituimos  $t = 0_+$  ou  $t = 0_-$  em  $f(t), f'(t), \dots, f(n-1)$ , dependendo se tomamos  $\mathcal{L}_+$  ou  $\mathcal{L}_-$ .

Note que, para a transformada de Laplace da derivada  $n$ -ésima de  $f(t)$  existir,  $d^n f(t)/dt^n$  deve ser transformável segundo Laplace.

Note também que se todos valores iniciais de  $f(t)$  e suas derivadas são iguais a zero, então a transformada de Laplace da  $n$ -ésima derivada de  $f(t)$  é dada por  $s^n F(s)$ .

*Exemplo 2.7* Considere a seguinte função co-seno:

$$\begin{aligned} g(t) &= 0 && \text{para } t < 0 \\ &= A \cos \omega t && \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

A transformada de Laplace da função co-seno pode ser obtida diretamente como no caso da função senoidal. O uso do teorema da diferenciação será mostrado aqui, entretanto, derivando a transformada de Laplace da função co-seno a partir da transformada de Laplace da função seno. Se definirmos

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 && \text{para } t < 0 \\ &= \sin \omega t && \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

Então

$$F(s) = \mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

A transformada de Laplace da função co-seno é obtida como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[A \cos \omega t] &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} \frac{A}{\omega} \sin \omega t\right] \\ &= \frac{A}{\omega} [sF(s) - f(0)] \\ &= \frac{A}{\omega} \left(\frac{s\omega}{s^2 + \omega^2} - 0\right) \\ &= \frac{As}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

**Teorema do valor final.** Se  $f(t)$  e  $df(t)/dt$  são transformáveis segundo Laplace, se  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  existe, e se  $sF(s)$  é analítica no semiplano direito do plano  $s$  incluindo o eixo  $j\omega$ , exceto por um pôlo simples na origem (que significa que  $f(t)$  tende para um valor bem definido quando  $t \rightarrow \infty$ ), então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Para provar o teorema, fazemos  $s$  tender a zero na equação para a transformada de Laplace da derivada de  $f(t)$ , ou

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)]$$

Como  $\lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} = 1$ , obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] dt &= f(t) \Big|_0^\infty = f(\infty) - f(0) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0)\end{aligned}$$

Portanto,

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

O teorema do valor final diz que o comportamento em regime estacionário de  $f(t)$  é o mesmo que o comportamento de  $sF(s)$  na vizinhança de  $s = 0$ . Portanto, é possível obter o valor de  $f(t)$  em  $t = \infty$  diretamente de  $F(s)$ .

Percebe-se que quando  $f(t)$  é a função senoidal  $\sin \omega t$ ,  $sF(s)$  tem pôlos em  $s = \pm j\omega$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  não existe. Portanto, este teorema não é válido para tal função. Se  $f(t)$  tende a infinito quando  $t$  tende a infinito, então  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  não existe, e o teorema

do valor final não se aplica a este caso. Devemos nos assegurar que todas as condições do teorema do valor final são satisfeitas antes de aplicá-lo para um dado problema.

O teorema do valor inicial, que segue adiante, é o oposto do teorema do valor

diretamente da transformada de Laplace de  $f(t)$ . O teorema do valor inicial não dá o valor de  $f(t)$  exatamente no ponto  $t = 0$ , mas sim o valor da função em um instante um pouco maior que zero.

**Teorema do valor inicial.** Se  $f(t)$  e  $df(t)/dt$  são ambos transformáveis segundo Laplace e se  $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$  existe, então

$$f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Para provar este teorema, devemos usar a equação para a transformada  $\mathcal{L}_+$  de  $df(t)/dt$ ; ou seja,

$$\mathcal{L}_+ \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0-) \quad (2-4)$$

Para um intervalo de tempo  $0_+ \leq t \leq \infty$ , quando  $s$  tender a infinito  $e^{-st}$  tender a zero. (Observe que devemos usar  $\mathcal{L}_+$  ao invés de  $\mathcal{L}_-$  para esta condição.) Portanto,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0_+}^\infty \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] e^{-st} dt = 0 \quad (2-5)$$

Das equações (2.4) e (2.5), obtemos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) - f(0-) = 0$$

Portanto o teorema está provado.

Ao aplicar o teorema do valor inicial, não existe limitação quanto à localização dos pôlos de  $sF(s)$ . (Portanto, o teorema do valor inicial é válido para a função senoidal.) Frequentemente os teoremas do valor inicial e do valor final fornecem uma maneira conveniente de conferir a solução. (Observe que estes teoremas nos permitem prever o comportamento do sistema no domínio do tempo sem a necessidade de transformar funções em  $s$  de volta para funções no tempo.)

**Teorema da integração.** A transformada de Laplace da integral de  $f(t)$  é dada por

$$\mathcal{L} \left[ \int f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s} - \frac{f^{-1}(0)}{s} \quad (2-6)$$

onde  $f^{-1}(0) = \int_0^t f(t) dt$  calculado em  $t = 0$ .

Observe que se  $f(t)$  envolve uma função impulso em  $t = 0$ , então  $f^{-1}(0_+) \neq f^{-1}(0_-)$ . Portanto, se  $f(t)$  envolve uma função impulso em  $t = 0$ , então devemos modificar a Eq. (2.6) como segue:

$$\mathcal{L}_+ \left[ \int f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s} - \frac{f^{-1}(0_+)}{s}$$

$$\mathcal{L}_- \left[ \int f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s} - \frac{f^{-1}(0_-)}{s}$$

Este teorema pode ser provado como segue: Integrando por partes, nos dá

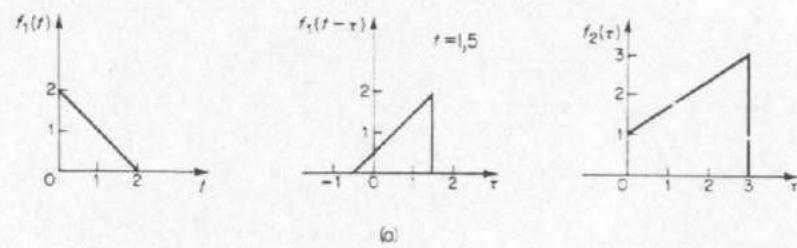
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int f(t) dt\right] &= \int_0^\infty \left[ \int f(t) dt \right] e^{-st} dt \\ &= \left[ \int f(t) dt \right] \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t) \frac{e^{-st}}{-s} dt \\ &= \frac{1}{s} \int f(t) dt \Big|_{t=0} - \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \\ &= \frac{f^{-1}(0)}{s} - \frac{F(s)}{s}\end{aligned}$$

Portanto o teorema está provado.

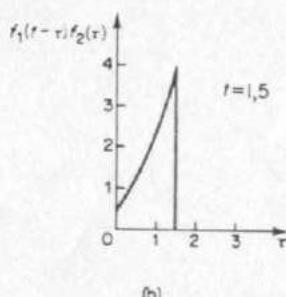
Vemos então que integração no domínio do tempo é convertida em divisão no domínio  $s$ . Se o valor inicial da integral é zero, então a transformada de Laplace da integral de  $f(t)$  é dada por  $F(s)/s$ .

**Integral de convolução.** Considere a transformada de Laplace de

$$\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$



(a)



(b)

Fig. 2.5 (a) Gráficos de  $f_1(t)$ ,  $f_1(t-\tau)$ , e  $f_2(\tau)$ ; (b) gráficos de  $f_1(t-\tau)f_2(\tau)$ .

Esta integral é freqüentemente escrita como

$$f_1(t)*f_2(t)$$

A operação matemática  $f_1(t)*f_2(t)$  é chamada *convolução*. Note que, se pusermos  $t - \tau = \xi$ , então

$$\begin{aligned}\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau &= - \int_t^0 f_1(\xi) f_2(t-\xi) d\xi \\ &= \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}f_1(t)*f_2(t) &= \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \\ &= f_2(t)*f_1(t)\end{aligned}$$

A Fig. 2.5(a) mostra curvas de  $f_1(t)$ ,  $f_1(t-\tau)$ , e  $f_2(\tau)$ . A Fig. 2.5(b) mostra o produto de  $f_1(t-\tau)$  e  $f_2(\tau)$ . A forma da curva  $f_1(t-\tau)f_2(\tau)$  depende de  $t$ .

Se  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  são contínuas por trechos e de ordem exponencial, então a transformada de Laplace de

$$\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

pode ser obtida como segue:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] = F_1(s)F_2(s) \quad (2-7)$$

onde

$$F_1(s) = \int_0^\infty f_1(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}[f_1(t)]$$

$$F_2(s) = \int_0^\infty f_2(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}[f_2(t)]$$

Para provar a Eq. (2.7), note que  $f_1(t-\tau)I(t-\tau) = 0$  para  $\tau > t$ . Portanto,

$$\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = \int_0^\infty f_1(t-\tau)I(t-\tau)f_2(\tau) d\tau$$

Então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] &= \mathcal{L}\left[\int_0^\infty f_1(t-\tau)I(t-\tau)f_2(\tau) d\tau\right] \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \left[ \int_0^\infty f_1(t-\tau)I(t-\tau)f_2(\tau) d\tau \right] dt\end{aligned}$$

	$f(t)$	$F(s)$
1	impulso unitário $\delta(t)$	1
2	degrau unitário $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$t$	$\frac{1}{s^2}$
4	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
5	$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
6	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
8	$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
11	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
12	$\frac{1}{ab}\left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt})\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
13	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
14	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
15	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
16	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$
17	$\frac{-1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$
18	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2)}$

Tabela 2.2 Propriedades das transformadas de Laplace

1	$\mathcal{L}[Af(t)] = AF(s)$
2	$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
3	$\mathcal{L}_z\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0^+)$
4	$\mathcal{L}_z\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$
5	$\mathcal{L}_z\left[\frac{d^k}{dt^k}f(t)\right] = s^kF(s) - \sum_{k=1}^n s^{k-k}f(0^+)$ onde $\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}f(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}f(t)$
6	$\mathcal{L}_z\left[\int f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\left[\int f(t) dt\right]_{t=0^+}}{s}$
7	$\mathcal{L}_z\left[\int \int f(t) dt dt\right] = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{\left[\int f(t) dt\right]_{t=0^+}}{s^2} + \frac{\left[\int \int f(t) dt dt\right]_{t=0^+}}{s}$
8	$\mathcal{L}_z\left[\int \cdots \int f(t) (dt)^n\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \frac{1}{s^{n-k+1}} \left[ \int \cdots \int f(t) (dt)^k \right]_{t=0^+}$
9	$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$
10	$\mathcal{L}[f(t-a)1(t-a)] = e^{-at}F(s)$
11	$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$
12	$\mathcal{L}\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = \int_t^\infty F(s) ds$
13	$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = a F(as)$

Substituindo  $t - \tau = \lambda$  nesta última equação e mudando a ordem de integração, o que é válido neste caso pois  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  são transformáveis segundo Laplace, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] &= \int_0^\infty f_1(t-\tau) 1(t-\tau) e^{-\sigma\tau} dt \int_0^\infty f_2(\tau) d\tau \\ &= \int_0^\infty f_1(\lambda) e^{-\sigma(\lambda+\tau)} d\lambda \int_0^\infty f_2(\tau) d\tau \\ &= \int_0^\infty f_1(\lambda) e^{-\sigma\lambda} d\lambda \int_0^\infty f_2(\tau) e^{-\sigma\tau} d\tau \\ &= F_1(s) F_2(s) \end{aligned}$$

**Tabelas de transformadas de Laplace.** A Tabela 2.1 fornece uma lista de pares de transformadas de Laplace. A tabela pode ser usada para se obter a transformada de Laplace de uma dada função do tempo ou para obter uma função do tempo correspondendo a uma dada transformada de Laplace. A Tabela 2.1 pode ser adequada para a resolução de problemas comuns no campo de sistemas de controle. A Tabela 2.2 resume uma lista de teoremas e relações de utilidade na teoria da transformada de Laplace.

## 2.4 TRANSFORMAÇÃO INVERSA DE LAPLACE

O processo matemático de se passar de uma expressão com variável complexa para a expressão no tempo é chamada de *transformação inversa*. A notação para a transformação inversa de Laplace é  $\mathcal{L}^{-1}$ , de modo que

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

Ao resolver problemas usando o método da transformada de Laplace, nos confrontamos com a pergunta de como determinar  $f(t)$  a partir de  $F(s)$ . Matematicamente,  $f(t)$  é determinado de  $F(s)$  pela seguinte expressão:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (t > 0) \quad (2-8)$$

onde  $c$ , a abscissa de convergência, é uma constante real e é escolhida maior que as partes reais de todos os pontos singulares de  $F(s)$ . Portanto, a trajetória de integração é paralela ao eixo  $ju$  e está deslocada de um valor  $c$  deste. Esta trajetória de integração se situa à direita de todos os pontos singulares.

A integração dada pela Eq. (2.8) parece ser complicada. Por sorte, há métodos mais simples de se achar  $f(t)$  a partir de  $F(s)$  do que fazendo a integração diretamente. Um método conveniente de se obter transformadas inversas de Laplace é usar uma tabela de transformadas de Laplace. Neste caso, a transformada deve estar em uma forma imediatamente reconhecível em tal tabela. Frequentemente a função em questão pode não aparecer em tabelas de transformadas de Laplace disponíveis para o engenheiro. Se uma particular transformada  $F(s)$  não é achada em um tabela, então podemos expandir  $F(s)$  em frações parciais e escrever  $F(s)$  em termos de funções simples de  $s$  para as quais as transformadas inversas de Laplace são conhecidas.

Note que estes métodos mais simples de achar as transformadas inversas de Laplace são baseados no fato de que a correspondência de uma função temporal e sua transformada inversa de Laplace vale para qualquer função contínua do tempo.\*

**Método da expansão em frações parciais para determinar transformadas inversas de Laplace.** Se  $F(s)$ , a transformada de Laplace de  $f(t)$ , é separada em componentes

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_n(s)$$

\*N. do T.: Fica mais claro se escrevemos ...uma função temporal e a transformada inversa de Laplace de  $F(s)$  vale para...

e se as transformadas inversas de Laplace de  $F_1(s)$ ,  $F_2(s)$ , ...,  $F_n(s)$  são conhecidas, então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] + \dots + \mathcal{L}^{-1}[F_n(s)] \\ &= f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t) \end{aligned} \quad (2-9)$$

onde  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ , ...,  $f_n(t)$  são as transformadas inversas de  $F_1(s)$ ,  $F_2(s)$ , ...,  $F_n(s)$ , respectivamente.

Para problemas em teoria de controle,  $F(s)$  é freqüentemente expresso na seguinte forma:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

onde  $A(s)$  e  $B(s)$  são polinômios em  $s$ , e o grau de  $B(s)$  não é maior que o de  $A(s)$ .

Ao aplicar a técnica de expansão em frações parciais para achar a transformada inversa de Laplace de  $F(s) = B(s)/A(s)$ , devem-se conhecer de antemão as raízes do polinômio do denominador  $A(s)$ . (Em outras palavras, este método não é aplicável enquanto o polinômio do denominador não foi fatorado.)

A vantagem do método da expansão em frações parciais é que termos individuais de  $F(s)$ , resultando da expansão na forma de frações parciais, são funções muito simples de  $s$ ; portanto não necessitamos consultar uma tabela de transformadas de Laplace se memorizarmos vários pares de transformadas de Laplace simples.

Considere  $F(s)$  escrito na seguinte forma fatorada:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s - z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

onde  $p_1, p_2, \dots, p_n$  e  $z_1, z_2, \dots, z_m$  são grandezas reais ou complexas; mas para cada  $p$  ou  $z$  complexos vai ocorrer o complexo conjugado de  $p$  ou  $z$ , respectivamente. Aqui supomos que a maior potência de  $s$  em  $A(s)$  é maior que a de  $B(s)$ .

Na expansão de  $B(s)/A(s)$  em forma de frações parciais, é importante que a maior potência de  $s$  em  $A(s)$  seja maior que a maior potência de  $s$  em  $B(s)$ . Se este não for o caso, o numerador  $B(s)$  deve ser dividido pelo denominador  $A(s)$  para resultar um polinômio em  $s$  mais um resto (uma razão entre polinômios em  $s$  cujo numerador é de grau menor que o denominador). (Para detalhes, veja Exemplo 2.9.)

**Expansão em frações parciais quando  $F(s)$  tem apenas pólos distintos.** Neste caso  $F(s)$  pode ser sempre expandido em uma soma de simples frações parciais como segue:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \dots + \frac{a_n}{s + p_n} \quad (2-10)$$

onde  $a_k$  são constantes. Aqui  $a_k$  é chamado de *resíduo* no pólo  $s = -p_k$ . O valor de  $a_k$  pode ser achado multiplicando-se ambos os lados da Eq. (2.10) por  $(s + p_k)$  e fazendo  $s = -p_k$ , resultando

$$\begin{aligned} \left[ \frac{B(s)}{A(s)}(s + p_k) \right]_{s=-p_1} &= \left[ \frac{a_1}{s + p_1}(s + p_k) + \frac{a_2}{s + p_2}(s + p_k) \right. \\ &\quad + \cdots + \frac{a_k}{s + p_k}(s + p_k) \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n}(s + p_k) \right]_{s=-p_1} = a_k \end{aligned}$$

Vemos que todos os termos expandidos são cancelados, com exceção de  $a_k$ . Portanto, o resíduo  $a_k$  é achado de

$$a_k = \left[ \frac{B(s)}{A(s)}(s + p_k) \right]_{s=-p_1} \quad (2.11)$$

Note que desde que  $f(t)$  é uma função real do tempo, se  $p_1$  e  $p_2$  são complexos conjugados, então os resíduos  $a_1$  e  $a_2$  são também complexos conjugados. Apenas um dos valores conjugados  $a_1$  ou  $a_2$  necessita ser calculado uma vez que o outro é conhecido automaticamente.

Com referência à Eq. (2.9) e percebendo que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a_k}{s + p_k}\right] = a_k e^{-p_k t}$$

obtemos  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$  como segue:

$$f(t) = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \cdots + a_n e^{-p_n t} \quad (t \geq 0)$$

*Exemplo 2.8* Determine a transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

A expansão em frações parciais de  $F(s)$  é

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{a_1}{s+1} - \frac{a_2}{s+2}$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são achados usando-se a Eq. (2.11) como segue:

$$\begin{aligned} a_1 &= \left[ \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}(s+1) \right]_{s=-1} = 2 \\ a_2 &= \left[ \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}(s+2) \right]_{s=-2} = -1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+2}\right] \\ &= 2e^{-t} - e^{-2t} \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

*Exemplo 2.9* Determine a transformada de Laplace inversa de

$$G(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)}$$

Dividindo o numerador pelo denominador, obtemos

$$G(s) = s + 2 + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

O terceiro termo do lado direito desta última equação é  $F(s)$  no Exemplo 2.8. Observe que a transformada de Laplace da função impulso unitário  $\delta(t)$  é 1 e a transformada de Laplace de  $d\delta(t)/dt$  é  $s$ . Obtemos então a transformada inversa de Laplace de  $G(s)$  como segue:

$$g(t) = \frac{d}{dt} \delta(t) - 2 \delta(t) + 2e^{-t} - e^{-2t} \quad (t \geq 0)$$

**Expansão em frações parciais quando  $F(s)$  apresenta pólos complexos conjugados.** Se  $p_1$  e  $p_2$  são pólos complexos conjugados, então a seguinte expansão pode ser usada:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{(s + p_1)(s + p_2)} + \frac{a_3}{s + p_3} + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n} \quad (2.12)$$

Os valores de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são determinados multiplicando-se ambos os lados da Eq. (2.12) por  $(s + p_1)(s + p_2)$  e fazendo  $s = -p_1$ , dando

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{B(s)}{A(s)}(s + p_1)(s + p_2) \right]_{s=-p_1} \\ &= \left[ (\alpha_1 s + \alpha_2) + \frac{a_3}{s + p_3}(s + p_1)(s + p_2) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n}(s + p_1)(s + p_2) \right]_{s=-p_1} \end{aligned}$$

Vemos que todos os termos expandidos são cancelados com exceção do termo  $(\alpha_1 s + \alpha_2)$ . Portanto,

$$(\alpha_1 s + \alpha_2)_{s=-p_1} = \left[ \frac{B(s)}{A(s)}(s + p_1)(s + p_2) \right]_{s=-p_1} \quad (2.13)$$

Como  $p_1$  é uma grandeza complexa, ambos os lados da Eq. (2.13) são grandezas complexas. Igualando as partes reais de ambos os lados da Eq. (2.13), obtemos uma equação. Da mesma forma, igualando as partes imaginárias de ambos os lados da Eq. (2.13), obtemos uma outra equação. Dessa duas equações é possível determinar  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ .

*Exemplo 2.10* Determine a transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)}$$

$F(s)$  pode ser expandida da seguinte forma:

$$\frac{s+1}{s(s^2+s+1)} = \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{s^2+s+1} + \frac{a}{s} \quad (2-14)$$

Para determinar  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , note que

$$s^2 + s + 1 = (s + 0,5 + j0,866)(s + 0,5 - j0,866)$$

Multiplicando ambos os lados da Eq. (2.14) por  $(s^2 + s + 1)$  e impondo  $s = -0,5 - j0,866$ , obtemos

$$\left(\frac{s+1}{s}\right)_{s=-0,5-j0,866} = (\alpha_1 s + \alpha_2)_{s=-0,5-j0,866}$$

ou

$$\frac{0,5 - j0,866}{-0,5 - j0,866} = \alpha_1(-0,5 - j0,866) + \alpha_2$$

que pode ser simplificado como visto a seguir:

$$0,5 - j0,866 = \alpha_1(0,25 + j0,866 - 0,75) + \alpha_2(-0,5 - j0,866)$$

Igualando as partes reais e imaginárias de ambos os lados desta equação, respectivamente, obtemos

$$-0,5\alpha_1 - 0,5\alpha_2 = 0,5$$

$$0,866\alpha_1 - 0,866\alpha_2 = -0,866$$

ou

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -1$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = -1$$

Resultando

$$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 0$$

Para determinar  $a$ , multiplicamos ambos os lados da Eq. (2.14) por  $s$  e fazemos  $s = 0$ , resultando

$$a = \left[ \frac{s(s+1)}{s(s^2+s+1)} \right]_{s=0} = 1$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{-s}{s^2+s+1} + \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+0,5}{(s+0,5)^2+0,866^2} + \frac{0,5}{(s+0,5)^2+0,866^2} \end{aligned}$$

A transformada inversa de Laplace de  $F(s)$  é então dada por

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= 1 - e^{-0,5t} \cos 0,866t + 0,578e^{-0,5t} \sin 0,866t \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

**Expansão em frações parciais quando  $F(s)$  apresenta pólos múltiplos.** Considere  $F(s) = B(s)/A(s)$ , onde  $A(s) = 0$  tem raízes  $p_1$  de multiplicidade  $r$ . (As outras raízes são supostas distintas.)  $A(s)$  pode então ser escrita como

$$A(s) = (s + p_1)^r (s + p_{r+1})(s + p_{r+2}) \cdots (s + p_n)$$

A expansão em frações parciais de  $F(s)$  é

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_r}{(s + p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(s + p_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{b_1}{s + p_1} \\ &\quad - \frac{a_{r+1}}{s + p_{r+1}} + \frac{a_{r+2}}{s + p_{r+2}} + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n} \end{aligned} \quad (2-15)$$

onde  $b_r, b_{r-1}, \dots, b_1$  são dados por

$$b_r = \left[ \frac{B(s)}{A(s)} (s + p_1)^r \right]_{s=-p_1}$$

$$b_{r-1} = \left\{ \frac{d}{ds} \left[ \frac{B(s)}{A(s)} (s + p_1)^r \right] \right\}_{s=-p_1}$$

$$b_{r-j} = \frac{1}{j!} \left\{ \frac{d^j}{ds^j} \left[ \frac{B(s)}{A(s)} (s + p_1)^r \right] \right\}_{s=-p_1}$$

$$b_1 = \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \left[ \frac{B(s)}{A(s)} (s + p_1)^r \right] \right\}_{s=-p_1}$$

Estas relações para os  $b$ 's podem ser obtidas da seguinte forma: Multiplicando ambos os lados da Eq. (2.15) por  $(s + p_1)^r$  e fazendo  $s$  tender a  $-p_1$ , temos

$$b_r = \left[ \frac{B(s)}{A(s)} (s + p_1)^r \right]_{s=-p_1}$$

Se multiplicarmos ambos os lados da Eq. (2.15) por  $(s + p_1)^r$  e então derivarmos com relação a  $s$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[ \frac{B(s)}{A(s)} (s + p_1)^r \right] &= b_r \frac{d}{ds} \left[ \frac{(s + p_1)^r}{(s + p_1)^r} \right] + b_{r-1} \frac{d}{ds} \left[ \frac{(s + p_1)^r}{(s + p_1)^{r-1}} \right] \\ &\quad + \cdots + b_1 \frac{d}{ds} \left[ \frac{(s + p_1)^r}{s - p_1} \right] + a_{r+1} \frac{d}{ds} \left[ \frac{(s + p_1)^r}{s + p_{r+1}} \right] \\ &\quad + \cdots + a_n \frac{d}{ds} \left[ \frac{(s + p_1)^r}{s - p_n} \right] \end{aligned}$$

O primeiro termo do lado direito desta última equação é igual a zero. O segundo termo é igual a  $b_{r-1}$ . Cada um dos outros termos contém alguma potência de  $(s + p_1)$  como fator, resultando que quando  $s$  tende ao valor  $-p_1$ , estes termos se anulam. Portanto,

$$\begin{aligned} b_{r-1} &= \lim_{s \rightarrow -p_1} \frac{d}{ds} \left[ \frac{B(s)}{A(s)} (s + p_1)^r \right] \\ &= \left\{ \frac{d}{ds} \left[ \frac{B(s)}{A(s)} (s + p_1)^r \right] \right\}_{s=-p_1} \end{aligned}$$

Da mesma forma, fazendo sucessivas diferenciações com relação a  $s$  e fazendo  $s$  tender a  $-p_1$ , obtemos equações para os  $b_{r-j}$ .

Note que a transformada inversa de Laplace de  $1/(s + p_1)^n$  é dada por

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s + p_1)^n} \right] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-p_1 t}$$

As constantes  $a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_n$  na Eq. (2.15) são determinadas a partir de

$$a_k = \left[ \frac{B(s)}{A(s)} (s + p_k) \right]_{s=-p_1} \quad (k = r-1, r+2, \dots, n)$$

A transformada inversa de Laplace de  $F(s)$  é então obtida como visto a seguir:

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \left[ \frac{b_r}{(r-1)!} t^{r-1} + \frac{b_{r-1}}{(r-2)!} t^{r-2} + \cdots + b_2 t - b_1 \right] e^{-p_1 t} \\ &\quad + a_{r+1} e^{-p_1 t} - a_{r+2} e^{-p_1 t} + \cdots - a_n e^{-p_1 t} \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

**Exemplo 2.11** Determine a transformada inversa de Laplace da seguinte função  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3}$$

Expandindo  $F(s)$  em frações parciais, obtemos

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_3}{(s+1)^3} + \frac{b_2}{(s+1)^2} + \frac{b_1}{s+1}$$

onde  $b_3, b_2$  e  $b_1$  são determinados como visto a seguir:

$$\begin{aligned} b_3 &= \left[ \frac{B(s)}{A(s)} (s+1)^3 \right]_{s=-1} \\ &= (s^2 + 2s + 3)_{s=-1} = 2 \\ b_2 &= \left[ \frac{d}{ds} \left[ \frac{B(s)}{A(s)} (s+1)^3 \right] \right]_{s=-1} \\ &= \left[ \frac{d}{ds} (s^2 + 2s + 3) \right]_{s=-1} \\ &= (2s + 2)_{s=-1} = 0 \\ b_1 &= \frac{1}{(3-1)!} \left[ \frac{d^2}{ds^2} \left[ \frac{B(s)}{A(s)} (s+1)^3 \right] \right]_{s=-1} \\ &= \frac{1}{2!} \left[ \frac{d^2}{ds^2} (s^2 + 2s + 3) \right]_{s=-1} \\ &= \frac{1}{2} (2) = 1 \end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2}{(s+1)^3} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s+1} \right] \\ &= (t^2 + 1)e^{-t} \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

## 2.5 SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES PELO MÉTODO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Nas Seções 2.1 a 2.4 apresentamos alguns conceitos e técnicas do método da transformada de Laplace. Esta seção apresenta o uso do método da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais lineares.

O método da transformada de Laplace fornece a solução completa (a solução particular mais a solução complementar) de equações diferenciais lineares. Métodos clássicos para achar a solução completa de uma equação diferencial requerem a determinação das constantes de integração pelo uso das condições iniciais. No caso do método da transformada de Laplace, a determinação das constantes de integração a partir das condições iniciais não é necessária uma vez que as condições iniciais são automaticamente incluídas na transformada de Laplace da equação diferencial.

Se todas as condições iniciais são nulas, então a transformada de Laplace da equação diferencial é obtida simplesmente substituindo-se  $d/dt$  por  $s$ ,  $d^2/dt^2$  por  $s^2$  etc.

Ao resolver equações diferenciais lineares pelo método da transformada de Laplace, procedemos de acordo com as duas etapas descritas a seguir:

1. Tomando a transformada de Laplace de cada termo na equação diferencial linear dada, converte-se a equação diferencial em uma equação algébrica em  $s$  e se obtém a expressão para a transformada de Laplace da variável dependente através de um rearranjo da equação algébrica.
2. A solução temporal da equação diferencial é obtida achando-se a transformada inversa de Laplace da variável dependente.

Considere como um exemplo a seguinte equação diferencial:

$$m\ddot{x} + kx = f(t) \quad (2-16)$$

onde  $f(t)$  representa a função de excitação ou entrada. Tomando a transformada de Laplace de cada termo na Eq. (2.16), obtemos

$$\mathcal{L}[m\ddot{x}] = m[s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)]$$

$$\mathcal{L}[kx] = kX(s)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

A transformada de Laplace da Eq. (2.16) pode então ser escrita como

$$(ms^2 + k)X(s) - msx(0) - m\dot{x}(0) = F(s) \quad (2-17)$$

Resolvendo a Eq. (2.17) para obter  $X(s)$ , obtemos

$$X(s) = \frac{F(s)}{ms^2 + k} + \frac{msx(0) + m\dot{x}(0)}{ms^2 + k} \quad (2-18)$$

O primeiro termo do lado direito da Eq. (2.18) representa a solução da equação diferencial quando as condições iniciais são todas nulas (solução particular). O segundo termo do lado direito desta equação representa o efeito das condições iniciais (solução complementar). A solução no tempo da equação diferencial é obtida tomando-se a transformada inversa de Laplace de  $X(s)$  como visto a seguir:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{ms^2 + k}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{msx(0) + m\dot{x}(0)}{ms^2 + k}\right] \quad (2-19)$$

Como um exemplo, se  $f(t)$  é uma função degrau unitário, então  $F(s) = 1/s$  e a Eq. (2.19) se torna

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(ms^2 + k)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{msx(0) + m\dot{x}(0)}{ms^2 + k}\right] \\ &= \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k} \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \left[x(0) \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + \dot{x}(0) \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t\right] \end{aligned}$$

Pode-se ver que as condições iniciais  $x(0)$  e  $\dot{x}(0)$  aparecem na solução. Portanto,  $x(t)$  não tem constantes indeterminadas.

## PROBLEMAS ILUSTRATIVOS E SOLUÇÕES

**Problema A.2.1** Determine os pólos da seguinte função  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-s}}$$

**Solução.** Os pólos são achados a partir de

$$e^{-s} = 1$$

ou

$$e^{-(s + j\omega)} = e^{-s}(\cos \omega - j \sin \omega) = 1$$

De onde segue-se que  $\sigma = 0$ ,  $\omega = \pm 2n\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Portanto, os pólos estão localizados em

$$s = \pm j2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

**Problema A.2.2** A derivada da função impulso unitário  $\delta(t)$  é chamada uma função *doublet* unitária. (Portanto, a integral da função *doublet* unitária é a função impulso unitário.) Matematicamente, um exemplo da função *doublet* unitário  $u_2(t)$  pode ser dado por

$$u_2(t) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1(t) - 2[1(t - t_0)] - 1(t - 2t_0)}{t_0^2}$$

Obtenha a transformada de Laplace de  $u_2(t)$ .

**Solução.** A transformada de Laplace de  $u_2(t)$  é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u_2(t)] &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t_0^2} \left( \frac{1}{s} - \frac{2}{s} e^{-t_0 s} + \frac{1}{s} e^{-2t_0 s} \right) \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t_0 s} \left[ 1 - 2\left(1 - t_0 s + \frac{t_0^2 s^2}{2} + \dots\right) + \left(1 - 2t_0 s + \frac{4t_0^2 s^2}{2} + \dots\right) \right] \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t_0 s} \left[ t_0^2 s^2 + (\text{termos de ordem superior em } t_0 s) \right] = s \end{aligned}$$

**Problema A.2.3** O método gráfico de determinar resíduos poupa tempo principalmente nos casos em que o sistema tem muitos pólos e zeros complexos conjugados.

Considere a seguinte função  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{s - z}{s(s - p_1)(s - p_2)}$$

onde  $p_1$  e  $p_2$  são grandezas complexas conjugadas e  $z$  é uma grandeza real. A função  $F(s)$  tem três pólos, localizados em  $s = 0$ ,  $s = -p_1$ ,  $s = -p_2$ , e um zero finito em  $s = -z$ . Se estes pólos e zero são postos no gráfico do plano complexo, então os resíduos na expansão em frações parciais podem ser calculados graficamente. A expansão em frações parciais de  $F(s)$  é

$$F(s) = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s + p_1} + \frac{a_3}{s + p_2}$$

onde  $a_1 = z/(p_1 p_2)$  e  $a_2$  é dado por

$$a_2 = \left[ \frac{s + z}{s(s + p_2)} \right]_{s=-p_1} = \frac{z - p_1}{(-p_1)(p_2 - p_1)}$$

Aqui  $(z - p_1)$  pode ser considerado um vetor que vai de  $-z$  a  $-p_1$ . Com referência à Fig. 2.6, vemos que

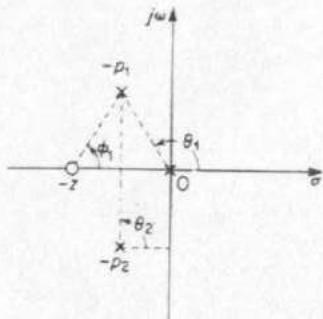


Fig. 2.6 Gráfico de pólos e zeros.

$$z - p_1 = |z - p_1| \angle \phi_1$$

Da mesma forma,

$$-p_1 = |0 - p_1| \angle \theta_1$$

e

$$p_2 - p_1 = |p_2 - p_1| \angle \theta_2$$

Os módulos  $|z - p_1|$ ,  $|0 - p_1|$  e  $|p_2 - p_1|$  são medidos diretamente. Os ângulos  $\phi_1$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são determinados com um compasso. Então, o resíduo  $a_2$  é determinado como sendo

$$a_2 = \frac{|z - p_1|}{|0 - p_1| \cdot |p_2 - p_1|} \angle \phi_1 - \theta_1 - \theta_2$$

Como  $a_3$  é o complexo conjugado de  $a_2$ , segue-se que

$$a_3 = \frac{|z - p_1|}{|0 - p_1| \cdot |p_2 - p_1|} \angle -\phi_1 + \theta_1 + \theta_2$$

(Observe que o resíduo no polo na origem pode ser achado facilmente através de meios algébricos.)

Determine os resíduos nos pólos quando  $z = 1$ ,  $p_1 = 0.5 + j0.866$ , e  $p_2 = 0.5 - j0.866$ .

Solução. O resíduo  $a_1$  é

$$a_1 = \left[ \frac{s + z}{(s + p_1)(s + p_2)} \right]_{s=0} = \frac{z}{p_1 p_2} = 1$$

Graficamente  $(z - p_1)$ ,  $(0 - p_1)$ , e  $(p_2 - p_1)$  são

$$z - p_1 = 1 \angle 60^\circ$$

$$0 - p_1 = 1 \angle 120^\circ$$

$$p_2 - p_1 = 1.73 \angle 90^\circ$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{1 \times 1.73} \angle 60^\circ - 120^\circ - 90^\circ \\ &= 0.578 \angle -150^\circ \\ &= 0.578(\cos 150^\circ - j \sin 150^\circ) \\ &= -0.5 - j0.289 \end{aligned}$$

Portanto,  $a_3$ , que é o complexo conjugado de  $a_2$ , é obtido como

$$a_3 = -0.5 + j0.289$$

Este método gráfico de calcular os resíduos é muito conveniente quando o engenheiro deseja uma estimativa a grosso modo dos valores do resíduo, sem entrar em cálculos laboriosos. Observe, entretanto, que este cálculo gráfico não se aplica a pólos múltiplos.

**Problema A.2.4** Determine a transformada de Laplace da seguinte equação diferencial:

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 6x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 3$$

Achando a transformada inversa de Laplace de  $X(s)$ , obtenha a solução no tempo  $x(t)$ .

**Solução.** A transformada de Laplace da equação diferencial é

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 3sX(s) - 3x(0) + 6X(s) = 0$$

Substituindo as condições iniciais e resolvendo para  $X(s)$ ,

$$X(s) = \frac{3}{s^2 + 3s + 6} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{(s + 1.5)^2 - \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}$$

A transformada inversa de Laplace de  $X(s)$  é

$$x(t) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} e^{-1.5t} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)$$

**Problema A.2.5** Considere o sistema mecânico visto na Fig. 2.7. Suponha que o sistema é posto em movimento por uma força impulsiva unitária. Determine a oscilação resultante. Suponha que o sistema está inicialmente em repouso.

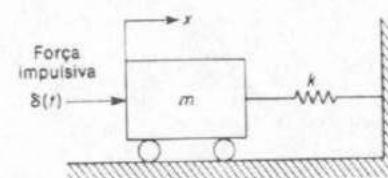


Fig. 2.7 Sistema mecânico.

**Solução.** O sistema é excitado por uma entrada impulsiva. Portanto,

$$m\ddot{x} + kx = \delta(t)$$

Tomando a transformada de Laplace em ambos os lados desta equação, obtemos

$$m[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + kX(s) = 1$$

Substituindo as condições iniciais  $x(0) = 0$  e  $\dot{x}(0) = 0$  nesta última equação e determinando  $X(s)$ , obtemos

$$X(s) = \frac{1}{ms^2 + k}$$

A transformada inversa de Laplace de  $X(s)$  se torna

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{mk}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

A oscilação é um movimento harmônico simples. A amplitude da oscilação é  $1/\sqrt{mk}$ .

**Problema A.2.6** Considere uma função periódica  $f_p(t)$  com período  $T$ . Se  $f(t)$  é uma função do tempo tal que  $f(t) = f_p(t)$  no intervalo  $0 < t < T$  e  $f(t) = 0$  fora do intervalo  $0 < t < T$ , então  $f_p(t)$  pode ser expressa como

$$f_p(t) = f(t) + f(t-T) + f(t-2T) + f(t-3T) + \dots$$

Determine a transformada de Laplace de  $f_p(t)$ .

**Solução.** Defina a transformada de Laplace de  $f(t)$  por  $F(s)$ , ou

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

Então a transformada de Laplace de  $f_p(t)$  é obtida como sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_p(t)] &= F_p(s) = F(s) - e^{-T}F(s) + e^{-2T}F(s) - e^{-3T}F(s) + \dots \\ &= (1 - e^{-T} + e^{-2T} - e^{-3T} + \dots)F(s) \\ &= \frac{F(s)}{1 - e^{-T}} \end{aligned}$$

Portanto, a transformada de Laplace de  $f_p(t)$  pode ser obtida multiplicando-se  $F(s)$  por  $1/(1 - e^{-T})$ .

## PROBLEMAS

**Problema B.2.1** Determine a transformada de Laplace da função  $f(t)$  definida por

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{a^2} && \text{para } 0 < t < a \\ &= -\frac{1}{a^2} && \text{para } a < t < 2a \\ &= 0 && \text{para } t < 0, 2a < t \end{aligned}$$

Determine também o valor limite de  $F(s)$  quando  $a$  tende a zero.

**Problema B.2.2** Determine as transformadas de Laplace das seguintes funções. Suponha que  $f(t) = 0$  para  $t < 0$ .

1.  $f(t) = 0,03(1 - \cos 2t)$
2.  $f(t) = e^{-0.4t} \cos 12t$
3.  $f(t) = \sin\left(5t + \frac{\pi}{3}\right)$
4.  $f(t) = t^n$
5.  $f(t) = t^n e^{at}$

**Problema B.2.3** Determine as transformadas inversas de Laplace das seguintes funções:

1.  $F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$
2.  $F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$
3.  $F(s) = \frac{e^{-s}}{s-1}$
4.  $F(s) = \frac{(s+3)(s+4)(s+5)}{(s+1)(s+2)}$
5.  $F(s) = \frac{s}{(s+1)^2(s+2)}$

**Problema B.2.4** Usando o teorema do valor final, ache o valor final de  $f(t)$  cuja transformada de Laplace é dada por

$$F(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

Verifique este resultado tomando a transformada inversa de Laplace de  $F(s)$  e fazendo  $t \rightarrow \infty$ .

**Problema B.2.5** Dado

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

determine os valores de  $f(0_+)$  e  $f'(0_+)$ . (Use o teorema do valor inicial.)

**Problema B.2.6** Resolva a seguinte equação diferencial:

$$ax + bx = k, \quad x(0) = x_0$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $k$  são constantes.

**Problema B.2.7** Resolva a seguinte equação diferencial:

$$2\ddot{x} + 7\dot{x} - 3x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

**Problema B.2.8** Resolva a seguinte equação diferencial:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0, \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = b$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes.

**Problema B.2.9** Considere o sistema visto na Fig. 2.7. O sistema está inicialmente em repouso. Suponha que o carro é posto em movimento por uma força impulsiva cuja magnitude (área) é unitária. É possível parar o carro usando-se uma outra destas forças impulsivas?

# 3

# Base Matemática — Matrizes

## 3.1 INTRODUÇÃO

Na dedução de modelos matemáticos referentes a sistemas de controle modernos, verificamos que as respectivas equações diferenciais podem-se tornar muito complicadas devido à multiplicidade de entradas e saídas. De fato, o número de entradas e saídas de um sistema complexo pode-se elevar a centenas. Para simplificar as expressões matemáticas das equações do sistema, é vantajoso usar a notação vetor-matriz. Em trabalhos teóricos, a simplicidade de notação ganha pelo uso de operações com vetores-matrizes é mais conveniente e, de fato, essencial para a análise e a síntese de sistemas de controle moderno.

A utilização da notação vetor-matriz nos possibilita tratar com problemas grandes e complexos com facilidade, seguindo o formato sistemático de representar as equações do sistema e calculá-las com o uso de computadores.

O principal objetivo deste capítulo é apresentar definições de matrizes e a álgebra matricial básica necessária para a análise subsequente de sistemas de controle.

## 3.2 DEFINIÇÕES DE MATRIZES

Esta seção apresenta definições de matrizes que serão usadas em todo o resto do livro.

**Matriz.** Uma matriz é definida como um arranjo retangular de elementos, os quais podem ser números reais, números complexos, funções ou operadores. O número de colunas, em geral, não é necessariamente igual ao número de linhas. Considere a segunda matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

onde  $a_{ij}$  indica o  $(i, j)$ -ésimo elemento da matriz  $A$ . Esta matriz possui  $n$  linhas e  $m$  colunas e é denominada uma matriz  $n \times m$ . O primeiro índice representa o número da linha e o segundo índice o número da coluna. A matriz  $A$  é muitas vezes escrita  $(a_{ij})$ .

**Igualdade de duas matrizes.** Duas matrizes são ditas iguais se e somente se os seus elementos correspondentes são iguais. Note que matrizes iguais devem possuir o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas.

**Vetor.** Uma matriz possuindo apenas uma coluna tal como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é denominada um vetor *coluna*. Um vetor coluna com  $n$  elementos é chamado vetor  $n$ -dimensional ou, simplesmente, vetor  $n$ .

Uma matriz possuindo apenas uma linha tal como

$$[x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]$$

é chamada um vetor *linha*.

**Matriz quadrada.** Uma matriz quadrada é uma matriz na qual o número de linhas é igual ao número de colunas. A matriz quadrada é muitas vezes denominada *matriz de ordem  $n$* , onde  $n$  é o número de linhas (ou colunas).

**Matriz diagonal.** Se todos os elementos de uma matriz quadrada  $A$ , excetuando-se apenas os elementos da diagonal principal, são nulos,  $A$  é denominada matriz *diagonal* e é escrita como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = (a_{ij} \delta_{ij})$$

onde os  $\delta_{ij}$  são os deltas de Kronecker definidos por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Note que todos os elementos não explicitamente escritos na matriz precedente são nulos. A matriz diagonal muitas vezes é escrita

$$\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

**Matriz identidade ou matriz unidade.** A matriz identidade ou matriz unidade  $I$  é uma matriz cujos elementos da diagonal principal são iguais a um e todos os outros elementos são iguais a zero; isto é,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$$

**Matriz zero (ou nula).** Uma matriz zero é uma matriz na qual todos os elementos são zeros.

**Determinante de uma matriz.** Para cada matriz quadrada, existe um determinante. O determinante possui as seguintes propriedades:

1. Se duas linhas ou colunas quaisquer consecutivas são permutadas, o determinante muda de sinal.
2. Se qualquer linha ou coluna possuir apenas elementos zeros, então o valor do determinante é zero.
3. Se os elementos de qualquer linha (ou qualquer coluna) são exatamente  $k$  vezes aqueles de uma outra linha (ou uma outra coluna), então o valor do determinante é zero.
4. Se a qualquer linha (ou qualquer coluna) qualquer constante vezes uma outra linha (ou coluna) é adicionada, o valor do determinante permanece inalterado.
5. Se um determinante é multiplicado por uma constante, então apenas uma linha (ou uma coluna) é multiplicada pela constante. Note, entretanto, que o determinante de  $k$  vezes uma matriz  $A$   $n \times n$  é  $k^n$  vezes o determinante de  $A$  ou

$$|kA| = k^n |A|$$

6. O determinante do produto de duas matrizes quadradas  $A$  e  $B$  é o produto dos determinantes ou

$$|AB| = |A||B|$$

**Matriz singular.** Uma matriz quadrada é denominada *singular* se o determinante associado é zero. Em uma matriz singular nem todas as linhas (ou nem todas as colunas) são independentes de cada outra.

**Matriz não singular.** Uma matriz quadrada é denominada *não singular* se o determinante associado é diferente de zero.

**Transposta.** Se as linhas e colunas de uma matriz  $A$   $n \times m$  são intertrocadas, a matriz  $m \times n$  resultante é denominada *transposta* da matriz  $A$ . A transposta da matriz  $A$  é denotada por  $A'$ . Se  $A$  é dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

então  $A'$  é dada por

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Note que  $(A')' = A$ .

**Matriz simétrica.** Se uma matriz quadrada  $A$  é igual à sua transposta, ou seja,

$$A = A'$$

então a matriz  $A$  é denominada matriz *simétrica*.

**Matriz anti-simétrica.** Se uma matriz quadrada  $A$  é igual ao negativo de sua transposta, ou seja,

$$A = -A'$$

então a matriz  $A$  é denominada matriz *anti-simétrica*.

**Matriz conjugada.** Se os elementos complexos de uma matriz  $A$  são substituídos pelos seus respectivos conjugados, então a matriz resultante é chamada a *conjugada* de  $A$ . A conjugada de  $A$  é denotada por  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ , onde  $\tilde{a}_{ij}$  é o complexo conjugado de  $a_{ij}$ . Por exemplo, se  $A$  é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1+j & -3-j3 & -1+j4 \\ -1+j & -1 & -2+j3 \end{bmatrix}$$

então

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1-j & -3+j3 & -1-j4 \\ -1-j & -1 & -2-j3 \end{bmatrix}$$

**Transposta conjugada.** A transposta conjugada é a conjugada da transposta de uma matriz. Dada uma matriz  $A$ , a transposta conjugada é denotada por  $\tilde{A}'$  ou  $A^*$ ; isto é,

$$\tilde{A}' = A^* = (\tilde{a}_{ji})$$

Por exemplo, se  $A$  é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & j2 & 1+j5 \\ 2+j & j & 3-j \\ 3 & 1 & 1+j3 \end{bmatrix}$$

então

$$\tilde{A}' = A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2-j & 3 \\ -j2 & -j & 1 \\ 1-j5 & 3+j & 1-j3 \end{bmatrix}$$

Note que

$$(A^*)^* = A$$

Se  $A$  é uma matriz real (uma matriz cujos elementos são reais), a transposta conjugada  $A^*$  é igual à transposta  $A'$ .

**Matriz Hermitiana.** Uma matriz cujos elementos são grandezas complexas é denominada uma matriz *complexa*. Se uma matriz complexa  $A$  satisfaz à relação

$$A = A^* \quad \text{ou} \quad a_{ij} = \tilde{a}_{ji}$$

onde  $\tilde{a}_{ji}$  é o complexo conjugado de  $a_{ij}$ , então  $A$  é denominada matriz *Hermitiana*. Um exemplo é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4+j3 \\ 4-j3 & 2 \end{bmatrix}$$

Se uma matriz Hermitiana  $A$  é escrita como  $A = B + jC$ , onde  $B$  e  $C$  são matrizes reais, então

$$B = B' \quad \text{e} \quad C = -C'$$

No exemplo acima,

$$A = B + jC = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

**Matriz anti-Hermitiana.** Se uma matriz  $A$  satisfaz à relação

$$A = -A^*$$

então A é denominada matriz *anti-Hermitiana*. Um exemplo é

$$A = \begin{bmatrix} j5 & -2+j3 \\ 2+j3 & j \end{bmatrix}$$

Se uma matriz anti-Hermitiana A é escrita como  $A = B + jC$ , onde B e C são matrizes reais, então

$$B = -B' \quad \text{e} \quad C = C'$$

No presente exemplo,

$$A = B + jC = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.3 ÁLGEBRA MATRICIAL

Esta seção apresenta a álgebra matricial, bem como definições adicionais. É importante lembrar que algumas das operações matriciais obedecem às mesmas regras da álgebra comum, porém, o mesmo não ocorre com outras operações matriciais.

**Adição e subtração de matrizes.** Duas matrizes A e B podem ser adicionadas se possuírem o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas. Se  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$ , então  $A + B$  é definida como

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Portanto, cada elemento de A é adicionado ao elemento correspondente de B. De modo equivalente, a subtração de matrizes é definida como

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij})$$

Como um exemplo, considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Então  $A + B$  e  $A - B$  são dadas por

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A - B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

**Multiplicação de uma matriz por um escalar.** O produto de uma matriz por um escalar é uma matriz na qual cada elemento é multiplicado pelo escalar; isto é, para uma matriz A e um escalar  $k$ ,

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{bmatrix}$$

**Multiplicação de uma matriz por uma matriz.** Multiplicação de uma matriz por uma matriz é possível entre matrizes conformes (o que significa que o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda). Caso contrário, não é definida a multiplicação de duas matrizes.

Seja A uma matriz  $n \times m$  e B uma matriz  $m \times p$ . Então, o produto AB, que deve ser lido “A pós-multiplicada por B” ou “B pré-multiplicada por A”, é definido como segue:

$$AB = C = (c_{ij}) = \left( \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, p)$$

A matriz produto C possui o mesmo número de linhas da matriz A e o mesmo número de colunas da matriz B. Consequentemente, a matriz C é uma matriz  $n \times p$ .

Deve-se notar que mesmo que A e B sejam conformes para o produto AB, elas podem não ser conformes para BA, quando, então, BA não é definida.

As leis associativa e distributiva são aplicáveis para a multiplicação matricial; isto é,

$$(AB)C = A(BC)$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$C(A + B) = CA + CB$$

Se  $AB = BA$ , então A e B são ditas comutarem. Note que, em geral,  $AB \neq BA$ . Para mostrar este fato, considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

AB e BA são dadas, respectivamente, por

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 10 \\ 10 & 3 & 15 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{bmatrix} 19 & 21 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Obviamente,  $AB \neq BA$ . Para um outro exemplo, considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Então,

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

Obviamente,  $AB = BA$ .

Como a multiplicação matricial, em geral, é não comutativa, devemos preservar a ordem das matrizes quando multiplicarmos uma matriz por uma outra matriz. (Esta é a razão por que sempre usamos os termos "pré-multiplicação" ou "pós-multiplicação" para indicar quando a matriz é multiplicada pela direita ou pela esquerda.)

Um exemplo do caso onde  $AB = BA$  é dado abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$AB$  e  $BA$  são dadas por

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

É claro que  $A$  e  $B$  comutam neste caso.

**Potência de uma matriz.** A  $k$ -ésima potência de uma matriz quadrada  $A$  é definida por

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_k$$

Note que para uma matriz diagonal  $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ ,

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{bmatrix} a_{11}^k & & & 0 \\ & a_{22}^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}^k \end{bmatrix} \\ &= \text{diag}(a_{11}^k, a_{22}^k, \dots, a_{nn}^k) \end{aligned}$$

**Outras propriedades de matrizes.** As transpostas de  $A + B$  e  $AB$  são dadas por

$$(A + B)' = A' + B'$$

$$(AB)' = B'A'$$

Para provar a última relação, note que o  $(i, j)$ -ésimo elemento de  $AB$  é

$$\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} = c_{ij}$$

O  $(i, j)$ -ésimo elemento de  $B'A'$  é

$$\sum_{k=1}^m b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^m a_{jk} b_{ki} = c_{ji}$$

que é igual ao  $(j, i)$ -ésimo elemento de  $AB$ , ou o  $(i, j)$ -ésimo elemento de  $(AB)'$ . Portanto,  $(AB)' = B'A'$ . Como um exemplo, considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

então,

$$AB = \begin{bmatrix} 24 & 26 \\ 23 & 22 \end{bmatrix}$$

$$B'A' = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 23 \\ 26 & 22 \end{bmatrix}$$

Obviamente,  $(AB)' = B'A'$ .

De um modo similar, obtemos as transpostas conjugadas de  $A + B$  e  $AB$ , resultando

$$(A + B)^* = A^* + B^*$$

$$(AB)^* = B^*A^*$$

**A característica (rank) de uma matriz.** Uma matriz é dita possuir uma característica  $m$  se existir uma submatriz  $M_{m \times m}$  de  $A$  de modo que o determinante de  $M$  é não nulo e o determinante de todas as submatrizes  $r \times r$  (onde  $r \geq m + 1$ ) de  $A$  é zero.

Como um exemplo, considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Note que  $|A| = 0$ . Uma das submatrizes maiores cujo determinante não é igual a zero é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto a característica da matriz  $A$  é 3.

### 3.4 INVERSÃO DE MATRIZ

Esta seção discute a inversão de matrizes e tópicos associados.

**Menor  $M_{ij}$ .** Se a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna são eliminadas de uma matriz  $A \in n \times n$ , a matriz resultante é uma matriz  $(n-1) \times (n-1)$ . O determinante desta matriz  $(n-1) \times (n-1)$  é denominado o menor  $M_{ij}$  da matriz  $A$ .

**Cofator  $A_{ij}$ .** O cofator  $A_{ij}$  do elemento  $a_{ij}$  da matriz  $A$  é definido pela equação

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Isto é, o cofator  $A_{ij}$  do elemento  $a_{ij}$  é  $(-1)^{i+j}$  vezes o determinante da matriz constituída pela eliminação da  $i$ -ésima linha e da  $j$ -ésima coluna de  $A$ . Note que o cofator  $A_{ij}$  do elemento  $a_{ij}$  é o coeficiente do termo  $a_{ij}$  na expansão do determinante  $|A|$ , desde que pode ser demonstrado que

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = |A|$$

Se  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$  são substituídos por  $a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn}$ , então

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} = 0 \quad (i \neq j)$$

desde que o determinante de  $A$  neste caso possui duas linhas idênticas. Consequentemente, obtemos

$$\sum_{k=1}^n a_{jk}A_{ik} = \delta_{ji}|A|$$

Analogamente,

$$\sum_{k=1}^n a_{ki}A_{kj} = \delta_{ij}|A|$$

**Matriz adjunta.** A matriz  $B$ , onde o elemento da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna é igual a  $A_{ji}$ , é denominada a adjunta de  $A$  e é denotada por  $\text{adj } A$  ou

$$B = (b_{ij}) = (A_{ji}) = \text{adj } A$$

Isto é, a adjunta de  $A$  é a transposta da matriz cujos elementos são os cofatores de  $A$  ou

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Note que o elemento da  $j$ -ésima linha e  $i$ -ésima coluna do produto  $A(\text{adj } A)$  é

$$\sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^n a_{jk}A_{ik} = \delta_{ji}|A|$$

Então,  $A(\text{adj } A)$  é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal são iguais a  $|A|$ .

Portanto,

$$A(\text{adj } A) = |A|I$$

Analogamente, o elemento na  $j$ -ésima linha e  $i$ -ésima coluna do produto  $(\text{adj } A)A$  é

$$\sum_{k=1}^n b_{jk}a_{ki} = \sum_{k=1}^n A_{kj}a_{ki} = \delta_{ji}|A|$$

Consequentemente, temos a relação

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|I \quad (3.1)$$

Por exemplo, dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

podemos verificar que o determinante de  $A$  é 17 e que

$$\begin{aligned} \text{adj } A &= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 7 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} A(\text{adj } A) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 7 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix} \\ &= 17 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= |A|I \end{aligned}$$

**Inversa de uma matriz.** Se, para uma matriz quadrada  $A$ , existir uma matriz  $B$  tal que  $BA = AB = I$ , então  $B$  é denotada por  $A^{-1}$  e é denominada a *inversa de  $A$* .

inversa de uma matriz  $A$  existe se o determinante de  $A$  é não nulo ou  $A$  é não singular.

Por definição, a matriz inversa  $A^{-1}$  possui a propriedade de que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

onde  $I$  é a matriz identidade. Se  $A$  é não singular e  $AB = C$ , então  $B = A^{-1}C$ . Isto pode ser visto da equação

$$A^{-1}AB = IB = B = A^{-1}C$$

Se  $A$  e  $B$  são matrizes não singulares, então o produto  $AB$  é uma matriz não singular. Além disso,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Isto pode ser provado como segue:

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

Analogamente,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$$

Note que

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A^{-1})' = (A')^{-1}$$

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$$

Da Eq. (3.1) e da definição de matriz inversa, temos

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$$

Conseqüentemente, a inversa de uma matriz é a transposta da matriz de seus cofatores, dividida pelo determinante da matriz. Se  $A$  é dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

então

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}.$$

onde  $A_{ij}$  é o cofator de  $a_{ij}$  da matriz  $A$ . Portanto, os termos na  $i$ -ésima coluna de  $A^{-1}$  são  $1/|A|$  vezes os cofatores da  $i$ -ésima linha da matriz original  $A$ . Por exemplo, se  $A$  é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

então a adjunta de  $A$  e o determinante  $|A|$  são os seguintes:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 7 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}, \quad |A| = 17$$

Então a inversa de  $A$  é dada por

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \begin{bmatrix} \frac{3}{17} & \frac{6}{17} & \frac{-4}{17} \\ \frac{7}{17} & \frac{-3}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{2}{17} & \frac{-7}{17} \end{bmatrix}$$

A seguir fornecemos fórmulas para determinar matrizes inversas para matrizes  $2 \times 2$  e matrizes  $3 \times 3$ . Para a matriz  $A$   $2 \times 2$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad ad - bc \neq 0$$

a matriz inversa é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Para a matriz  $A$   $3 \times 3$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad |A| \neq 0$$

a matriz inversa é dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} e & f & -b & c & b & c \\ h & i & -h & i & e & f \\ d & f & a & c & -a & c \\ g & i & g & i & d & f \\ d & e & a & b & a & b \\ g & h & g & h & d & e \end{bmatrix}$$

**Observações sobre cancelamentos de matrizes.** Cancelamento de matrizes não é válido em álgebra matricial. Considere o produto de duas matrizes singulares  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . Por exemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

Então

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Obviamente,  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$  não implica nem  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  nem  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ . De fato,  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$  implica uma das três hipóteses seguintes:

1.  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$
2.  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$
3. Tanto  $\mathbf{A}$  como  $\mathbf{B}$  são singulares.

Podemos provar facilmente que, se tanto  $\mathbf{A}$  como  $\mathbf{B}$  são matrizes não nulas e  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ , então tanto  $\mathbf{A}$  como  $\mathbf{B}$  são singulares. Para uma prova, suponha que se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  não são singulares, então existe uma matriz  $\mathbf{A}^{-1}$  com a seguinte propriedade:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

o que contradiz a hipótese de que  $\mathbf{B}$  é uma matriz não nula. Portanto, concluímos que tanto  $\mathbf{A}$  como  $\mathbf{B}$  devem ser singulares se  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ .

Analogamente, note que se  $\mathbf{A}$  é singular, então nem  $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$  nem  $\mathbf{BA} = \mathbf{CA}$  implica  $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ . Se, entretanto,  $\mathbf{A}$  é uma matriz não singular, então  $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$  implica  $\mathbf{B} = \mathbf{C}$  e  $\mathbf{BA} = \mathbf{CA}$  também implica  $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ .

### 3.5 DIFERENCIAMENTO E INTEGRAÇÃO DE MATRIZES

A derivada de uma matriz  $\mathbf{A}(t) n \times m$  é definida como a matriz  $n \times m$  cujos elementos correspondem à derivada dos elementos correspondentes da matriz original, considerando-se que todos os elementos  $a_{ij}(t)$  possuem derivadas em relação a  $t$ . Isto é,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) = \left( \frac{d}{dt} a_{ij}(t) \right) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} a_{11}(t) & \frac{d}{dt} a_{12}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} a_{1m}(t) \\ \frac{d}{dt} a_{21}(t) & \frac{d}{dt} a_{22}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} a_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d}{dt} a_{n1}(t) & \frac{d}{dt} a_{n2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} a_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

Analogamente, a integral de uma matriz  $\mathbf{A}(t) n \times m$  é definida por

$$\int \mathbf{A}(t) dt = \left( \int a_{ij}(t) dt \right) = \begin{bmatrix} \int a_{11}(t) dt & \int a_{12}(t) dt & \cdots & \int a_{1m}(t) dt \\ \int a_{21}(t) dt & \int a_{22}(t) dt & \cdots & \int a_{2m}(t) dt \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int a_{n1}(t) dt & \int a_{n2}(t) dt & \cdots & \int a_{nm}(t) dt \end{bmatrix}$$

**Diferenciamento do produto de duas matrizes.** Se as matrizes  $\mathbf{A}(t)$  e  $\mathbf{B}(t)$  podem ser diferenciadas em relação a  $t$ , então

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)] = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t) \frac{d\mathbf{B}(t)}{dt}$$

Novamente, neste caso a multiplicação de  $\mathbf{A}(t)$  e  $d\mathbf{B}(t)/dt$  [ou  $d\mathbf{A}(t)/dt$  e  $\mathbf{B}(t)$ ] é, em geral, não comutativa.

**Diferenciamento de  $\mathbf{A}^{-1}(t)$ .** Se uma matriz  $\mathbf{A}(t)$  e sua inversa  $\mathbf{A}^{-1}(t)$  são diferenciáveis em relação a  $t$ , então a derivada de  $\mathbf{A}^{-1}(t)$  é dada por

$$\frac{d\mathbf{A}^{-1}(t)}{dt} = -\mathbf{A}^{-1}(t) \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \mathbf{A}^{-1}(t)$$

Este resultado pode ser demonstrado pela diferenciação de  $\mathbf{A}(t)\mathbf{A}^{-1}(t)$  em relação a  $t$ . Desde que

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t)\mathbf{A}^{-1}(t)] = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \mathbf{A}^{-1}(t) + \mathbf{A}(t) \frac{d\mathbf{A}^{-1}(t)}{dt}$$

e

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}(t)\mathbf{A}^{-1}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

obtemos

$$\mathbf{A}(t) \frac{d\mathbf{A}^{-1}(t)}{dt} = -\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \mathbf{A}^{-1}(t)$$

ou

$$\frac{d\mathbf{A}^{-1}(t)}{dt} = -\mathbf{A}^{-1}(t) \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \mathbf{A}^{-1}(t)$$

## PROBLEMAS ILUSTRATIVOS E SOLUÇÕES

**Problema A.3.1** Mostre que se  $\mathbf{A}$  é uma matriz quadrada qualquer, então  $\mathbf{A} + \mathbf{A}'$  é uma matriz simétrica e  $\mathbf{A} - \mathbf{A}'$  é uma matriz anti-simétrica.

**Solução.** Considere a seguinte matriz  $3 \times 3$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Então

$$\mathbf{A} + \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2a & b+d & c+g \\ b+d & 2e & f+h \\ c+g & f+h & 2i \end{bmatrix} = \text{matriz simétrica}$$

e

$$\mathbf{A} - \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & b-d & c-g \\ d-b & 0 & f-h \\ g-c & h-f & 0 \end{bmatrix} = \text{matriz anti-simétrica}$$

**Problema A.3.2** Calcule o produto  $\mathbf{AB}$ , onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**Solução.**

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -4 \\ 13 & 13 \end{bmatrix}$$

**Problema A.3.3** A matriz de Vandermonde é dada por

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Determine o determinante de  $\mathbf{V}$  para os casos em que  $n = 3$  e  $n = 4$ .

**Solução.** Para  $n = 3$ ,

$$|\mathbf{V}| = (x_1 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_3)$$

Para  $n = 4$ ,

$$|\mathbf{V}| = (x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$$

**Problema A.3.4** Demonstre que se as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são  $n \times n$ , então,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{vmatrix} = |\mathbf{A} + \mathbf{B}| \cdot |\mathbf{A} - \mathbf{B}|$$

**Solução.**

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B} & \mathbf{B} - \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} - \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A} + \mathbf{B}| \cdot |\mathbf{A} - \mathbf{B}|$$

Note que para as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$ ,  $n \times n$ , o determinante

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix}$$

é, em geral, diferente de  $|\mathbf{AD} - \mathbf{BC}|$  e de  $|\mathbf{A}| |\mathbf{D}| - |\mathbf{B}| |\mathbf{C}|$ .

**Problema A.3.5** Determine a inversa de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ s+2 & s \end{bmatrix}$$

onde  $s$  é uma variável complexa.

**Solução.**

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + 2s + 2} & \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \\ -\frac{s+2}{s^2 + 2s + 2} & \frac{s-1}{s^2 + 2s + 2} \end{bmatrix}$$

**Problema A.3.6** Determine a solução do seguinte conjunto de três equações simultâneas:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$$

$$2x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$$

**Solução.** Definindo as seguintes matrizes e vetores:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

obtemos

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Portanto,

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

onde

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-9} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}$$

Resultando

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{10}{9} \end{bmatrix}$$

## PROBLEMAS

**Problema B.3.1** Demonstre que qualquer matriz quadrada pode ser escrita como sendo a soma de uma matriz Hermitiana e outra anti-Hermitiana.

**Problema B.3.2** Demonstre que para as matrizes A e B:

1.  $|A| = |A'|$
2.  $|AB| = |A||B|$
3.  $|(AB)'| = |A||B|$

**Problema B.3.3** Em geral,  $(A + B)^2$  não é igual a  $A^2 + 2AB + B^2$ . Explique a razão. Sob qual condição  $(A + B)^2$  é igual a  $A^2 + 2AB + B^2$ ?

**Problema B.3.4** Determine  $A^{-1}$  considerando que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Problema B.3.5** Uma matriz cujos elementos abaixo (ou acima) da diagonal principal são todos nulos é denominada uma matriz triangular. Um exemplo é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Usando esta matriz  $3 \times 3$ , demonstre que a matriz inversa de uma matriz triangular também é uma matriz triangular.

**Problema B.3.6** Determine a característica da seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

**Problema B.3.7** Resolva o seguinte conjunto de três equações simultâneas:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$$

**Problema B.3.8** Um conjunto de  $n$  equações algébricas simultâneas:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

pode ser descrito por

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

onde

$$\mathbf{A} = (a_{ij})$$

Um sistema de equações é dito *consistente* se possuir pelo menos uma solução. Se as  $n$  equações são consistentes porém A é singular, como podemos determinar x? Utilizando um caso simples onde  $n = 3$ , explique como se pode obter x. Considere os dois casos nos quais a característica de A = 2 e a característica de A = 1.

# Modelos Matemáticos de Sistemas Físicos

## 4.1 INTRODUÇÃO

A maioria dos sistemas dinâmicos, independentemente de serem mecânicos, elétricos, térmicos, hidráulicos, econômicos, biológicos etc., podem ser caracterizados por equações diferenciais. A resposta de um sistema dinâmico a uma dada entrada (ou função de excitação) pode ser obtida se estas equações diferenciais são resolvidas. Podem-se obter as equações utilizando leis físicas que governam um particular sistema, por exemplo, as leis de Newton para sistemas mecânicos, as leis de Kirchhoff para sistemas elétricos etc.

**Modelos matemáticos.** A descrição matemática das características dinâmicas de um sistema é denominado *modelo matemático*. O primeiro passo na análise de um sistema dinâmico é obter seu modelo. Deve-se sempre levar em conta que a obtenção de um modelo matemático razoável é a parte mais importante de toda a análise.

Os modelos podem assumir formas muito diferentes. Dependendo do particular sistema e de certas circunstâncias, uma representação matemática pode ser mais conveniente do que outras representações. Por exemplo, em problemas de controle de primeira-ordem. (Referir-se ao Cap. 14.) Por outro lado, para a análise de resposta transitória ou análise de resposta em frequência de sistemas de entrada-simples-saída-simples, a representação através da função de transferência a ser discutida neste capítulo poderá ser mais conveniente do que qualquer outra.

Uma vez obtido o modelo matemático de um sistema, várias ferramentas analíticas ou por computador podem ser utilizadas para fins de análise e síntese.

**Simplicidade versus precisão.** Na obtenção de um modelo, devemos estabelecer um compromisso entre a simplicidade do modelo e a precisão dos resultados da análise. Note que os resultados obtidos da análise são válidos somente na extensão da qual o modelo se aproxima de um dado sistema físico.

A rapidez com a qual um computador digital pode desempenhar operações aritméticas permite-nos empregar uma nova abordagem na formulação de modelos matemáticos. Ao invés de nos limitarmos apenas aos modelos simples, podemos, se necessário, incluir centenas de equações para descrever um sistema completo. Se não for necessário uma precisão extrema, entretanto, é preferível obter apenas um modelo razoavelmente simplificado.

Na dedução de tal modelo simplificado, freqüentemente torna-se necessário ignorar certas propriedades físicas inerentes ao sistema. Em particular, se um modelo matemático linear a parâmetros concentrados (isto é, um modelo empregando equações diferenciais ordinárias) é desejado, é sempre necessário ignorar certas não linearidades e parâmetros distribuídos (isto é, aqueles que resultam em equações diferenciais parciais) que podem estar presentes no sistema físico. Se os efeitos que estas propriedades ignoradas apresentam na resposta são pequenos, será obtida uma boa concordância entre os resultados da análise de um modelo matemático e os resultados do estudo experimental do sistema físico.

Em geral, na solução de um novo problema, verificamos ser desejável inicialmente construir um modelo simplificado de modo a ganharmos um conhecimento básico e geral para a solução. Posteriormente um modelo matemático mais completo poderá então ser elaborado e utilizado para uma análise mais integral.

Devemos estar cientes do fato de que um modelo linear a parâmetros concentrados, que pode ser válido em operações de baixa frequência, poderá não ser válido em frequências suficientemente altas desde que as propriedades desprezadas dos parâmetros distribuídos podem tornar-se um fator importante no comportamento dinâmico do sistema. Por exemplo, a massa de uma mola pode ser desprezada em operações de baixa frequência, porém torna-se uma propriedade importante do sistema em altas frequências.

**Sistemas lineares.** Sistemas lineares são aqueles nos quais as equações do modelo são lineares. Uma equação diferencial é linear se os coeficientes são constantes ou apenas funções da variável independente. A propriedade mais importante de sistemas lineares é que o princípio da superposição é aplicável. O princípio da superposição estabelece que a resposta produzida pela aplicação simultânea de duas forças de excitação diferentes é igual à soma das duas respostas individuais. Consequentemente, para sistemas lineares, a resposta para várias entradas pode ser calculada considerando-se uma única entrada de cada vez e adicionando-se os resultados. É este princípio que permite a construção de soluções complicadas para equações diferenciais lineares a partir de soluções relativamente simples.

Em uma investigação experimental de um sistema dinâmico, se a causa e o efeito são proporcionais, implicando que o princípio da superposição é aplicável, então o sistema pode ser considerado linear.

**Sistemas lineares invariáveis no tempo e sistemas lineares variáveis no tempo.** Sistemas dinâmicos que são lineares e compostos de componentes com parâmetros concentrados e invariáveis no tempo podem ser descritos por equações diferenciais invariáveis no tempo. Estes sistemas são denominados sistemas *lineares invariáveis no tempo* (a *coeficiente-constante linear*). Os sistemas que são representados por equações diferenciais cujos coeficientes são funções de tempo são denominados sistemas variáveis no tempo. Um exemplo de um sistema de controle variável no tempo é um sistema de controle de uma nave espacial. (A

massa de uma nave espacial varia devido ao consumo de combustível, e a força gravitacional varia conforme a nave se distancia da Terra.)

**Sistemas não lineares.** Sistemas não lineares são aqueles representados por equações não lineares. Exemplos de equações não lineares são

$$y = \sin x$$

$$y = x^2$$

$$z = x^2 + y^2$$

(Na última equação,  $z$  é uma função não linear de  $x$  e  $y$ .)

Uma equação diferencial é dita *não linear* se ela não for linear. Exemplos de equações diferenciais não lineares são

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x = A \sin \omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x - x^3 = 0$$

Embora muitas relações físicas sejam representadas muitas vezes por equações lineares, na maioria dos casos as relações reais não são exatamente lineares. De fato, um estudo cuidadoso de sistemas físicos revela que mesmo os chamados "sistemas lineares" são realmente lineares apenas em faixas limitadas de operação. Na prática, muitos sistemas eletromecânicos, sistemas hidráulicos, sistemas pneumáticos etc. envolvem relações não lineares entre as variáveis. Por exemplo, a saída de um componente pode saturar para sinais grandes na entrada. Pode haver, por outro lado, um espaço morto que afeta em relação a pequenos sinais. (O espaço morto de um componente é um pequeno intervalo de variações na entrada dentro do qual o componente é insensível.) Não-linearidade do tipo lei-quadrática pode ocorrer em alguns componentes. Por exemplo, amortecedores utilizados em sistemas físicos podem ser lineares em operações de baixa velocidade, porém podem tornar-se não lineares para altas velocidades, e a força amortecedora pode tornar-se proporcional ao quadrado da velocidade de operação. Exemplos de curvas características para estas não linearidades são indicados na Fig. 4.1.

Note que alguns sistemas de controle importantes são não lineares em relação a sinais de qualquer dimensão. Por exemplo, em sistemas de controle liga-desliga (*on-off*), a ação de controle ou é liga ou desliga e não há uma relação linear entre a entrada e a saída do controlador.

A característica mais importante de sistemas não lineares é o fato de que não é aplicável o princípio da superposição. Os procedimentos para determinar as soluções de problemas que possuam sistemas não lineares, em geral, são extremamente complicados. Devido a esta dificuldade matemática inerente a sistemas não lineares, normalmente é necessário introduzir sistemas lineares "equivalentes" no lugar daqueles não lineares. Estes sistemas lineares equivalentes somente são válidos dentro de uma faixa limitada de operação. Uma vez que um sistema não linear é aproximado por um modelo matemático linear, várias ferramentas lineares podem

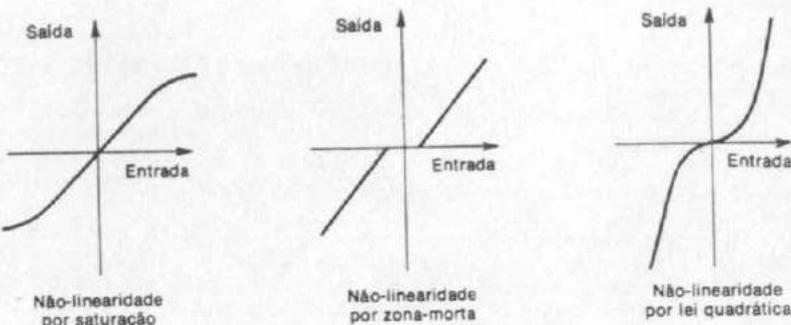


Fig. 4.1 Curvas características para várias não-linearidades.

ser aplicadas para fins de análise e projeto. Introduziremos neste livro várias técnicas de linearização.

## 4.2 FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

Na teoria de controle, funções denominadas "funções de transferência" são extremamente usadas para caracterizar as relações entrada-saída de sistemas lineares invariáveis no tempo. O conceito de funções de transferência aplica-se somente a sistemas lineares invariáveis no tempo, embora possa ser estendido a certos sistemas de controle não lineares. (Referir-se ao Cap. 11).

**Funções de transferência.** A função de transferência de um sistema linear invariante no tempo é definida como sendo a relação da transformada de Laplace da saída (função resposta) para a transformada de Laplace da entrada (função excitação), considerando-se nulas todas as condições iniciais.

Considere o sistema linear invariável no tempo definido pela seguinte equação diferencial:

$$a_0 \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1} \overset{(1)}{y} + a_n y = b_0 x - b_1 \overset{(m-1)}{x} + \cdots + b_{m-1} \overset{(1)}{x} + b_m x \quad (n \geq m) \quad (4.1)$$

onde  $y$  é a saída do sistema e  $x$  é a entrada. A função de transferência deste sistema é obtida considerando-se as transformadas de Laplace de ambos os membros da Eq. (4.1), considerando-se que todas as condições iniciais são nulas, ou seja,

$$\text{Função de transferência} = G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

A função de transferência é uma expressão relacionando a saída e a entrada de um sistema linear invariável no tempo em termos dos parâmetros do sistema e é uma propriedade do próprio sistema, independente da entrada ou função de excitação. A função de transferência inclui as unidades necessárias para relacionar a entrada com a saída; entretanto, não fornece qualquer informação relativa à estru-

tura física do sistema. (As funções de transferência de muitos sistemas físicos diferentes podem ser idênticas.)

Pela utilização deste conceito, pode-se representar a dinâmica do sistema por equações algébricas em  $s$ . A maior potência de  $s$  no denominador da função de transferência é igual à ordem do termo de maior derivada na saída. Se a maior potência de  $s$  é igual a  $n$ , o sistema é denominado um sistema de ordem  $n$ -ésima.

**Sistema translacional mecânico.** Considere o sistema amortecedor viscoso-mola-massa indicado na Fig. 4.2. Um amortecedor do tipo indicado é um dispositivo que proporciona uma fricção viscosa, ou amortecimento. Consiste em um pistão e um cilindro cheio de óleo. Qualquer movimento relativo entre a haste do pistão e o cilindro é resistido pelo óleo porque este deve fluir em volta do pistão (ou através de orifícios existentes no pistão) de um lado do pistão para o outro. O amortecedor essencialmente absorve energia. Esta energia absorvida é dissipada como calor, e o amortecedor não armazena qualquer energia cinética ou potencial.

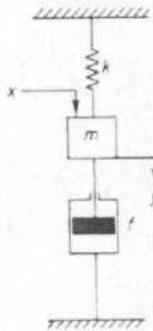


Fig. 4.2 Sistema do amortecedor viscoso-mola-massa.

Calculemos a função de transferência deste sistema admitindo que a força  $x(t)$  é a entrada e o deslocamento da massa é a saída  $y(t)$ . Procederemos de acordo com os seguintes passos:

1. Escrever a equação diferencial do sistema.
2. Considerar a transformada de Laplace da equação diferencial, admitindo que todas as condições iniciais são nulas.
3. Calcular a relação entre a saída  $Y(s)$  e a entrada  $X(s)$ . Esta relação é a função de transferência.

Para calcular a equação diferencial linear invariante no tempo, vamos supor que a força de fricção do amortecedor é proporcional a  $\dot{y}$  e que a mola é uma mola linear, isto é, que a força na mola é proporcional a  $y$ . Neste sistema,  $m$  indica a massa,  $f$  indica o coeficiente da fricção-viscosa, e  $k$  denota a constante da mola.

A lei fundamental que governa os sistemas mecânicos é a lei de Newton. Para sistemas de translação a lei estabelece que

$$ma = \sum F$$

onde

$$\begin{aligned}m &= \text{massa, kg} \\a &= \text{aceleração, m/s}^2 \\F &= \text{força, N}\end{aligned}$$

Um quilograma é uma unidade de massa. Quando é acionado por uma força de 1 N, a massa de 1 kg acelera com 1 m/s<sup>2</sup>.

Aplicando a lei de Newton ao sistema presente, obtemos

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -f \frac{dy}{dt} - ky + x$$

ou

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky = x \quad (4.2)$$

Considerando a transformada de Laplace de cada termo da Eq. (4.2), resulta

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[m \frac{d^2y}{dt^2}\right] &= m[s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)] \\ \mathcal{L}\left[f \frac{dy}{dt}\right] &= f[sY(s) - y(0)] \\ \mathcal{L}[ky] &= kY(s) \\ \mathcal{L}[x] &= X(s)\end{aligned}$$

Se considerarmos as condições iniciais iguais a zero de modo que  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ , a transformada de Laplace da Eq. (4.2) pode ser escrita

$$(ms^2 + fs - k)Y(s) = X(s)$$

Calculando a relação entre  $Y(s)$  e  $X(s)$ , encontramos que a função de transferência do sistema é dada por

$$\text{Função de transferência} = G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{ms^2 + fs + k}$$

**Sistema rotacional mecânico.** Considere o sistema indicado na Fig. 4.3. O sistema consiste em uma carga de inércia e um amortecedor por fricção-viscosa.

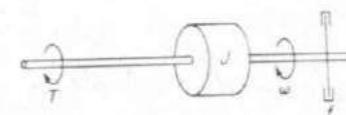


Fig. 4.3 Sistema rotacional mecânico.

Por definição,

- $J = \text{momento de inércia da carga, kg-m}^2$
- $f = \text{coeficiente de fricção-viscosa, N-m/rad/s}$
- $\omega = \text{velocidade angular, rad/s}$
- $T = \text{torque aplicado ao sistema, N-m}$

Para sistemas rotacionais mecânicos, a lei de Newton estabelece que

$$J\ddot{\omega} = \sum T$$

onde

- $J = \text{momento de inércia, kg-m}^2$
- $\alpha = \text{aceleração angular, rad/s}^2$
- $T = \text{torque, N-m}$

A relação entre  $\text{g-cm}^2$  e  $\text{slug-ft}^2$  é dada por

$$1 \text{ slug-ft}^2 = 13,56 \times 10^6 \text{ g-cm}^2$$

As unidades consistentes para massa, momento de inércia e torque são fornecidas pela seguinte tabela:

Massa	Momento de inércia	Torque
slug	slug-ft <sup>2</sup>	N-m
grama	g-cm <sup>2</sup>	dina-cm
quilograma	kg-m <sup>2</sup>	newton-m

Aplicando a lei de Newton ao sistema apresentado, obtemos

$$J\ddot{\omega} + f\dot{\omega} = T$$

Se admitirmos que o torque  $T$  aplicado é a entrada e a velocidade angular  $\omega$  é a saída, então a função de transferência deste sistema é dada por

$$\frac{\Omega(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js + f}$$

onde

$$\Omega(s) = \mathcal{L}[\omega(t)]$$

$$T(s) = \mathcal{L}[T(t)]$$

**Círculo L-R-C.** Considere o circuito elétrico indicado na Fig. 4.4. O circuito consiste em uma indutância  $L$  (henry), uma resistência  $R$  (ohm), e uma capacidade  $C$  (farad).

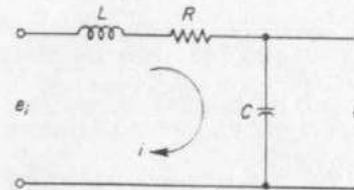


Fig. 4.4 Circuito elétrico.

$C$  (farad). Aplicando as leis de Kirchhoff para o sistema, obtemos as seguintes equações:

$$L \frac{di}{dt} + Ri - \frac{1}{C} \int i dt = e_i \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{C} \int i dt = e_o \quad (4.4)$$

Tomando as transformadas de Laplace das Eqs. (4.3) e (4.4), admitindo condições iniciais nulas, obtemos

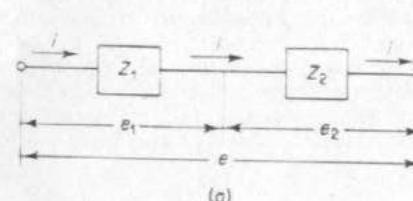
$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = E_i(s)$$

$$\frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = E_o(s)$$

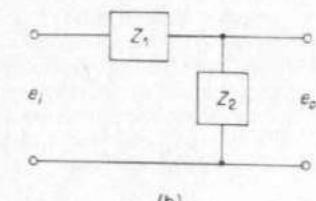
Se se admite que  $e_i$  é a entrada e  $e_o$  a saída, então, demonstra-se que a função de transferência deste sistema é

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (4.5)$$

**Impedâncias complexas.** Na dedução de funções de transferência para redes elétricas, freqüentemente verificamos ser conveniente escrever diretamente as equações transformadas em Laplace sem escrever as equações diferenciais. Considere o sistema indicado na Fig. 4.5(a). Neste sistema,  $Z_1$  e  $Z_2$  representam impedâncias complexas. A impedância complexa  $Z(s)$  de um circuito com dois terminais é a relação entre  $E(s)$ , a transformada de Laplace da tensão entre os terminais, e



(a)



(b)

Fig. 4.5 Circuitos elétricos.

$I(s)$ , a transformada de Laplace da corrente através do elemento, admitindo-se condições iniciais nulas, de modo que  $Z(s) = E(s)/I(s)$ . Se o elemento de dois terminais for uma resistência  $R$ , capacidade  $C$  ou indutância  $L$ , então a respectiva impedância complexa é dada por  $R$ ,  $1/Cs$ , ou  $Ls$ , respectivamente. Se impedâncias complexas forem ligadas em série, a impedância total é a soma das impedâncias individuais.

Considere o circuito indicado na Fig. 4.5(b). Suponha que as tensões  $e_1$  e  $e_0$  correspondem à entrada e à saída do circuito, respectivamente. A função de transferência deste circuito é, então,

$$\frac{E_0(s)}{E_1(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

Para o sistema mostrado na Fig. 4.4.

$$Z_1 = Ls + R, \quad Z_2 = \frac{1}{Cs}$$

Portanto, a função de transferência  $E_0(s)/E_1(s)$  pode ser escrita:

$$\begin{aligned} \frac{E_0(s)}{E_1(s)} &= \frac{\frac{1}{Cs}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} \\ &= \frac{1}{Ls^2 + Rcs + 1} \end{aligned}$$

que, é claro, é idêntica à Eq. (4.5).

**Elementos passivos e elementos ativos.** Alguns dos elementos em um sistema (por exemplo, capacitâncias e indutâncias em um sistema elétrico) armazenam energia. Esta energia pode posteriormente ser introduzida no sistema. A quantidade de energia que pode ser introduzida não pode exceder a quantidade que o elemento armazenou, e, a menos que um elemento tenha armazenado energia anteriormente, ele não pode fornecer qualquer energia para um sistema. Por esta razão, tais elementos são denominados elementos *passivos*. Um sistema contendo apenas elementos passivos é denominado um sistema *passivo*. Exemplos de elementos passivos são as capacitâncias, resistências, indutâncias, massas, inércias, amortecedores, molas. Para sistemas passivos, todos os termos em uma equação diferencial homogênea do sistema possuem o mesmo sinal.

Um elemento físico que pode fornecer energia externa para um sistema é denominado um elemento *ativo*. Por exemplo, um amplificador é um elemento ativo desde que possui uma fonte de potência e supre potência ao sistema. Fontes de força externa, torque ou velocidade; fontes de tensão, ou corrente etc. também são elementos ativos.

**Analogia força-tensão.** Considere o sistema mecânico indicado na Fig. 4.6(a) e o sistema elétrico mostrado na Fig. 4.6(b). A equação diferencial para este sistema mecânico é

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = p \quad (4.6)$$

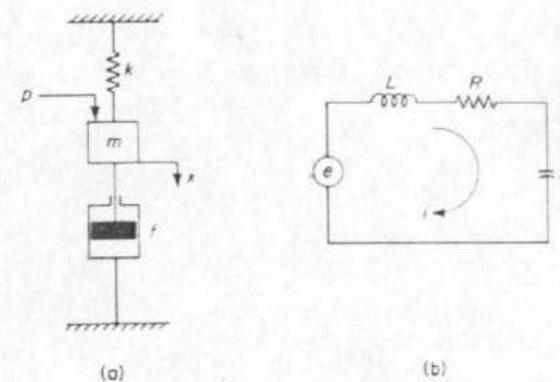


Fig. 4.6 (a) Sistema mecânico; (b) sistema elétrico análogo.

enquanto a equação diferencial para o sistema elétrico é

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e$$

Em termos da carga elétrica  $q$ , esta última equação torna-se

$$L \frac{dq^2}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = e \quad (4.7)$$

Comparando as Eqs. (4.6) e (4.7), verificamos que as equações diferenciais para os dois sistemas são idênticas. Estes sistemas são denominados sistemas análogos, e os termos que ocupam posições correspondentes nas equações diferenciais são chamados de grandezas análogas. Uma lista de grandezas análogas é fornecida na Tabela 4.1. Neste caso a analogia é denominada analogia força-tensão elétrica.

Tabela 4.1 Grandezas análogas na analogia força-tensão

Sistema mecânico	Sistema elétrico
força $p$ (torque $T$ )	tensão elétrica $e$
massa $m$ (momento de inércia $J$ )	indutância $L$
coeficiente de fricção-viscosa $f$	resistência $R$
constante da mola $k$	recíproca de capacidade (elastância) $1/C$
deslocamento $x$ (deslocamento angular $\theta$ )	carga $q$
velocidade $\dot{x}$ (velocidade angular $\dot{\theta}$ )	corrente $i$

A Fig. 4.7 mostra alguns exemplos de sistemas análogos. Cada um dos sistemas elétricos e seu sistema mecânico correspondente possuem funções de transferência análogas. (Na Fig. 4.7,  $x_i$  e  $x_o$  indicam deslocamentos.) Note que na dedução das funções de transferência, consideramos que os sistemas são constituídos por parâmetros concentrados e que não há efeito de carga na saída.

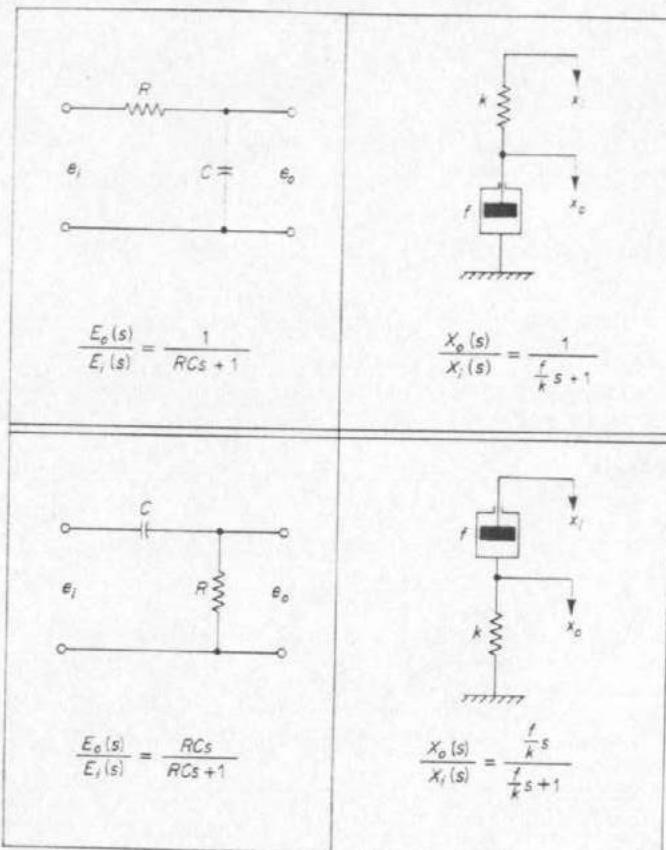


Fig. 4.7 Sistemas análogos.

**Analogia força-corrente.** Outra analogia útil entre sistemas elétricos e sistemas mecânicos é baseada na analogia força-corrente. Considere o sistema mecânico mostrado na Fig. 4.8(a). A equação diferencial que descreve o sistema é

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = p \quad (4.8)$$

Considere agora o sistema elétrico mostrado na Fig. 4.8(b). Aplicando a lei de Kirchhoff relativa a correntes, obtemos

$$i_L + i_R + i_C = i_s \quad (4.9)$$

onde

$$i_L = \frac{1}{L} \int e dt$$

$$i_R = \frac{e}{R}$$

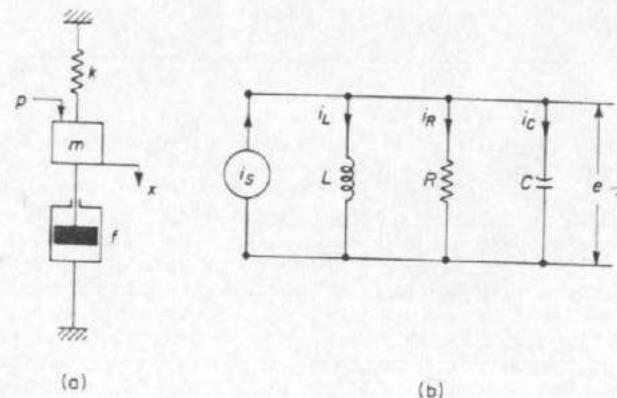


Fig. 4.8 (a) Sistema mecânico; (b) sistema elétrico análogo.

$$i_C = C \frac{de}{dt}$$

A Eq. (4.9) pode ser escrita

$$\frac{1}{L} \int e dt + \frac{e}{R} + C \frac{de}{dt} = i_s \quad (4.10)$$

Note que o fluxo magnético concatenado  $\psi$  é relacionado com  $e$  pela seguinte equação:

$$\frac{d\psi}{dt} = e$$

Em termos de  $\psi$ , a Eq. (4.10) pode ser escrita como segue:

$$C \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{L} \psi = i_s \quad (4.11)$$

Comparando as Eqs. (4.8) e (4.11), verificamos que os dois sistemas são sistemas análogos. As grandezas análogas são listadas na Tabela 4.2. Neste caso a analogia é denominada analogia força-corrente.

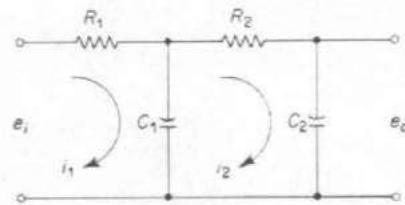
**Tabela 4.2** Grandezas análogas na analogia força-corrente

Sistema mecânico	Sistema elétrico
força $p$ (torque $T$ )	corrente elétrica $i$
massa $m$ (inércia $J$ )	capacitância $C$
coeficiente de fricção-viscosa $f$	recíproco da resistência (condutância) $1/R$
constante da mola $k$	recíproco da indutância $1/L$
deslocamento $x$ (deslocamento angular $\theta$ )	fluxo magnético concatenado $\psi$
velocidade $\dot{x}$ (velocidade angular $\dot{\theta}$ )	tensão elétrica $e$

**Sistemas análogos.** O conceito de sistemas análogos é muito útil na prática desde que um tipo de sistema pode ser mais fácil de ser manuseado experimentalmente do que um outro tipo. Por exemplo, em vez de construir e estudar um sistema mecânico, podemos construir e estudar seu análogo elétrico porque, em geral, sistemas elétricos ou eletrônicos são muito mais fáceis de serem analisados experimentalmente. Em particular, computadores analógicos eletrônicos são muito úteis para simulação de sistemas mecânicos, bem como de outros sistemas físicos.

Deve ser lembrado que analogias entre estes sistemas caem por terra quando as regiões de operação são muito extensas. Em outras palavras, desde que as equações diferenciais relacionadas com as analogias são baseadas somente por aproximação às características dinâmicas dos sistemas físicos, a analogia pode falhar se a região de operação de um sistema é muito ampla. Se a região de operação de um dado sistema mecânico é ampla, entretanto, pode ser dividida em duas ou mais sub-regiões e os sistemas elétricos análogos podem ser elaborados para cada sub-região. De fato, analogias não são limitadas a sistemas elétricos e sistemas mecânicos; são aplicáveis a quaisquer sistemas nos quais suas equações diferenciais, ou funções de transferência, são de forma idêntica.

**Funções de transferência de elementos em cascata.** Muitos sistemas realimentados possuem componentes que carregam uns aos outros. Considere o sistema mostrado na Fig. 4.9. Suponha que  $e_i$  é a entrada e  $e_o$  é a saída. Neste sistema o



**Fig. 4.9** Sistema elétrico.

segundo estágio do circuito (parte  $R_2C_2$ ) produz um efeito de carga no primeiro estágio (parte  $R_1C_1$ ). As equações para este sistema são

$$\frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt + R_1 i_1 = e_i \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{C_2} \int (i_2 - i_1) dt + R_2 i_2 = -\frac{1}{C_1} \int i_2 dt = -e_o \quad (4.13)$$

Tomando as transformadas de Laplace das Eqs. (4.12) e (4.13), admitindo condições iniciais nulas, obtemos

$$\frac{1}{C_1 s} [I_1(s) - I_2(s)] - R_1 I_1(s) = E_i(s) \quad (4.14)$$

$$\frac{1}{C_2 s} [I_2(s) - I_1(s)] - R_2 I_2(s) = -\frac{1}{C_1 s} I_2(s) = -E_o(s) \quad (4.15)$$

Eliminando  $I_1(s)$  e  $I_2(s)$  das Eqs. (4.14) e (4.15), verificamos que a função de transferência entre  $E_o(s)$  e  $E_i(s)$  é

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{1}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1) + R_1 R_2 C_2 s} \\ &= \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 R_2 C_2)s + 1} \end{aligned} \quad (4.16)$$

O termo  $R_1 R_2 C_2 s$  no denominador da função de transferência representa a interação dos dois circuitos simples  $RC$ . Desde que  $(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 R_2 C_2)^2 > 4R_1 C_1 R_2 C_2$ , as duas raízes do denominador da Eq. (4.16) são reais.

Esta análise demonstrou que se dois circuitos  $RC$  são ligados em cascata, de modo que a saída do primeiro circuito é a entrada do segundo, a função de transferência global não é o produto de  $1/(R_1 C_1 s + 1)$  e  $1/(R_2 C_2 s + 1)$ . A justificativa para este fato é que, quando calculamos a função de transferência para um circuito isolado, admitimos implicitamente que a saída não é carregada. Em outras palavras, se admite a impedância de carga infinita, o que significa que nenhuma potência está sendo consumida na saída. Quando o segundo circuito é ligado na saída do primeiro, entretanto, uma certa quantidade de potência é consumida, sendo consequentemente violada a consideração de não haver carga na saída. Portanto, se a função de transferência deste sistema é obtida sobre a hipótese de não haver carga, então ela não é válida. O grau de efeito de carregamento determina a quantidade de modificação da função de transferência.

**Funções de transferência de elementos em cascata sem carregamento.** A função de transferência de um sistema consistindo em dois elementos em cascata sem carregamento pode ser obtida eliminando-se a entrada e a saída intermediárias. Por exemplo, considere o sistema mostrado na Fig. 4.10(a). A função de transferência de cada elemento é

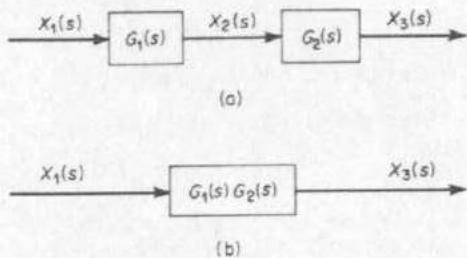


Fig. 4.10 (a) Sistema consistindo em dois elementos em cascata sem carregamento; (b) um sistema equivalente.

$$G_1(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)}, \quad G_2(s) = \frac{X_3(s)}{X_2(s)}$$

Se a impedância de entrada do segundo elemento é infinita, a saída do primeiro elemento não é afetada pela conexão ao segundo elemento. Neste caso, a função de transferência de todo o sistema é

$$G(s) = \frac{X_3(s)}{X_1(s)} = \frac{X_2(s) X_3(s)}{X_1(s) X_2(s)} = G_1(s) G_2(s)$$

A função de transferência do sistema global é então o produto da função de transferência dos elementos individuais. Isto é mostrado na Fig. 4.10(b).

Como exemplo, considere o sistema indicado na Fig. 4.11. A inserção de um amplificador de isolamento entre os circuitos para obter características sem carregamento é frequentemente utilizada para combinar circuitos elétricos. Desde que tanto amplificadores de estado sólido como amplificadores a válvulas possuem impedâncias de entrada muito altas, um amplificador de isolamento inserido entre os dois circuitos justifica a afirmação de não haver carregamento.

Os dois circuitos simples  $RC$ , isolados por um amplificador conforme indicado na Fig. 4.11, possuem efeitos de carregamento desprezíveis e a função de transferência de todo o circuito é igual ao produto das funções de transferência individuais. Consequentemente, neste caso,

$$\begin{aligned} \frac{E_0(s)}{E_i(s)} &= \left( \frac{1}{R_1 C_1 s + 1} \right) (K) \left( \frac{1}{R_2 C_2 s + 1} \right) \\ &= \frac{K}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)} \end{aligned}$$

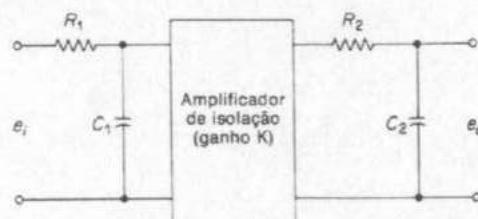


Fig. 4.11 Sistema elétrico.

### 4.3 LINEARIZAÇÃO DE UM MODELO MATEMÁTICO NÃO LINEAR

Esta seção apresenta uma técnica de linearização aplicável a muitos sistemas não lineares. Aplicaremos esta técnica a um servomotor hidráulico e obteremos uma função de transferência para o servomotor hidráulico linearizado.

**Aproximação linear de sistemas não lineares.** A fim de obter um modelo matemático linear para um sistema não linear, suporemos que as variáveis variam muito pouco em relação a alguma condição de operação. Considere um sistema cuja entrada é  $x(t)$  e cuja saída é  $y(t)$ . A relação entre  $y(t)$  e  $x(t)$  é dada por

$$y = f(x) \quad (4.17)$$

Se a condição de operação normal corresponde a  $\bar{x}, \bar{y}$ , então a Eq. (4.17) pode ser expandida em série de Taylor em torno desse ponto como segue:

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}(x - \bar{x})^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde as derivadas  $df/dx, d^2f/dx^2, \dots$  são calculadas em  $x = \bar{x}$ . Se a variação de  $x - \bar{x}$  é pequena, podemos desprezar os termos de maior ordem em  $x - \bar{x}$ . Então a Eq. (4.18) pode ser escrita

$$y = \bar{y} + K(x - \bar{x}) \quad (4.19)$$

onde

$$\bar{y} = f(\bar{x})$$

$$K = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}}$$

A Eq. (4.19) pode ser reescrita como

$$y - \bar{y} = K(x - \bar{x}) \quad (4.20)$$

o que indica que  $y - \bar{y}$  é proporcional a  $x - \bar{x}$ . A Eq. (4.20) fornece um modelo matemático linear para um sistema não linear dado pela Eq. (4.17).

Agora considere um sistema não linear cuja saída  $y$  é uma função de duas entradas  $x_1$  e  $x_2$ , de modo que

$$y = f(x_1, x_2) \quad (4.21)$$

De modo a obter uma aproximação linear para este sistema não linear, podemos expandir a Eq. (4.21) em uma série de Taylor em torno do ponto de operação  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ . Então a Eq. (4.21) torna-se

$$y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} (x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2} (x_2 - \bar{x}_2) \right] + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (x_1 - \bar{x}_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} (x_2 - \bar{x}_2)^2 \right] + \dots$$

onde as derivadas parciais são calculadas em  $x_1 = \bar{x}_1, x_2 = \bar{x}_2$ . Próximo ao ponto de operação normal, os termos de ordem superior podem ser desprezados. O modelo matemático linear deste sistema não linear na vizinhança da condição da operação normal é então dado por

$$y - \bar{y} = K_1(x_1 - \bar{x}_1) + K_2(x_2 - \bar{x}_2)$$

onde

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$$K_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x_1=\bar{x}_1, x_2=\bar{x}_2}$$

$$K_2 = \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{x_1=\bar{x}_1, x_2=\bar{x}_2}$$

**Servomotor hidráulico.** A Fig. 4.12 mostra um servomotor hidráulico. É essencialmente um amplificador de potência hidráulico controlado por válvula piloto. A válvula piloto é uma válvula balanceada no sentido de que as forças de pressão que agem na mesma são todas平衡adas. Uma potência de saída

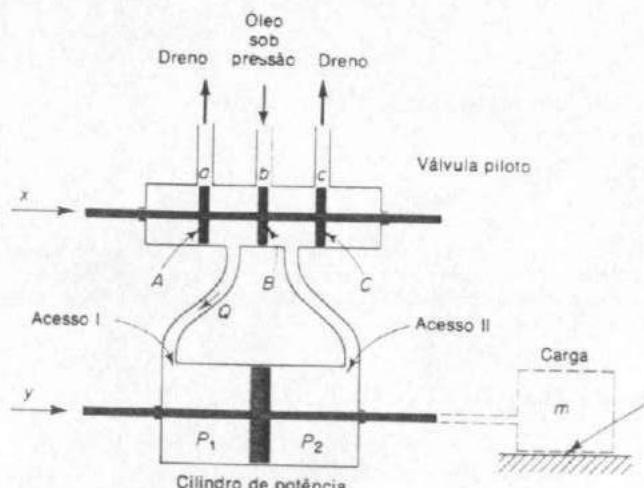


Fig. 4.12 Diagrama esquemático de um servomotor hidráulico.

muito grande pode ser controlada por uma válvula piloto, a qual pode ser posicionada com uma potência muito pequena.

A operação do servomotor hidráulico é a seguinte: Se a válvula piloto é movida para a direita, então a abertura I é ligada à abertura de suprimento e óleo sob pressão entra no lado esquerdo do pistão de potência. Desde que a abertura II é ligada à abertura de dreno, o óleo no lado direito do pistão de potência é retornado ao dreno. O óleo fluindo no cilindro de potência está sob alta pressão e o óleo fluindo para fora do cilindro de potência através do dreno está sob baixa pressão. A diferença de pressão resultante em ambos os lados do pistão de potência ocasiona um movimento para a direita. O óleo retornado é pressurizado por uma bomba e recirculado no sistema. Quando o pistão piloto é movido para a esquerda, o pistão de potência move-se para a esquerda.

Na prática, as aberturas  $a, b$  e  $c$  mostradas na Fig. 4.12 são sempre construídas maiores do que as válvulas correspondentes  $A, B$  e  $C$ . Neste caso há sempre uma fuga através da válvula. Este fato aumenta tanto a sensibilidade como a linearidade do servomotor hidráulico. Consideraremos esta hipótese na análise que se segue. [Note que algumas vezes um sinal "trémulo", um sinal de alta frequência de amplitude muito pequena (em relação ao deslocamento máximo da válvula), é sobreposto ao movimento da válvula piloto. Isto também aumenta a sensibilidade e a linearidade. Neste caso também há fuga através da válvula.]

Vamos definir

$$Q = \text{taxa de fluxo de óleo para o cilindro de potência, kg/s}$$

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \text{diferença de pressão através do pistão de potência, N/m}^2$$

$$x = \text{deslocamento da válvula piloto, m.}$$

Na Fig. 4.12, pode-se ver que  $Q$  é uma função de  $x$  e  $\Delta P$ . Em geral, a relação entre as variáveis  $Q, x$  e  $\Delta P$  é dada por uma equação não linear:

$$Q = f(x, \Delta P)$$

Linearizando esta equação não linear em torno do ponto de operação normal  $\bar{Q}, \bar{x}$ ,  $\bar{\Delta P}$ , obtemos

$$Q - \bar{Q} = K_1(x - \bar{x}) - K_2(\Delta P - \bar{\Delta P}) \quad (4.22)$$

onde

$$\bar{Q} = f(\bar{x}, \bar{\Delta P})$$

$$K_1 = \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, \Delta P=\bar{\Delta P}}$$

$$K_2 = - \left. \frac{\partial Q}{\partial \Delta P} \right|_{x=\bar{x}, \Delta P=\bar{\Delta P}}$$

Note que para este sistema, a condição de operação normal corresponde a  $\bar{Q} = 0, \bar{x} = 0$  e  $\bar{\Delta P} = 0$ . Portanto, obtemos da Eq. (4.22),

$$Q = K_1 x - K_2 \Delta P \quad (4.23)$$

A Fig. 4.13 mostra esta relação linearizada entre  $Q$ ,  $x$  e  $\Delta P$ . As retas indicadas correspondem às curvas características do servomotor hidráulico linearizado. Esta família de curvas consiste em retas paralelas equidistantes, parametrizadas por  $x$ .

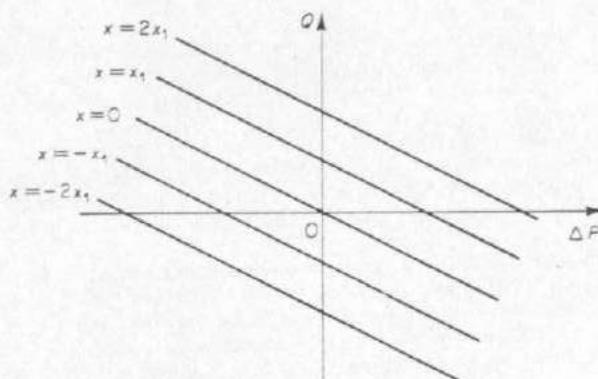


Fig. 4.13 Curvas características do servomotor hidráulico linearizado.

Referindo-se à Fig. 4.12, notamos que a taxa de fluxo de óleo  $Q$  (kg/s) vezes  $dt$  (s) é igual ao deslocamento do pistão de potência  $dy$  (m) vezes a área do pistão  $A$  ( $m^2$ ) vezes a densidade do óleo  $\rho$  ( $kg/m^3$ ). Portanto, obtemos

$$Ap dy = Q dt$$

Note que para uma dada taxa de fluxo  $Q$ , quanto maior for a área do pistão  $A$  menor será a velocidade  $dy/dt$ . Portanto, se a área do pistão  $A$  é feita menor, permanecendo as outras variáveis constantes, a velocidade  $dy/dt$  tornar-se-á maior. Também uma taxa de fluxo  $Q$  maior acarretará um aumento na velocidade do pistão de potência e um menor tempo de resposta.

A Eq. (4.23) pode agora ser escrita como

$$\Delta P = \frac{1}{K_2} \left( K_1 x - Ap \frac{dy}{dt} \right)$$

A força desenvolvida pelo pistão de potência é igual à diferença de pressão  $\Delta P$  vezes a área do pistão  $A$  ou

Força desenvolvida pelo pistão de potência =  $A \Delta P$

$$= \frac{A}{K_2} \left( K_1 x - Ap \frac{dy}{dt} \right)$$

Para uma dada força máxima, se a diferença de pressão for suficientemente alta, a área do pistão ou o volume do óleo no cilindro pode ser feito pequeno. Consequentemente, para minimizar o peso do controlador, devemos fazer a pressão de

suprimento suficientemente alta.

Suponha que o pistão de potência move uma carga que consiste em uma massa e uma fricção-viscosa. Então, a força desenvolvida pelo pistão de potência é aplicada à massa de carga e à fricção, obtendo-se

$$m\ddot{y} + f\dot{y} = \frac{A}{K_2} (K_1 x - Ap\ddot{y})$$

ou

$$m\ddot{y} + \left( f + \frac{A^2\rho}{K_2} \right) \dot{y} = \frac{AK_1}{K_2} x \quad (4.24)$$

onde  $m$  é a massa (kg) da carga e  $f$  é o coeficiente de fricção viscosa (N-s/m).

Supondo que o deslocamento da válvula piloto  $x$  é a entrada e o deslocamento do pistão de potência  $y$  a saída, verificamos que a função de transferência para o servomotor hidráulico é, a partir da Eq. (4.24),

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{X(s)} &= \frac{1}{s \left[ \left( \frac{mK_2}{AK_1} \right) s + \frac{fK_2}{AK_1} + \frac{A\rho}{K_1} \right]} \\ &= \frac{K}{s(Ts + 1)} \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde

$$K = \frac{1}{fK_2 + \frac{A\rho}{K_1}} \quad \text{e} \quad T = \frac{mK_2}{fK_2 + A^2\rho}$$

Da Eq. (4.25), pode-se notar que esta função de transferência é de segunda ordem. Se a relação  $mK_2/(fK_2 + A^2\rho)$  é suficientemente pequena a ponto de poder ser desprezada ou a constante de tempo  $T$  for desprezível, a função de transferência pode ser simplificada para resultar

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s}$$

Uma análise mais detalhada indica que, se a fuga do óleo, compressibilidade (incluindo os efeitos do ar dissolvido), expansão de tubulação etc. são levados em consideração, a função de transferência torna-se

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

onde  $T_1$  e  $T_2$  são constantes de tempo. De fato, estas constantes de tempo dependem do volume de óleo do circuito de operação. Quanto menor for o volume, menores serão as constantes de tempo.

## 4.4 DIAGRAMAS DE BLOCOS

Um sistema de controle pode consistir em vários componentes. A fim de mostrar as funções desempenhadas por componentes, em engenharia de controle usa-se quase sempre um diagrama denominado "diagrama de blocos".

**Diagrama de blocos.** Um diagrama de blocos de um sistema é uma representação das funções desempenhadas por cada componente e do fluxo de sinal. Este diagrama indica a inter-relação que existe entre os vários componentes. Diferentemente de uma representação matemática, puramente abstrata, um diagrama de blocos possui a vantagem de indicar mais realisticamente os fluxos de sinal do sistema real.

Em um diagrama de blocos, todas as variáveis do sistema são ligadas às outras através de blocos funcionais. O "bloco funcional", ou simplesmente "bloco" é um símbolo para a operação matemática sobre o sinal de entrada para o bloco que produz a saída. As funções de transferência dos componentes são usualmente indicadas nos blocos correspondentes, os quais são ligados por flechas para indicar o sentido do fluxo de sinal. Note que o sinal pode passar somente no sentido da flecha. Consequentemente, um diagrama de blocos de um sistema de controle indica explicitamente uma propriedade unilateral.

A Fig. 4.14 mostra um elemento de diagrama de blocos. O segmento orientado (flecha) apontando para o bloco indica a entrada e o segmento orientado saindo do bloco representa a saída. Estas flechas são referidas como sinais.

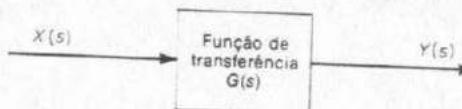


Fig. 4.14 Elemento de um diagrama de blocos.

Note que as dimensões do sinal de saída do bloco são as dimensões do sinal de entrada multiplicado pelas dimensões da função de transferência do bloco.

As vantagens da representação em diagrama de blocos de um sistema são devidas ao fato de que é mais fácil construir o diagrama de bloco total para todo o sistema simplesmente conectando os blocos dos componentes de acordo com o fluxo de sinal, sendo também possível calcular a contribuição de cada componente no desempenho global do sistema.

Em geral, a operação funcional do sistema pode ser visualizada mais diretamente pelo exame do diagrama de blocos do que pelo exame do próprio sistema físico. Um diagrama de bloco contém informação relativa ao comportamento dinâmico, porém não contém qualquer informação relativa à construção física do sistema. Portanto, muitos sistemas completamente diferentes e sem nenhuma relação podem ser representados pelo mesmo diagrama de blocos.

Deve ser notado que em um diagrama de blocos a principal fonte de energia não é explicitamente mostrada e, também, que um diagrama de blocos de um dado sistema não é único. Vários diagramas de blocos diferentes podem ser desenhados para um dado sistema, dependendo dos objetivos da análise.

**Detector de erro.** O detector de erro produz um sinal que é a diferença entre a entrada de referência e o sinal realimentado do sistema de controle. No projeto, a

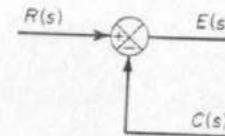


Fig. 4.15 Diagrama de bloco de um detector de erro.

escolha do detector de erro é muito importante e deve ser decidida cuidadosamente. Isto é devido ao fato de que quaisquer imperfeições no detector de erros inevitavelmente prejudicariam o desempenho de todo o sistema. O diagrama de bloco de um detector de erro é indicado na Fig. 4.15.

Note que um círculo com uma cruz é o símbolo que indica uma operação de soma. Os sinais mais ou menos em cada flecha indicam se aquele sinal deve ser adicionado ou subtraído. É importante que as grandezas a serem adicionadas ou subtraídas possuam as mesmas dimensões e as mesmas unidades.

**Diagrama de blocos de um sistema de malha-fechada.** A Fig. 4.16 mostra um exemplo de um diagrama de blocos de um sistema de malha-fechada. A saída  $C(s)$  é realimentada ao ponto de soma, onde é comparada com a entrada de referência  $R(s)$ . A natureza de malha-fechada do sistema é indicada claramente pela figura. A saída do bloco,  $C(s)$  neste caso, é obtida pela multiplicação da função de transferência  $G(s)$  com a entrada do bloco,  $E(s)$ .

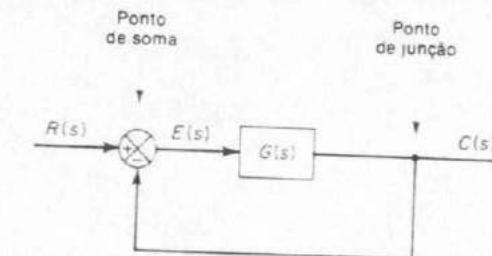


Fig. 4.16 Diagrama de bloco de um sistema em malha-fechada

Qualquer sistema de controle linear pode ser representado por um diagrama de blocos que consiste em blocos, pontos de soma e pontos de junção. Um ponto de junção é um ponto do qual o sinal de saída de um bloco é ligado a vários outros blocos concomitantemente ou a pontos de soma.

Quando a saída é realimentada ao ponto de soma para comparação com a entrada é necessário converter a forma do sinal de saída para aquela do sinal de entrada. Por exemplo, em um sistema de controle de temperatura, o sinal de saída é usualmente a temperatura controlada. O sinal de saída, que possui a dimensão de temperatura, deve ser convertido para uma força ou posição antes de ser comparado com o sinal de entrada. Esta conversão é efetuada pelo elemento de realimentação cuja função de transferência é  $H(s)$ , como indicado na Fig. 4.17. Um outro papel importante do elemento de realimentação é modificar a saída antes de ser comparada com a entrada. No exemplo presente, o sinal realimentado que é enviado para trás até o ponto de soma para comparação com a entrada é  $B(s) = H(s)C(s)$ .

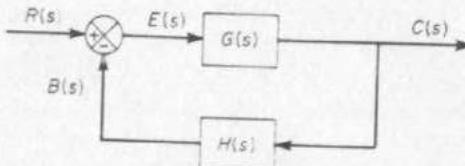


Fig. 4.17 Sistema em malha-fechada.

A relação entre o sinal realimentado  $B(s)$  e o sinal erro atuante  $E(s)$  é denominada função de transferência de malha-aberta. Isto é,

$$\text{Função de transferência de malha-aberta} = \frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$

A relação entre a saída  $C(s)$  e o sinal erro atuante  $E(s)$  é denominada função de transferência do ramo direto, de modo que,

$$\text{Função de transferência do ramo direto} = \frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$$

Se a função de transferência realimentada é unitária, então a função de transferência de malha-aberta e a função de transferência do ramo direto são as mesmas. Para o sistema mostrado na Fig. 4.17, a saída  $C(s)$  e a entrada  $R(s)$  são relacionadas como segue:

$$C(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

$$= R(s) - H(s)C(s)$$

Eliminando  $E(s)$  destas equações, resulta

$$C(s) = G(s)[R(s) - H(s)C(s)]$$

ou

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (4.26)$$

A função de transferência relacionando  $C(s)$  com  $R(s)$  é a chamada função de transferência de malha-fechada. Esta função de transferência relaciona a dinâmica do sistema em malha-fechada para a dinâmica dos elementos do ramo direto e os elementos da realimentação.

Da Eq. (4.26),  $C(s)$  é dada por

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}R(s)$$

Portanto a saída do sistema de malha-fechada depende, obviamente, tanto da função de transferência de malha-fechada como da natureza da entrada.

**Sistema em malha-fechada sujeito a um distúrbio.** A Fig. 4.18 mostra um sistema em malha-fechada sujeito a um distúrbio. Quando duas entradas (a entrada de referência e o distúrbio) estão presentes em um sistema linear, cada entrada pode ser considerada independentemente da outra; e as saídas correspondentes para cada entrada sozinha podem ser adicionadas para resultar a saída completa. O modo pelo qual cada entrada é introduzida no sistema é indicado no ponto de soma ou por um sinal mais ou por um sinal menos.

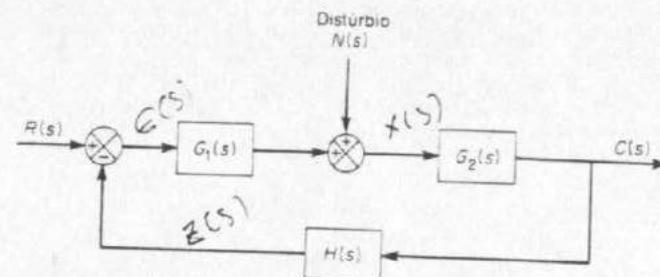


Fig. 4.18 Sistema em malha-fechada sujeito a um distúrbio.

Considere o sistema mostrado na Fig. 4.18. Examinando o efeito do distúrbio  $N(s)$ , podemos admitir que o sistema está em repouso inicialmente com erro zero; podemos então calcular a resposta  $C_N(s)$  apenas devido ao distúrbio. Esta resposta é dada por

$$\frac{C_N(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

Por outro lado, considerando a resposta em relação à entrada de referência  $R(s)$ , podemos supor que o distúrbio é nulo. Então, a resposta  $C_R(s)$  em relação à entrada de referência  $R(s)$  pode ser obtida de

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

A resposta com a aplicação simultânea da entrada de referência e do distúrbio pode ser obtida adicionando-se as duas respostas individuais. Em outras palavras, a resposta  $C(s)$  devida à aplicação simultânea da entrada de referência  $R(s)$  e ao distúrbio  $N(s)$  é dada por

$$\begin{aligned} C(s) &= C_R(s) + C_N(s) \\ &= \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}[G_1(s)R(s) + N(s)] \end{aligned}$$

Considere agora o caso onde  $|G_1(s)H(s)| \gg 1$  e  $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$ . Neste caso, a função de transferência em malha-fechada  $C_N(s)/N(s)$  torna-se quase nula e o efeito do distúrbio é eliminado. Esta é uma vantagem do sistema em malha-fechada.

Por outro lado, a função de transferência em malha-fechada  $C_R(s)/R(s)$  aproxima-se a  $1/H(s)$  conforme o ganho de  $G_1(s)G_2(s)H(s)$  aumenta. Isto significa que se  $|G_1(s)G_2(s)H(s)| >> 1$ , então a função de transferência em malha-fechada  $C_R(s)/R(s)$  torna-se independente de  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$  e inversamente proporcional a  $H(s)$ , de modo que as variações de  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$  não afetam a função de transferência em malha-fechada  $C_R(s)/R(s)$ . Esta é outra vantagem do sistema em malha-fechada. Pode ser facilmente verificado que qualquer sistema em malha-fechada com realimentação unitária,  $H(s) = 1$ , tende a igualar a entrada e a saída.

**Procedimentos para construir diagramas de blocos.** Para desenhar o diagrama de blocos de um sistema, escreva primeiro as equações que descrevem o comportamento dinâmico de cada componente, tome então as transformadas de Laplace das equações, admitindo condições iniciais nulas, e represente cada equação transformada de Laplace individualmente na forma de bloco. Finalmente, monte os elementos em um diagrama de blocos completo.

Como um exemplo, considere o circuito  $RC$  indicado na Fig. 4.19(a). As equações para este circuito são:

$$i = \frac{e_i - e_o}{R} \quad (4.27)$$

$$e_o = \int i dt \quad (4.28)$$

As transformadas de Laplace das Eqs. (4.27) e (4.28), com uma condição inicial nula, tornam-se

$$I(s) = \frac{E_i(s) - E_o(s)}{R} \quad (4.29)$$

$$E_o(s) = \frac{I(s)}{Cs} \quad (4.30)$$

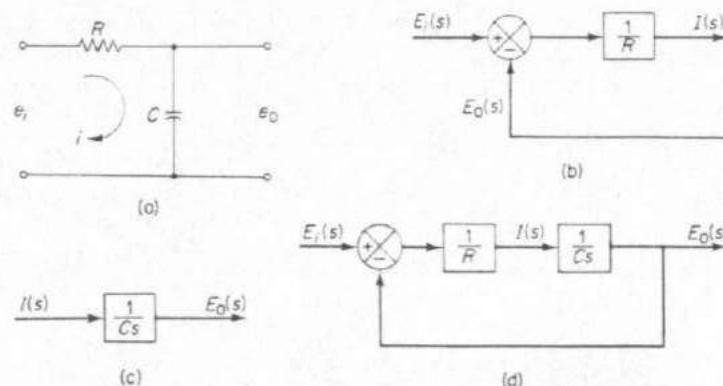


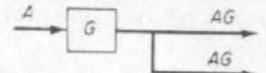
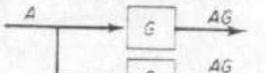
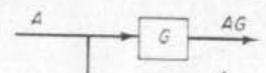
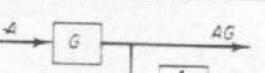
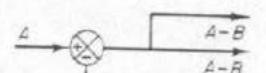
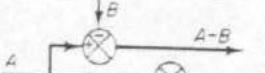
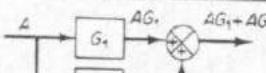
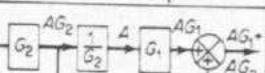
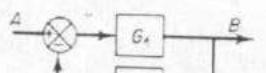
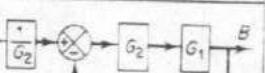
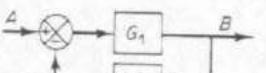
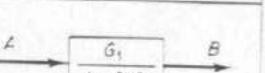
Fig. 4.19 (a) Circuito  $RC$ ; (b) diagrama de blocos representando a Eq. (4.29); (c) diagrama de blocos representando a Eq. (4.30); (d) diagrama de blocos do circuito  $RC$ .

A Eq. (4.29) representa uma operação de soma e o diagrama correspondente é mostrado na Fig. 4.19(b). A Eq. (4.30) representa o bloco indicado na Fig. 4.19(c). Montando estes dois elementos, obtemos o diagrama de blocos global para o sistema, conforme indicado na Fig. 4.19(d).

**Redução de diagramas de blocos.** É importante notar que blocos podem ser conectados em série somente se a saída de um bloco não é afetada pelo bloco seguinte. Se houver qualquer efeito de carregamento entre os componentes, é necessário combinar estes componentes em um bloco simples. Em outras palavras, um único bloco representará as duas partes.

Tabela 4.3 Regras da álgebra de diagramas de blocos

	Diagramas de blocos originais	Diagramas de blocos equivalentes
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

	Diagramas de blocos originais	Diagramas de blocos equivalentes
8		
9		
10		
11		
12		
13		

Qualquer número de blocos em cascata representando componentes sem efeito de carga podem ser substituídos por um único bloco cuja função de transferência é simplesmente o produto das funções de transferência individuais.

Um diagrama de blocos complicado envolvendo muitos laços de realimentação pode ser simplificado por um rearranjo passo a passo, usando regras de álgebra de diagrama de blocos. Algumas destas importantes regras são fornecidas na Tabela 4.3. Elas são obtidas escrevendo-se a mesma equação de uma maneira diferente. A simplificação do diagrama de blocos por rearranjos e substituições reduz consideravelmente o trabalho necessário na análise matemática subsequente. Deve ser notado, entretanto, que conforme o diagrama de bloco é simplificado, os novos blocos tornam-se mais complexos devido à geração de novos pólos e zeros.

Na simplificação de um diagrama de blocos, lembre o seguinte:

- O produto das funções de transferência no sentido direto deve permanecer o mesmo.
- O produto das funções de transferência em um laço deve permanecer o mesmo.

Uma regra geral para simplificar um diagrama de blocos é mover pontos de

junção e pontos de soma, permutar pontos de soma e, então, reduzir laços de realimentação internos.

Como um exemplo do uso das regras na Tabela 4.3, considere o sistema indicado na Fig. 4.20(a). Movendo o ponto de soma do laço de realimentação negativa contendo  $H_2$  para fora do laço de realimentação positiva contendo  $H_1$ , obtemos a Fig. 4.20(b). Eliminando o laço de realimentação positiva, obtemos a Fig. 4.20(c). Então, eliminando o laço contendo  $H_2/G_1$ , obtemos a Fig. 4.20(d). Finalmente, eliminando o laço de realimentação, obtemos a Fig. 4.20(e).

Note que o numerador da função de transferência em malha-fechada  $C(s)/R(s)$  é o produto das funções de transferência do ramo direto. O denominador de  $C(s)/R(s)$  é igual a

$$1 - \sum \text{(produto das funções de transferência em cada laço)}$$

$$\begin{aligned} &= 1 - (G_1 G_2 H_1 - G_2 G_3 H_2 - G_1 G_2 G_3) \\ &= 1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 - G_1 G_2 G_3 \end{aligned}$$

(O laço de realimentação positiva fornece um termo negativo no denominador.)

#### 4.5 DEDUÇÃO DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DE SISTEMAS FÍSICOS

Sistemas de controle podem consistir em componentes de diferentes tipos tais como elétricos, mecânicos, hidráulicos, pneumáticos ou térmicos. Um engenheiro de controle deve estar familiarizado com as leis fundamentais que envolvem estes componentes.

Nas Seções 4.2 e 4.3, deduzimos funções de transferência para alguns sistemas. Nesta seção apresentaremos exemplos adicionais indicando a dedução das funções de transferência para vários tipos de sistemas físicos.

Na dedução de funções de transferência note o seguinte:

1. Quando aproximar sistemas físicos por modelos lineares a parâmetros concentrados são necessárias certas considerações. Em geral, estas hipóteses dependem das faixas de operação do sistema. Hipóteses que podem ser convenientes para certas condições de operação podem não ser adequadas para outras condições. Na prática, fazer hipóteses apropriadas é uma parte muito importante da análise de um sistema desde que a precisão dos resultados depende da validade dessas considerações. Nesta conexão o engenheiro deve ter em mente que embora as funções de transferência obtidas analiticamente mostrem o efeito geral de variações em parâmetros do sistema na solução da equação, as previsões numéricas obtidas a partir de estudos analíticos de sistemas físicos podem não ser precisas. Em outras palavras, embora características qualitativas da dinâmica do sistema possam ser obtidas claramente a partir da função de transferência, a informação quantitativa pode não ser necessariamente precisa. Se for necessária precisão quantitativa, será necessário desenvolver estudos experimentais, além dos analíticos.

2. É desejável verificar a validade da função de transferência admitindo que certos parâmetros do sistema sejam zero ou infinito. Desde que este procedimento simplifica a função de transferência, sua validade pode ser facilmente verificada.

As funções de transferência obtidas a seguir são baseadas na hipótese de que não há efeito de carga na saída. (Lembre-se que se houver qualquer efeito de carga, deve ser levado em conta quando a função de transferência é deduzida.)

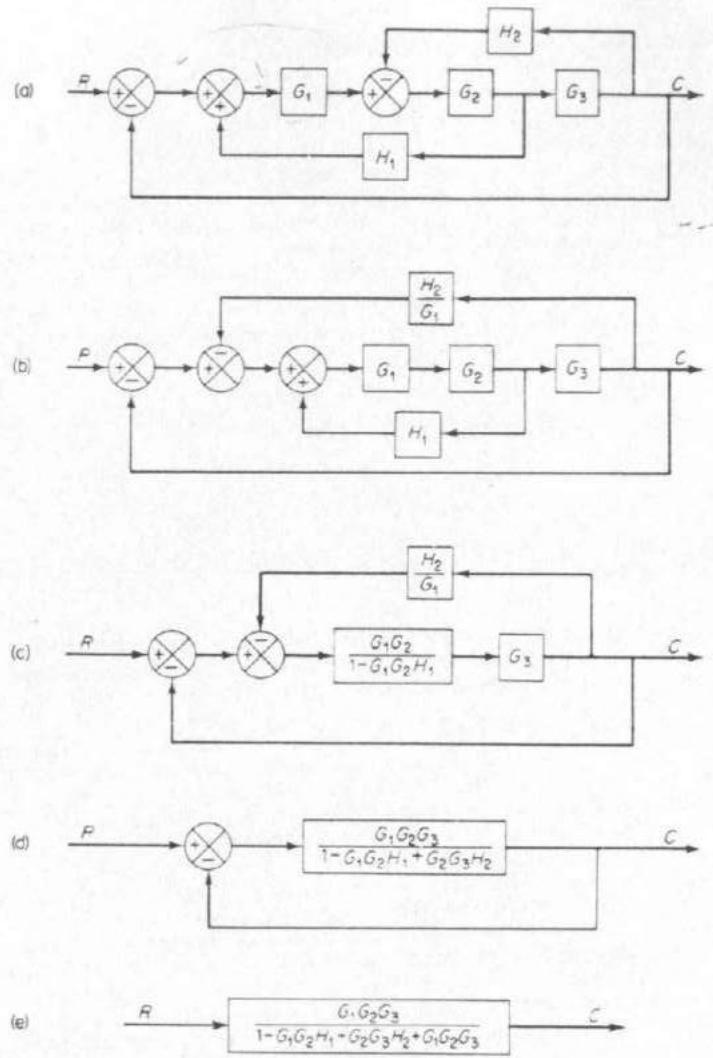


Fig. 4.20 (a) Sistemas de múltiplos laços; (b)-(e) redução sucessiva do diagrama de blocos indicado em (a).

#### SISTEMAS MECÂNICOS E ELETROMECÂNICOS

**Sismógrafo.** A Fig. 4.21 mostra um diagrama esquemático de um sismógrafo. Um sismógrafo indica o deslocamento de sua carcaça em relação ao espaço inercial. É utilizada para medir deslocamentos de terra durante terremotos (abalos sísmicos).

Vamos definir

- $x_i$  = deslocamento da carcaça relativo ao espaço inercial
- $x_0$  = deslocamento da massa  $m$  relativa ao espaço inercial
- $y = x_0 - x_i$  = deslocamento da massa  $m$  relativamente à carcaça

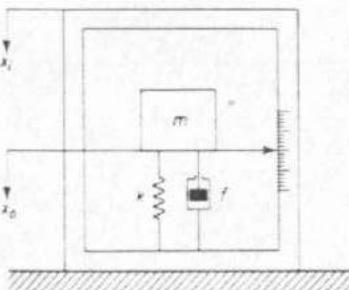


Fig. 4.21 Diagrama esquemático de um sismógrafo.

(Note que, desde que há a produção de uma deflexão estacionária na mola devido à gravidade, medimos o deslocamento  $x_0$  da massa  $m$  em relação à posição de equilíbrio estático.) A equação para este sistema é dada por

$$m\ddot{x}_0 + f(\dot{x}_0 - \dot{x}_i) + k(x_0 - x_i) = 0$$

Substituindo  $x_0 = y + x_i$  nesta última equação, obtemos uma equação diferencial em  $y$ . (Note que  $y$  é um sinal que podemos realmente medir.)

$$m\ddot{y} + f\ddot{y} + ky = -m\ddot{x}_i \quad (4.31)$$

Tomando a transformada de Laplace da Eq. (4.31), supondo condições iniciais nulas, obtemos

$$[ms^2 + fs - k]Y(s) = -ms^2X_i(s)$$

Considerando  $x_i$  como entrada e  $y$  como saída, a função de transferência é

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{X_i(s)} &= \frac{-ms^2}{ms^2 + fs - k} \\ &= -\frac{s^2}{s^2 + \frac{f}{m}s + \frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Para entradas em baixa potência, a massa  $m$  segue a carcaça para cima e para baixo, e a deflexão da mola é muito pequena. Se a entrada  $x_i$  consistir em sinais cujas frequências são muito menores do que  $\sqrt{k/m}$ , então a função de transferência pode ser aproximada por

$$\frac{Y(j\omega)}{X_i(j\omega)} = \frac{\omega^2}{k} \quad (4.32)$$

[Note que na Eq. (4.32),  $s$  foi substituído por  $j\omega$ . Esta função de transferência é denominada função de transferência senoidal. Para detalhes, referir-se ao Cap. 9.] Como um exemplo, se  $y(t)$  é verificado ser senoidal da forma  $A \sin \omega t$ , onde  $\omega \ll \sqrt{k/m}$ , então do registro de  $y(t)$  o sinal de entrada  $x_i(t)$  pode ser determinado como  $(A/\omega^2)(k/m) \sin \omega t$ .

Desde que em sismógrafos a frequência natural não amortecida  $\sqrt{k/m}$  é feita pequena, se a frequência de entrada é muito maior do que  $\sqrt{k/m}$ , a massa  $m$  permanecerá quase fixa no espaço inercial e um movimento da carcaça indicará o movimento relativo entre a carcaça e a massa. Se o sinal de entrada  $x_i$  possuir uma frequência muito alta, então a função de transferência pode ser aproximada por

$$\frac{Y(j\omega)}{X_i(j\omega)} = -1$$

Isto implica que se  $y(t)$  é verificado ser  $A \sin \omega t$ , onde  $\omega \gg \sqrt{k/m}$ , então a entrada  $x_i(t)$  pode ser determinada como  $-A \sin \omega t$ .

**Servomotores.** Os servomotores aqui considerados serão servomotores bifásicos, motores cc controlados por armadura, e motores cc controlados pelo campo. Consideraremos inicialmente o efeito de carga na dinâmica do servomotor.

**Efeito de carga na dinâmica de servomotores.** A mais importante das características do servomotor é a máxima aceleração obtinível. Para um dado torque disponível o momento de inércia do rotor deve ser um mínimo. Desde que o servomotor opera sob condições continuamente variáveis, ocorrem aceleração e freamento de instante a instante. O servomotor deve ser apto a absorver energia mecânica bem como gerá-la. O desempenho do servomotor, quando utilizado como um freio, deve ser satisfatório.

Seja  $J_m$  e  $f_m$ , respectivamente, o momento de inércia e a fricção do rotor, e seja  $J_L$  e  $f_L$ , respectivamente, o momento de inércia e a fricção da carga no eixo de saída. Suponha que o momento de inércia e a fricção do conjunto de engrenagens ou sejam desprezíveis ou estejam incluídos em  $J_m$  e  $f_m$ , respectivamente. Então, o momento de inércia  $J_{eq}$  referido ao eixo do motor e a fricção equivalente  $f_{eq}$  referida ao eixo do motor podem ser escritos como (para detalhes vide Problema A.4.2)

$$J_{eq} = J_m + n^2 J_L \quad (n < 1)$$

$$f_{eq} = f_m + n^2 f_L \quad (n < 1)$$

onde  $n$  é a relação de engrenagem entre o eixo do motor e a carga. Se a relação de engrenagem  $n$  é pequena e  $J_m \gg n^2 J_L$ , então o momento de inércia da carga referido ao eixo do motor é desprezível em relação ao momento de inércia do motor. Um argumento similar aplica-se à fricção da carga. Em geral, quando a relação de engrenagem  $n$  é pequena, a função de transferência do servomotor elétrico pode ser obtida sem levar-se em consideração o momento de inércia e a fricção da carga. Se nem  $J_m$  nem  $n^2 J_L$  são desprezíveis, comparados com o outro, entretanto, então o momento de inércia equivalente  $J_{eq}$  deve ser utilizado no cálculo da função de transferência do conjunto motor-carga.

**Servomotores bifásicos.** Um servomotor bifásico, comumente usado em servomecanismos de instrumentação, é análogo a um motor de indução bifásico convencional exceto por suas considerações especiais de projeto. Ele utiliza um rotor em gaiola. Este rotor possui uma pequena relação entre diâmetro-altura a fim de minimizar o momento de inércia e obter uma boa característica de aceleração. O servomotor bifásico é muito forte e confiável.

Em muitas aplicações práticas, a faixa de potência na qual são usados servomotores bifásicos está entre uma fração de um watt e uma centena de watts.

Um diagrama esquemático de um servomotor bifásico é indicado na Fig. 4.22(a). Neste diagrama, uma fase (campo fixo) do motor é excitada continuamente através de uma tensão de referência, cuja frequência normalmente é 60, 400 ou 1.000 Hz; e a outra fase (campo de controle) é excitada com uma tensão de controle (um sinal com portadora suprimida) que está  $90^\circ$  defasada no tempo em relação à tensão de referência. (A tensão de controle é de amplitude e polaridade variáveis.)

Note que a tensão da fase de controle é feita  $90^\circ$  defasada em relação à tensão da fase fixa. Os enrolamentos do estator para as fases fixa e de controle estão posicionados  $90^\circ$  deslocados no espaço. Estas considerações são baseadas no fato de que o torque é produzido mais eficientemente em um eixo quando os eixos do enrolamento de fase estão em quadratura no espaço e as tensões nas duas fases estão em quadratura no tempo.

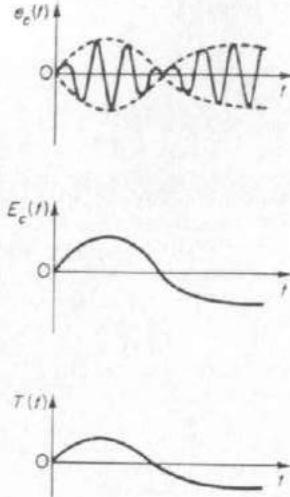
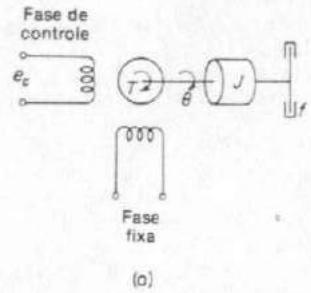
Os dois enrolamentos do estator são normalmente excitados por uma fonte de alimentação bifásica. Se não for disponivel uma fonte de alimentação bifásica, entretanto, então o enrolamento de fase fixa pode ser ligado a uma fonte de potência monofásica através de um capacitor, que fornecerá a defasagem de  $90^\circ$ . O amplificador no qual o enrolamento de fase de controle é ligado e alimentado pela mesma fonte de alimentação monofásica.

No servomotor bifásico, a polaridade da tensão de controle determina o sentido de rotação. A tensão de controle instantânea  $e_c(t)$  é da forma

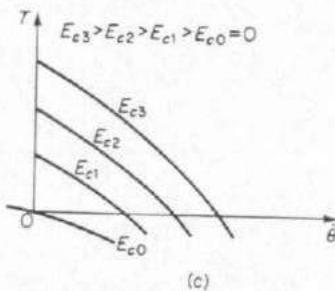
$$e_c(t) = E_c(t) \sin \omega t \quad \text{para } E_c(t) > 0 \\ = |E_c(t)| \sin(\omega t + \pi) \quad \text{para } E_c(t) < 0$$

Isto significa que uma variação no sinal de  $E_c(t)$  desloca a fase por  $\pi$  radianos. Conseqüentemente, a mudança do sinal da tensão de controle  $E_c(t)$  inverte o sentido de rotação do motor. Desde que a tensão de referência é constante, o torque  $T$  e a velocidade angular  $\theta$  também são funções da tensão de controle  $E_c(t)$ . Se as variações em  $E_c(t)$  são lentas comparadas com a frequência da fonte c.a., o torque desenvolvido pelo motor é proporcional a  $E_c(t)$ . A Fig. 4.22(b) mostra as curvas  $e_c(t)$  versus  $t$ ,  $E_c(t)$  versus  $t$  e o torque  $T(t)$  versus  $t$ . A velocidade angular em regime permanente é proporcional à tensão de controle  $E_c(t)$ .

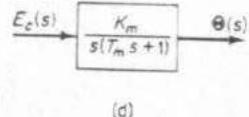
Uma família de curvas torque-velocidade, quando a tensão nominal é aplicada ao enrolamento de fase fixa e várias tensões são aplicadas ao enrolamento de fase de controle, fornece as características em regime estacionário do servomotor bifásico. A função de transferência de um servomotor bifásico pode ser obtida destas curvas torque-velocidade se elas forem retas, paralelas e equidistantes. Geralmente, as curvas torque-velocidade são paralelas para uma faixa de velocidades relativamente ampla, porém podem não ser equidistantes: isto é, para uma dada velocidade, o torque pode não variar linearmente em relação à tensão de controle. Em uma região de baixa velocidade, entretanto, as curvas torque-velocidade são normalmente retas e equidistantes em uma região com pequenas tensões de controle. Considerando que o servomotor raramente opera em altas velocidades, as partes lineares das curvas torque-velocidade podem ser estendidas para a região de alta



(b)



(c)



(d)

**Fig. 4.22** (a) Diagrama esquemático de um servomotor bifásico; (b) curvas mostrando  $e_c(t)$  versus  $t$ ,  $E_c(t)$  versus  $t$  e  $T(t)$  versus  $t$ ; (c) curvas torque-velocidade; (d) diagrama de blocos de um servomotor bifásico.

velocidade. Se se admite a hipótese de que as curvas são equidistantes para todas as tensões de controle, então o servomotor pode ser considerado linear.

A Fig. 4.22(c) mostra um conjunto de curvas torque-velocidade para vários valores de tensões de controle. A curva torque-velocidade correspondente à tensão de controle nula passa pela origem. Desde que a inclinação desta curva normalmente é negativa, se a tensão da fase de controle torna-se igual a zero, o motor desenvolve aquele torque necessário para parar a rotação.

O servomotor fornece um grande torque na velocidade nula. Este torque é necessário para aceleração rápida. Da Fig. 4.22(c), verificamos que o torque  $T$  gerado é uma função da velocidade angular  $\theta$  do eixo do motor e da tensão de controle  $E_c$ . A equação para a curva torque-velocidade é

$$T = -K_n \dot{\theta} + K_c E_c \quad (4.33)$$

onde  $K_n$  e  $K_c$  são constantes positivas. A equação de equilíbrio de torque para o servomotor bifásico é

$$T = J\ddot{\theta} + f\dot{\theta} \quad (4.34)$$

onde  $J$  é o momento de inércia do motor e a carga referida ao eixo do motor e  $f$  é o coeficiente de fricção-viscosa do motor e da carga referida ao eixo do motor. Das Eqs. (4.33) e (4.34) obtemos a seguinte equação:

$$J\ddot{\theta} + (f + K_n)\dot{\theta} = K_c E_c$$

Notando que a tensão de controle  $E_c$  é a entrada e o deslocamento do eixo do motor é a saída, verificamos que a função de transferência do sistema é dada por

$$\frac{\Theta(s)}{E_c(s)} = \frac{K_c}{Js^2 + (f + K_n)s} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} \quad (4.35)$$

onde

$$K_m = K_c/(f + K_n) = \text{constante de ganho do motor}$$

$$T_m = J/(f + K_n) = \text{constante de tempo do motor}$$

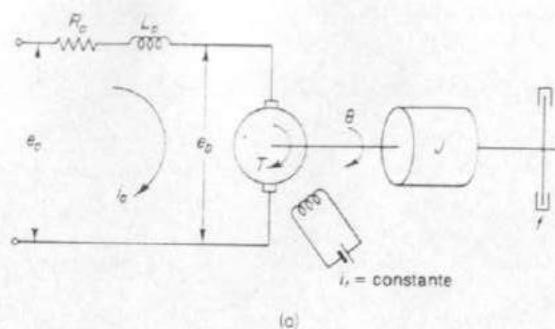
A Fig. 4.22(d) mostra um diagrama de blocos para este sistema. A partir da função de transferência deste sistema, podemos ver que  $(f + K_n)s$  é um termo de fricção-viscosa produzido pelo motor e carga. Portanto,  $K_n$ , o negativo da inclinação da curva torque-velocidade, junto com  $f$  define a fricção-viscosa equivalente do conjunto motor e carga. Para curvas torque-velocidade mais inclinadas, o amortecimento do motor é maior. Se a inércia do rotor é suficientemente baixa, então, em grande parte da faixa de frequência temos  $|T_m s| \ll 1$  e o servomotor atua como um integrador.

A função de transferência dada pela Eq. (4.35) é baseada na hipótese de que o servomotor é linear. Na prática, entretanto não é exatamente assim. Para curvas torque-velocidade não exatamente paralelas e equidistantes, o valor de  $K_n$  não é constante e, portanto, os valores de  $K_m$  e  $T_m$  também não são constantes; eles variam com a tensão de controle.

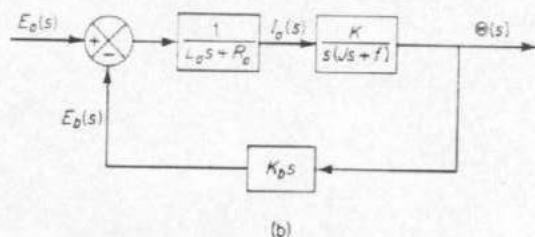
**Motores c.c. controlados por armadura.** Um motor c.c. é empregado em um sistema de controle quando é exigida uma quantidade apreciável de potência no eixo. Os motores c.c. são muito mais eficientes do que os servomotores c.a. bifásicos.

Os motores c.c. possuem campos excitados separadamente. São ou controlados por armadura com campo fixo ou controlados por campo com corrente de armadura fixa. Por exemplo, motores c.c. usados em instrumentos empregam um campo por magneto-permanente fixo, e o sinal de controle é aplicado aos terminais da armadura.

As características de desempenho do motor c.c. controlado por armadura assemelham-se às características idealizadas do servomotor c.a. bifásico.



(a)



(b)

Fig. 4.23 (a) Diagrama esquemático de um motor c.c. controlado por armadura; (b) diagrama de blocos.

Considere o motor c.c. controlado por armadura indicado na Fig. 4.23(a). Neste sistema,

$R_a$  = resistência do enrolamento da armadura, ohms

$L_a$  = indutância do enrolamento da armadura, henrys

$I_a$  = corrente do enrolamento da armadura, ampéres

$i_f$  = corrente de campo, ampéres

$e_a$  = tensão aplicada na armadura, volts

$e_b$  = força contra-eletromotriz, volts

$θ$  = deslocamento angular do eixo do motor, radianos

$T$  = torque fornecido pelo motor, N · m

$J$  = momento de inércia equivalente do motor e da carga referida ao eixo do motor, kg · m<sup>2</sup>

$f$  = coeficiente de fricção-viscosa equivalente do motor e da carga referida ao eixo do motor, kg · m/rad/s

O torque  $T$  fornecido pelo motor é proporcional ao produto da corrente de armadura  $I_a$  e o fluxo no entreferro de ar  $ψ$ , que por sua vez é proporcional à corrente de campo ou

$$ψ = K_f i_f$$

onde  $K_f$  é uma constante. O torque  $T$  pode, portanto, ser escrito

$$T = K_f i_f K_i i_a$$

onde  $K_i$  é a constante.

No motor c.c. controlado por armadura, a corrente de campo é mantida constante. Para uma corrente de campo constante, resulta um fluxo constante, e o torque torna-se diretamente proporcional à corrente de armadura, de modo que

$$T = K_i i_a$$

onde  $K$  é a constante de torque do motor. Quando a armadura está girando, é induzida na armadura uma tensão proporcional ao produto do fluxo e da velocidade angular. Para um fluxo constante, a tensão induzida  $e_b$  é diretamente proporcional à velocidade angular  $dθ/dt$ . Portanto,

$$e_b = K_b \frac{dθ}{dt} \quad (4.36)$$

onde  $K_b$  é a constante de força-contra-eletromotriz.

A velocidade de um motor c.c. controlado por armadura é controlada pela tensão de armadura  $e_a$ . A tensão de armadura  $e_a$  é suprida por um amplificador (ou por um gerador, que é suprido por um amplificador). A equação diferencial para o circuito de armadura é

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a \quad (4.37)$$

A corrente de armadura produz o torque que é aplicado à inércia e à fricção; portanto,

$$J \frac{d^2θ}{dt^2} + f \frac{dθ}{dt} = T = K i_a \quad (4.38)$$

Supondo que todas as condições iniciais são nulas e considerando as transformadas de Laplace das Eqs. (4.36), (4.37) e (4.38), obtemos as seguintes equações:

$$K_b s \Theta(s) = E_b(s) \quad (4.39)$$

$$(L_a s + R_a) I_a(s) - E_b(s) = E_a(s) \quad (4.40)$$

$$(J s^2 + f s) \Theta(s) = T(s) = K I_a(s) \quad (4.41)$$

Considerando  $E_a(s)$  como a entrada e  $Θ(s)$  como a saída podemos construir os diagramas de blocos das Eqs. (4.39), (4.40) e (4.41), como indicado na Fig. 4.23(b). O efeito da força-contra-eletromotriz é visto como sendo o sinal de realimentação proporcional à velocidade do motor. Esta força-contra-eletromotriz aumenta o amortecimento efetivo do sistema. A função de transferência deste sistema é dada por

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{s[L_a J s^2 + (L_a f + R_a J)s - R_a f + K K_b]} \quad (4.42)$$

A indutância  $L_a$  no circuito de armadura normalmente é pequena e pode ser desprezada. Se  $L_a$  for desprezada, então a função de transferência dada pela Eq. (4.42) reduz-se a

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} \quad (4.43)$$

onde

$$K_m = K/(R_a f - KK_b) = \text{constante de ganho do motor}$$

$$T_m = R_a J / (R_a f + KK_b) = \text{constante de tempo do motor}$$

A partir das Eqs. (4.42) e (4.43), pode ser visto que as funções de transferência envolvem o termo  $1/s$ . Portanto, este sistema possui uma propriedade de integração. Na Eq. (4.43), note que a constante de tempo do motor é menor para um  $R_a$  menor e  $J$  menor. Com  $J$  pequeno, conforme a resistência  $R_a$  é reduzida, a constante de tempo do motor se aproxima de zero, e o motor atua como um integrador ideal.

**Exemplo 4.1 Servomecanismo de posição.** Obtenha a função de transferência em malha-fechada para o servomecanismo de posição mostrado na Fig. 4.24. Suponha que a entrada e a saída do sistema sejam a posição do eixo de entrada e a posição do eixo de saída, respectivamente. Suponha os seguintes valores numéricos para as constantes do sistema:

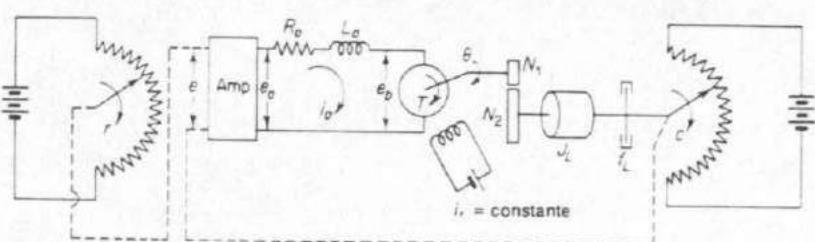


Fig. 4.24 Servomecanismo de posição.

- $r$  = deslocamento angular do eixo de entrada de referência, radianos
- $c$  = deslocamento angular do eixo de saída, radianos
- $\theta$  = deslocamento angular do eixo do motor, radianos
- $K_1$  = ganho do detector de erro potenciométrico =  $24/\pi$  volts/rad
- $K_p$  = ganho do amplificador = 10 volts/volt
- $e_a$  = tensão aplicada na armadura, volts
- $e_b$  = força-contra-eletromotriz, volts
- $R_a$  = resistência do enrolamento da armadura = 0.2 ohms
- $L_a$  = indutância do enrolamento da armadura = desprezível
- $i_a$  = corrente do enrolamento da armadura, ampères
- $K_b$  = força-contra-eletromotriz =  $5.5 \times 10^{-2}$  volts-s/rad
- $K$  = constante de torque do motor =  $6 \times 10^{-5}$  lb-ft/amp
- $J_m$  = momento de inércia do motor =  $1 \times 10^{-5}$  lb-ft-s<sup>2</sup>
- $f_m$  = coeficiente de fricção viscosa do motor = desprezível
- $J_L$  = momento de inércia da carga =  $4.4 \times 10^{-3}$  lb-ft-s<sup>2</sup>
- $f_L$  = coeficiente de fricção viscosa da carga =  $4 \times 10^{-2}$  lb-ft/rad/s
- $n$  = relação de engrenagem  $N_1/N_2 = 1/10$

As equações que descrevem a dinâmica do sistema são as seguintes:  
Para o detector de erro potenciométrico:

$$E(s) = K_1[R(s) - C(s)] = 7,64[R(s) - C(s)] \quad (4.44)$$

Para o amplificador:

$$E_a(s) = K_p E(s) = 10E(s) \quad (4.45)$$

Para o motor c.c. controlado por armadura: O momento de inércia equivalente  $J$  e a fricção viscosa equivalente  $f$  referidos ao eixo do motor são, respectivamente,

$$\begin{aligned} J &= J_m + n^2 J_L \\ &= 1 \times 10^{-5} + 4.4 \times 10^{-5} = 5.4 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= f_m + n^2 f_L \\ &= 4 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Utilizando a Eq. (4.43), obtemos

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$

onde

$$K_m = \frac{K}{R_a f + KK_b} = \frac{6 \times 10^{-5}}{(0.2)(4 \times 10^{-4}) + (6 \times 10^{-5})(5.5 \times 10^{-2})} = 0.72$$

$$T_m = \frac{R_a J}{R_a f + KK_b} = \frac{(0.2)(5.4 \times 10^{-5})}{(0.2)(4 \times 10^{-4}) + (6 \times 10^{-5})(5.5 \times 10^{-2})} = 0.13$$

Portanto,

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{10C(s)}{E_a(s)} = \frac{0.72}{s(0.13s + 1)} \quad (4.46)$$

Usando as Eqs. (4.44), (4.45) e (4.46), podemos desenhar o diagrama de blocos do sistema conforme indicado na Fig. 4.25(a). Simplificando este diagrama de blocos, obtemos o indicado na Fig. 4.25(b). A função de transferência em malha-fechada para este sistema é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{42,3}{s^2 + 7,7s + 42,3}$$

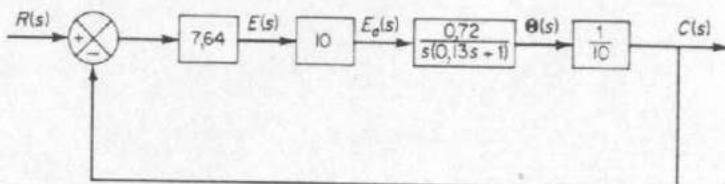
**Motor c.c. controlado por campo.** A Fig. 4.26(a) apresenta um diagrama esquemático de um motor c.c. controlado por campo. Vamos definir

- $R_f$  = resistência do enrolamento de campo, ohms
- $L_f$  = indutância do enrolamento de campo, henrys
- $i_f$  = corrente do enrolamento de campo, ampères
- $e_f$  = tensão aplicada de campo, volts
- $R_a$  = soma da resistência de armadura e da resistência inserida, ohms
- $i_a$  = corrente de armadura, ampères
- $\theta$  = deslocamento angular do eixo do motor, radianos

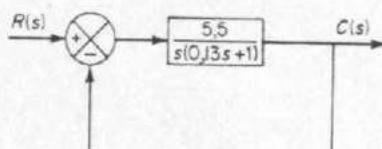
$T$  = torque desenvolvido pelo motor, N-m

$J$  = momento de inércia equivalente do motor e da carga referida no eixo do motor,  $\text{kg}\cdot\text{m}^2$

$f$  = coeficiente de fricção-viscosa equivalente do motor e da carga referida ao eixo do motor, kg-m/rad/s

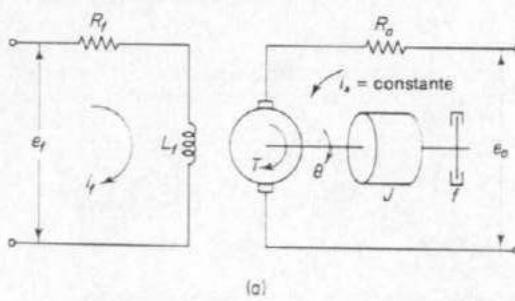


10

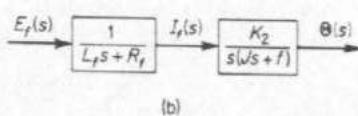


(b)

Fig. 4.25 (a) Diagrama de blocos do sistema indicado na Fig. 4.24; (b) diagrama de blocos simplificado.



(c)



60

Fig. 4.26 (a) Diagrama esquemático de um motor c.c. controlado por campo; (b) diagrama de blocos.

Neste sistema, a tensão de campo  $e_f$  é a entrada de controle. É a saída de um amplificador. A corrente de armadura  $i_a$  é mantida constante; esta situação pode ser atingida aplicando-se uma fonte de tensão constante à armadura e uma resistência muito grande em série com a armadura. Se a tensão elétrica nesta resistência for muito maior do que a força-contra-eletromotriz máxima induzida pela rotação dos enrolamentos da armadura no campo magnético, o efeito da força-contra-eletromotriz é desprezível. Deste modo a corrente de armadura  $i_a$  pode ser mantida aproximadamente constante. O rendimento do motor neste tipo de operação é necessariamente baixo, porém um motor c.c. controlado pelo campo pode ser utilizado para um sistema de controle de velocidade. Note que é mais difícil manter a corrente de armadura constante do que uma corrente de campo constante, devido à força-contra-eletromotriz no circuito de armadura.

O torque  $T$  desenvolvido pelo motor é proporcional ao produto do fluxo no entreferro de ar  $\psi$  e a corrente de armadura  $i$ , de modo que

$$T = K_1 \psi i_a \quad (4.47)$$

onde  $K_1$  é uma constante. Desde que o fluxo no entreferro de ar  $\psi$  e a corrente de campo  $i_s$  são proporcionais, dentro da faixa de operação usual do motor, e  $i_a$  é suposta constante, a Eq. (4.47) pode ser escrita como

$$T = K, i_f$$

onde  $K_2$  é uma constante. As equações para este sistema são:

$$L_f \frac{di_f}{dt} + R_f i_f = e_f \quad (4.48)$$

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} = T = K_2 i_f \quad (4.49)$$

Calculando as transformadas de Laplace nas Eqs. (4.48) e (4.49), supondo que a condição inicial é nula, obtemos as seguintes equações:

$$(L_f s + R_f) I_f(s) = E_f(s) \quad (4.50)$$

$$(Js^2 + fs)\Theta(s) = K_2 I_f(s) \quad (4.51)$$

Considerando  $E_A(s)$  como a entrada e  $\Theta(s)$  como a saída, podemos construir um diagrama de blocos das Eqs. (4.50) e (4.51), como indicado na Fig. 4.26(b). Deste diagrama de blocos, a função de transferência deste sistema é obtida como sendo

$$\frac{\Theta(s)}{E_f(s)} = \frac{K_2}{s(L_f s + R_f)(J_S + f)} = \frac{K_m}{s(T_r s + 1)(T_s s + 1)} \quad (4.52)$$

onde

$$\begin{aligned}K_m &= K_2 / (\dot{R}_f f) = \text{constante de ganho do motor} \\T_f &= L_f / R_f = \text{constante de tempo do circuito de campo} \\T_m &= J / f = \text{constante de tempo do elemento inércia-fricção}\end{aligned}$$

Desde que a indutância de campo  $L$ , não é desprezível, a função de transferência de um motor c.c. controlado por campo é de terceira ordem.

**Comparação entre os desempenhos do motor c.c. controlado por armadura e do motor c.c. controlado por campo.** Uma vantagem do controle de campo em um motor c.c. é que o amplificador necessário pode ser simplificado devido à pequena potência exigida no controle de campo. A exigência de uma fonte de corrente constante é, entretanto, uma série desvantagem de operações controladas por campo. Propiciar uma fonte de corrente constante é muito mais difícil do que uma fonte de tensão constante. A operação controlada por campo possui algumas poucas desvantagens a mais em relação à operação controlada por armadura do motor c.c. No motor c.c. controlado por armadura, a força-contra-eletromotriz atua como um amortecimento; no motor c.c. controlado por campo, entretanto, este não é o caso, e o amortecimento necessário deve ser fornecido pelo motor e pela carga. Devido ao baixo rendimento das operações controladas por campo, o calor gerado na armadura pode constituir-se em um problema.

As constantes de tempo do motor c.c. controlado por campo geralmente são maiores do que as constantes de tempo de um motor comparável controlado por armadura. Na comparação das constantes de tempo entre operações controladas por campo e operações controladas por armadura, entretanto, devemos considerar a constante de tempo do amplificador de potência quando considerarmos o estudo das operações controladas por armadura.

#### SISTEMAS DE NÍVEL DE LÍQUIDO

**Leis de fluxo de fluidos.** Na análise de sistemas envolvendo fluxos de fluidos, verificamos ser necessário distinguir os regimes de fluxo em fluxo laminar e fluxo turbulento, de acordo com o valor do número de Reynolds. Se o número de Reynolds for maior do que aproximadamente 3.000 ~ 4.000, então o fluxo é turbulento. O fluxo é laminar se o número de Reynolds for menor do que aproximadamente 2.000. No caso laminar, o fluxo do fluido ocorre em linhas de fluxo sem turbulência. Sistemas envolvendo fluxo turbulento, na maioria das vezes, têm de ser representados por equações diferenciais não lineares, enquanto sistemas envolvendo fluxo laminar podem ser representados por equações diferenciais lineares. (Processos industriais quase sempre envolvem fluxo de líquidos através de tanques e tubulações. O fluxo nestes processos geralmente é turbulento e não laminar.)

**Resistência e capacidade de sistemas de nível de líquido.** É conveniente introduzir o conceito de resistência e capacidade para descrever características dinâmicas de sistemas de nível de líquido.

Considere o fluxo através de um pequeno cano interligando dois tanques. A resistência ao fluxo de líquido nesta restrição é definida como a variação na diferença de nível (a diferença entre os níveis de líquido nos dois tanques) necessária para causar uma variação unitária na taxa de fluxo; isto é:

$$R = \frac{\text{variação na diferença de nível, m}}{\text{variação na taxa de fluxo, m}^3/\text{s}}$$

Desde que a relação entre a taxa de fluxo e a diferença de nível difere do fluxo laminar para o fluxo turbulento, consideraremos ambos os casos no que se segue.

Considere o sistema de nível de líquido indicado na Fig. 4.27(a). Neste sistema o líquido flui através da válvula de carga no lado do tanque. Se o fluxo através desta

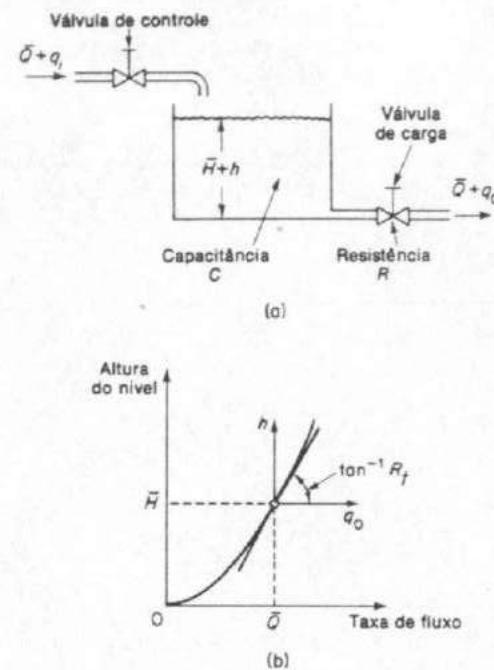


Fig. 4.27 (a) Sistema de nível de líquido; (b) curva da altura de nível *versus* taxa de fluxo.

restrição for laminar, a relação entre a taxa de fluxo em estado estacionário e a altura de líquido no tanque, em estado estacionário no nível de restrição, é dada por

$$Q = KH$$

onde

$$\begin{aligned} Q &= \text{taxa de fluxo de líquido em estado estacionário, m}^3/\text{s} \\ K &= \text{coeficiente, m}^2/\text{s} \\ H &= \text{altura do nível de líquido em estado estacionário, m} \end{aligned}$$

Note que a lei que governa o fluxo laminar é análoga à lei de Coulomb\*, que estabelece que a corrente é diretamente proporcional à diferença de potencial.

Para fluxo laminar, a resistência  $R_t$  é obtida por

$$R_t = \frac{dH}{dQ} = \frac{H}{Q}$$

\*N. de T. Na realidade, o autor deve estar referindo-se à lei de Ohm.

A resistência em fluxo laminar é constante e análoga à resistência elétrica.

Se o fluxo através da restrição for turbulento, a taxa de fluxo em estado estacionário é dada por

$$Q = K\sqrt{H} \quad (4.53)$$

onde

$Q$  = taxa de fluxo de líquido em estado estacionário,  $\text{m}^3/\text{s}$

$K$  = coeficiente,  $\text{m}^{2.5}/\text{s}$

$H$  = altura do nível de líquido em estado estacionário, m

A resistência  $R_t$  para fluxo turbulento é obtida de

$$R_t = \frac{dH}{dQ} = \frac{2H}{Q}$$

O valor da resistência em fluxo turbulento depende da taxa de fluxo e da altura do nível.

Pelo uso da resistência em fluxo turbulento, podemos linearizar a relação não linear entre  $Q$  e  $H$ , conforme indicado na Eq. (4.53). Esta linearização é válida, desde que as variações na altura do nível e a taxa de fluxo, em relação aos seus respectivos valores em estado estacionário, sejam pequenas. A relação linearizada é dada por

$$Q = \frac{2H}{R_t}$$

O valor de  $R_t$  pode ser considerado constante se forem pequenas as variações na altura de nível e na taxa de fluxo.

Em muitos casos práticos, o valor do coeficiente  $K$  na Eq. (4.53), que depende tanto do coeficiente de fluxo como da área da restrição, não é conhecido. A resistência pode ser então determinada construindo-se o gráfico da curva altura de nível versus taxa de fluxo, baseado em dados experimentais, e calculando-se posteriormente a inclinação da curva na condição de operação. Um exemplo de um gráfico deste tipo é indicado na Fig. 4.27(b), e o ponto de operação em regime estacionário e a resistência  $R_t$  são indicados na figura. (A resistência  $R_t$  é a derivada da curva no ponto de operação.) A aproximação linear é baseada no fato de que a curva real não difere muito da reta tangente se a condição de operação não variar demasiadamente.

A capacidade  $C$  de um tanque é definida como sendo a variação na quantidade de líquido armazenado necessária para causar uma variação unitária no potencial (altura do nível de líquido). (O potencial é a grandeza que indica o nível de energia do sistema.)

$$C = \frac{\text{variação no líquido armazenado, } \text{m}^3}{\text{variação na altura do nível, m}}$$

Deve ser notado que a capacidade ( $\text{m}^3$ ) e a capacidade ( $\text{m}^2$ ) são diferentes. A capacidade do tanque é igual à sua área da seção transversal. Se esta for constante, a capacidade é constante para qualquer altura do nível de líquido.

**Sistemas de nível de líquido.** Considere o sistema mostrado na Fig. 4.27(a). As variáveis são definidas como segue:

$\dot{Q}$  = taxa de fluxo em regime estacionário (antes de qualquer variação haver ocorrido),  $\text{m}^3/\text{min}$

$q_i$  = pequeno desvio da taxa de fluxo de entrada em relação a seu valor em regime estacionário,  $\text{m}^3/\text{min}$

$q_o$  = pequeno desvio da taxa de fluxo de saída em relação a seu valor de regime estacionário,  $\text{m}^3/\text{min}$

$\bar{H}$  = altura do nível em regime estacionário (antes de qualquer variação haver ocorrido), m

$h$  = pequeno desvio na altura do nível em relação a seu valor em regime estacionário, m

Como estabelecido anteriormente, um sistema pode ser considerado linear se o fluxo for laminar. Mesmo que o fluxo seja turbulento, o sistema pode ser linearizado se as variações nas variáveis são mantidas pequenas. Baseado na hipótese de que o sistema ou é linear ou é linearizado, a equação diferencial deste sistema pode ser obtida como segue: desde que o fluxo de entrada menos o fluxo de saída durante o pequeno intervalo de tempo  $dt$  é igual à quantidade armazenada adicional no tanque, vemos que

$$C dh = (q_i - q_o) dt$$

Considerando a definição de resistência, a relação entre  $q_o$  e  $h$  é dada por

$$q_o = \frac{h}{R}$$

A equação diferencial para este sistema para um valor constante de  $R$  é a seguinte:

$$RC \frac{dh}{dt} + h = Rq_i \quad (4.54)$$

Note que  $RC$  é a constante de tempo do sistema. Considerando as transformadas de Laplace de ambos os lados da Eq. (4.54), supondo uma condição inicial nula, obtemos

$$(RCs + 1)H(s) = RQ_i(s)$$

onde

$$H(s) = \mathcal{L}[h] \quad \text{e} \quad Q_i(s) = \mathcal{L}[q_i]$$

Se  $q_i$  é considerada a entrada e  $h$  a saída, a função de transferência do sistema é

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

Se, entretanto,  $q_o$  é considerada a saída, com a entrada sendo a mesma, então a função de transferência é

$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

onde usamos a relação

$$Q_0(s) = \frac{1}{R} H(s)$$

**Sistemas de nível de líquido com interação.** Considere o sistema mostrado na Fig. 4.28. Neste sistema, os dois tanques interagem. Portanto a função de transferência do sistema não é o produto de duas funções de transferência de primeira ordem.

No que segue, vamos supor apenas pequenas variações das variáveis em relação aos valores de regime estacionário. Usando os símbolos definidos na Fig. 4.28, podemos obter as seguintes equações para este sistema:

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = q_1 \quad (4.55)$$

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} = q - q_1 \quad (4.56)$$

$$\frac{h_2}{R_2} = q_2 \quad (4.57)$$

$$C_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2 \quad (4.58)$$

Se  $q$  é considerada a entrada e  $q_2$  a saída, a função de transferência do sistema é

$$\frac{Q_2(s)}{Q(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1)s + 1} \quad (4.59)$$

É instrutivo obter a equação (4.59), a função de transferência do sistema interativo, por redução do diagrama de blocos. A partir das Eqs. (4.55) até (4.58), obtemos elementos do diagrama de blocos, conforme mostrado na Fig. 4.29(a). Conectando apropriadamente os sinais, podemos construir um diagrama de blocos conforme indicado na Fig. 4.29(b). Usando as regras da álgebra de diagrama de

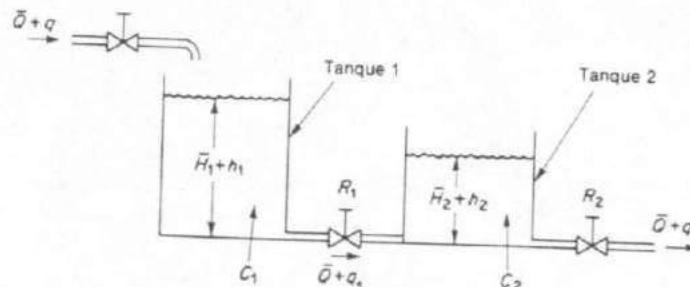


Fig. 4.28 Sistema de nível de líquido com interação.  
 Q: Taxa de fluxo em regime estacionário  
 $\bar{h}_1$ : Nível de líquido do tanque 1 em regime estacionário  
 $\bar{h}_2$ : Nível de líquido do tanque 2 em regime estacionário

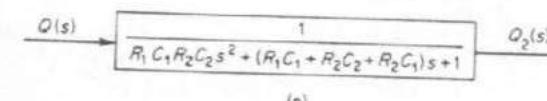
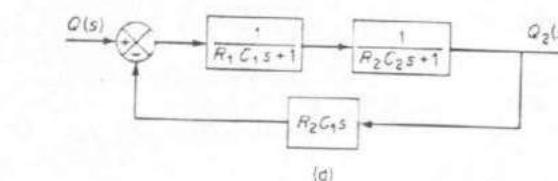
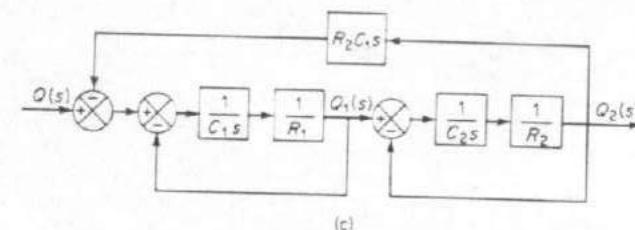
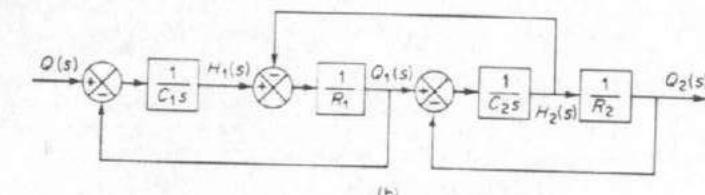
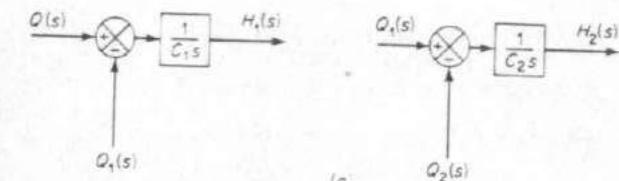
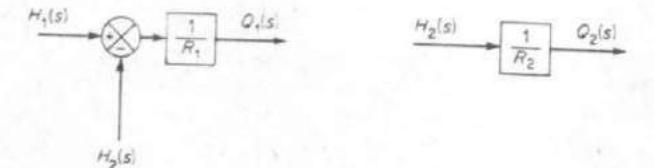


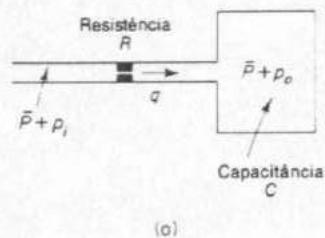
Fig. 4.29 (a) Elementos do diagrama de blocos do sistema indicado na Fig. 4.28; (b) diagrama de blocos do sistema; (c)-(e) redução sucessiva do diagrama de blocos.

blocos fornecidos na Tabela 4.3, este diagrama de blocos pode ser simplificado conforme indicado na Fig. 4.29(c). Simplificações adicionais resultam nas Figs. 4.29(d) e (e). A Fig. 4.29(e) é equivalente à Eq. (4.59).

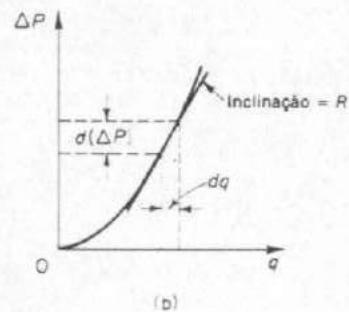
#### SISTEMAS DE PRESSÃO

**Resistência e capacidade de sistemas de pressão.** Muitos processos industriais e controladores pneumáticos envolvem o fluxo de um gás ou ar através de tubulações e recipientes com pressão.

Considere o sistema de pressão mostrado na Fig. 4.30(a). O fluxo de gás através da restrição é uma função da diferença de pressão  $p_i - p_o$ . Um sistema de



(a)



(b)

Fig. 4.30 (a) Diagrama esquemático de um sistema de pressão; (b) curva da diferença de pressão versus fluxo.

pressão deste tipo pode ser caracterizado em termos de uma resistência e uma capacidade.

A resistência  $R$  do fluxo de gás pode ser definida como segue:

$$R = \frac{\text{variação da diferença de pressão de gás, N/m}^2}{\text{variação na taxa de fluxo de gás, kg/s}}$$

ou

$$R = \frac{d(\Delta P)}{dq} \quad (4.60)$$

onde  $d(\Delta P)$  é uma pequena variação na diferença de pressão do gás e  $dq$  uma pequena variação no fluxo de gás. Cálculos do valor da resistência  $R$  do fluxo de gás podem ser bastante demorados. Experimentalmente, entretanto, pode ser facilmente determinado através de um gráfico relacionando a diferença de pressão com o fluxo e calculando a inclinação da curva em uma dada condição de operação, conforme mostrado na Fig. 4.30(b).

A capacidade do recipiente sob pressão pode ser definida por

$$C = \frac{\text{variação no gás armazenado, kg}}{\text{variação na pressão do gás, N/m}^2}$$

ou

$$C = \frac{dm}{dp} = V \frac{dp}{dq} \quad (4.61)$$

onde

$$\begin{aligned} C &= \text{capacidade} \\ m &= \text{massa de gás no recipiente, kg} \\ p &= \text{pressão do gás, N/m}^2 \\ V &= \text{volume do recipiente, m}^3 \\ \rho &= \text{densidade, kg/m}^3 \end{aligned}$$

A capacidade do sistema de pressão depende do tipo de processo de expansão envolvido. A capacidade pode ser calculada pelo uso da lei dos gases ideais. (Vide Problemas A.4.15 até A.4.17.) Se o processo de expansão do gás for politrópico e a variação do estado do gás for entre isotérmica e adiabática, então

$$p \left( \frac{V}{m} \right)^n = \frac{p}{\rho^n} = \text{constante} \quad (4.62)$$

onde

$$n = \text{expoente politrópico}$$

Para gases ideais,

$$p \bar{v} = \bar{R} T \quad \text{ou} \quad p v = \frac{\bar{R}}{M} T$$

onde

$$\begin{aligned} P &= \text{pressão absoluta, N/m}^2 \\ \bar{v} &= \text{o volume ocupado por 1 mol de um gás, m}^3/\text{N-mol} \\ \bar{R} &= \text{constante universal dos gases, N-m/kg-mol } ^\circ\text{K} \\ T &= \text{temperatura absoluta, } ^\circ\text{K} \\ v &= \text{volume específico do gás, m}^3/\text{kg} \\ M &= \text{massa molecular do gás por mol, kg/kg-mol} \end{aligned}$$

Portanto,

$$pv = \frac{p}{\rho} = \frac{\bar{R}}{M} T = R_{\text{gás}} T \quad (4.63)$$

onde

$$R_{\text{gás}} = \text{constante de gás, N}\cdot\text{m/kg }^{\circ}\text{K}$$

O expoente politrópico  $n$  é unitário para expansão isotérmica. Para expansão adiabática,  $n$  é igual à relação entre os calores específicos  $c_p/c_v$ , onde  $c_p$  é o calor específico a pressão constante e  $c_v$  é o calor específico a volume constante. Em muitos casos práticos o valor de  $n$  é aproximadamente constante, e portanto a capacidade pode ser considerada constante. O valor de  $dp/dT$  é obtido das Eqs. (4.62) e (4.63) como

$$\frac{dp}{dp} = \frac{1}{nR_{\text{gás}}T}$$

A capacidade é então obtida como

$$C = \frac{V}{nR_{\text{gás}}T} \quad (4.64)$$

A capacidade de um dado recipiente é constante se a temperatura permanecer constante. (Em muitos casos práticos, o expoente politrópico  $n$  é aproximadamente 1,0 ~ 1,2 para gases em recipientes metálicos não isolados.)

**Sistemas de pressão.** Considere o sistema mostrado na Fig. 4.30(a). Se supuermos apenas pequenos desvios nas variáveis, em relação a seus valores de regime estacionário, então este sistema pode ser considerado linear.

Vamos definir

$\bar{P}$  = pressão do gás no recipiente em regime estacionário (antes de haverem ocorrido variações na pressão),  $\text{N}/\text{m}^2$

$p_i$  = pequena variação na pressão do gás de entrada,  $\text{N}/\text{m}^2$

$p_0$  = pequena variação na pressão do gás no recipiente,  $\text{N}/\text{m}^2$

$V$  = volume do recipiente,  $\text{m}^3$

$m$  = massa do gás no recipiente, kg

$q$  = taxa de fluxo do gás,  $\text{kg}/\text{s}$

$\rho$  = densidade do gás,  $\text{kg}/\text{m}^3$

Para pequenos valores de  $p_i$  e  $p_0$ , a resistência  $R$  dada pela Eq. (4.60) torna-se constante e pode ser escrita como

$$R = \frac{p_i - p_0}{q}$$

A capacidade  $C$  é dada pela Eq. (4.61), reescrita

$$C = \frac{dm}{dp} = V \frac{dp}{dp}$$

Desde que a variação de pressão  $dp_0$  vezes a capacidade  $C$  é igual ao gás adicionado no recipiente durante  $dt$  segundos, obtemos

$$C dp_0 = q dt$$

ou

$$C \frac{dp_0}{dt} = \frac{p_i - p_0}{R}$$

que pode ser escrita como

$$RC \frac{dp_0}{dt} + p_0 = p_i$$

Se  $p_i$  e  $p_0$  são consideradas a entrada e a saída, respectivamente, então a função de transferência do sistema é

$$\frac{p_0(s)}{p_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

onde  $RC$  possui a dimensão de tempo e é a constante de tempo do sistema.

#### SISTEMAS TÉRMICOS

**Resistência e capacidade de sistemas térmicos.** Sistemas térmicos são aqueles em que há transferência de calor de uma substância para outra. Os sistemas térmicos podem ser analisados em termos de resistência e capacidade, embora a capacidade térmica e a resistência térmica não possam ser representadas precisamente por parâmetros concentrados desde que normalmente são distribuídas através da substância. Para uma análise precisa deveriam ser usados modelos com parâmetros distribuídos. Aqui, entretanto, a fim de simplificar a análise vamos supor que um sistema térmico possa ser representado por um modelo de parâmetros concentrados, no qual as substâncias que são caracterizadas por resistência ao fluxo de calor possuem capacidade ao calor desprezível e as substâncias que são caracterizadas por capacidade térmica (ao calor) possuem resistência térmica desprezível.

Há três diferentes modos pelos quais o calor pode fluir de uma substância para a outra: condução, convecção e radiação.

Para transferência de calor por condução ou convecção,

$$q = K \Delta\theta$$

onde

$q$  = taxa de fluxo de calor,  $\text{cal}/\text{s}$

$\Delta\theta$  = diferença de temperatura,  $^{\circ}\text{C}$

$K$  = coeficiente,  $\text{cal}/\text{s } ^{\circ}\text{C}$

O coeficiente  $K$  é dado por

$$K = \frac{kA}{\Delta X} \quad \text{para condução}$$

$$= HA \quad \text{para convecção}$$

onde

$$k = \text{condutividade térmica, cal/m s } ^\circ\text{C}$$

$$A = \text{área normal ao fluxo de calor, m}^2$$

$$\Delta X = \text{espessura do condutor, m}$$

$$H = \text{coeficiente de convecção, cal/m}^2 \text{ s } ^\circ\text{C}$$

Para transferência de calor por radiação, o fluxo de calor é dado por

$$q = K_r(\theta_1 - \theta_2)$$

onde

$$q = \text{taxa de fluxo de calor, cal/s}$$

$$K_r = \text{coeficiente que depende da emissividade, dimensão e configuração da superfície que emana o calor e da superfície que o recebe}$$

$$\theta_1 = \text{temperatura absoluta do emissor, } ^\circ\text{K}$$

$$\theta_2 = \text{temperatura absoluta do receptor, } ^\circ\text{K}$$

Desde que a constante  $K_r$  é um número muito pequeno, a transferência de calor por radiação somente é apreciável se a temperatura do emissor for muito alta.

A resistência térmica  $R$  para a transferência de calor entre duas substâncias pode ser definida como segue:

$$R = \frac{\text{variação na diferença de temperatura, } ^\circ\text{C}}{\text{variação na taxa de fluxo de calor, cal/s}}$$

A resistência térmica para transferência de calor por condução ou convecção é dada por

$$R = \frac{d(\Delta\theta)}{dq} = \frac{1}{K}$$

Desde que a condutividade térmica e o coeficiente de convecção são praticamente constantes, a resistência térmica tanto para condução como para convecção é constante. A resistência térmica para transferência de calor por radiação é dada por

$$R = \frac{d(\Delta\theta)}{dq} = \frac{1}{4K_r\bar{\theta}}$$

onde

$$\bar{\theta} = \text{diferença de temperatura efetiva do emissor e receptor}$$

A resistência de radiação não é constante; ela varia. Pode ser considerada constante apenas para um pequeno intervalo de condições de operação.

A capacidade térmica  $C$  é definida por

$$C = \frac{\text{variação no calor armazenado, cal}}{\text{variação na temperatura, } ^\circ\text{C}}$$

ou

$$C = Wc_p$$

onde

$$W = \text{massa da substância considerada, kg}$$

$$c_p = \text{calor específico da substância, cal/}^\circ\text{C}\cdot\text{kg}$$

**Sistemas térmicos.** Considere o sistema mostrado na Fig. 4.31. É suposto que o tanque é isolado para eliminar perda de calor para o ar na vizinhança. Também é suposto que não há armazenamento de calor na isolação e que o líquido no tanque é perfeitamente misturado de modo a estar em uma temperatura uniforme. Consequentemente uma temperatura única é usada para descrever a temperatura do líquido no tanque e do líquido saindo do tanque.

Vamos definir

$$\hat{\theta}_i = \text{temperatura em regime estacionário do líquido entrando, } ^\circ\text{C}$$

$$\hat{\theta}_o = \text{temperatura em regime estacionário do líquido saindo, } ^\circ\text{C}$$

$$G = \text{taxa de fluxo do líquido em regime estacionário, kg/s}$$

$$M = \text{massa do líquido no tanque, kg}$$

$$c = \text{calor específico do líquido, cal/kg } ^\circ\text{C}$$

$$R = \text{resistência térmica, } ^\circ\text{Cs/cal}$$

$$C = \text{capacidade térmica, cal/}^\circ\text{C}$$

$$\dot{H} = \text{taxa de entrada de calor em regime estacionário, cal/}^\circ\text{C}$$

Suponha que a temperatura do líquido entrante é mantida constante e que a taxa de entrada de calor é subitamente variada de  $\dot{H}$  para  $\dot{H} + h_i$ , onde  $h_i$  representa uma pequena variação na taxa de entrada de calor. A taxa de saída de calor variará então gradualmente desde  $\dot{H}$  até  $\dot{H} + h_o$ . A temperatura do líquido que sai também variará desde  $\hat{\theta}_o$  até  $\hat{\theta}_o + \theta$ . Para este caso,  $h_o$ ,  $C$  e  $R$  são obtidas, respectivamente, por

$$h_o = Gc\theta$$

$$C = Mc$$

$$R = \frac{\theta}{h_o} = \frac{1}{Gc}$$

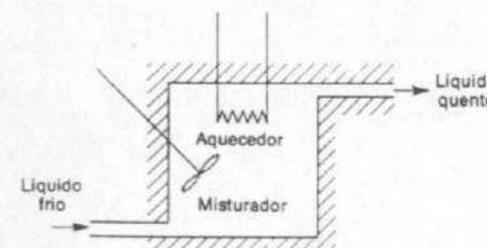


Fig. 4.31 Sistema térmico.

A equação diferencial para este sistema é

$$C \frac{d\theta}{dt} = h_i - h_0$$

que pode ser reescrita como

$$RC \frac{d\theta}{dt} + \theta = Rh_i$$

Note que a constante de tempo do sistema é igual a  $RC$  ou  $M/G$  segundos. A função de transferência relacionando  $\theta$  e  $h_i$  é dada por

$$\frac{\Theta(s)}{H_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

onde

$$\Theta(s) = \mathcal{L}[\theta(t)] \quad \text{e} \quad H_i(s) = \mathcal{L}[h_i(t)]$$

Na prática, a temperatura do líquido que entra pode flutuar e atuar como um distúrbio de carga. (Se uma temperatura de saída constante é desejada, um controlador automático pode ser instalado para ajustar a taxa de fluxo de entrada de calor de maneira a compensar as flutuações na temperatura do líquido de entrada.) Se a temperatura do líquido fluindo na entrada for subitamente variada desde  $\bar{\Theta}_i$  até  $\bar{\Theta}_i + \theta_i$ , enquanto a taxa de entrada de calor  $H$  e a taxa de fluxo de líquido  $G$  são mantidas constantes, então a taxa de fluxo de saída de calor variará desde  $\bar{H}$  para  $\bar{H} + h_0$ , e a temperatura do líquido que flui na saída variará desde  $\bar{\Theta}_0$  para  $\bar{\Theta}_0 + \theta$ . A equação diferencial para este caso é

$$C \frac{d\theta}{dt} = Gc\theta_i - h_0$$

que pode ser reescrita

$$RC \frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_i$$

A função de transferência relacionando  $\theta$  e  $\theta_i$  é dada por

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

onde

$$\Theta(s) = \mathcal{L}[\theta(t)] \quad \text{e} \quad \Theta_i(s) = \mathcal{L}[\theta_i(t)]$$

Se o sistema térmico apresentado está sujeito tanto a variações na temperatura do líquido que flui na entrada como na taxa de entrada de calor, enquanto a taxa do fluxo de líquido é mantida constante, a variação  $\theta$  na temperatura do líquido que flui na saída pode ser dada pela seguinte equação:

$$RC \frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_i + Rh_i$$

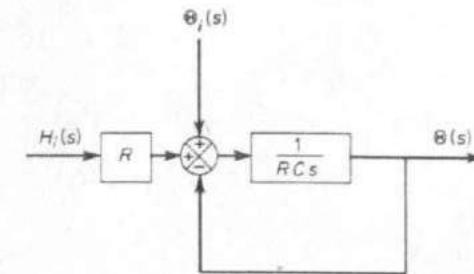


Fig. 4.32 Diagrama de blocos do sistema indicado na Fig. 4.31.

Um diagrama de blocos correspondente a este caso é mostrado na Fig. 4.32. (Note que o sistema envolve duas entradas. Discutiremos sistemas de múltiplas-entradas-múltiplas-saídas na Seção 4.6.)

#### 4.6 SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS E MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA

Na Seção 4.2, a função de transferência foi definida para sistema de entrada única-saída única. Nesta seção estenderemos a representação de função de transferência a sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas.

**Matrizes de transferência.** Considere um sistema com  $m$  entradas e  $n$  saídas. Podemos considerar as  $m$  entradas como sendo os componentes de um vetor. Denominaremos este vetor por vetor de entrada. Analogamente podemos considerar as  $n$  saídas como componentes de um vetor de saída. A matriz que relaciona a transformada de Laplace do vetor de saída com a transformada de Laplace do vetor de entrada é denominada a matriz de transferência entre o vetor de saída e o vetor de entrada.

Considere o sistema mostrado na Fig. 4.33. Este sistema tem duas entradas e duas saídas. Da Fig. 4.33, a relação entre as saídas e as entradas é dada por

$$X_1(s) = G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s)$$

$$X_2(s) = G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s)$$

onde  $G_{ij}(s)$  é a função de transferência relacionando a  $i$ -ésima saída com a  $j$ -ésima entrada. Utilizando a notação matriz-vetor, podemos escrever esta relação de transferência como sendo

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

Um sistema possuindo múltiplas entradas e múltiplas saídas é chamado sistema multivariável. Se um sistema deste tipo possuir  $m$  entradas e  $n$  saídas, e se a função de transferência entre a  $i$ -ésima saída e a  $j$ -ésima entrada for dada por  $G_{ij}(s)$ ,

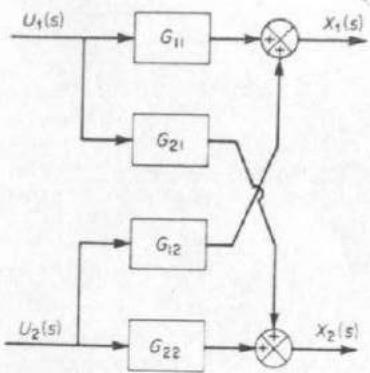


Fig. 4.33 Sistema de múltiplas entradas-múltiplas saídas.

então a transformada de Laplace da  $i$ -ésima saída é relacionada com as transformadas de Laplace das  $m$  entradas por

$$X_i(s) = G_{i1}(s)U_1(s) + G_{i2}(s)U_2(s) + \dots + G_{im}(s)U_m(s) \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

Note que na definição de  $G_{ij}(s)$ , somente a  $j$ -ésima entrada é considerada e todas as outras entradas são supostas nulas. Na forma matricial, a transformada de Laplace do vetor de saída é relacionada com a transformada de Laplace do vetor de entrada pela seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1}(s) & G_{n2}(s) & \dots & G_{nm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

A Eq. (4.65) indica as interações entre as  $m$  entradas e as  $n$  saídas. A Eq. (4.65) pode ser reescrita como

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$$

onde

$$\mathbf{X}(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1}(s) & G_{n2}(s) & \dots & G_{nm}(s) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{X}(s)$  é a transformada de Laplace do vetor de saída,  $\mathbf{U}(s)$  é a transformada de Laplace do vetor de entrada, e  $\mathbf{G}(s)$  é a matriz de transferência entre  $\mathbf{X}(s)$  e  $\mathbf{U}(s)$ .

*Exemplo 4.2* Considere o sistema mecânico mostrado na Fig. 4.34. Suporemos que o sistema está inicialmente no repouso.

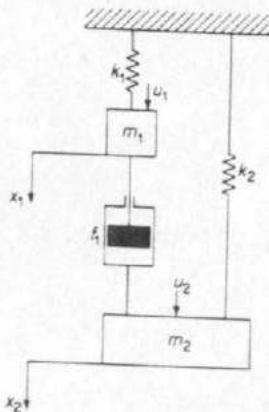


Fig. 4.34 Sistema mecânico.

Este sistema possui duas entradas  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  e duas saídas  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ . As equações que descrevem a dinâmica do sistema são

$$m_1\ddot{x}_1 + f_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1x_1 = u_1 \\ m_2\ddot{x}_2 + f_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2x_2 = u_2$$

Considerando as transformadas de Laplace destas duas equações e substituindo as condições iniciais nulas, obtemos

$$(m_1s^2 + f_1s + k_1)X_1(s) - f_1sX_2(s) = U_1(s) \\ (m_2s^2 + f_2s + k_2)X_2(s) - f_2sX_1(s) = U_2(s)$$

Na forma matriz-vetor, obtemos

$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + f_1 s + k_1 & -f_1 s \\ -f_1 s & m_2 s^2 + f_2 s + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Vamos definir

$$\Delta = (m_1 s^2 + f_1 s + k_1)(m_2 s^2 + f_2 s + k_2) - f_1^2 s^2 \neq 0$$

Então, premultiplicando pela inversa da matriz  $2 \times 2$  na Eq. (4.66), obtemos

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_2 s^2 + f_2 s + k_2}{\Delta} & \frac{f_1 s}{\Delta} \\ \frac{f_1 s}{\Delta} & \frac{m_1 s^2 + f_1 s + k_1}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

A matriz  $2 \times 2$  desta última equação é a matriz de transferência entre as saídas e as entradas. Obviamente, as respostas temporais  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são dadas por

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{m_2 s^2 + f_2 s + k_2}{\Delta} U_1(s) + \frac{f_1 s}{\Delta} U_2(s) \right] \quad (4.67)$$

$$x_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{f_1 s}{\Delta} U_1(s) + \frac{m_1 s^2 + f_1 s + k_1}{\Delta} U_2(s) \right] \quad (4.68)$$

Para determinar as respostas  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  para  $u_1 = 0, u_2 = 0$  (ou  $u_1 = 0, u_2 \neq 0$ ), simplesmente substituímos  $U_2(s) = 0$  (ou  $U_1(s) = 0$ ) nas Eqs. (4.67) e (4.68).

**Exemplo 4.3** O sistema mostrado na Fig. 4.35 possui duas entradas, a entrada de referência e a entrada de distúrbio e uma saída. Obtenha a matriz de transferência entre a saída e as entradas.

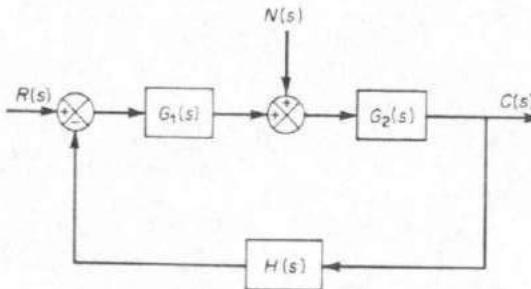


Fig. 4.35 Sistema possuindo duas entradas e uma saída.

A transformada de Laplace da saída  $C(s)$  pode ser obtida como

$$C(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$

Na forma matriz-vetor,

$$C(s) = \begin{bmatrix} \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} & \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

A matriz de transferência entre a saída  $C(s)$  e as entradas  $R(s)$  e  $N(s)$  é a matriz  $1 \times 2$  dada na Eq. (4.69).

**Comentários.** Nesta seção, apresentamos uma definição da matriz de transferência e deduzimos as matrizes de transferência para dois sistemas. A representação por matriz de transferência para sistemas multivariáveis é uma extensão da representação por função de transferência de sistemas de entrada-única-saída-única. A análise e controle ótimo de sistemas multivariáveis pode ser conduzida mais convenientemente pelo uso de variáveis de estado. Consequentemente, adiaremos a análise de sistemas multivariáveis para os Caps. 14-16, onde estudaremos a abordagem no espaço de estados para a análise e otimização de sistemas de controle.

## 4.7 GRÁFICOS DE FLUXO DE SINAL

O diagrama de blocos é útil para representar graficamente sistemas de controle. Entretanto, para um sistema muito complicado, o processo de redução de diagramas de blocos se torna muito demorado. Uma abordagem alternativa para determinar as relações entre as variáveis do sistema, de um sistema de controle complicado, é a abordagem por gráfico de fluxo de sinal, devida a S. J. Mason.

**Gráficos de fluxo de sinal.** Um gráfico de fluxo de sinal é um diagrama que representa um conjunto de equações algébricas lineares simultâneas. Quando se aplica o método do gráfico de fluxo do sinal para análise de sistemas de controle, devem-se inicialmente transformar as equações diferenciais lineares em equações algébricas em  $s$ .

Um gráfico de fluxo de sinal consiste em uma rede na qual os nós são ligados por ramos diretos. Cada nó representa uma variável do sistema e cada ramo ligado entre dois nós atua como um multiplicador de sinal. Note que o sinal flui em apenas um sentido. O sentido do fluxo do sinal é indicado por uma seta colocada no ramo, e o fator de multiplicação é indicado ao longo do ramo. O gráfico de fluxo do sinal indica o fluxo de sinais de um ponto de um sistema para um outro e fornece as relações entre os sinais.

Como é de esperar, um gráfico de fluxo de sinal contém essencialmente a mesma informação do diagrama de blocos. A vantagem do uso de um gráfico de fluxo de sinal para representar um sistema de controle é que uma fórmula de ganho, denominada fórmula de ganho de Mason, é disponível fornecendo as relações entre as variáveis do sistema sem exigir uma redução do gráfico.

**Definições.** Antes de discutirmos sobre os aspectos de gráficos de fluxo de sinal, devemos definir alguns termos.

**Nó.** Um nó é um ponto representando uma variável ou um sinal.

**Transmitância.** A transmitância é um ganho entre dois nós.

**Ramo.** Um ramo é um segmento de reta orientado unindo dois nós. O ganho de um ramo é uma transmitância.

**Nó de entrada ou fonte.** Um nó de entrada ou fonte é um nó que possui apenas ramos eferentes (que saem do nó). Corresponde a uma variável independente.

**Nó de saída ou sorvedouro.** Um nó de saída ou sorvedouro é um nó no qual há apenas ramos aferentes (que entram no nó). Corresponde a uma variável dependente.

**Nó misturado (ou misto).** Um nó misturado é um nó que possui tanto ramos aferentes como eferentes.

**Caminho.** Um caminho é uma trajetória de ramos ligados no sentido das flechas dos ramos. Se nenhum nó é cruzado mais de uma vez, o caminho é aberto. Se o caminho termina no mesmo nó no qual começou e não cruza qualquer outro nó mais do que uma vez, ele é fechado. Se um caminho cruza algum nó mais de uma vez porém termina em um nó diferente do qual começou, ele não é nem aberto nem fechado.

**Laço.** Um laço é um caminho fechado.

**Ganho de laço.** O ganho de laço é o produto das transmitâncias dos ramos de um laço.

**Laços que não se tocam.** Laços não se tocam se não possuírem qualquer nó comum.

**Caminho direto.** Um caminho direto é um caminho desde um nó de entrada (fonte) até um nó de saída (sorvedouro) que não cruza qualquer nó mais do que uma vez.

**Ganho do caminho direto.** Um ganho do caminho direto é o produto das transmitâncias dos ramos de um caminho direto.

A Fig. 4.36 mostra nós e ramos, além de transmitâncias.

**Propriedades dos gráficos de fluxo de sinal.** Algumas poucas propriedades importantes de gráficos de fluxo de sinal são listadas abaixo.

1. Um ramo indica a dependência funcional de um sinal em relação a outro. Um sinal o atravessa apenas no sentido especificado pela seta do ramo.
2. Um nó soma os sinais de todos os ramos aferentes e transmite esta soma a todos os ramos eferentes.
3. Um nó misturado, que possui tanto ramos aferentes como eferentes, pode ser considerado como um nó de saída (sorvedouro) adicionando-se um ramo eferente de transmitância unitária. (Vide Fig. 4.36. Note que o ramo com transmitância unitária é dirigido de  $x_3$  para um outro nó, também denotado por  $x_3$ .) Note, entretanto, que não podemos mudar um nó misturado para uma fonte utilizando este método.
4. Para um sistema dado, um gráfico de fluxo de sinal não é único. Muitos gráficos de fluxo de sinal diferentes podem ser desenhados para um dado sistema, escrevendo-se diferentemente as equações do sistema.

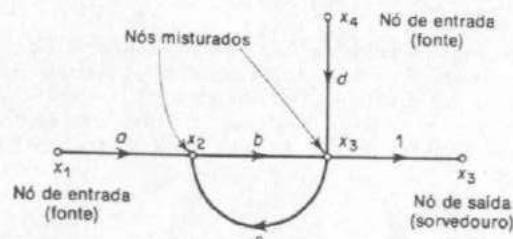


Fig. 4.36 Gráfico de fluxo de sinal.

**Álgebra do gráfico de fluxo de sinal.** Um gráfico de fluxo de sinal de um sistema linear pode ser desenhado usando-se as definições anteriores. Assim fazendo, normalmente colocamos os nós de entrada (fontes) à esquerda e os nos de saída (sorvedouros) à direita. As variáveis independentes e dependentes das equações tornam-se os nós de entrada (fontes) e os nós de saída (sorvedouros), respectivamente. As transmitâncias dos ramos podem ser obtidas a partir dos coeficientes das equações.

Para determinar a relação entrada-saída, devemos usar a fórmula de Mason, que será fornecida posteriormente, ou podemos reduzir o gráfico de fluxo de sinal a um gráfico contendo apenas os nós de entrada e saída. Para obter este resultado, utilizamos as seguintes regras:

1. O valor de um nó com um ramo aferente, como o indicado na Fig. 4.37(a), é  $x_2 = ax_1$ .

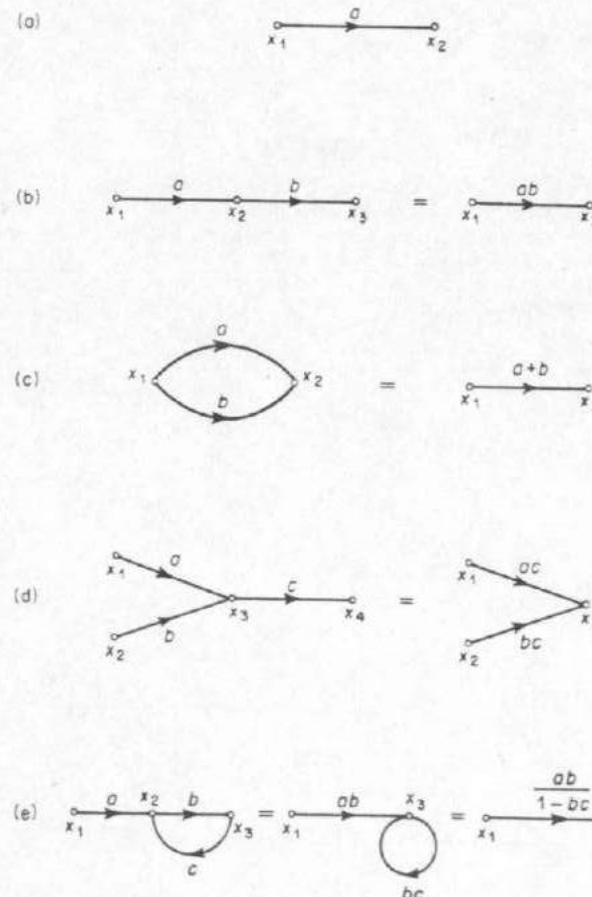


Fig. 4.37 Gráficos de fluxo de sinal e simplificações.

2. A transmitância total de ramos em cascata é igual ao produto das transmitâncias de todos os ramos. Ramos em cascata podem, então, ser combinados em um único ramo pela multiplicação das transmitâncias, conforme mostrado na Fig. 4.37(b).

3. Ramos em paralelo podem ser combinados adicionando-se as transmitâncias conforme a Fig. 4.37(c).

4. Um nó misturado pode ser eliminado conforme a Fig. 4.37(d).

5. Um laço pode ser eliminado conforme indicado na Fig. 4.37(e). Note que

$$x_3 = bx_2, \quad x_2 = ax_1 + cx_3$$

Portanto,

$$x_3 = abx_1 - bcx_3 \quad (4.70)$$

ou

$$x_3 = \frac{ab}{1-bc}x_1 \quad (4.71)$$

A Eq. (4.70) corresponde a um diagrama possuindo um autolaço de transmitância  $bc$ . A eliminação do autolaço resulta na Eq. (4.71), que mostra claramente que a transmitância global é  $ab/(1-bc)$ .

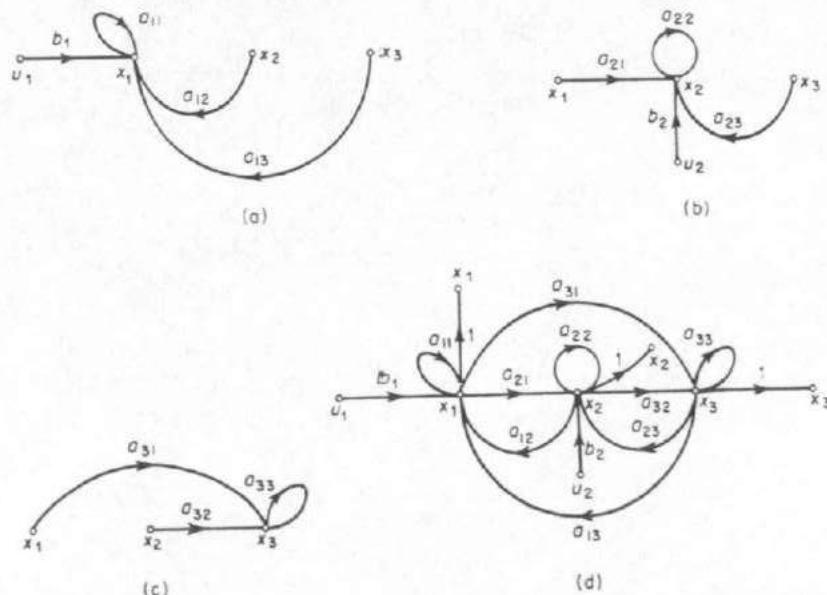


Fig. 4.38 (a) Gráfico de fluxo de sinal representando a Eq. (4.72); (b) gráfico do fluxo de sinal representando a Eq. (4.73); (c) gráfico do fluxo de sinal representando a Eq. (4.74); (d) gráfico de fluxo de sinal completo para um sistema descrito pelas Eqs. (4.72), (4.73), (4.74).

**Representação de gráfico de fluxo de sinal para sistemas lineares.** Os gráficos de fluxo de sinal são amplamente aplicados na análise de sistemas lineares. Neste caso o gráfico pode ser desenhado a partir das equações do sistema ou, com prática, por inspeção do sistema físico. Redução de rotina pelo uso das regras anteriores fornece a relação entre as variáveis de entrada e saída.

Considere um sistema definido pelo seguinte conjunto de equações:

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1u_1 \quad (4.72)$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2u_2 \quad (4.73)$$

$$x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \quad (4.74)$$

onde  $u_1$  e  $u_2$  são variáveis de entrada;  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são variáveis de saída. Um gráfico de fluxo de sinal para este sistema, uma representação gráfica dessas três equações simultâneas, indicando a interdependência das variáveis, pode ser obtido como segue: Localize inicialmente os nós  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , como indicado na Fig. 4.38(a). Note que  $a_{ij}$  é a transmitância entre  $x_i$  e  $x_j$ . A equação (4.72) estabelece que  $x_1$  é igual à soma dos quatro sinais  $a_{11}x_1$ ,  $a_{12}x_2$ ,  $a_{13}x_3$  e  $b_1u_1$ . O gráfico de fluxo de sinal representando a Eq. (4.72) é indicado na Fig. 4.38(a). A Eq. (4.73) estabelece que  $x_2$  é igual à soma de  $a_{21}x_1$ ,  $a_{22}x_2$ ,  $a_{23}x_3$  e  $b_2u_2$ . O gráfico de fluxo de sinal correspondente é mostrado na Fig. 4.38(b). O gráfico do fluxo de sinal representando a Eq. (4.74) é indicado na Fig. 4.38(c).

O gráfico de fluxo de sinal representando as Eqs. (4.72), (4.73) e (4.74) é então obtido pela combinação das Figs. 4.38(a), (b) e (c). Finalmente, o gráfico do fluxo de sinal completo para as equações simultâneas fornecidas é mostrado na Fig. 4.38(d).

Em um gráfico de fluxo de sinal, os nós de entrada (fontes) devem ser considerados um de cada vez. O sinal de saída é então igual à soma das contribuições individuais de cada entrada.

O ganho global de uma entrada para uma saída pode ser obtido diretamente do gráfico do fluxo de sinal por inspeção, pelo uso da fórmula de Mason, ou por uma redução do gráfico a uma forma mais simples.

**Gráficos de fluxo de sinal para sistemas de controle.** Alguns gráficos de fluxo de sinal de sistemas de controle simples são fornecidos na Fig. 4.39. Para estes gráficos simples, a função de transferência em malha-fechada  $C(s)/R(s)$  [ou  $C(s)/N(s)$ ] pode ser obtida facilmente por inspeção. Para gráficos de fluxo de sinal mais complicado, a fórmula de ganho de Mason é muito útil.

**Fórmula de ganho de Mason para gráficos de fluxo de sinal.** Em muitos casos práticos, desejamos determinar a relação entre uma variável de entrada e uma variável de saída do gráfico de fluxo de sinal. A transmitância entre um nó de entrada e um nó de saída é o ganho global, ou transmitância global entre estes dois nós. A fórmula de ganho de Mason, que é aplicável ao ganho global, é dada por

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k$$

onde

$P_k$  = ganho do caminho ou transmittância do  $k$ -ésimo caminho direto.

$\Delta$  = determinante do gráfico

$= 1 - (\text{soma de todos os ganhos de laço diferentes}) + (\text{soma dos produtos de ganhos de todas as possíveis combinações de dois laços que não se tocam}) - (\text{soma dos produtos de ganhos de todas as combinações possíveis de três laços que não se tocam})$   
 $+ \dots$

$$= 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \dots$$

$\sum_a L_a$  = soma de todas os ganhos de laços diferentes

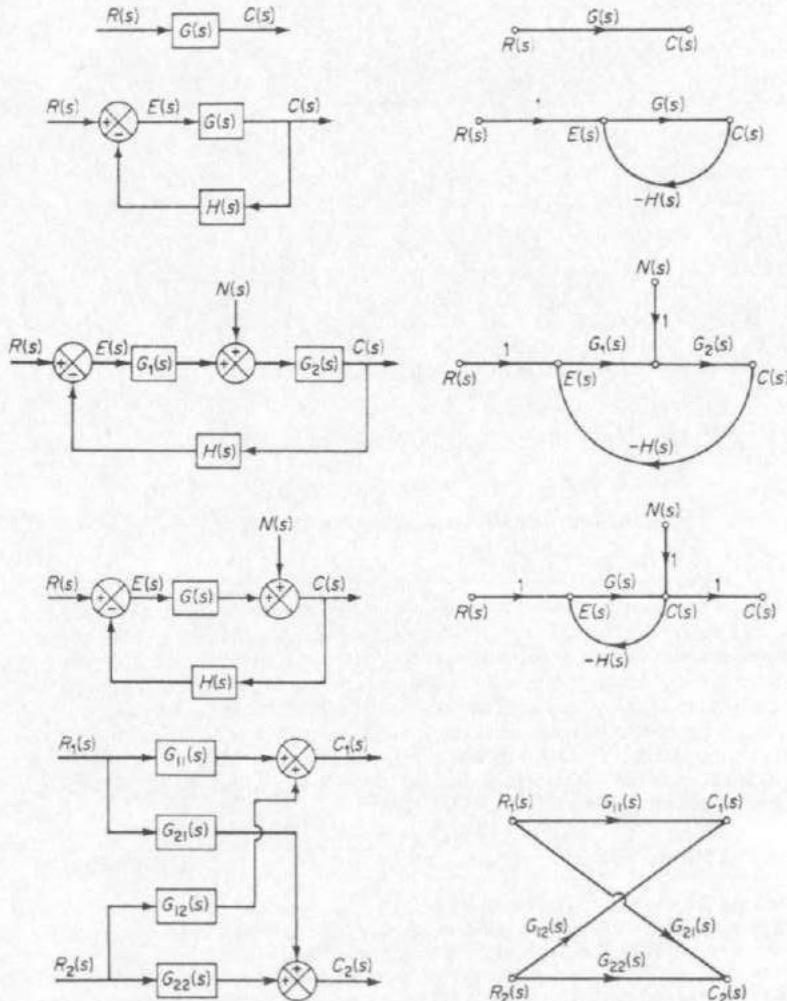


Fig. 4.39 Diagramas de blocos e correspondentes gráficos de fluxo de sinal.

$\sum_{b,c} L_b L_c$  = soma dos produtos de ganhos de todas as combinações possíveis de dois laços que não se tocam  
 $\sum_{d,e,f} L_d L_e L_f$  = soma dos produtos de ganhos de todas as combinações possíveis de três laços que não se tocam  
 $\Delta_k$  = cofator do  $k$ -ésimo determinante do caminho direto do gráfico com os laços tocando o  $k$ -ésimo caminho direto removido

(Note que as somas são calculadas com todos os caminhos possíveis desde a entrada até a saída.)

A seguir, ilustraremos a fórmula de ganho de Mason no uso em dois exemplos.

*Exemplo 4.4* Considere o sistema mostrado na Fig. 4.40. O gráfico de fluxo de sinal para este sistema é indicado na Fig. 4.41. Vamos obter a função de transferência em malha-fechada  $C(s)/R(s)$  usando a fórmula de ganho de Mason.

Neste sistema há apenas um caminho direto entre a entrada  $R(s)$  e a saída  $C(s)$ . O ganho do caminho direto é

$$P_1 = G_1 G_2 G_3$$

Da Fig. 4.41, verificamos que há três laços individuais. Os ganhos destes laços são

$$L_1 = G_1 G_2 H_1$$

$$L_2 = -G_2 G_3 H_2$$

$$L_3 = -G_1 G_2 G_3$$

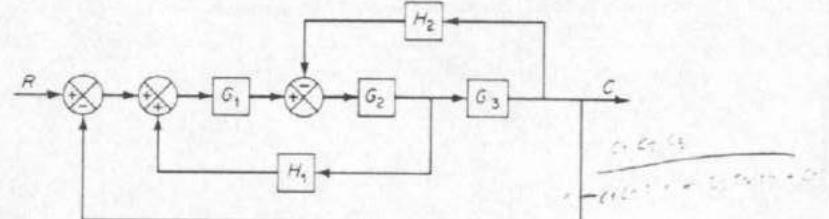


Fig. 4.40 Sistema de laços múltiplos.

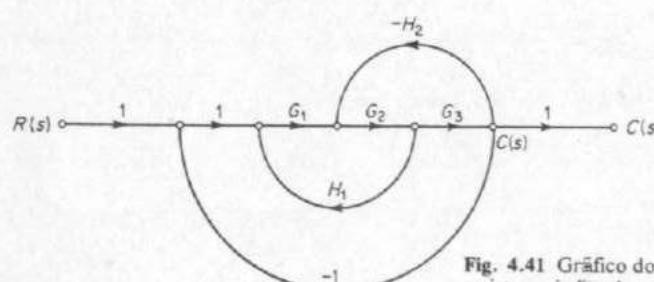


Fig. 4.41 Gráfico do fluxo de sinal para o sistema indicado na Fig. 4.40.

Note que devido ao fato de os três laços possuirem um ramo comum, não há laços que não se tocam. Consequentemente, o determinante  $\Delta$  é dado por

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - (L_1 + L_2 + L_3) \\ &= 1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3\end{aligned}$$

O cofator  $\Delta_1$  do determinante ao longo do caminho direto ligando o nó de entrada e o nó de saída é obtido pela remoção dos laços que tocam este caminho. Desde que o caminho  $P_1$  toca todos os três laços, obtemos

$$\Delta_1 = 1$$

Portanto, o ganho global, entre a entrada  $R(s)$  e a saída  $C(s)$ , ou a função de transferência em malha-fechada, é dado por

$$\begin{aligned}\frac{C(s)}{R(s)} &= P = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} \\ &= \frac{G_1G_2G_3}{1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3}\end{aligned}$$

que é a mesma expressão da função de transferência em malha-fechada obtida pela redução do diagrama de blocos. A fórmula do ganho de Mason fornece o ganho global  $C(s)/R(s)$  sem uma redução do gráfico.

**Exemplo 4.5** Considere o sistema indicado na Fig. 4.42. Obtenha a função de transferência em malha-fechada  $C(s)/R(s)$  usando a fórmula de ganho de Mason.

Neste sistema há três caminhos diretos entre a entrada  $R(s)$  e a saída  $C(s)$ . Os ganhos dos caminhos diretos são

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5$$

$$P_2 = G_1G_6G_4G_5$$

$$P_3 = G_1G_2G_7$$

Há quatro laços individuais. Os ganhos destes laços são

$$L_1 = -G_4H_1$$

$$L_2 = -G_2G_7H_2$$

$$L_3 = -G_6G_4G_5H_2$$

$$L_4 = -G_3G_2G_4G_5H_2$$

O laço  $L_1$  não toca o laço  $L_2$ . Consequentemente, o determinante  $\Delta$  é dado por

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1L_2 \quad (4.75)$$

O cofator  $\Delta_1$  é obtido de  $\Delta$  removendo os laços que tocam o caminho  $P_1$ . Portanto, removendo  $L_1, L_2, L_3, L_4$  e  $L_1L_2$  da Eq. (4.75), obtemos

$$\Delta_1 = 1$$

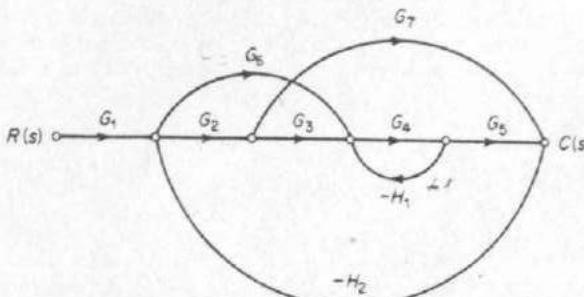


Fig. 4.42 Gráfico do fluxo de sinal para um sistema.

Analogamente, o cofator  $\Delta_2$  é

$$\Delta_2 = 1$$

O cofator  $\Delta_3$  é obtido removendo-se  $L_1, L_3, L_4$  e  $L_1L_2$  da Eq. (4.75), resultando

$$\Delta_3 = 1 - L_1$$

A função de transferência em malha-fechada  $C(s)/R(s)$  é então

$$\begin{aligned}\frac{C(s)}{R(s)} &= P = \frac{1}{\Delta}(P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3) \\ &= \frac{G_1G_2G_3G_4G_5 + G_1G_6G_4G_5 + G_1G_2G_7(1 + G_4H_1)}{1 + G_4H_1 + G_2G_7H_2 + G_6G_4G_5H_2 + G_4H_1G_2G_7H_2 + G_2G_3G_4G_5H_2}\end{aligned}$$

**Comentários conclusivos.** A aplicação usual dos gráficos de fluxo de sinal é em diagramação de sistemas. O conjunto de equações descritas por um gráfico do fluxo de sinal estabelece os nós que representam as variáveis do sistema e interconecta os nós com transmitâncias, diretas ou com pesos, que representam as relações entre as variáveis. Uma fórmula de ganho de Mason pode ser utilizada para estabelecer a relação entre uma entrada e uma saída. (Alternativamente, as variáveis no sistema podem ser eliminadas uma a uma com técnicas de redução.) A fórmula de ganho de Mason é especialmente útil na redução de grandes e complexos diagramas de sistemas em um passo, sem exigir reduções passo-a-passo.

### PROBLEMAS TÍPICOS E SOLUÇÕES

**Problema A.4.1** A Fig. 4.43 mostra um diagrama esquemático de um acelerômetro. Suponha que a carcaça do acelerômetro está firmemente acoplada a uma estrutura de uma aeronave. (O acelerômetro indica a aceleração de sua carcaça em relação ao espaço inercial.) O ângulo de inclinação  $\theta$  medido a partir da linha horizontal é suposto constante durante o intervalo de tempo de medida.

Mostre que para entradas em baixas freqüências, a aceleração da carcaça, relativamente ao espaço inercial, pode ser determinada pelo deslocamento da massa  $m$  em relação à sua carcaça.

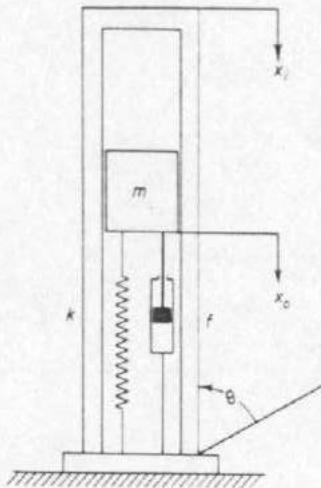


Fig. 4.43 Diagrama esquemático de um acelerômetro.

**Solução.** Vamos definir

$x_i$  = deslocamento da carcaça em relação ao espaço inercial

$x_0$  = deslocamento da massa  $m$  relativa ao espaço inercial

$y = x_0 - x_i$  = deslocamento da massa  $m$  relativamente à carcaça

A equação para este sistema é

$$m\ddot{x}_0 + f(\dot{x}_0 - \dot{x}_i) + k(x_0 - x_i) - mg \operatorname{sen} \theta = 0$$

Em termos de  $y$ , obtemos

$$m\ddot{y} + f\ddot{y} + ky = -m\ddot{x}_i + mg \operatorname{sen} \theta$$

Desde que  $\theta$  é suposto constante, durante o intervalo de tempo de medida,  $mg \operatorname{sen} \theta$  é constante, e é possível calibrar o deslocamento e definir uma nova variável  $z$  tal que

$$z = y - \frac{mg}{k} \operatorname{sen} \theta$$

Então, obtemos

$$m\ddot{z} + f\ddot{z} + kz = -m\ddot{x}_i$$

Se a aceleração de entrada (a aceleração da carcaça relativamente ao espaço inercial)  $\ddot{x}_i$  é considerada a entrada do sistema e o deslocamento  $z$  é considerado a saída, então a função de transferência do sistema torna-se

$$\frac{Z(s)}{s^2 X_i(s)} = -\frac{1}{s^2 + \frac{f}{m}s + \frac{k}{m}}$$

Se a freqüência de entrada é muito baixa quando comparada com  $\sqrt{k/m}$ , então

$$\frac{Z(s)}{s^2 X_i(s)} \approx -\frac{m}{k}$$

o que significa que  $z = y - (mg/k) \operatorname{sen} \theta$  é aproximadamente proporcional à aceleração da entrada lentamente variada. Portanto, para entradas em baixa freqüência, a aceleração da carcaça relativamente ao espaço inercial pode ser dada por

$$\ddot{x}_i = -\frac{k}{m} \left( y - \frac{mg}{k} \operatorname{sen} \theta \right)$$

Note que este tipo de acelerômetro possui uma freqüência natural não amortecida suficientemente alta  $\sqrt{k/m}$  comparada com a máxima freqüência da entrada a ser medida.

**Problema A.4.2** Transmissões com engrenagens são normalmente utilizadas em servomecanismos para reduzir a velocidade, para ampliar o torque ou para obter a mais eficiente transferência de potência casando o elemento excitador com uma dada carga.

Considere o sistema por transmissão com engrenagens mostrado na Fig. 4.44. Neste sistema, uma carga é alimentada por um motor através de uma transmissão por engrenagens. Supondo que a dureza do eixo da transmissão por engrenagem é infinita (e ainda não haja folga nem deformação elástica) e que o número de dentes em cada engrenagem é proporcional ao raio da engrenagem, obtenha o momento de inércia equivalente e a fricção equivalente referidos ao eixo do motor e referidos ao eixo da carga.

Na Fig. 4.44, os números de dentes nas engrenagens 1, 2, 3 e 4 são  $N_1, N_2, N_3$  e  $N_4$ , respectivamente. Os deslocamentos angulares dos eixos 1, 2 e 3 são  $\theta_1, \theta_2$  e  $\theta_3$ , respectivamente. Portanto,  $\theta_2/\theta_1 = N_1/N_2$  e  $\theta_3/\theta_2 = N_2/N_3$ . O momento de inércia e a fricção viscosa de cada componente da transmissão por engrenagem são denotados por  $J_1, f_1; J_2, f_2; J_3, f_3$ , respectivamente. ( $J_1$  e  $f_1$  incluem o momento de inércia e a fricção da carga.)

**Solução.** Para este sistema de transmissão por engrenagem, podemos obter as três equações seguintes: Para o primeiro eixo,

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + f_1 \dot{\theta}_1 + T_1 = T_m \quad (4.76)$$

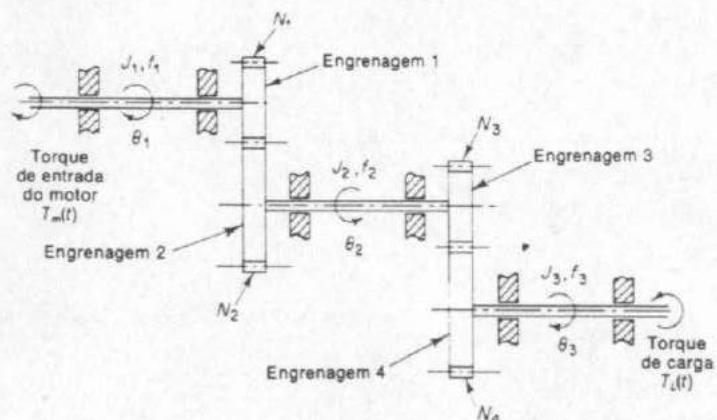


Fig. 4.44 Sistema de transmissão por engrenagens.

onde  $T_m$  é o torque desenvolvido pelo motor e  $T_1$  é o torque da carga na engrenagem 1 devido ao resto da transmissão por engrenagem. Para o segundo eixo,

$$J_2\ddot{\theta}_2 + f_2\dot{\theta}_2 + T_3 = T_2 \quad (4.77)$$

onde  $T_2$  é o torque transmitido para a engrenagem 2 e  $T_3$  é o torque de carga na engrenagem 3 devido ao resto da transmissão por engrenagem. Desde que o trabalho efetuado pela engrenagem 1 é igual àquele da engrenagem 2,

$$T_1\theta_1 = T_2\theta_2 \quad \text{ou} \quad T_2 = T_1 \frac{N_2}{N_1}$$

Se  $N_1/N_2 < 1$ , a relação de engrenagem reduz a velocidade bem como amplia o torque. Para o terceiro eixo,

$$J_3\ddot{\theta}_3 + f_3\dot{\theta}_3 + T_L = T_4 \quad (4.78)$$

onde  $T_L$  é torque de carga e  $T_4$  é o torque transmitido para a engrenagem 4.  $T_3$  e  $T_4$  são relacionados por

$$T_4 = T_3 \frac{N_4}{N_3}$$

e  $\theta_3$  e  $\theta_4$  são relacionados por

$$\theta_3 = \theta_2 \frac{N_3}{N_4} = \theta_1 \frac{N_1 N_3}{N_2 N_4}$$

Eliminando-se  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$  das Eqs. (4.76), (4.77) e (4.78), resulta

$$J_1\ddot{\theta}_1 + f_1\dot{\theta}_1 + \frac{N_1}{N_2}(J_2\ddot{\theta}_2 + f_2\dot{\theta}_2) + \frac{N_1 N_3}{N_2 N_4}(J_3\ddot{\theta}_3 + f_3\dot{\theta}_3 + T_L) = T_m \quad (4.79)$$

Eliminando-se  $\theta_2$  e  $\theta_3$  da Eq. (4.79) e escrevendo a equação em termos de  $\theta_1$  e suas derivadas temporais, obtemos

$$\begin{aligned} & [J_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 J_3] \ddot{\theta}_1 \\ & + [f_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 f_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 f_3] \dot{\theta}_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right) \left(\frac{N_3}{N_4}\right) T_L = T_m \end{aligned} \quad (4.80)$$

Portanto, o momento de inércia e a fricção equivalentes da transmissão por engrenagem referidos ao eixo 1 são dados por

$$J_{1eq} = J_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 J_3$$

$$f_{1eq} = f_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 f_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 f_3$$

Analogamente, o momento de inércia e a fricção equivalentes da transmissão por engrenagem referidos ao eixo da carga são

$$J_{3eq} = J_3 + \left(\frac{N_4}{N_3}\right)^2 J_2 + \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \left(\frac{N_4}{N_3}\right)^2 J_1$$

$$f_{3eq} = f_3 + \left(\frac{N_4}{N_3}\right)^2 f_2 + \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \left(\frac{N_4}{N_3}\right)^2 f_1$$

A relação entre  $J_{1eq}$  e  $J_{3eq}$  é portanto

$$J_{1eq} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 J_{3eq}$$

e a relação entre  $f_{1eq}$  e  $f_{3eq}$  é

$$f_{1eq} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 f_{3eq}$$

O efeito de  $J_2$  e  $J_3$  no momento de inércia equivalente é determinado pelas relações de engrenagem  $N_1/N_2$  e  $N_3/N_4$ . Para transmissões por engrenagem redutoras de velocidade as relações  $N_1/N_2$  e  $N_3/N_4$  são normalmente menores do que a unidade. Se  $N_1/N_2 << 1$  e  $N_3/N_4 << 1$ , então os efeitos de  $J_2$  e  $J_3$  no momento de inércia equivalente  $J_{1eq}$  são desprezíveis. Comentários análogos aplicam-se a fricção equivalente  $f_{1eq}$  da transmissão por engrenagem. Em termos do momento de inércia equivalente  $J_{1eq}$  e da fricção equivalente  $f_{1eq}$ , a Eq. (4.80) pode ser simplificada para fornecer

$$J_{1eq}\ddot{\theta}_1 + f_{1eq}\dot{\theta}_1 + nT_L = T_m$$

onde

$$n = \frac{N_1 N_3}{N_2 N_4}$$

Considerando  $T_m - nT_L$  como a entrada para o sistema e  $\theta_1$  como a saída, a função de transferência deste sistema é

$$\frac{\Theta_1(s)}{T_m(s) - nT_L(s)} = \frac{1}{s(J_{1eq}s + f_{1eq})}$$

O diagrama de blocos é mostrado na Fig. 4.45(a). Se  $(T_m - nT_L)$  e  $\theta_1$  são consideradas como a entrada e a saída, respectivamente, então a função de transferência torna-se

$$\frac{\Theta_3(s)}{T_m(s) - nT_L(s)} = \frac{\frac{1}{n}}{s(J_{3eq}s + f_{3eq})}$$

Desde que

$$\frac{\Theta_3(s)}{\Theta_1(s)} = \frac{N_1 N_3}{N_2 N_4} = n$$

em termos de  $J_{1eq}$  e  $f_{1eq}$ , sua função de transferência pode ser escrita

$$\frac{\Theta_3(s)}{T_m(s) - nT_L(s)} = \frac{n}{s(J_{1eq}s + f_{1eq})}$$

O diagrama de blocos para este caso é mostrado na Fig. 4.45(b).

Da análise acima, pode ser visto que em um sistema onde um servomotor está excitando uma carga com inércia e uma carga com fricção viscosa, a inércia e fricção da carga são, para o eixo do motor, os valores originais multiplicados pelo quadrado da relação da engrenagem. Se

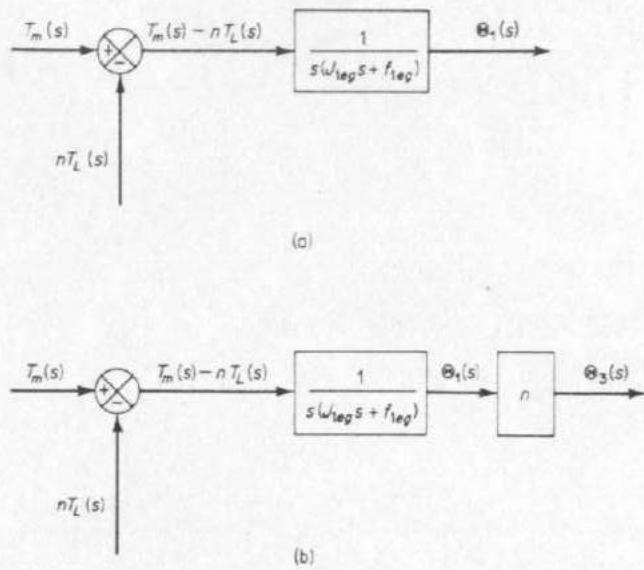


Fig. 4.45 Diagramas de blocos no sistema de transmissão por engrenagens mostrado na Fig. 4.44.

a relação da engrenagem for um número pequeno, o momento de inércia e a fricção do servomotor possuem efeitos dominantes no comportamento dinâmico do sistema.

**Problema A.4.3** Mostre que as relações torque-inércia referidas ao eixo do motor e ao eixo da carga diferem uma da outra por um fator  $n$ . Mostre também que as relações torque ao quadrado-inércia referidas ao eixo do motor e ao eixo da carga são as mesmas.

**Solução.** Suponha que  $T_{\max}$  é o torque máximo que pode ser produzido no eixo do motor. Então a relação torque-inércia referida ao eixo do motor é

$$\frac{T_{\max}}{J_m + n^2 J_L}$$

onde

$J_m$  = momento de inércia do rotor  
 $J_L$  = momento de inércia da carga  
 $n$  = relação de engrenagem

A relação torque-inércia referida ao eixo da carga é

$$\frac{\frac{T_{\max}}{n}}{J_L + \frac{J_m}{n^2}}$$

Obviamente, elas diferem por um fator  $n$ . Portanto, na comparação das relações torque-inércia de motores, devemos necessariamente especificar qual eixo é a referência.

Note que a relação torque ao quadrado-inércia referida ao eixo do motor é

$$\frac{T_{\max}^2}{J_m + n^2 J_L}$$

e aquela referida ao eixo da carga é

$$\frac{\frac{T_{\max}^2}{n^2}}{J_L + \frac{J_m}{n^2}}$$

Estas duas relações são evidentemente as mesmas.

**Problema A.4.4** O momento de inércia  $J$  de um motor pode ser disponível no catálogo do fabricante ou pode ser calculado se as dimensões e o material do rotor forem conhecidos.

O momento de inércia efetivo de um sistema motor e transmissão por engrenagens também pode ser determinado por métodos experimentais. Discuta os métodos para determinar o momento de inércia  $J$  de um motor c.a. bifásico.

**Solução.** Determinar o momento de inércia efetivo  $J$  de um sistema com um motor de transmissão por engrenagens é possível aplicando-se uma entrada em degrau  $e_i$  e registrando-se a resposta transitória. A função de transferência de um motor c.a. bifásico é dada pela Eq. (4.35) como segue:

$$\frac{\Theta(s)}{E(s)} = \frac{K_e}{Js^2 + (f + K_n)s}$$

Se a tensão de entrada  $e_i$  é uma entrada em degrau de altura  $E_1$ , então a velocidade de eixo resultante é

$$s\Theta(s) = \frac{K_e E_1}{s(Js^2 + f + K_n)}$$

Portanto a velocidade angular  $\omega(t)$  é

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t) = \frac{K_e E_1}{f + K_n} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{f + K_n}{J} t \right) \right]$$

Do registro de  $\omega(t)$  versus tempo, a constante de tempo  $J/(f + K_n)$  pode ser determinada.

Desde que a velocidade angular em regime estacionário é

$$\omega(\infty) = \frac{K_e E_1}{f + K_n}$$

obtemos

$$f + K_n = \frac{K_e E_1}{\omega(\infty)}$$

Para determinar  $f + K_n$ , necessitamos conhecer  $K_e$ . [ $E_1$  e  $\omega(\infty)$  são grandezas conhecidas.]

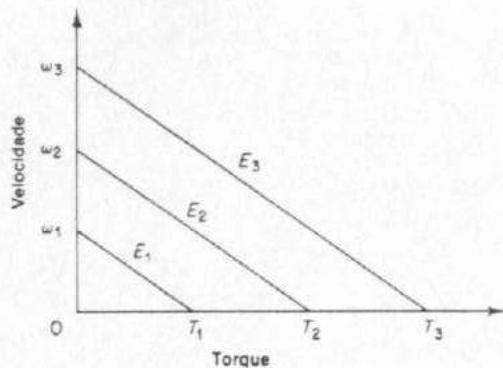


Fig. 4.46 Curvas torque-velocidade.

valor da constante de torque  $K_e$  pode ser determinado a partir das curvas torque-velocidade, como mostrado na Fig. 4.46, desde que estas curvas são paralelas. Das curvas obtemos

$$K_e = \frac{T_1}{E_1} = \frac{T_2}{E_2} = \frac{T_3}{E_3}$$

Uma vez conhecida a constante de tempo  $J/(f + K_n)$ , a velocidade angular em regime estacionário  $\omega(\infty)$ , e a constante de torque  $K_e$ , pode ser determinado o momento de inércia  $J$ .

O momento de inércia  $J$  do rotor também pode ser determinado experimentalmente por meio de experiência com o pêndulo de torção. Se o coeficiente de amortecimento é muito pequeno, o período de oscilação do pêndulo é relacionado com  $J$  pela seguinte equação:

$$J = \frac{kT^2}{4\pi^2}$$

onde

$J$  = momento de inércia do rotor

$k$  = constante da mola de torção do eixo elástico no qual o rotor do motor é acoplado

$T$  = período da oscilação

**Problema A.4.5** Obtenha a função de transferência do servomotor bifásico cuja curva torque-velocidade é indicada na Fig. 4.47. As máximas tensões nominais de fase fixa e de fase de controle são 115 volts. O momento de inércia  $J$  do rotor (incluindo o efeito da carga) é  $7,77 \times 10^{-4}$  oz-in-s $^2$ , e o coeficiente de fricção-viscosa do motor (incluindo o efeito da carga) é 0,005 oz-in/rad/s.

**Solução.** A equação para a curva torque-velocidade é

$$T + K_n \dot{\theta} = K_e E_c$$

onde

$$K_n = \frac{5}{4000} \frac{60}{2\pi} = 0,0119 \text{ oz-in /rad/s}$$

$$K_e = \frac{5}{115} = 0,0435 \text{ oz-in /volt}$$

Portanto,

$$T + 0,0119 \dot{\theta} = 0,0435 E_c$$

A constante de ganho do motor  $K_m$  é então

$$\begin{aligned} K_m &= \frac{K_e}{f + K_n} \\ &= \frac{0,0435}{0,005 + 0,0119} \\ &= 2,57 \end{aligned}$$

A constante de tempo do motor  $T_m$  é

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{J}{f + K_n} \\ &= \frac{7,77 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-3} + 11,9 \times 10^{-3}} \\ &= 0,046 \end{aligned}$$

Usando os valores numéricos obtidos, a função de transferência dada pela Eq. (4.35) é a seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{\Theta(s)}{E_c(s)} &= \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} \\ &= \frac{2,57}{s(0,046 s + 1)} \end{aligned}$$

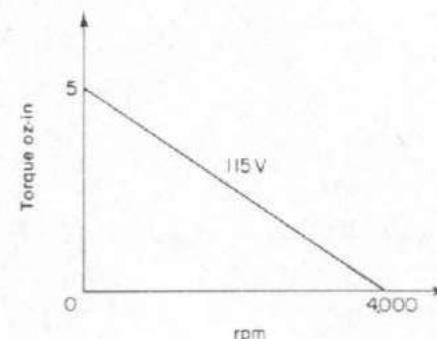


Fig. 4.47 Curva torque-velocidade.

**Problema A.4.6** Supondo que um servomotor bifásico possui uma curva linear torque-velocidade de modo que a velocidade sem carga é  $\omega_0$  e o torque completamente freado é  $T_f$ , determine a máxima potência de saída no eixo do motor  $P_{\max}$ .

**Solução.** A curva torque-velocidade é

$$T = T_s - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)T_f$$

A potência de saída do eixo  $P$  é dada por

$$\begin{aligned} P &= T\omega \\ &= \left(T_s - \frac{\omega}{\omega_0}T_f\right)\omega \end{aligned}$$

Para determinar  $P_{\max}$ , vamos diferenciar  $P$  em relação a  $\omega$ :

$$\frac{dP}{d\omega} = T_s - 2\frac{\omega}{\omega_0}T_f$$

Impondo que  $dP/d\omega = 0$ , obtemos

$$\omega = \frac{\omega_0}{2}$$

Claramente,  $d^2P/d\omega^2 = -2T_f/\omega_0 < 0$ . Consequentemente  $P$  é um máximo em  $\omega = \omega_0/2$ .  $P_{\max}$  é

$$\begin{aligned} P_{\max} &= T\omega \Big|_{\omega=\omega_0/2} \\ &= \left(T_s - \frac{T_f}{2}\right)\frac{\omega_0}{2} \\ &= \frac{T_s\omega_0}{4} \end{aligned}$$

Para o servomotor considerado no Problema A.4.5,  $T_s = 5$  oz-in e  $\omega_0 = 4.000$  rpm. A potência de saída máxima  $P_{\max}$  é

$$\begin{aligned} P_{\max} &= \frac{5 \times 4000}{4} \times \frac{1}{1352} \\ &= 3,7 \text{ watts} \end{aligned}$$

A potência máxima ocorre em  $\omega = 2.000$  rpm.

**Problema A.4.7** A máxima aceleração atingível com o servomotor pode ser indicada pela relação torque-inércia, sendo a relação do máximo torque, na condição de freagem completa e total do eixo do motor, e a inércia do rotor. Quanto maior esta relação, melhor será a característica de aceleração. Referindo-se ao servomotor bifásico considerado no Problema A.4.5, determine a relação torque-inércia.

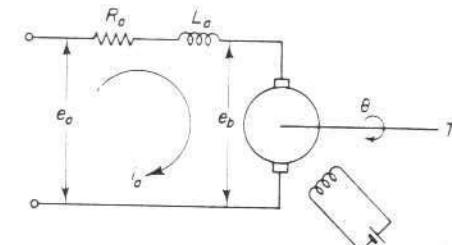
**Solução.** O momento de inércia  $J$  do rotor do servomotor bifásico é  $7.77 \times 10^{-4}$  oz-in-s<sup>2</sup>. O torque máximo na condição de freagem completa é 5 oz-in. Consequentemente a relação torque-inércia é dada por

$$\begin{aligned} \frac{T_{\max}}{J} &= \frac{5}{7.77 \times 10^{-4}} \\ &= 6.435 \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

Na seleção de um servomotor, é importante satisfazer um dado requisito em relação à aceleração.

**Problema A.4.8** Considere o motor c.c. controlado por armadura indicado na Fig. 4.48. Na Seção 4.5 foi demonstrado que

$$\begin{aligned} e_b &= K_b\dot{\theta} \\ T &= K_f i_f K_1 i_a = K_i a \end{aligned}$$



$i_a = \text{constante}$

Fig. 4.48 Motor c.c. controlado por armadura.

onde  $K_b$  é a constante de força-contra-eletromotriz,  $i_f$  é a corrente de campo constante e  $K_1$  e  $K$  são constantes. Demonstre que

$$\frac{K_b}{K} = 1.356 \text{ watts-s/ft-lb}$$

**Solução.** A potência mecânica  $T\dot{\theta}$  deve ser igual à potência elétrica  $e_b i_a$  desenvolvida pela corrente de armadura fluindo através da força-contra-eletromotriz da armadura. Então, de

$$e_b i_a = K_b \dot{\theta} i_a \text{ (watts)} = \frac{K_b \dot{\theta} i_a}{746} \text{ (hp)}$$

$$T \dot{\theta} = K_i a \dot{\theta} \text{ (ft-lb/s)} = \frac{K_i a \dot{\theta}}{550} \text{ (hp)}$$

obtemos

$$\frac{K_b}{K} = 1.356 \text{ watts-s/ft-lb}$$

**Problema A.4.9** Referindo-se ao motor c.c. mostrado na Fig. 4.48, para valores fixados da tensão de armadura, as curvas de torque versus velocidade podem ser representadas por

$$T = \frac{K}{R_a}(e_a - K_b\omega)$$

Determine  $K$  e  $K_b$  das curvas torque versus velocidade.

**Solução.** Para a condição em vazio (sem carga),  $T = 0$ . Portanto,

$$K_b = \frac{e_a}{\omega_0}$$

onde

$\omega_0$  = velocidade sem carga

Se o motor for completamente freado, então  $\omega = 0$ , e obtemos

$$K = \frac{T_s R_a}{e_a}$$

onde

$T_s$  = torque com freagem total.

**Problema A.4.10** Determine a função de transferência  $\Theta(s)/E_a(s)$  do motor c.c. controlado por armadura mostrado na Fig. 4.48. No diagrama

$$\begin{aligned} e_a &= 26 \text{ volts} \\ L_a &= \text{desprezível} \\ J &= 2,59 \times 10^{-4} \text{ oz-in-s}^2 \\ f &= 3 \times 10^{-3} \text{ oz-in/rad/s} \end{aligned}$$

Suponha que o torque com freagem completa é 10 oz-in e a velocidade sem carga é 520 rad/s.

**Solução.** Da Eq. (4.43), a função de transferência  $\Theta(s)/E_a(s)$  é

$$\begin{aligned} \frac{\Theta(s)}{E_a(s)} &= \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} \\ &= \frac{K}{s(R_a J s + R_a f + K K_b)} \end{aligned}$$

onde

$$K = \frac{T_s R_a}{e_a} \quad (T_s = \text{torque freado})$$

$$K_b = \frac{e_a}{\omega_0} \quad (\omega_0 = \text{velocidade sem carga})$$

No Problema A.4.8, verificamos que

$$\begin{aligned} \frac{K_b}{K} &= 1,356 \text{ watts-s/ft-lb} \\ &= 7,06 \times 10^{-3} \text{ watts-s/in-oz} \end{aligned}$$

Portanto,

$$K_b = \frac{26}{520} = 5 \times 10^{-2} \text{ volt/rad/s}$$

e

$$\begin{aligned} K &= \frac{K_b}{7,06 \times 10^{-3}} \\ &= \frac{5 \times 10^{-2}}{7,06 \times 10^{-3}} \\ &= 7,08 \text{ in-oz/amp} \end{aligned}$$

O valor de  $R_a$  é então obtido como

$$\begin{aligned} R_a &= \frac{K e_a}{T_s} \\ &= 7,08 \times \frac{26}{10} \\ &= 18,4 \text{ ohms} \end{aligned}$$

A função de transferência  $\Theta(s)/E_a(s)$  é então

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{7,08}{s[(18,4)(2,59 \times 10^{-4})s + (18,4)(3 \times 10^{-3}) + (7,08)(5 \times 10^{-2})]} = \frac{17,3}{s(0,0116s + 1)}$$

**Problema A.4.11** Determine a função de transferência  $\Theta(s)/E_f(s)$  do motor c.c. controlado por campo mostrado na Fig. 4.26(a). Supor que no diagrama

$$\begin{aligned} e_f &= 110 \text{ volts} \\ i_a &= 15 \text{ ampères} \\ \omega_{ss} &= \dot{\theta}_{ss} = 1.200 \text{ rpm} \\ L_f &= 20 \text{ henrys} \\ R_f &= 120 \text{ ohms} \\ J &= 1 \text{ lb-ft-s}^2 \\ f &= 0.5 \text{ lb-ft/rad/s} \end{aligned}$$

**Solução.** Da Eq. (4.52), a função de transferência  $\Theta(s)/E_f(s)$  é

$$\frac{\Theta(s)}{E_f(s)} = \frac{K_2}{s(L_f s + R_f)(J s + f)}$$

Desta equação, obtemos a velocidade angular em regime estacionário  $\omega_{ss}$  como segue: Note que para uma entrada em degrau de  $e_f = 110$  volts, obtemos

$$\Theta(s) = \frac{K_2}{s(L_f s + R_f)(J s + f)} \frac{110}{s}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\omega_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s[\Theta(s)] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{110K_2}{(L_f s + R_f)(Js - f)} \\ &= \frac{110K_2}{R_f f}\end{aligned}$$

Desde que  $\omega_{ss} = 1.200 \text{ rpm} = 20 \times 2\pi \text{ rad/s}$ ,  $R_f = 120 \text{ ohms}$ ,  $f = 0.5 \text{ lb-ft/rad/s}$ , obtemos

$$40\pi = \frac{110K_2}{120 \times 0.5}$$

ou

$$\begin{aligned}K_2 &= \frac{40\pi \times 60}{110} \text{ ohms lb-ft/volt} \\ &= 68.5 \text{ lb-ft/amp}\end{aligned}$$

A função de transferência  $\Theta(s)/E_f(s)$  é então obtida como segue:

$$\begin{aligned}\frac{\Theta(s)}{E_f(s)} &= \frac{68.5}{s(20s + 120)(s + 0.5)} \\ &\quad \times \frac{1.14}{s(0.167s + 1)(2s + 1)}\end{aligned}$$

**Problema A.4.12** Considere o servomecanismo de posição indicado na Fig. 4.49. Suponha que a entrada do sistema seja a posição do eixo de referência e a saída do sistema seja a posição do eixo de saída. Suponha os seguintes valores numéricos para as constantes do sistema:

$r$  = deslocamento angular do eixo de entrada de referência, radianos

$c$  = deslocamento angular do eixo de saída, radianos

$\theta$  = deslocamento angular do eixo do motor, radianos

$K_1$  = ganho do detector de erro do potenciômetro =  $24/\pi$  volts/rad

$K_p$  = ganho do amplificador = 10 volts/volt

$R_f$  = resistência do enrolamento de campo = 2 ohms

$L_f$  = indutância do enrolamento de campo = 0.1 henry

$i_f$  = corrente de enrolamento de campo, ampères

$e_f$  = tensão de campo aplicada, volts

$K_2$  = constante de torque do motor = 0.05 Newton-m.ampéres

$n$  = relação de engrenagem = 1/10

$J$  = momento equivalente de inércia do motor e carga referido ao eixo do motor = 0.02 kg-m<sup>2</sup>

$f$  = coeficiente de fricção-viscosa equivalente do motor e carga referente ao eixo do motor = 0.02 Newton-m/rad/s

Desenhe um diagrama de blocos do sistema. Determine a função de transferência de cada bloco. Finalmente, simplifique o diagrama de blocos.

**Solução.** As equações que descrevem a dinâmica do sistema são as seguintes:

Para o detector de erro potenciométrico:

$$E(s) = K_1[R(s) - C(s)] = \frac{24}{\pi}[R(s) - C(s)] \quad (4.81)$$

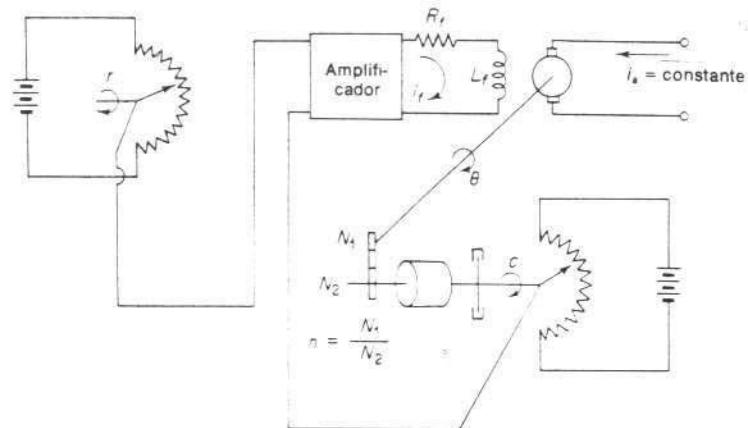
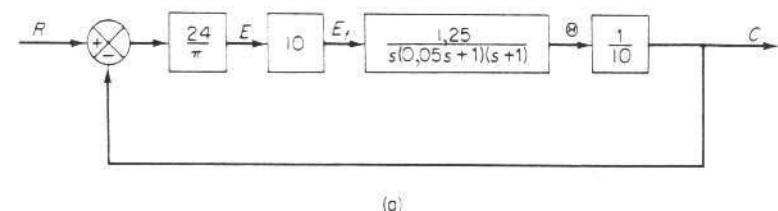


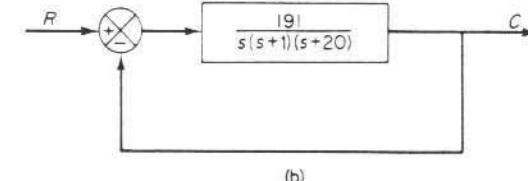
Fig. 4.49 Servomecanismo de posição.

Para o amplificador:

$$E_f(s) = K_p E(s) = 10E(s) \quad (4.82)$$



(a)



(b)

Fig. 4.50 (a) Diagrama de blocos do servomecanismo de posição indicado na Fig. 4.49; (b) diagramas de blocos simplificado.

Para o motor controlado por campo: Da Eq. (4.52), verificamos que

$$\frac{\Theta(s)}{E_f(s)} = \frac{K_m}{s(T_f s + 1)(T_m s + 1)}$$

onde

$$K_m = \frac{K_2}{R_f f} = \frac{0,05}{2 \times 0,02} = 1,25 \text{ rad volt-s}$$

$$T_f = \frac{L_f}{R_f} = \frac{0,1}{2} = 0,05 \text{ s}$$

$$T_m = \frac{J}{f} = \frac{0,02}{0,02} = 1 \text{ s}$$

Portanto,

$$\frac{\Theta(s)}{E_f(s)} = \frac{1,25}{s(0,05s + 1)(s + 1)} \quad (4.83)$$

Das Eqs. (4.81), (4.82) e (4.83), obtemos o diagrama de blocos indicado na Fig. 4.50(a). Uma simplificação do diagrama de blocos da Fig. 4.50(a) resulta na Fig. 4.50(b).

**Problema A.4.13** Nos sistemas de controle realimentados são utilizados geradores c.c. a fim de produzir-se uma grande amplificação de potência. (Amplificadores a válvula, amplificadores transistorizados etc. não são convenientes para utilização no controle direto de um motor c.c., com mais de 100 watts, se forem desejadas pequenas constantes de tempo e boa linearidade.) No diagrama mostrado na Fig. 4.51(a), o gerador c.c. excita um motor c.c. controlado por armadura. No diagrama esquemático da Fig. 4.51(b).

- $R_f$  = resistência do enrolamento de campo do gerador c.c., ohms
- $L_f$  = indutância do enrolamento de campo do gerador c.c., henrys
- $i_g$  = corrente do enrolamento de campo do gerador c.c., amperes
- $e_f$  = tensão de enrolamento de campo aplicada do gerador c.c., volts
- $R_a$  = resistência do enrolamento de armadura, ohms
- $L_a$  = indutância do enrolamento de armadura, henrys
- $i_a$  = corrente do enrolamento de armadura, amperes
- $e_a$  = tensão gerada na armadura, volts
- $\dot{\theta}_g$  = velocidade constante do gerador c.c., rad/s
- $i_f$  = corrente de campo do motor c.c. (constante), amperes
- $e_b$  = força-contraria-eletromotriz, volts
- $\theta$  = deslocamento angular do eixo do motor, radianos
- $T$  = torque fornecido pelo motor, N-m
- $J$  = momento de inércia do motor e carga referidos ao eixo do motor, kg-m<sup>2</sup>
- $f$  = coeficiente de fricção-viscosa do motor e da carga referidos ao eixo do motor, N-m/rad/s

O gerador é girado com uma velocidade constante  $\dot{\theta}_g$ . A tensão gerada na armadura  $e_a$  é determinada pela tensão  $e_f$  aplicada ao campo do gerador. Deduza a função de transferência entre  $\theta$  e  $e_f$ .

**Solução.** As equações para este sistema são

$$L_f \frac{di_g}{dt} + R_f i_g = e_f \quad (4.84)$$

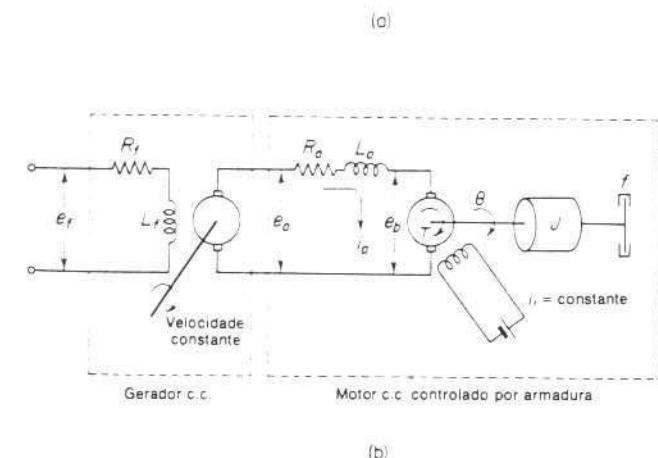
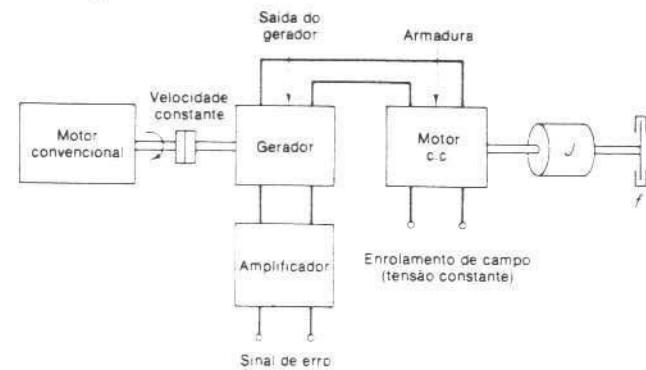


Fig. 4.51 (a) Um sistema gerador-motor c.c.; (b) diagrama esquemático.

e

$$e_a = K \dot{\theta}_g \psi_g$$

onde  $K$  é uma constante e  $\psi_g$  é o fluxo no entreferro de ar. Desde que a corrente no enrolamento de campo e o fluxo no entreferro de ar são proporcionais e  $\dot{\theta}_g$  é uma constante,  $e_a$  pode ser escrito

$$e_a = K_a i_g \quad (4.85)$$

onde  $K_a$  é uma constante. Eliminando  $i_g$  das Eqs. (4.84) e (4.85), obtemos

$$L_f \frac{de_g}{dt} + R_f e_g = K_a e_f$$

A função de transferência entre a tensão gerada na armadura  $e_a$  e a tensão no enrolamento  $e_f$  é então

$$\frac{E_a(s)}{E_f(s)} = \frac{K_a}{L_f s - R_f} \quad (4.86)$$

No motor c.c. controlado por armadura, a armadura é energizada pela saída do gerador e a corrente de campo é mantida constante. A função de transferência entre  $\theta$  e  $e_a$  foi obtida na Seção 4.5 e resultou na Eq. (4.42). Reescrevendo-a,

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{s[L_a J s^2 - (L_a f - R_a J)s - R_a f - K K_b]} \quad (4.87)$$

Portanto, a função de transferência entre  $\theta$  e  $e_f$  é obtida a partir das Eqs. (4.86) e (4.87) como

$$\frac{\Theta(s)}{E_f(s)} = \frac{K K_a}{(L_f s - R_f)s[L_a J s^2 - (L_a f - R_a J)s - R_a f - K K_b]} \quad (4.88)$$

A indutância  $L_a$  no circuito de armadura normalmente é pequena e pode ser desprezada. Se  $L_a$  é desprezada, então a função de transferência dada pela Eq. (4.88) reduz-se a

$$\frac{\Theta(s)}{E_f(s)} = \frac{K_a K_m}{s(T_f s + 1)(T_m s + 1)}$$

onde

$K_a = K_a/R_f$  = constante de ganho do gerador

$T_f = L_f/R_f$  = constante de tempo do gerador

$K_m = K/(R_a f + K K_b)$  = constante de ganho do motor

$T_m = R_a f/(R_a f + K K_b)$  = constante de tempo do motor

**Problema A.4.14** Considerando pequenos desvios em relação à operação em regime estacionário, desenhe o diagrama de blocos do sistema de aquecimento de ar indicado na Fig. 4.52. Suponha que a perda de calor para o ambiente e a capacidade térmica das partes metálicas do aquecedor são desprezíveis.

**Solução.** Vamos definir

$\bar{\theta}_i$  = temperatura em regime estacionário do ar na abertura de entrada,  $^{\circ}\text{C}$

$\bar{\theta}_o$  = temperatura em regime estacionário do ar na abertura de saída,  $^{\circ}\text{C}$

$G$  = taxa de fluxo de ar através da câmara de aquecimento,  $\text{kg/s}$

$M$  = ar contido na câmara de aquecimento,  $\text{kg}$

$c$  = calor específico do ar,  $\text{cal/kg } ^{\circ}\text{C}$

$R$  = resistência térmica,  $^{\circ}\text{C s/cal}$

$C$  = capacidade térmica do ar contido na câmara de aquecimento =  $M c$ ,  $\text{cal}/^{\circ}\text{C}$

$H$  = entrada de calor em regime estacionário,  $\text{cal/s}$

Vamos supor que a entrada de calor seja subitamente variada de  $\bar{H}$  para  $\bar{H} + h$  e a temperatura de ar na abertura de entrada seja subitamente variada de  $\bar{\theta}_i$  para  $\bar{\theta}_i + \theta_i$ . Então, a temperatura do ar na abertura de saída será variada desde  $\bar{\theta}_o$  para  $\bar{\theta}_o + \theta_o$ .

A equação que descreve o comportamento do sistema é

$$C d\theta_o = [h + Gc(\theta_i - \theta_o)] dt$$

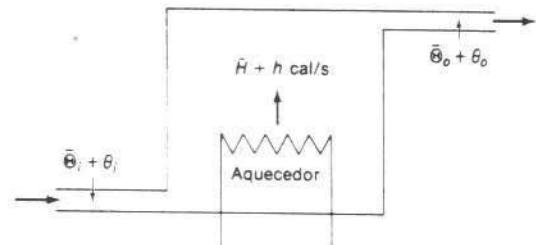


Fig. 4.52 Sistema de aquecimento de ar.

ou

$$C \frac{d\theta_o}{dt} = h + Gc(\theta_i - \theta_o)$$

Notando que

$$Gc = \frac{1}{R}$$

obtemos

$$C \frac{d\theta_o}{dt} = h + \frac{1}{R}(\theta_i - \theta_o)$$

ou

$$RC \frac{d\theta_o}{dt} + \theta_o = Rh + \theta_i$$

Considerando as transformadas de Laplace de ambos os membros desta última equação e substituindo a condição inicial  $\theta_o(0) = 0$ , obtemos

$$\Theta_o(s) = \frac{R}{RCs + 1} H(s) + \frac{1}{RCs + 1} \Theta_i(s)$$

O diagrama de blocos do sistema correspondente a esta equação é indicado na Fig. 4.53.

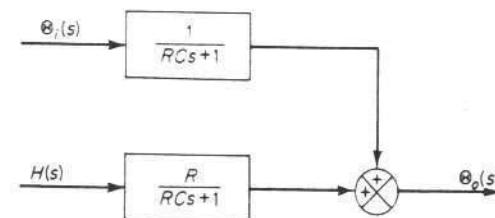


Fig. 4.53 Diagrama de blocos do sistema de aquecimento de ar indicado na Fig. 4.52.



Há três laços individuais. Portanto,

$$L_1 = -\frac{1}{C_1 s} \frac{1}{R_1}$$

$$L_2 = -\frac{1}{C_2 s} \frac{1}{R_2}$$

$$L_3 = -\frac{1}{R_1} \frac{1}{C_2 s}$$

O laço  $L_1$  não toca o laço  $L_2$ . (O laço  $L_1$  toca o laço  $L_3$  e o laço  $L_2$  toca o laço  $L_3$ .) Portanto, o determinante  $\Delta$  é dado por

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + (L_1 L_2) \\ &= 1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} + \frac{1}{R_2 C_2 s} + \frac{1}{R_1 C_2 s} - \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2}\end{aligned}$$

Desde que todos os três laços tocam o caminho direto  $P_1$ , removemos  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  de  $\Delta$  e calculamos o cofator  $\Delta_1$  como segue:

$$\Delta_1 = 1$$

Portanto obtemos a função de transferência em malha-fechada como segue:

$$\begin{aligned}\frac{H(s)}{Q(s)} &= \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} \\ &= \frac{\frac{1}{R_1 C_1 C_2 s^2}}{1 - \frac{1}{R_1 C_1 s} + \frac{1}{R_2 C_2 s} + \frac{1}{R_1 C_2 s} - \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2}} \\ &= \frac{R_2}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 - R_2 C_2 - R_2 C_1)s + 1}\end{aligned}$$

## PROBLEMAS

**Problema B.4.1** Obtenha as funções de transferência dos sistemas mecânicos indicados nas Figs. 4.55(a) e (b). Obtenha também os análogos elétricos dos sistemas mecânicos.

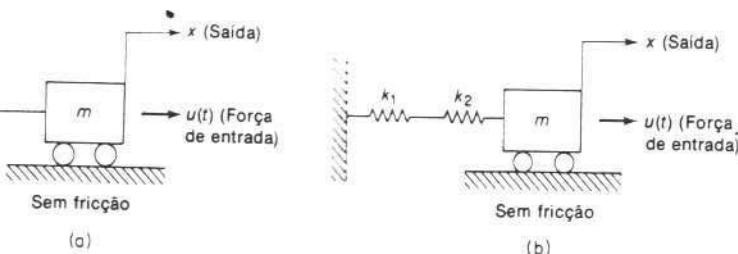


Fig. 4.55 Sistemas mecânicos.

**Problema B.4.2** Obtenha a função de transferência de cada um dos três sistemas mecânicos indicados na Fig. 4.56. Nos diagramas,  $x_i$  denota o deslocamento de entrada e  $x_o$  denota o deslocamento de saída. Suponha que os sistemas sejam a parâmetros concentrados (sem massa distribuída) e que o efeito de carga na saída é desprezível.

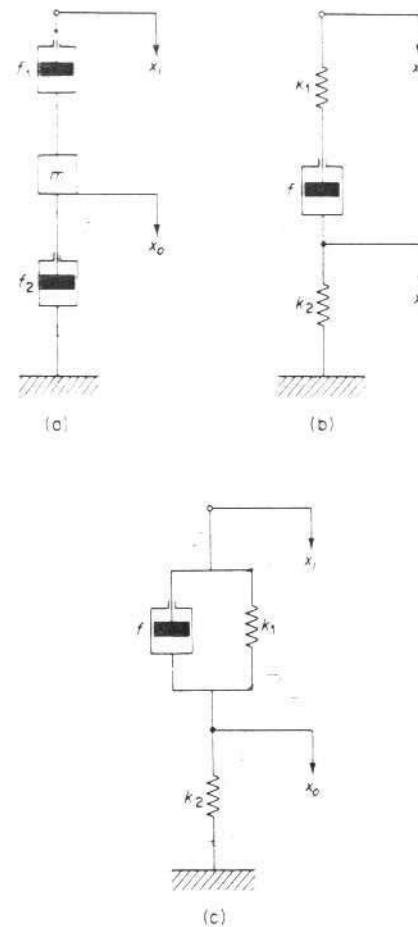


Fig. 4.56 Sistemas mecânicos.

**Problema B.4.3** Obtenha as funções de transferência dos sistemas indicados nas Figs. 4.57(a), (b) e (c).

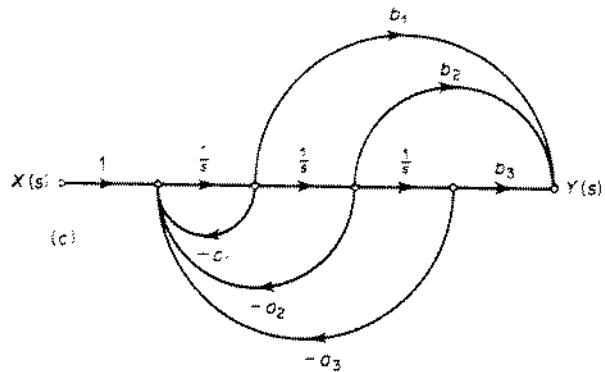
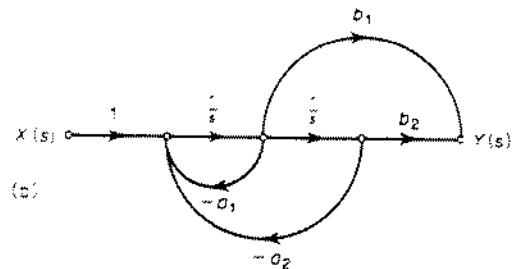
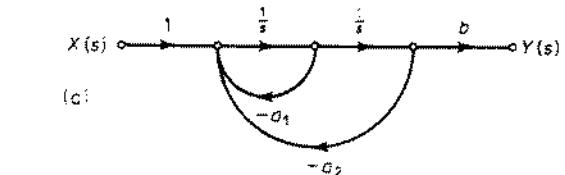


Fig. 4.57 Gráfico de fluxo de sinal de sistemas.

**Problema B.4.4** Mostre que os sistemas indicados nas Figs. 4.58(a) e (b) são sistemas análogos. (Mostre que as funções de transferência dos dois sistemas possuem a mesma forma.)

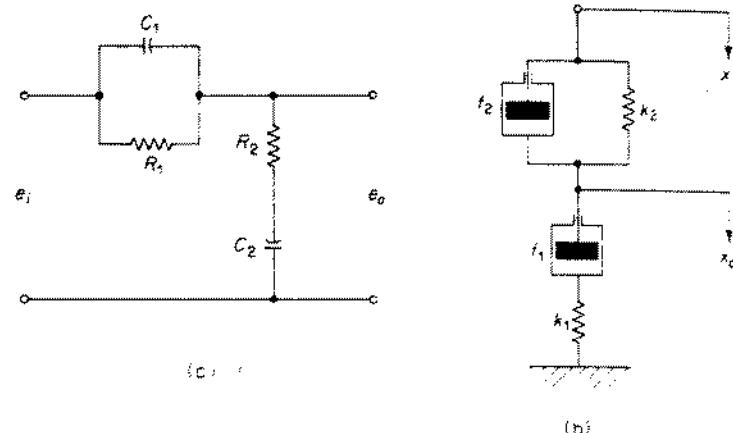


Fig. 4.58 (a) Sistema elétrico; (b) análogo mecânico do sistema elétrico.

**Problema B.4.5** Deduza a função de transferência da rede elétrica mostrada na Fig. 4.59. Desenhe um diagrama esquemático de uma rede mecânica equivalente.

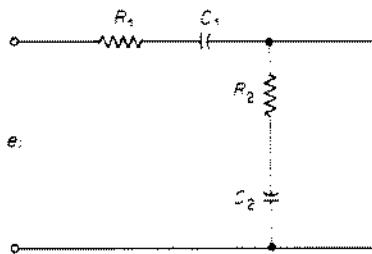


Fig. 4.59 Rede elétrica.

**Problema B.4.6** Deduza a função de transferência da rede mecânica indicada na Fig. 4.60. Desenhe um diagrama esquemático de uma rede elétrica equivalente.

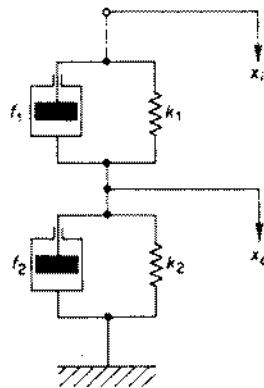


Fig. 4.60 Rede mecânica.

**Problema B.4.7** Obtenha a função de transferência  $\Theta(s)/E_A s$  do motor c.c. controlado por campo indicado na Fig. 4.61. No sistema, suponha que  $J = 0.5 \text{ lb-ft-s}^2$ ,  $f = 0.2 \text{ lb-ft/rad/s}$ , e  $K_t = \text{constante de torque do motor} = 27.4 \text{ lb-ft/amp}$ .

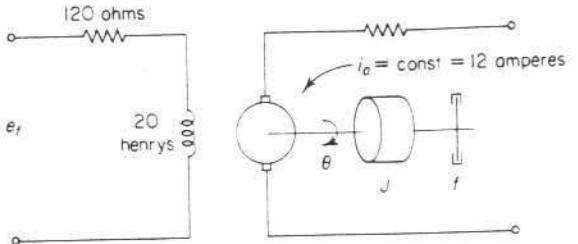


Fig. 4.61 Motor c.c. controlado por campo.

**Problema B.4.8** Desenhe um diagrama de blocos do sistema de controle indicado na Fig. 4.62. Suponha que as funções de transferência do detector de erro *synchro* e do amplificador sejam constantes ( $K_1$  e  $K_2$ , respectivamente) e a função de transferência do motor mais carga seja

$$C(s) = \frac{K_3}{s(Ts + 1)}$$

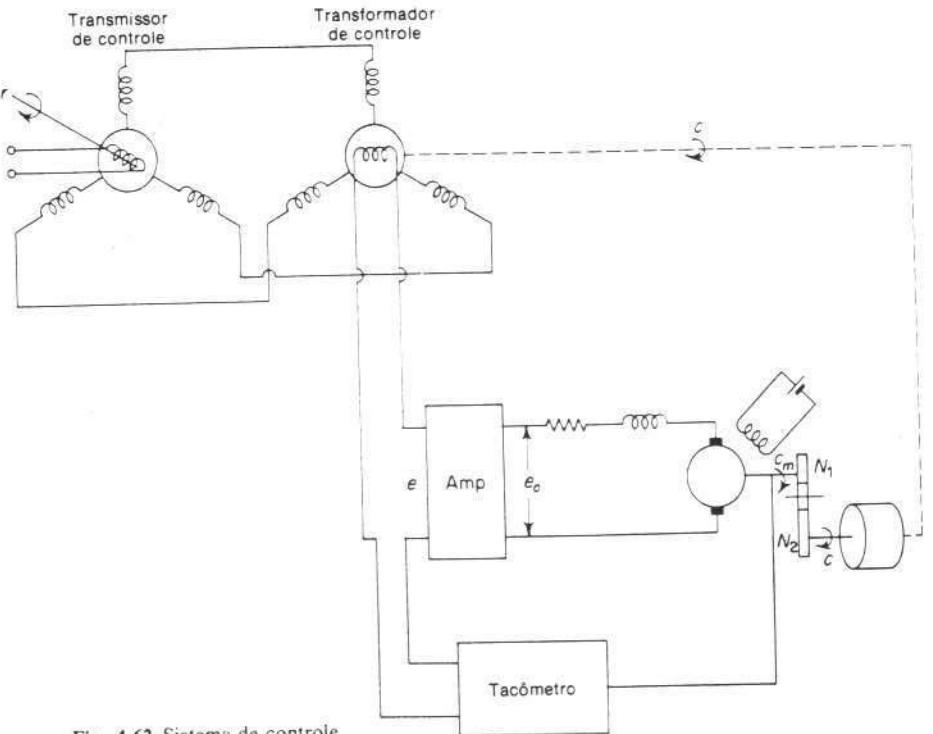


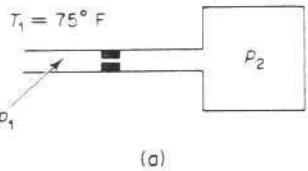
Fig. 4.62 Sistema de controle.

O coeficiente de realimentação de velocidade é  $K_4$ . A relação de engrenagem é  $n = N_1/N_2 < 1$ .

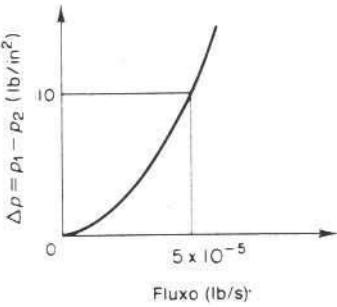
**Problema B.4.9** Considere o sistema de nível de líquido indicado na Fig. 4.27(a). Supondo que  $\bar{H} = 10 \text{ ft}$ ,  $\bar{Q} = 1 \text{ ft}^3/\text{s}$  e que a área da seção transversal do tanque é igual a  $5 \text{ ft}^2$ , obtenha a constante de tempo do sistema no ponto de operação ( $\bar{H}$ ,  $\bar{Q}$ ).

**Problema B.4.10** Obtenha a capacidade do recipiente de pressão que contém  $2.500 \text{ in}^3$  de ar a  $100^\circ\text{F}$  e  $34.7 \text{ psia}$ . Suponha que o processo de expansão é isotérmico.

**Problema B.4.11** Obtenha a função de transferência do sistema de pressão de ar indicado na Fig. 4.63(a). Suponha que  $p_1$  é a entrada e  $p_2$  é a saída. O volume do recipiente é  $5 \text{ in}^3$  e a curva  $\Delta p$  versus fluxo é fornecida na Fig. 4.63(b). A temperatura do ar é  $75^\circ\text{F}$  e supõe-se que o processo de expansão do ar é isotérmico. Suponha que a pressão de operação  $\Delta p = p_1 - p_2 \approx 10 \text{ lb/in}^2$ . (Use uma resistência média.)



(a)



(b)

Fig. 4.63 (a) Sistema de pressão; (b) curva  $\Delta p$  versus fluxo.

**Problema B.4.12** Obtenha a função de transferência do termômetro indicado na Fig. 4.64. Obtenha um análogo elétrico do termômetro.

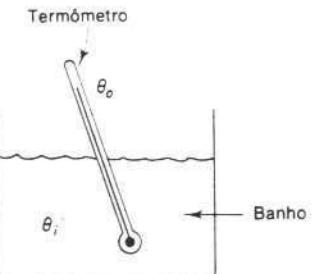


Fig. 4.64 Sistema termométrico.

**Problema B.4.13** Um termopar possui uma constante de tempo de 2 segundos. Um recipiente térmico possui uma constante de tempo de 30 segundos. Quando o termopar é inserido no recipiente, este dispositivo de medida de temperatura pode ser considerado um sistema com dupla capacidade.

Determine as constantes de tempo do sistema conjunto termopar-recipiente térmico. Suponha que o peso do termopar é 0,5 oz e o peso do recipiente térmico é 3,2 oz. Suponha também que os calores específicos do termopar e do recipiente térmico sejam os mesmos.

**Problema B.4.14** A Fig. 4.65 representa um diagrama de blocos de um sistema de controle de velocidade de uma máquina. A velocidade é medida por um conjunto de volantes. Desenhe um diagrama de fluxo de sinal para este sistema.

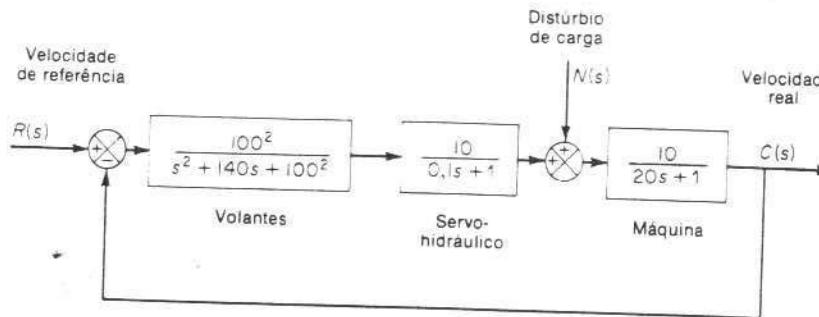


Fig. 4.65 Diagrama de blocos de um sistema de controle de velocidade de máquina.

# 5

# Ações de Controle Básicas e Controles Automáticos Industriais

## 5.1 INTRODUÇÃO

Um controlador automático compara o valor real da saída do processo com o valor desejado, determina o desvio, e produz um sinal de controle que reduz o desvio a um valor nulo ou muito pequeno. A maneira pela qual o controlador automático produz o sinal de controle é denominada *ação de controle*.

Neste capítulo, apresentaremos as ações de controle básicas comumente utilizadas em controladores automáticos industriais. Inicialmente introduziremos o princípio de operação de controladores automáticos e os métodos para geração de vários sinais de controle, tais como o uso da derivada e da integral do sinal erro. Posteriormente discutiremos os efeitos de modos de controle particulares no desempenho do sistema. Então, daremos uma breve discussão de métodos para reduzir os efeitos de distúrbios externos no desempenho do sistema. Finalmente, introduziremos amplificadores fluidicos, apresentaremos princípios básicos da teoria de sistemas com fluidos e discutiremos aplicações de dispositivos que operam com fluidos.

**Classificação de controladores automáticos industriais.** Os controladores automáticos industriais podem ser classificados de acordo com a ação de controle como

1. controladores de duas posições ou liga-desliga (*on-off*)
2. controladores proporcionais
3. controladores do tipo integral
4. controladores do tipo proporcional-mais-integral
5. controladores do tipo proporcional-mais-derivativo
6. controladores do tipo proporcional-mais-derivativo-mais-integral

A maioria dos controladores automáticos industriais utilizam a eletricidade ou fluido pressurizado, tal como óleo ou ar, como fontes de potência. Os controladores automáticos também podem ser classificados de acordo com o tipo de potência empregado na operação, tais como controladores pneumáticos, controladores hidráulicos ou controladores eletrônicos. Qual dos tipos de controlador utilizar deve ser decidido pela natureza do processo e condições de operação, incluindo considerações como segurança, custo, disponibilidade, precisão, confiabilidade, peso e dimensão.

**Elementos de controladores automáticos industriais.** Um controlador automático deve detectar o sinal erro atuante, que é normalmente de baixo nível de potência, e amplificá-lo a um nível suficientemente alto. Portanto, é necessário um amplificador. A saída do controlador automático é ligada a um dispositivo de potência, tal como um motor ou válvula pneumática, um motor hidráulico ou um motor elétrico.

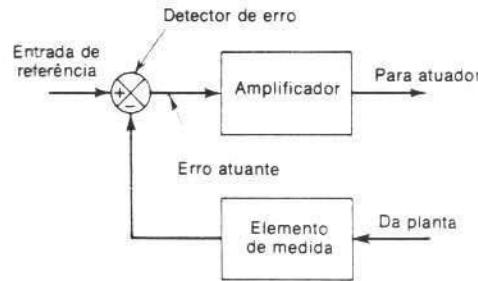


Fig. 5.1 Diagrama de blocos de um controlador automático industrial e elemento de medida.

A Fig. 5.1 mostra um diagrama de blocos de um controlador automático industrial conjuntamente com um elemento de medida. O controlador consiste em um detector de erro e amplificador. O elemento de medida é um dispositivo que converte a variável de saída em uma outra variável conveniente, tal como um deslocamento, pressão ou sinal elétrico que pode ser usado para comparar a saída em relação ao sinal de entrada de referência. Este elemento é o ramo de realimentação do sistema em malha-fechada. O ponto de ajuste do controlador deve ser convertido em uma entrada de referência com as mesmas unidades do sinal de realimentação na saída do elemento de medida. O amplificador amplifica a potência do sinal erro atuante, o qual por sua vez opera o atuador. (Na maioria das vezes, são usados um amplificador junto com um circuito de realimentação conveniente para operar o sinal erro atuante por amplificação e algumas vezes por diferenciação e/ou

integração a fim de produzir um melhor sinal de controle.) O atuador é um elemento que altera a entrada para o processo de acordo com o sinal de controle, de modo que o sinal realimentado possa ser comparado com o sinal de entrada de referência.

**Controladores auto-operados.** Em muitos controladores automáticos industriais são utilizadas unidades separadas para o elemento de medida e para o atuador. Em uma forma mais simples, entretanto, tal como em um controlador auto-operado, estes elementos são montados em uma única unidade. Controladores auto-operados utilizam a potência desenvolvida pelo elemento de medida e são muito simples e baratos. Um exemplo de um controlador auto-operado é mostrado na Fig. 5.2. O ponto de ajuste é determinado pelo ajuste da força na mola. A pressão controlada é medida pelo diafragma. O sinal erro atuante é a força atuante líquida no diafragma. Sua posição determina a abertura da válvula.

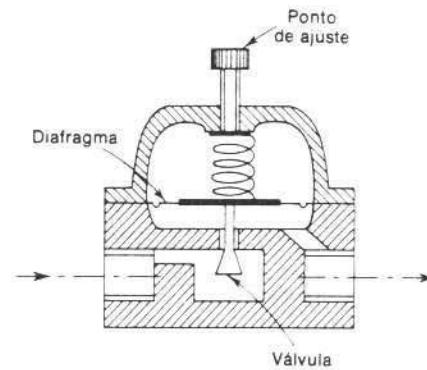


Fig. 5.2 Controlador auto-operado.

A operação do controlador auto-operado é a seguinte: Suponha que a pressão de saída é menor do que a pressão de referência, determinada pelo ponto de ajuste. Então, a força da mola para baixo é maior do que a força de pressão para cima, resultando em um movimento para baixo do diafragma. Isto acarreta um aumento da taxa de fluxo e aumento da pressão de saída. Quando a força de pressão para cima é igual à força da mola para baixo, a válvula permanece estacionária e a taxa de fluxo é constante. Inversamente, se a pressão de saída é maior do que a pressão de referência, a abertura da válvula torna-se menor e reduz a taxa de fluxo através da abertura da válvula. Este controlador auto-operado é muito usado para controle de pressão de água e gás. Neste controlador, a taxa de fluxo através da abertura da válvula é aproximadamente proporcional ao sinal erro atuante.

**Ações de controle.** As seis ações de controle básicas seguintes são muito comuns entre os controladores automáticos industriais: duas posições ou *on-off*, proporcional, integral, proporcional-mais-integral, proporcional-mais-derivativa e proporcional-mais-derivativa-mais-integral. Estas seis ações de controle serão discutidas neste capítulo. Note que é necessário um entendimento das características básicas das várias ações para que o engenheiro de controle possa selecionar a mais conveniente em sua particular aplicação.

**Ação de controle de duas posições ou liga-desliga (on-off).** Em um sistema de controle de duas posições, o elemento atuante possui apenas duas posições fixas que são, em muitos casos, simplesmente ligado e desligado (do inglês, *on-off*). O controle de duas posições é relativamente simples e barato e, por esta razão, extremamente utilizado tanto em sistemas de controle industriais como domésticos.

Considere o sinal de saída do controlador  $m(t)$  e o sinal erro atuante  $e(t)$ . Em um controle de duas posições, o sinal  $m(t)$  permanece ou em um valor máximo ou em um valor mínimo, dependendo de o sinal erro atuante ser positivo ou negativo, de modo que

$$m(t) = M_1 \quad \text{para } e(t) > 0 \\ = M_2 \quad \text{para } e(t) < 0$$

onde  $M_1$  e  $M_2$  são constantes. O valor mínimo  $M_2$  usualmente ou é zero ou  $-M_1$ . Os controladores de duas posições geralmente são dispositivos elétricos, e uma válvula operada por solenóide elétrico é extensivamente usada nestes controladores. Controladores proporcionais pneumáticos com ganhos muito altos atuam como controladores de duas posições e são muitas vezes denominados controladores de duas posições pneumáticos.

As Figs. 5.3(a) e (b) mostram os diagramas de blocos para controladores de duas posições. O intervalo através do qual o sinal erro atuante deve mover-se antes de ocorrer o chaveamento é denominado intervalo diferencial. Um intervalo (*gap*) diferencial é indicado na Fig. 5.3(b). Este intervalo diferencial faz com que a saída

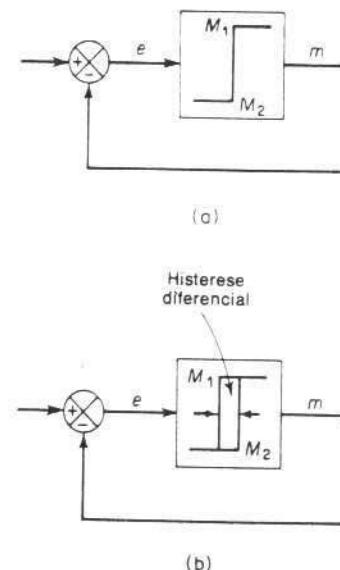


Fig. 5.3 (a) Diagrama de blocos de um controlador liga-desliga; (b) diagrama de blocos de um controlador liga-desliga com histerese diferencial.

do controlador  $m(t)$  mantenha seu valor presente até que o sinal erro atuante tenha-se movido ligeiramente além do valor zero. Em alguns casos, o intervalo diferencial é um resultado de fricção e perda de movimento não intencionalmente introduzido no sistema; entretanto, normalmente é intencionalmente colocado de modo a prevenir uma operação frequente demais do mecanismo *on-off*.

Considere o sistema de controle de nível de líquido indicado na Fig. 5.4. Com o controle de duas posições, a válvula ou está aberta ou está fechada. Consequentemente a taxa de fluxo de entrada de água ou é uma constante positiva ou é zero. Conforme indicado na Fig. 5.5, o sinal de saída move-se continuamente entre os dois limites exigidos de modo a fazer com que o elemento atuante mova-se de uma posição fixa para outra. Note que a curva de saída segue uma de duas curvas exponenciais, uma correspondendo à curva para encher e a outra correspondendo à curva para esvaziar. Esta oscilação da saída entre dois limites é uma característica de resposta típica de um sistema sob controle de duas posições.

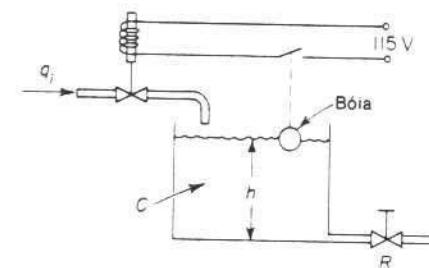


Fig. 5.4 Sistema de controle de nível de líquido.

Da Fig. 5.5, verificamos que a amplitude da oscilação de saída pode ser reduzida diminuindo-se o intervalo diferencial. Isto, entretanto, aumenta o número de operações da chave, ligando-a e desligando-a por minuto, e reduz a vida útil do componente. O tamanho do intervalo diferencial deve ser determinado a partir de considerações relativas à precisão exigida e à vida do componente. Análises posteriores de sistemas de controle com controladores de duas posições são deixadas para o Cap. 11.

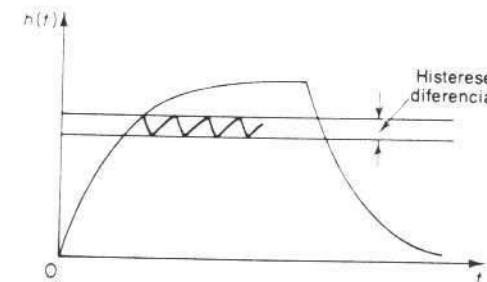


Fig. 5.5 Curva de nível  $h(t)$  versus  $t$  para o sistema indicado na Fig. 5.4.

**Ação de controle proporcional.** Para um controlador com ação de controle proporcional, a relação entre a saída do controlador  $m(t)$  e o sinal erro atuante  $e(t)$  é

$$m(t) = K_p e(t)$$

ou, em transformada de Laplace,

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p$$

onde  $K_p$  é denominado sensibilidade proporcional ou ganho.

Independentemente do mecanismo real, ou da forma da potência de operação, o controlador proporcional é essencialmente um amplificador com um ganho ajustável. Um diagrama de blocos deste controlador é mostrado na Fig. 5.6.

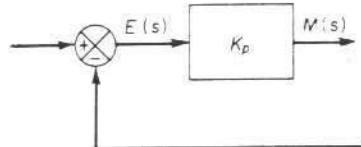


Fig. 5.6 Diagrama de blocos de um controlador proporcional.

**Ação de controle integral.** Em um controlador com a ação de controle integral, o valor da saída do controlador  $m(t)$  é variado em uma taxa proporcional ao sinal erro atuante  $e(t)$ . Isto é,

$$\frac{dm(t)}{dt} = K_i e(t)$$

ou

$$m(t) = K_i \int_0^t e(t) dt$$

onde  $K_i$  é uma constante ajustável. A função de transferência do controlador integral é

$$\frac{M(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

Se o valor de  $e(t)$  é dobrado, então o valor de  $m(t)$  varia duas vezes mais rápido. Para erro atuante nulo, o valor de  $m(t)$  permanece estacionário. A ação de controle integral é muitas vezes denominada controle de restabelecimento (*reset*). A Fig. 5.7 mostra um diagrama de blocos deste tipo de controlador.

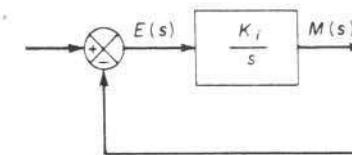


Fig. 5.7 Diagrama de blocos de um controlador integral.

**Ação de controle proporcional-mais-integral.** A ação de controle de um controlador proporcional-mais-integral é definida pela seguinte equação:

$$m(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$$

ou a função de transferência do controlador é

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

onde  $K_p$  representa a sensibilidade proporcional ou ganho e  $T_i$  representa o tempo integral. Tanto  $K_p$  como  $T_i$  são ajustáveis. O tempo integral ajusta a ação de controle integral, enquanto uma mudança no valor de  $K_p$  afeta tanto a parte proporcional como a parte integral da ação de controle. O inverso do tempo integral

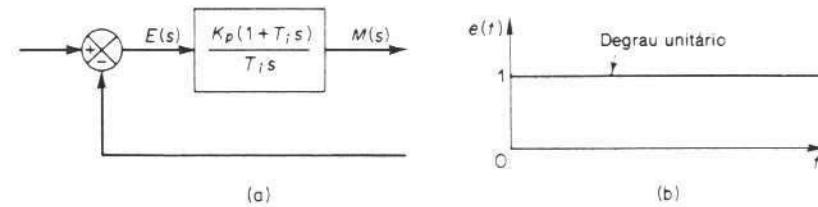
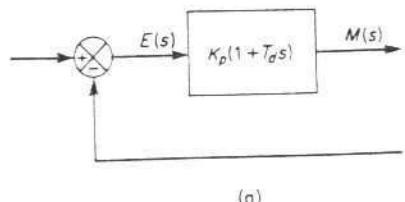
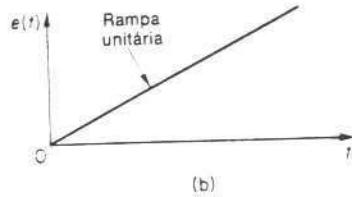


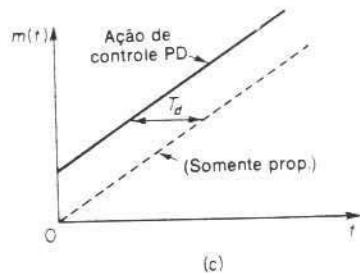
Fig. 5.8 (a) Diagrama de blocos de um controlador proporcional-mais-integral; (b) e (c) diagramas indicando a entrada com degrau unitário e a saída do controlador.



(a)



(b)



(c)

**Fig. 5.9** (a) Diagrama de blocos de um controlador proporcional-mais-derivativo; (b) e (c) diagramas indicando a entrada em rampa unitária e a saída do controlador.

$T_i$  é denominado taxa de restabelecimento (*reset*). A taxa de restabelecimento é o número de vezes por minuto que a parte proporcional da ação de controle é duplicada. A taxa de restabelecimento é medida em termos de repetições por minuto. A Fig. 5.8(a) mostra um diagrama de blocos de um controlador proporcional-mais-integral. Se o sinal erro atuante  $e(t)$  é uma função degrau unitário, como mostrado na Fig. 5.8(b), então a saída do controlador  $m(t)$  é a indicada na Fig. 5.8(c).

**Ação de controle proporcional-mais-derivativa.** A ação de controle de um controlador proporcional-mais-derivativo é definida pela seguinte equação:

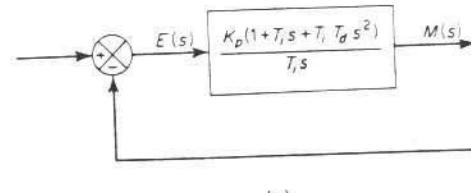
$$m(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

e a função de transferência é

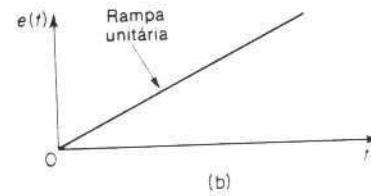
$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s)$$

onde  $K_p$  representa a sensibilidade proporcional e  $T_d$  representa o tempo derivativo. Tanto  $K_p$  como  $T_d$  são ajustáveis. A ação de controle derivativa, algumas vezes denominada controle de taxa, é onde a magnitude da saída do controlador é proporcional à taxa de variação do sinal erro atuante. O tempo derivativo  $T_d$  é o intervalo de tempo pelo qual a ação de taxa avança o efeito da ação de controle proporcional. A Fig. 5.9(a) mostra um diagrama de blocos de um controlador proporcional-mais-derivativo. Se o sinal erro atuante  $e(t)$  é uma função rampa unitária conforme mostrado na Fig. 5.9(b), então a saída do controlador  $m(t)$  é a indicada na Fig. 5.9(c). Como pode ser visto da Fig. 5.9(c), a ação de controle derivativa tem um caráter antecipatório. De fato, entretanto, a ação de controle derivativa nunca pode antecipar uma ação que ainda não ocorreu.

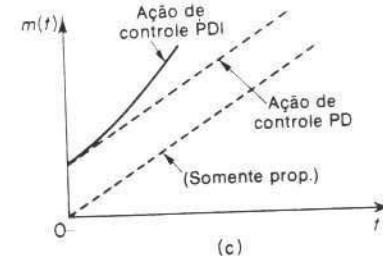
Enquanto a ação de controle derivativa possui a vantagem de ser antecipatória, tem as desvantagens de amplificar os sinais de ruído e causar um efeito de saturação no atuador.



(a)



(b)



(c)

**Fig. 5.10** (a) Diagrama de blocos de um controlador proporcional-mais-derivativo-mais-integral; (b) e (c) diagramas indicando a entrada em rampa unitária e a saída do controlador.

Note que a ação de controle derivativa nunca pode ser usada sozinha porque esta ação somente é efetiva durante os intervalos de tempo correspondentes a transitiórios.

**Ação de controle proporcional-mais-derivativa-mais-integral.** A combinação da ação de controle proporcional, ação de controle derivativa e ação de controle integral é denominada ação de controle proporcional-mais-derivativa-mais-integral. Esta ação combinada possui as vantagens de cada uma das três ações de controle individuais. A equação de um controlador com esta ação combinada é dada por

$$m(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$$

ou a função de transferência é

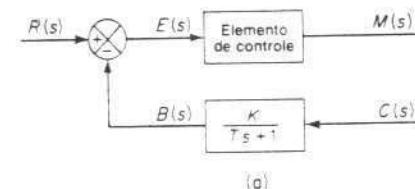
$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)$$

onde  $K_p$  representa a sensibilidade proporcional,  $T_d$  representa o tempo derivativo e  $T_i$  representa o tempo integral. O diagrama de blocos de um controlador proporcional-mais-derivativo-mais-integral é mostrado na Fig. 5.10(a). Se  $e(t)$  é uma função rampa unitária conforme mostrado na Fig. 5.10(b), então a saída do controlador  $m(t)$  é a indicada na Fig. 5.10(c).

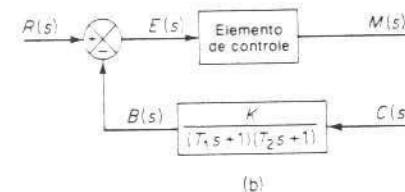
**Efeitos do elemento de medida no desempenho do sistema.** Desde que as características estática e dinâmica do elemento de medida afetam a indicação do valor real da variável de saída, o elemento de medida representa um papel importante na determinação do desempenho global do sistema de controle. O elemento de medida normalmente determina a função de transferência no ramo de realimentação. Se as constantes de tempo do elemento de medida são suficientemente pequenas, comparadas com outras constantes de tempo no sistema de controle, a função de transferência do elemento de medida simplesmente torna-se uma constante. As Figs. 5.11(a), (b) e (c) mostram diagramas de blocos de controladores automáticos contendo um elemento de medida de primeira-ordem, de segunda-ordem sobre-ameortecido e de segunda-ordem subameortecido, respectivamente. A resposta de um elemento de medida térmico é normalmente do tipo de segunda-ordem sobre-ameortecido.

**Diagramas de blocos de sistemas de controle automático.** Um diagrama de bloco de um sistema de controle automático pode ser obtido pela ligação da planta ao controlador automático, como mostrado na Fig. 5.12. A realimentação do sinal de saída é obtida pelo elemento de medida. A equação relacionando a variável de saída  $C(s)$  com a entrada de referência  $R(s)$  e a variável de distúrbio  $N(s)$  pode ser obtida como segue:

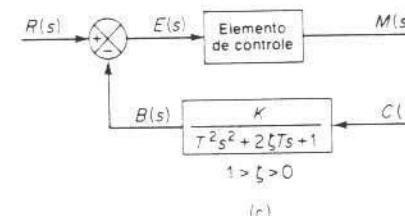
$$C(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s) + \frac{G_3(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$



(a)



(b)



(c)

Fig. 5.11 Diagramas de blocos de controladores automáticos com (a) elemento de medida de primeira-ordem; (b) elemento de medida de segunda-ordem sobreameortecido; (c) elemento de medida de segunda-ordem subameortecido.

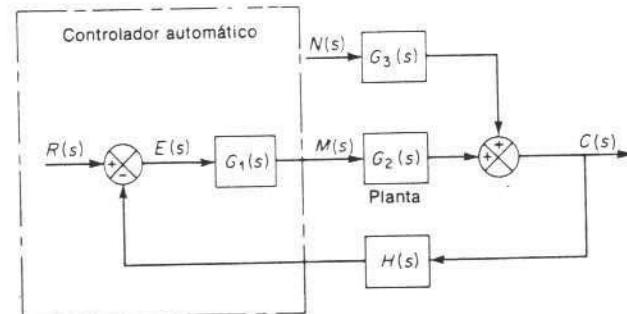


Fig. 5.12 Diagrama de blocos de um sistema de controle.

Nos sistemas de controle de processos, usualmente estamos interessados na resposta ao distúrbio  $N(s)$ . Em servomecanismo, entretanto, a resposta a uma entrada de referência  $R(s)$  é de maior interesse. Iremos apresentar a análise da resposta do sistema em relação a variações nos distúrbios e na carga na Seção 5.4. A resposta do sistema em relação a variações na entrada de referência será estudada em detalhes no Cap. 6.

## 5.2 CONTROLADORES PROPORCIONAIS

Nesta seção, ilustraremos o fato de que controladores proporcionais utilizam o princípio da realimentação negativa neles próprios. Forneceremos uma discussão detalhada do princípio pelo qual operam os controladores proporcionais, considerando um controlador pneumático. Mostraremos então que o mesmo princípio aplica-se a controladores hidráulicos e eletrônicos. Através desta discussão, daremos maior ênfase aos princípios fundamentais do que a detalhes da operação de mecanismos reais.

**Sistemas pneumáticos.** Controladores pneumáticos de baixa pressão têm sido desenvolvidos para sistemas de controle industriais e extensivamente usados em processos industriais. As razões para o amplo uso de controladores pneumáticos são, principalmente, suas características a prova de explosão, simplicidade e facilidade de manutenção.

**Amplificadores pneumáticos bocal-haste (nozzle-flapper).** Um diagrama esquemático de um amplificador pneumático bocal-haste (*nozzle-flapper*) é indicado na Fig. 5.13(a). A fonte de potência para este amplificador é uma fonte de ar a pressão constante. O amplificador converte pequenas variações na posição da haste em grandes variações na pressão do bocal. Portanto uma grande potência de saída pode ser controlada através de uma pequena potência necessária para posicionar a haste (*flapper*).

Na Fig. 5.13(a) o ar pressurizado é introduzido através de um orifício, e o ar éjetado do bocal (*nozzle*) para a haste. Usualmente a pressão de alimentação  $P_s$  para este controlador é de 20 psig. O diâmetro do orifício é da ordem de 0.25 mm e o do bocal é da ordem de 0.4 mm. O diâmetro do bocal deve ser maior que o do orifício, a fim de que o amplificador funcione apropriadamente. A haste é posicionada contra a abertura do bocal e a pressão no bocal  $P_b$  é controlada pela distância  $X$  haste-bocal. Conforme a haste se aproxima do bocal, a oposição para o fluxo de ar através do bocal aumenta, resultando em um aumento da pressão  $P_b$ . Se o bocal for completamente fechado pela haste, a pressão  $P_b$  do bocal é igual à pressão de suprimento  $P_s$ . Se a haste for distanciada do bocal, de modo que a distância bocal-haste seja grande (da ordem de 0.25 mm), então não há praticamente restrição ao fluxo e a pressão  $P_b$  no bocal possui o seu valor mínimo que depende do dispositivo haste-bocal utilizado. (A mínima pressão possível será a pressão ambiente  $P_a$ .)

Notar que, como o jato de ar empurra a haste, é necessário construir o diâmetro do bocal tão pequeno quanto possível.

Uma curva típica relacionando a pressão  $P_b$  do bocal com a distância haste-bocal  $X$  é mostrada na Fig. 5.13(b). A parte descendente, quase linear, da curva é utilizada na operação real do amplificador haste-bocal. Como o intervalo de deslocamentos da haste é restrito a valores muito pequenos, a variação na pressão de saída também é pequena, apesar de a curva aparentar ser muito íngreme.

O amplificador haste-bocal converte deslocamento em um sinal de pressão. Desde que os sistemas de controle de processo industrial exigem grandes potências de saída para operarem grandes válvulas atuantes pneumáticas, usualmente a

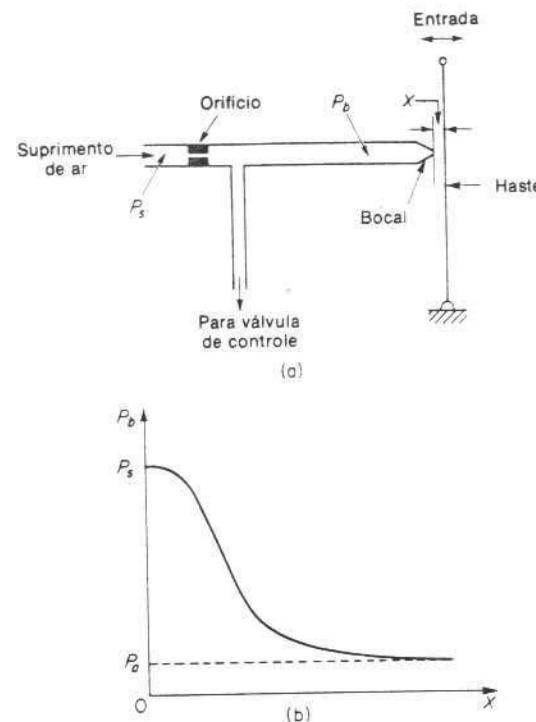


Fig. 5.13 (a) Diagrama esquemático de um amplificador pneumático bocal-haste; (b) curva característica relacionando a pressão no bocal e a distância bocal-haste.

amplificação de potência do amplificador haste-bocal não é suficiente. Conseqüentemente, quase sempre é empregado um relé pneumático como amplificador de potência em conexão com o amplificador haste-bocal.

**Relés pneumáticos.** Em um controlador pneumático prático, um amplificador haste-bocal atua como primeiro-estágio amplificador e um relé pneumático como o segundo-estágio amplificador. O relé pneumático é capaz de operar com uma grande quantidade de fluxo de ar.

Um diagrama esquemático de um relé pneumático é indicado na Fig. 5.14(a). Conforme a pressão no bocal  $P_b$  aumenta, a válvula de bola é forçada para a posição inferior, diminuindo a pressão de controle  $P_c$ . Um relé deste tipo é denominado relé de ação reversa.

Quando a válvula de bola está na posição superior, a abertura atmosférica é fechada e a pressão de controle  $P_c$  torna-se igual à pressão de suprimento  $P_s$ . Quando a válvula de bola está na parte mais inferior de sua posição, ela fecha completamente o suprimento de ar e a pressão de controle  $P_c$  cai para a pressão atmosférica. A pressão de controle  $P_c$  pode então ser variada desde o número 0 psig até a pressão total de suprimento, usualmente 20 psig.

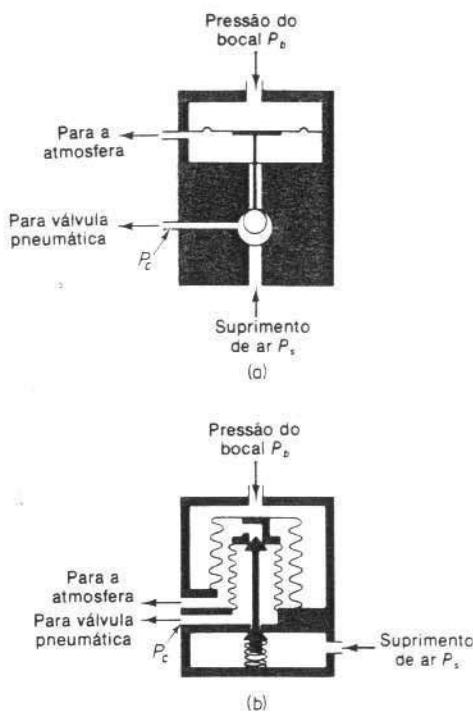


Fig. 5.14 (a) Diagrama esquemático de um relé tipo-sangria; (b) diagrama esquemático de um relé tipo sem sangria.

O movimento total da válvula de bola entre as posições mais inferior e mais superior é muito pequeno (da ordem de 0,25 mm). Em todas as posições da válvula de bola, exceto na posição mais superior, o ar continua a escapar para a atmosfera, mesmo após ser atingida a condição de equilíbrio entre a pressão do bocal e a pressão de controle. Por este motivo o relé mostrado na Fig. 5.14(a) é denominado um relé tipo sangria ("escape").

Há um outro tipo de relé, o tipo sem sangria. Neste tipo o ar deixa de escapar quando a condição de equilíbrio é atingida e, portanto, não há perda de ar pressurizado na operação em estado estacionário. Note, entretanto, que o relé tipo sem sangria deve possuir uma saliência para libertar a pressão de controle  $P_c$  da válvula atuante pneumática. Um diagrama esquemático de um relé tipo sem sangria é mostrado na Fig. 5.14(b).

Em qualquer tipo de relé o suprimento de ar é controlado por uma válvula, que por sua vez é controlada pela pressão do bocal. Portanto, a pressão do bocal é convertida na pressão de controle com amplificação de potência.

Desde que a pressão de controle  $P_c$  varia quase instantaneamente com variações na pressão do bocal  $P_b$ , a constante de tempo do relé pneumático é desprezível comparada com as outras constantes de tempo maiores do controlador pneumático e da planta.

**Controladores proporcionais pneumáticos (tipo força-distância).** Dois tipos de controladores pneumáticos, um denominado do tipo força-distância e outro do tipo força-balança, são extensivamente utilizados na indústria. Indiferentemente de quão distintos os controladores pneumáticos industriais possam parecer, um estudo cuidadoso mostrará a grande similaridade nas funções do circuito pneumático. Neste livro consideraremos apenas os controladores pneumáticos tipo força-distância.

A Fig. 5.15(a) mostra um diagrama esquemático deste tipo de controlador proporcional. O amplificador haste-bocal constitui o primeiro estágio amplificador, e a pressão do bocal é controlada pela distância haste-bocal. O amplificador tipo relé constitui o segundo estágio amplificador. A pressão do bocal determina a posição da válvula de mola para o segundo estágio amplificador, que é capaz de operar com uma grande quantidade de fluxo de ar.

Na maioria dos controladores pneumáticos, é empregado algum tipo de realimentação pneumática. A realimentação da saída pneumática reduz a quantidade de movimento real da haste. Ao invés de montar a haste em um ponto fixo, como indicado na Fig. 5.15(b), ela é normalmente pivotada no fole de realimentação, como indicado na Fig. 5.15(c). A quantidade de realimentação pode ser regulada pela introdução de uma ligação variável entre o fole de realimentação e o ponto de conexão da haste. A haste torna-se então um elo flutuante. Ela pode mover-se tanto por ação do sinal erro como pelo sinal de realimentação.

A operação do controlador indicado na Fig. 5.15(a) é a seguinte: O sinal de entrada para os dois estágios amplificadores pneumáticos é o sinal erro atuante. Um aumento no sinal erro atuante move a haste para a direita. Esta, por sua vez, diminui a pressão no bocal, e o fole  $B$  se contraírá, resultando em um movimento para cima da válvula de bola. Isto acarretará um fluxo maior para a válvula pneumática e a pressão de controle aumentará. Este aumento causa uma expansão do fole  $F$  e move a haste para a esquerda, fechando o bocal.

O deslocamento haste-bocal é muito pequeno devido a esta realimentação, mas a variação na pressão de controle pode ser grande. No caso em que o erro atuante decresce, a pressão no bocal aumenta e a válvula de bola move-se para baixo, resultando em um decréscimo no fluxo de suprimento para a válvula e um aumento na sangria para a atmosfera. Isto acarretará uma diminuição da pressão de controle.

É importante notar que o fole de realimentação moveria a haste de uma distância menor do que aquela causada apenas pelo sinal erro. Se estes dois movimentos fossem iguais, não resultaria uma ação de controle.

As equações para este controlador podem ser deduzidas como segue: Quando o erro atuante é nulo, ou  $e = 0$ , e existe um estado de equilíbrio com a distância bocal-haste igual a  $\bar{X}$ , o deslocamento do fole  $F$  é igual a  $\bar{Y}$ , o deslocamento do fole  $B$  igual a  $\bar{Z}$ , a pressão do bocal igual a  $\bar{P}_b$ , e a pressão de controle é igual a  $\bar{P}_c$ . Quando houver qualquer erro atuante, a distância haste-bocal, os deslocamentos dosfoles  $F$  e  $B$ , a pressão no bocal e a pressão de controle desviam de seus respectivos valores de equilíbrio. Consideremos estes desvios como sendo  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $p_b$ , e  $p_c$ , respectivamente. (O sentido positivo para cada variável de deslocamento é indicado por uma seta.)

Supondo que a relação entre a variação na pressão do bocal e a variação na distância haste-bocal seja linear, temos

$$p_b = -K_1 x \quad (5-1)$$

onde  $K_1$  é uma constante. Para o fole  $B$ ,

$$p_b = K_2 z \quad (5-2)$$

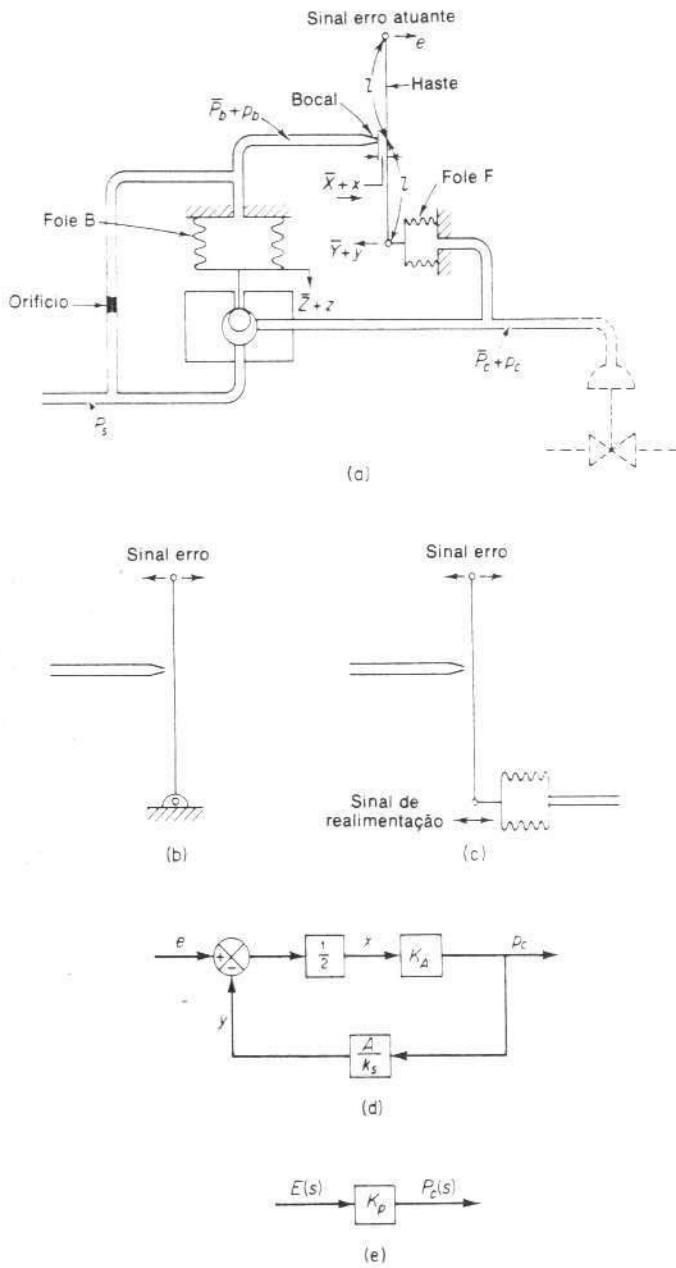


Fig. 5.15 (a) Diagrama esquemático de um controlador proporcional pneumático tipo força-distância; (b) haste montada em um ponto fixo; (c) haste montada no fole de realimentação; (d) diagrama de blocos do controlador; (e) diagrama de blocos simplificado para o controlador.

onde  $K_2$  é uma constante. A posição da válvula de bola que depende do deslocamento do fole  $B$  determina a pressão de controle. Se a válvula de bola for tal que a relação entre  $p_c$  e  $z$  seja linear, então

$$p_c = -K_3 z \quad (5-3)$$

onde  $K_3$  é uma constante. Das Eqs. (5.1), (5.2) e (5.3), obtemos

$$p_c = -\frac{K_3}{K_2} p_b = K_4 x \quad (5-4)$$

onde  $K_4 = K_1 K_3 / K_2$  é uma constante. Para o movimento da haste, temos

$$x = \frac{e - y}{2} \quad (5-5)$$

O fole  $F$  age como uma mola, e vale a seguinte equação:

$$A p_c = k_s y \quad (5-6)$$

onde  $A$  é a área efetiva do fole  $F$ , e  $k_s$  é a constante da mola equivalente ou a rigidez devida à ação do lado corrugado do fole.

Supondo que todas as variações nas variáveis estão dentro da faixa linear, podemos obter um diagrama de blocos para este sistema a partir das Eqs. (5.4), (5.5) e (5.6), como indicado na Fig. 5.15(d). Da Fig. 5.15(d), pode ser verificado claramente que o controlador pneumático mostrado na Fig. 5.15(a) é por si só um sistema realimentado. A função de transferência entre  $p_c$  e  $e$  é dada por

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{1}{2} K_4}{1 + \frac{K_4 A}{2 k_s}} = K_p \quad (5-7)$$

Um diagrama de blocos simplificado é mostrado na Fig. 5.15(e). Desde que  $p_c$  e  $e$  são proporcionais, o controlador pneumático indicado na Fig. 5.15(a) é denominado um controlador proporcional pneumático.

Note que desde que o valor de  $K_4 A / k_s$  é geralmente muito maior do que a unidade em controladores reais, a função de transferência dada pela Eq. (5.7) pode ser simplificada para resultar

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{1}{2} K_4}{\frac{K_4 A}{2 k_s}} = \frac{k_s}{A} \quad (5-8)$$

Como visto a partir das Eqs. (5.7) e (5.8), o ganho do controlador proporcional pneumático pode ser variado amplamente pelo ajuste da ligação conectando a haste. [A ligação conectando a haste não é indicada na Fig. 5.15(a).] Na maioria dos controladores proporcionais comerciais, existe um botão de ajuste, ou outro mecanismo para variar o ganho através do ajuste desta ligação.

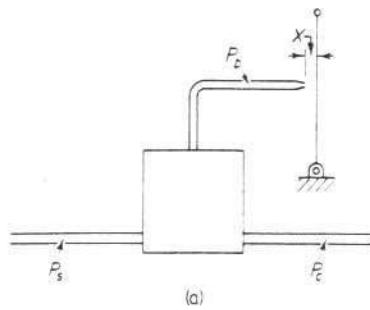


Fig. 5.16 (a) Controlador pneumático sem mecanismo de realimentação; (b) curvas  $P_b$  versus  $X$  e  $P_c$  versus  $X$ .

Como foi verificado anteriormente, o sinal erro atuante moveu a haste em um sentido e o fole de realimentação moveu a haste no sentido oposto, porém com um deslocamento menor. O efeito do fole de realimentação é, portanto, reduzir a sensibilidade do controlador. O princípio da realimentação é comumente usado para obter controladores de banda-proporcional ampla.

Os controladores pneumáticos que não possuem mecanismos de realimentação [o que significa que um extremo da haste é fixo, como indicado na Fig. 5.16(a)] possuem alta sensibilidade e são denominados controladores proporcionais de banda estreita ou controladores de duas posições. Neste tipo de controlador é exigido apenas um pequeno movimento entre o bocal e a haste a fim de obter-se uma variação completa desde a pressão de controle máxima até a mínima. As curvas relacionando  $P_b$  com  $X$  e  $P_c$  com  $X$  são mostradas na Fig. 5.16(b). Note que uma pequena variação em  $X$  pode acarretar uma grande variação em  $P_b$ , o que faz a válvula de bola estar completamente aberta ou completamente fechada.

**Válvulas atuantes pneumáticas.** Uma característica de controles pneumáticos é que eles empregam quase exclusivamente válvulas atuantes pneumáticas. Uma válvula atuante pneumática pode fornecer uma grande potência de saída. (Desde que um atuador pneumático requer uma grande potência na entrada para produzir uma grande potência na saída, é necessário que seja disponivel uma quantidade suficiente de ar pressurizado.) Na prática, as válvulas atuantes pneumáticas possuem características que podem ser não lineares; isto é, o fluxo pode não ser

diretamente proporcional à posição da haste da válvula, e também pode haver outros efeitos não lineares, tal como histerese.

Considere o diagrama esquemático de uma válvula atuante pneumática indicado na Fig. 5.17. Suponha que a área do diafragma é  $A$ . Suponha ainda que, quando o erro atuante é nulo, a pressão de controle é igual a  $\bar{P}_c$  e o deslocamento da válvula é igual a  $\bar{X}$ .

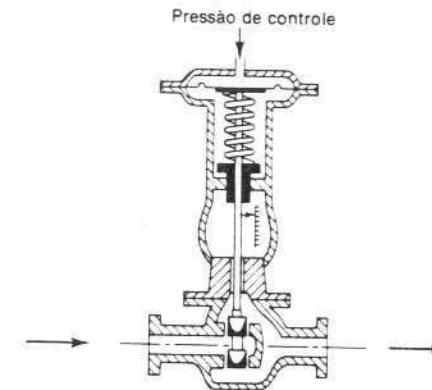


Fig. 5.17 Diagrama esquemático de uma válvula atuante pneumática.

Na análise seguinte, consideraremos pequenas variações nas variáveis e linearizaremos a válvula atuante pneumática. Vamos definir a pequena variação na pressão de controle e o correspondente deslocamento da válvula como sendo  $p_c$  ex., respectivamente. Desde que uma pequena variação na força de pressão pneumática aplicada ao diafragma reposiciona a carga, consistindo na mola, fricção-viscosa e massa, a equação de balanço de forças resulta

$$Ap_c = m\ddot{x} + f\dot{x} + kx \quad (5.9)$$

onde

$m$  = massa da válvula e haste da válvula

$f$  = coeficiente de fricção-viscosa

$k$  = constante da mola

Se a força devida à massa e a fricção-viscosa são desprezíveis, então a Eq. (5.9) pode ser simplificada para

$$Ap_c = kx$$

A função de transferência entre  $x$  e  $p_c$  torna-se

$$\frac{X(s)}{P_c(s)} = \frac{A}{k} = K_c$$

onde  $X(s) = \mathcal{L}[x]$  e  $P_c(s) = \mathcal{L}[p_c]$ . Se  $q_i$ , a variação no fluxo através da válvula atuante pneumática, for proporcional a  $x$ , a variação no deslocamento da haste da

válvula, então,

$$\frac{Q_i(s)}{X(s)} = K_q$$

onde  $Q_i(s) = \mathcal{L}[q_i]$  e  $K_q$  é uma constante. A função de transferência entre  $q_i$  e  $p_c$  torna-se

$$\frac{Q_i(s)}{P_c(s)} = K_c K_q = K_v$$

onde  $K_v$  é uma constante.

A pressão de controle típica para este tipo de válvula atuante pneumática é de 3 a 15 psig. O deslocamento da haste da válvula é limitado pelo golpe possível no diafragma que é de poucos centímetros. Se um golpe maior for necessário, pode ser empregada uma combinação pistão-mola.

Em válvulas atuantes pneumáticas, a força de fricção estática deve ser limitada a um valor baixo de modo a não resultar em histerese excessiva. Devido à compressibilidade do ar, a ação de controle não pode ser positiva; isto é, deve existir um erro na posição da válvula de haste. O uso de um posicionador de válvula acarreta melhorias no desempenho de uma válvula atuante pneumática.

Um diagrama esquemático de um posicionador de válvula é indicado na Fig. 5.18. O princípio de operação deste dispositivo é que, se a posição da válvula não corresponder à pressão de controle, então a válvula piloto operará até que a posição da válvula corresponda exatamente à pressão de controle.

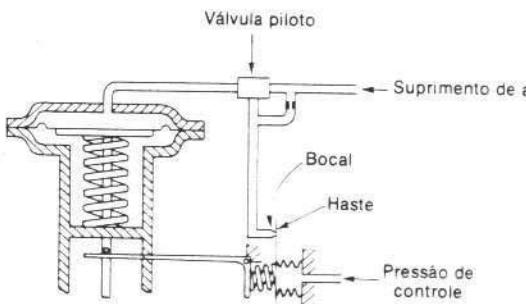


Fig. 5.18 Diagrama esquemático de um posicionador de válvula.

**Sistemas de controle de nível de líquido.** Considere o sistema de controle de nível de líquido indicado na Fig. 5.19. É desejado manter-se o nível de líquido em um valor constante, independentemente de variações na abertura da válvula de carga.

Suponhamos que o controlador seja do tipo proporcional, conforme mostrado na Fig. 5.15(a), e que a válvula de controle seja aquela mostrada na Fig. 5.17. Se o nível do líquido aumentar como resultado de uma variação na válvula de carga, a bóia move-se para cima, fazendo com que a haste mova-se mais próxima do contato com o bocal, aumentando a pressão do bocal. Desde que o relé é reversamente

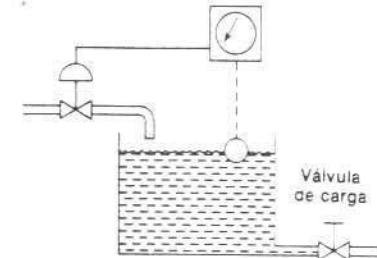


Fig. 5.19 Sistema de controle de nível de líquido.

atuante, resultará em uma redução na pressão de controle e causará um decréscimo na abertura da válvula atuante pneumática. Isto está no sentido apropriado para corrigir o nível crescente.

**Controle proporcional de um sistema de primeira ordem.** Considere o sistema de controle de nível de líquido indicado na Fig. 5.20(a). [O controlador é suposto um controlador proporcional do tipo indicado na Fig. 5.15(a).] Vamos supor que todas as variáveis  $r$ ,  $g_i$ ,  $h_i$ , e  $q_i$  são medidas em relação a seus valores de regime estacionário  $\bar{R}$ ,  $\bar{Q}_i$ ,  $\bar{H}_i$  e  $\bar{Q}_i$ . Suparemos também que as amplitudes das variáveis  $r$ ,  $q_i$ ,  $h_i$  e  $g_i$  sejam suficientemente pequenas de modo que o sistema possa ser aproximado por um modelo matemático linear, isto é, uma função de transferência.

Referindo-se à Seção 4.5, podemos obter a função de transferência do sistema de nível de líquido como

$$\frac{H_1(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

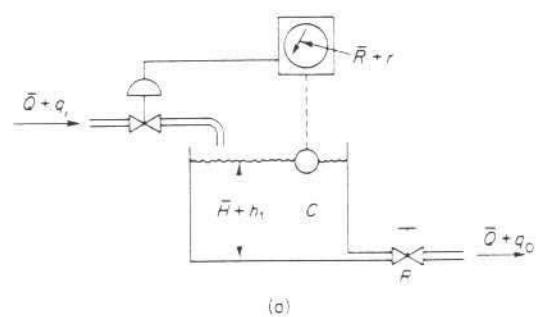
Desde que o controlador é um controlador proporcional, a variação no fluxo de entrada  $q_i$  é proporcional ao erro atuante  $e$  de modo que  $q_i = K_p K_v e$ , onde  $K_p$  é o ganho do controlador e  $K_v$  é o ganho da válvula de controle. Em termos das grandezas transformadas em Laplace,

$$Q_i(s) = K_p K_v E(s)$$

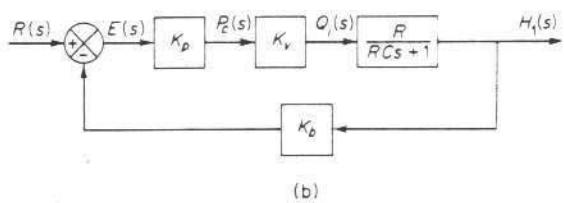
Um diagrama de blocos deste sistema é indicado na Fig. 5.20(b). Um diagrama de blocos simplificado é dado na Fig. 5.20(c), onde  $X(s) = (1/K_b) R(s)$ ,  $K = K_p K_v R K_b$  e  $T = RC$ .

A seguir investigaremos a resposta  $h_i(t)$  a uma variação na entrada de referência. Suparemos uma variação em degrau unitário em  $x(t)$ , onde  $x(t) = (1/K_b) r(t)$ . A função de transferência de malha-fechada entre  $H_1(s)$  e  $X(s)$  é dada por

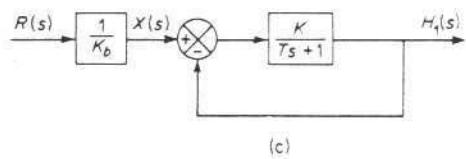
$$\frac{H_1(s)}{X(s)} = \frac{K}{Ts + 1 + K} \quad (5-10)$$



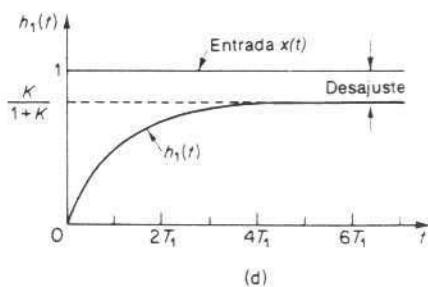
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 5.20 (a) Sistema de controle de nível de líquido; (b) diagrama de blocos; (c) diagramas de blocos simplificado; (d) curva  $h_1(t)$  versus  $t$ .

Desde que a transformada de Laplace da função degrau unitário é  $1/s$ , substituindo  $X(s) = 1/s$  na Eq. (5.10), resulta:

$$H_1(s) = \frac{K}{Ts + 1 + K} \frac{1}{s}$$

Expandindo  $H_1(s)$  em frações parciais, obtemos

$$H_1(s) = \frac{K}{1 + K} \frac{1}{s} - \frac{TK}{1 + K} \frac{1}{Ts + 1 + K} \quad (5.11)$$

Tomando as transformadas de Laplace inversas dos dois membros da Eq. (5.11), obtemos a seguinte solução temporal  $h_1(t)$ :

$$h_1(t) = \frac{K}{1 + K} (1 - e^{-t/T_1}) \quad (t \geq 0) \quad (5.12)$$

onde

$$T_1 = \frac{T}{1 + K}$$

A curva de resposta  $h_1(t)$  é indicada na Fig. 5.20(d). A partir da Eq. (5.12), note que a constante de tempo  $T_1$  do sistema de malha-fechada é diferente da constante de tempo  $T$  do bloco do ramo direto.

Da Eq. (5.12), verificamos que conforme  $t$  tende à infinito, o valor de  $h_1(t)$  tende a  $K/(1 + K)$ , ou

$$h_1(\infty) = \frac{K}{1 + K}$$

Desde que  $x(\infty) = 1$ , há um erro em regime estacionário de  $1/(1 + K)$ . Este erro é denominado desajuste (*offset*). O valor do desajuste torna-se menor conforme o ganho  $K$  se torna maior.

O desajuste é uma característica do controle proporcional de uma planta cuja função de transferência não possui um elemento integrante. (Obviamente, necessitamos de um erro não nulo de modo a possibilitar uma saída não nula.) Para eliminar este desajuste, devemos adicionar uma ação de controle integral. (Referir-se à Seção 5.3.)

**Controladores proporcionais pneumáticos (tipo força-balancão).** A Fig. 5.21 indica um diagrama esquemático de um controlador proporcional pneumático força-balancão. Controladores força-balancão são extensivamente usados na indústria. Estes controladores são muitas vezes denominados controladores de exaustão. O princípio básico de operação não difere daquele do controlador força-distância. A principal vantagem do controlador força-balancão é que ele elimina muitas perdas mecânicas e juntas por pivô, consequentemente reduzindo os efeitos de fricção.

A seguir, consideraremos o princípio do controlador força-balancão. No controlador indicado na Fig. 5.21, a pressão de entrada de referência  $P_r$  e a pressão de saída  $P_0$  são injetadas em grandes câmaras por diafragma. Note que um controlador

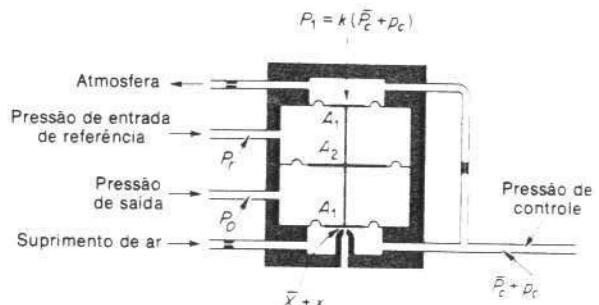


Fig. 5.21 Diagrama esquemático de um controlador pneumático proporcional com equilíbrio de força.

pneumático força-balança opera apenas com sinais de pressão. Portanto, é necessário converter a entrada de referência e a saída do sistema em sinais de pressão correspondentes.

Como no caso do controlador força-distância, este controlador emprega uma haste, bocal e orifícios. Na Fig. 5.21, a abertura perfurada com broca, na câmara de baixo, é o bocal. O diafragma exatamente acima do bocal atua como uma "haste".

A operação do controlador força-balança indicada na Fig. 5.21 pode ser sumariada como segue: 20 psig de ar de uma fonte de ar flui através de um orifício, causando uma pressão reduzida na câmara inferior. O ar nesta câmara escapa para a atmosfera através do bocal. O fluxo através do bocal depende tanto da abertura como da queda de pressão através dela. Um aumento na pressão de entrada de referência  $P_r$ , enquanto a pressão de saída  $P_0$  se mantém a mesma, faz o pino da válvula mover-se para baixo, diminuindo a abertura entre o bocal e o diafragma "haste". Isto acarreta um acréscimo na pressão de controle  $P_c$ . Seja

$$p_e = P_r - P_0$$

Se  $p_e = 0$ , há um estado de equilíbrio com a distância bocal-haste igual a  $\bar{X}$  e a pressão de controle igual a  $\bar{P}_c$ . Neste estado de equilíbrio,  $P_1 = \bar{P}_c(k)$  (onde  $k < 1$ ) e

$$\bar{X} = \alpha(\bar{P}_c A_1 - \bar{P}_c k A_1) \quad (5-13)$$

onde  $\alpha$  é uma constante.

Vamos supor que  $p_e \neq 0$  e definir pequenas variações na distância bocal-haste e pressão de controle como  $x$  e  $p_e$ , respectivamente. Obtemos então a seguinte equação:

$$\bar{X} + x = \alpha[(\bar{P}_c + p_e)A_1 - (\bar{P}_c + p_e)kA_1 - p_e(A_2 - A_1)] \quad (5-14)$$

Das Eqs. (5.13) e (5.14), obtemos

$$x = \alpha[p_e(1 - k)A_1 - p_e(A_2 - A_1)] \quad (5-15)$$

Neste ponto, devemos examinar a grandeza  $x$ . No projeto de controladores pneumáticos, a distância bocal-haste é muito pequena. Como  $x/\alpha$  é um termo de ordem superior em relação a  $p_e(1 - k)A_1$  ou  $p_e(A_2 - A_1)$ ; isto é, para  $p_e = 0$ ,

$$\frac{x}{\alpha} \ll p_e(1 - k)A_1$$

$$\frac{x}{\alpha} \ll p_e(A_2 - A_1)$$

devemos desprezar o termo  $x$  em nossa análise. A Eq. (5.15) pode então ser reescrita para refletir esta consideração, como segue:

$$p_e(1 - k)A_1 = p_e(A_2 - A_1)$$

e a função de transferência entre  $p_e$  e  $p_c$  resulta

$$\frac{P_c(s)}{P_e(s)} = \frac{A_2 - A_1}{A_1} \frac{1}{1 - k} = K_p$$

Conseqüentemente, o controlador indicado na Fig. 5.21 é um controlador proporcional. O valor do ganho  $K_p$  aumenta conforme  $k$  se aproxima da unidade. Note que o valor de  $k$  depende tanto dos orifícios da tubulação de entrada como da tubulação de saída da câmara de realimentação. (O valor de  $k$  tende à unidade conforme a resistência ao fluxo no orifício da tubulação de entrada é feito menor.)

**Controladores proporcionais hidráulicos.** Exceto para controladores pneumáticos de baixa pressão, ar comprimido raramente tem sido aplicado para controle contínuo do movimento de dispositivos possuindo massas significativas, sob ação de forças de carga externas. Para estes casos são normalmente preferidos os controladores hidráulicos. Os controladores hidráulicos também são extensivamente utilizados na indústria. Com sistemas hidráulicos de alta pressão podem ser obtidas forças muito grandes. É possível posicionamento preciso e rápido de grandes cargas com sistemas hidráulicos. Uma combinação de sistemas eletrônicos

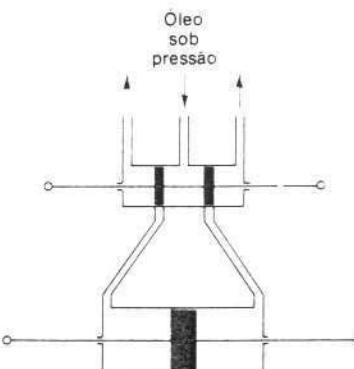


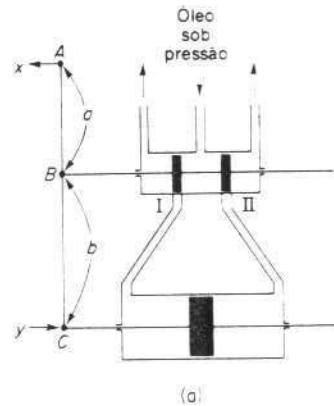
Fig. 5.22 Servomotor hidráulico.

e hidráulicos é muito utilizada porque combina as vantagens do controle eletrônico com a potência hidráulica.

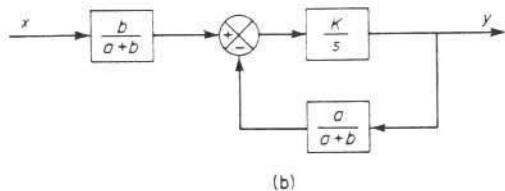
Uma breve descrição da operação de um servomotor hidráulico foi fornecida na Seção 4.3. Foi mostrado que para massas de carga muito pequenas e desprezíveis, o servomotor indicado na Fig. 4.12 age como um integrador ou um controlador integral. [Referir-se à Eq. (4.25).] Este servomotor constitui a base do circuito de controle hidráulico.

O servomotor indicado na Fig. 5.22 age como um controlador integral. Podemos modificar este servomotor para um controlador proporcional incluindo um mecanismo de realimentação. A Fig. 5.23(a) é idêntica com a Fig. 5.22, exceto pelo elo atado ao lado esquerdo do elo de realimentação de junção do pistão de potência ABC em C. O elo AC é um elo flutuante ao invés de um elo móvel pelo pivô fixo. Veremos que o servomotor indicado na Fig. 5.23(a) age como um controlador proporcional.

Um sistema hidráulico indicado na Fig. 5.23(a) opera como segue: Se a entrada  $x$  move o pistão piloto para a esquerda, este abre o acesso I de modo que flui óleo a alta pressão através do acesso I do lado esquerdo do pistão de potência e força este pistão para a direita. O pistão de potência, movendo-se para a direita, leva o elo de realimentação AC com ele, movendo consequentemente o pistão piloto para a direita. Esta ação continua até que o pistão fecha novamente os acessos I e II. Um



(a)



(b)

Fig. 5.23 (a) Servomotor que atua como um controlador proporcional; (b) diagrama de blocos do servomotor.

diagrama de blocos do sistema pode ser desenhado conforme a Fig. 5.23(b). A função de transferência entre  $y$  e  $x$  é dada por

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} \frac{K}{s}}{1 + \frac{K}{s} \frac{a}{a+b}} = \frac{bK}{s(a-b) + Ka}$$

Note que sob operação normal  $Ka/s(a-b) \gg 1$ , obtemos

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b}{a} = K_p$$

A função de transferência entre  $x$  e  $y$  resulta em uma constante, e portanto o sistema hidráulico mostrado na Fig. 5.23(a) age como um controlador proporcional, cujo ganho é  $K_p$ . O ganho  $K_p$  pode ser ajustado pelo ajuste efetivo da relação de alavanca  $b/a$ .

Verificamos que a adição de um braço de realimentação faz com que o servomotor hidráulico atue como um controlador proporcional.

**Controladores proporcionais eletrônicos.** Um controlador proporcional eletrônico é um amplificador que recebe um pequeno sinal de tensão e fornece uma saída

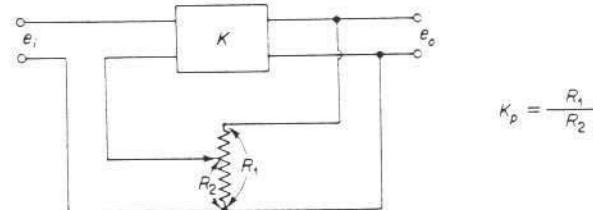


Fig. 5.24 Diagrama esquemático de um controlador proporcional eletrônico.

de tensão em um nível de potência maior. Um diagrama esquemático de um controlador deste tipo é mostrado na Fig. 5.24. Para este controlador,

$$e_0 = K \left( e_i - e_o \frac{R_2}{R_1} \right), \quad K \frac{R_2}{R_1} \gg 1$$

Portanto, a função de transferência  $G(s)$  deste controlador é

$$G(s) = \frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1}{R_2} = K_p$$

$K_p$  é o ganho do controlador proporcional. O ganho  $K_p$  pode ser ajustado variando-se a relação de resistências ( $R_1/R_2$ ) no circuito de realimentação.

### 5.3 OBTENÇÃO DE UMA AÇÃO DE CONTROLE DERIVATIVA E INTEGRAL

Nesta seção apresentaremos métodos de obtenção de uma ação de controle derivativa e integral. Daremos novamente ênfase ao princípio e não a detalhes de mecanismos reais.

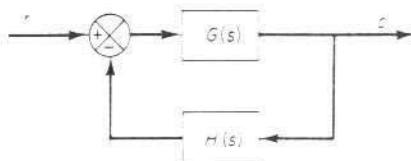


Fig. 5.25 Sistema de controle.

\* O princípio básico para gerar uma ação de controle desejada é inserir o inverso da função de transferência desejada no ramo de realimentação. Para o sistema indicado na Fig. 5.25, a função de transferência de malha-fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Se  $|G(s)H(s)| \gg 1$ , então  $C(s)/R(s)$  pode ser modificado para

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{H(s)}$$

Portanto, se for desejada uma ação de controle proporcional-mais-derivativa, inserimos um elemento possuindo a função de transferência  $1/(Ts - 1)$  no ramo de realimentação.

**Obtenção de ação de controle proporcional-mais-derivativa pneumático.** Considere o controlador pneumático indicado na Fig. 5.26(a). Este é um controlador proporcional de banda-estreita ou um controlador pneumático de duas posições. Suponha que o erro atuante nulo  $e = 0$  corresponde à distância bocal-haste  $\bar{X}$  e pressão de controle  $\bar{P}_c$ . Se uma pequena variação no erro atuante da posição zero produz uma pequena variação em  $x$  na distância bocal-haste, então uma pequena variação  $p_c$  é produzida na pressão de controle. Um diagrama de blocos do sistema (sob a hipótese de pequenas variações) pode ser determinado, conforme indicado na Fig. 5.26(b). A função de transferência entre  $p_c$  e  $e$  resulta

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{bK}{a + b} = K_p$$

Mostraremos a seguir que a adição de realimentação negativa atrasada ao controlador indicado na Fig. 5.26(a) modificará o controlador proporcional de banda-estreita para um controlador proporcional-mais-derivativo.

Considere o controlador pneumático indicado na Fig. 5.27(a). Supondo novamente pequenas variações no erro atuante, na distância bocal-haste, e na pressão de

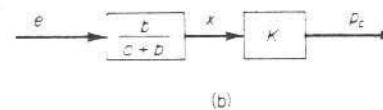
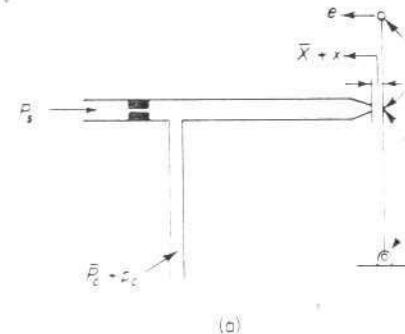


Fig. 5.26 (a) Um controlador proporcional pneumático; (b) diagrama de blocos do controlador.

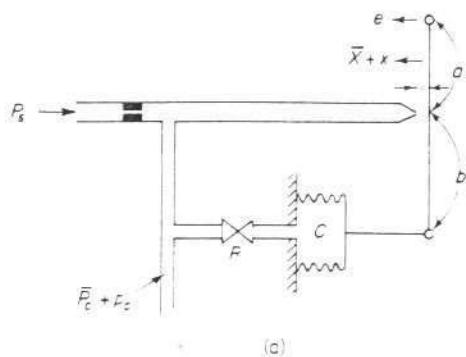
controle, podemos sumarizar a operação deste controle como segue: Inicialmente suporemos uma pequena variação em degrau em  $e$ . Então, a variação na pressão de controle  $p_c$  será instantânea. A restrição  $R$  evitara que o fole de realimentação sinta a variação de pressão  $p_c$ . Portanto o fole de realimentação não responderá momentaneamente, e a válvula atuante pneumática receberá o efeito total do movimento da haste. Com o passar do tempo o fole de realimentação se expande ou se contraí. A variação na distância bocal-haste  $x$  e a variação na pressão de controle  $p_c$  podem ser desenhadas em um gráfico em função do tempo  $t$ , como indicado na Fig. 5.27(b). Em regime estacionário, o fole de realimentação atua como um mecanismo de realimentação comum. A curva  $p_c$  versus  $t$  mostra claramente que este controlador é o tipo proporcional-mais-derivativo.

Um diagrama de blocos correspondente a este controlador pneumático é indicado na Fig. 5.27(c). No diagrama de blocos,  $K$  é uma constante,  $A$  é a área de fole e  $k_s$  é a constante de mola equivalente do fole. A função de transferência entre  $p_c$  e  $e$  pode ser obtida do diagrama de blocos, resultando:

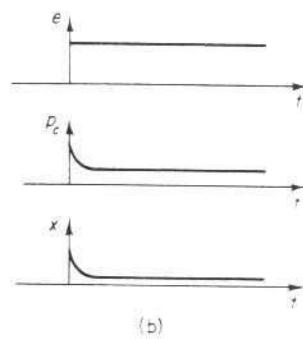
$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b}K}{1 + \frac{Ka}{a+b} \frac{A}{k_s} \frac{1}{RCs + 1}}$$

Neste tipo de controlador o ganho de laço  $|KaA|/[(a+b)k_s RCs + 1]$  normalmente é muito maior do que 1. Consequentemente a função de transferência  $P_c(s)/E(s)$  pode ser simplificada para

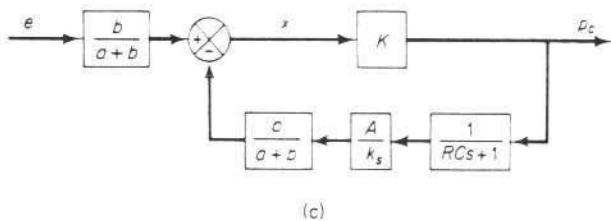
$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s)$$



(a)



(b)



(c)

**Fig. 5.27** (a) Um controlador pneumático proporcional-mais-derivativo; (b) variação em degrau em  $e$  e as variações correspondentes em  $p_c$  e  $x$  em um gráfico versus  $t$ ; (c) diagrama de blocos do controlador.

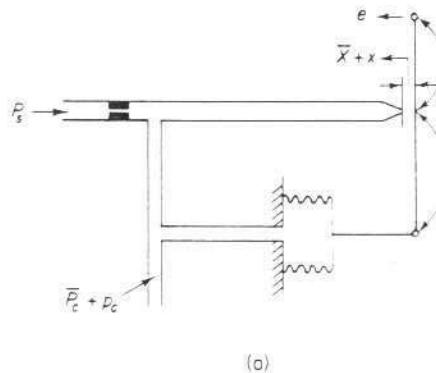
onde

$$K_p = \frac{bk}{aA}, \quad T_d = RC$$

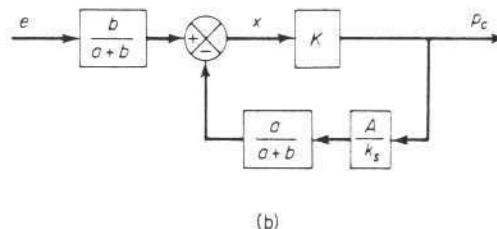
Portanto, a realimentação negativa atrasada ou a função de transferência  $1/(RCs + 1)$  no ramo de realimentação modifica o controlador proporcional para um controlador proporcional-mais-derivativo.

Note que se a válvula de realimentação estiver completamente aberta, resulta uma ação de controle proporcional. Se a válvula de realimentação estiver completamente fechada, resulta uma ação de controle proporcional com banda-estreita (liga-desliga).

**Obtenção da ação de controle proporcional-mais-integral pneumática.** Considere o controlador proporcional indicado na Fig. 5.28(a). Considerando pequenas variações nas variáveis, podemos desenhar um diagrama de blocos deste controlador conforme a Fig. 5.28(b). Mostraremos que a adição de realimentação positiva atrasada modificará este controlador proporcional para um controlador proporcional-mais-integral.



(a)



(b)

**Fig. 5.28** Um controlador proporcional pneumático; (b) diagrama de blocos do controlador.

Considere o controlador pneumático indicado na Fig. 5.29(a). A operação deste controlador é a seguinte: O fole indicado por I é ligado à fonte de pressão de controle sem qualquer restrição. O fole indicado por II é ligado à fonte de pressão de controle através de uma restrição. Vamos supor uma pequena variação no erro atuante. Isto acarretará uma variação instantânea na pressão do bocal. Portanto, uma variação também ocorrerá instantaneamente na pressão de controle  $p_c$ . Devido à restrição da válvula no caminho para o fole II, haverá uma queda de pressão na válvula. Com o transcorrer do tempo, fluirá ar através da válvula de tal modo que a variação na pressão do fole II atingirá o valor  $p_c$ . Consequentemente, o fole II se expandirá ou contraíra conforme transcorre o tempo, de tal modo a mover a haste de uma quantidade adicional no sentido do deslocamento original  $e$ . Isto acarretará uma variação contínua na pressão  $p_c$  do bocal, conforme indicado na Fig. 5.29(b).

Note que a ação de controle integral no controlador toma a forma de um lento cancelamento na realimentação fornecida originalmente pelo controle proporcional.

Um diagrama de blocos deste controlador sob a hipótese de pequenas variações nas variáveis é indicado na Fig. 5.29(c). Uma simplificação deste diagrama de blocos resulta na Fig. 5.29(d). A função de transferência deste controlador é

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} K}{1 - \frac{Ka}{a+b} \frac{A}{k_s} \left(1 - \frac{1}{RCs+1}\right)}$$

onde  $K$  é uma constante,  $A$  a área dos foles e  $k_s$  a constante de mola equivalente dos foles combinados. Se  $KaARCs/[(a+b)k_s(RCs+1)] \gg 1$ , que é normalmente o caso, a função de transferência pode ser simplificada para

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = K_p \left(1 - \frac{1}{T_i s}\right)$$

onde

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}, \quad T_i = RC$$

**Obtenção de ação de controle proporcional-mais-derivativa-mais-integral pneumática.** Uma combinação das ações de controle pneumáticas indicadas nos sistemas das Figs. 5.27(a) e 5.29(a) fornece uma ação de controle proporcional-mais-derivativa-mais-integral. A Fig. 5.30(a) mostra um diagrama esquemático deste tipo de controlador. A Fig. 5.30(b) mostra o diagrama de blocos deste controlador sob a hipótese de pequenas variações nas variáveis.

A função de transferência deste controlador é

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{bK}{a+b}}{1 - \frac{Ka}{a+b} \frac{A}{k_s} \frac{(R_d C - R_i C)s}{(R_d Cs + 1)(R_i Cs + 1)}}$$

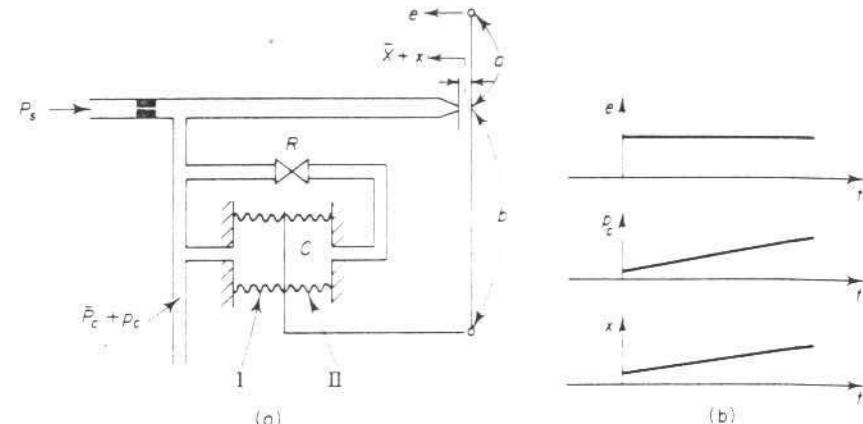
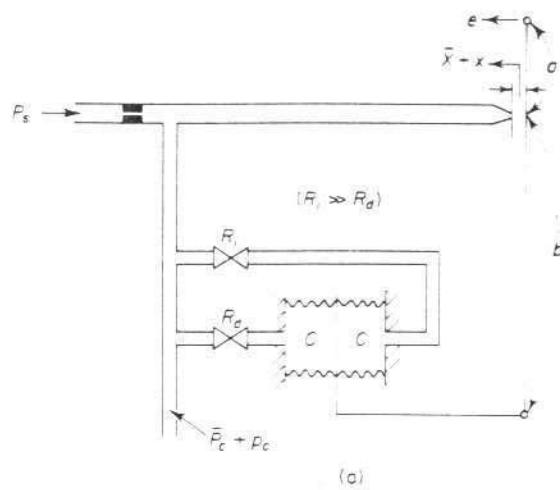


Fig. 5.29 (a) Um controlador pneumático proporcional-mais-integral; (b) variação em degrau em  $e$  e variações correspondentes em  $p_c$  e  $x$  em função de  $t$ ; (c) diagramas de blocos do controlador; (d) diagrama de bloco simplificado.



**Fig. 5.30** (a) Um controlador pneumático proporcional-mais-derivativo-mais-integral; (b) diagramas de blocos do controlador.

Definindo,

$$T_i = R_i C, \quad T_d = R_d C$$

e considerando que sob operação normal  $|KaA(T_i - T_d)s|/[(a + b)k_s(T_d s + 1)(T_i s + 1)] \gg 1$  e  $T_i \gg T_d$ , obtemos

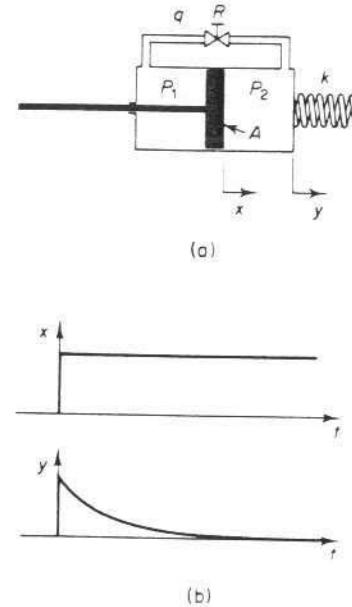
$$\begin{aligned} \frac{P_c(s)}{E(s)} &\doteq \frac{bk_s}{aA} \frac{(T_d s + 1)(T_i s + 1)}{(T_i - T_d)s} \\ &\doteq \frac{bk_s}{aA} \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{T_i s} \\ &= K_p \left( 1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) \end{aligned} \quad (5-16)$$

onde

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}$$

A Eq. (5.16) indica que o controlador mostrado na Fig. 5.30(a) é um controlador proporcional-mais-derivativo-mais-integral.

**Amortecedores viscosos.** O amortecedor viscoso indicado na Fig. 5.31(a) atua como um elemento diferenciador. Suponha que introduzimos um deslocamento integral na posição  $x$  do pistão. Então, o deslocamento  $y$ , momentaneamente, torna-se igual a  $x$ . Devido à força da mola, entretanto, o óleo fluirá através da



**Fig. 5.31** (a) Amortecedor viscoso; (b) variação em degrau em  $x$  e variação correspondente em  $y$ , em função de  $t$ ; (c) diagrama de blocos do amortecedor viscoso.

resistência  $R$  e o cilindro retornará à posição original. As curvas  $x$  versus  $t$  e  $y$  versus  $t$  são indicadas na Fig. 5.31(b).

Para definir a função de transferência entre o deslocamento  $y$  e o deslocamento  $x$ , vamos definir as pressões existentes nos lados direito e esquerdo do pistão como  $P_1$  ( $\text{N/m}^2$ ) e  $P_2$  ( $\text{N/m}^2$ ), respectivamente. Suponha que a força de inércia envolvida seja desprezível. Então, a força atuante no pistão deve equilibrar a força da mola. Portanto,

$$A(P_2 - P_1) = ky$$

onde

$$A = \text{área do pistão, } \text{m}^2$$

$$k = \text{constante da mola, } \text{N/m}$$

A taxa de fluxo  $q$  é dada por

$$q = \frac{P_2 - P_1}{R}$$

onde

$$q = \text{taxa de fluxo através da restrição, } \text{kg/s}$$

$$R = \text{resistência ao fluxo na restrição, } \text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2\cdot\text{kg}$$

Desde que o fluxo através da restrição durante  $dt$  segundos deve ser igual à variação da massa de óleo para a esquerda do pistão durante os mesmos  $dt$  segundos, obtemos

$$q dt = A\rho(dx - dy)$$

onde

$$\rho = \text{densidade, } \text{kg/m}^3$$

(Supusemos que o fluido é incompreensível ou  $\rho = \text{constante}$ .) Esta última equação pode ser reescrita como

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = \frac{q}{A\rho} = \frac{P_2 - P_1}{RA\rho} = \frac{ky}{RA^2\rho}$$

ou

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} + \frac{ky}{RA^2\rho}$$

Considerando as transformadas de Laplace de ambos os membros desta última equação, supondo condições iniciais nulas, obtemos

$$sX(s) = sY(s) + \frac{k}{RA^2\rho} Y(s)$$

A função de transferência deste sistema resulta

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s}{s + \frac{k}{RA^2\rho}}$$

Vamos definir  $RA^2\rho/k = T$ . Portanto,

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ts}{Ts + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{Ts}}$$

A Fig. 5.31(c) mostra uma representação em diagrama de blocos para este sistema.

**Obtenção da ação de controle proporcional-mais-integral hidráulica.** A Fig. 5.32(a) mostra um diagrama esquemático de um controlador proporcional-mais-integral hidráulico. Um diagrama de blocos deste controlador é indicado na Fig. 5.32(b). A função de transferência  $Y(s)/E(s)$  é dada por

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} \frac{K}{s}}{1 + \frac{Ka}{a+b} \frac{T}{Ts + 1}}$$

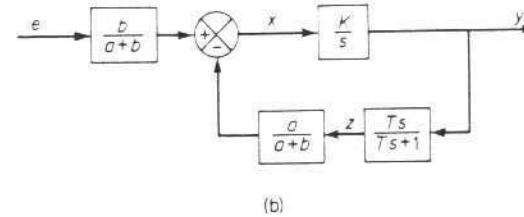
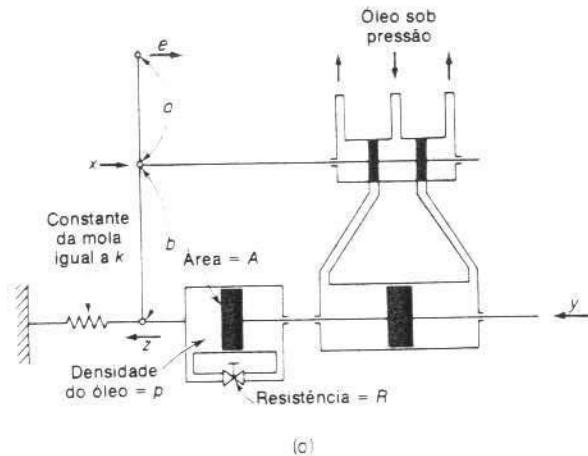


Fig. 5.32 (a) Diagrama esquemático de um controlador proporcional-mais-integral; (b) diagrama de blocos do controlador.

Neste controlador, sob operação normal  $|KaT|/[(a + b)(Ts + 1)] \gg 1$ , resultando

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

onde

$$K_p = \frac{b}{a}, \quad T_i = T = \frac{RA^2\rho}{k}$$

Portanto o controlador indicado na Fig. 5.32(a) é um controlador proporcional-mais-integral.

**Obtenção de ação de controle derivativa e integral em controladores eletrônicos.**  
A Fig. 5.33 indica o princípio de obtenção da ação de controle derivativa e integral em controladores eletrônicos. Essencialmente, introduzimos um circuito apropriado no ramo de realimentação a fim de gerar a ação de controle desejada. As funções de transferência dos controladores podem ser obtidas como segue: Para o controlador indicado na Fig. 5.33(a).

$$\frac{E_f(s)}{E_0(s)} = \frac{1}{R_d C_d s + 1}$$

$$[E_i(s) - E_f(s)]K = E_0(s)$$

Portanto, para  $|K|/|R_d C_d s + 1| \gg 1$ ,

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{K(R_d C_d s + 1)}{R_d C_d s + 1 + K} = R_d C_d s + 1 = T_d s + 1$$

onde  $T_d = R_d C_d$ .

Analogamente, para o controlador indicado na Fig. 5.33(b),

$$\frac{E_f(s)}{E_0(s)} = \frac{R_i C_i s}{R_i C_i s + 1}$$

$$[E_i(s) - E_f(s)]K = E_0(s)$$

Portanto, para  $|KR_i C_i s/(R_i C_i s + 1)| \gg 1$ ,

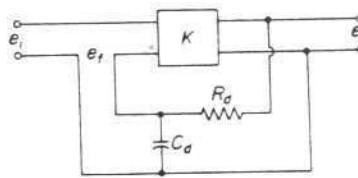
$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{K(R_i C_i s + 1)}{KR_i C_i s + R_i C_i s + 1} = \frac{R_i C_i s + 1}{R_i C_i s} = 1 - \frac{1}{T_i s}$$

onde

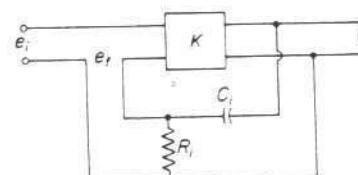
$$T_i = R_i C_i$$

Para o controlador indicado na Fig. 5.33(c), se o ganho de laço é muito maior do que a unidade, a função de transferência pode ser obtida como

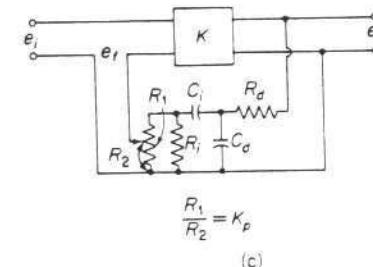
$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = K_p \alpha \left(1 + \frac{T_d}{\alpha} s + \frac{1}{\alpha T_i s}\right)$$



(a)



(b)



$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = K_p \alpha \left(1 + \frac{T_d}{\alpha} s + \frac{1}{\alpha T_i s}\right)$$

$$\alpha = 1 + \frac{R_d}{R_i} + \frac{T_d}{T_i}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = K_p$$

Fig. 5.33 Controladores eletrônicos. (a) controlador proporcional-mais-derivativo; (b) controlador proporcional-mais-integral; (c) controlador proporcional-mais-derivativo-mais-integral.

onde

$$\alpha = 1 + \frac{R_d}{R_i} + \frac{T_d}{T_i}$$

A dedução desta função de transferência é fornecida no Problema A.5.5.

#### 5.4 EFEITOS DA AÇÃO DE CONTROLE INTEGRAL E DERIVATIVA NO DESEMPENHO DO SISTEMA

Nesta seção investigaremos os efeitos da ação de controle integral e derivativa no desempenho do sistema, porém consideraremos apenas sistemas simples. (Nos últimos capítulos faremos um estudo adicional sobre controle integral e derivativo.)

**Ação de controle integral.** No controle proporcional de um processo cuja função de transferência não possui um integrador  $1/s$ , há um erro em regime estacionário, ou desajuste, na resposta à entrada ao degrau. Este desajuste pode ser eliminado se for incluída no controlador uma ação de controle integral.

No controle integral de um processo, o sinal de controle, o sinal de saída do controlador, em qualquer instante, é igual à área sob a curva do sinal erro atuante até aquele instante. O sinal de controle  $m(t)$  pode possuir um valor não nulo quando o sinal de erro atuante  $e(t)$  é nulo, conforme indicado na Fig. 5.34(a). Isto é impossível no caso do controlador proporcional desde que um sinal de controle não nulo necessita de um sinal de erro atuante não nulo. (Um sinal de erro atuante não nulo em regime estacionário significa que há um desajuste.) A Fig. 5.34(b) mostra a curva  $e(t)$  versus  $t$  e a curva correspondente  $m(t)$  versus  $t$  quando o controlador é do tipo proporcional.

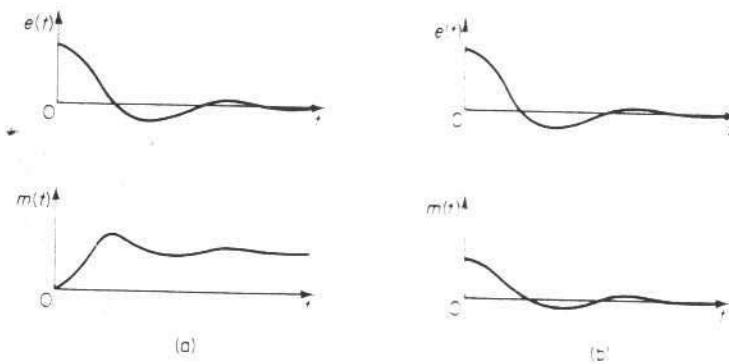


Fig. 5.34 (a) Curvas de  $e(t)$  e  $m(t)$  indicando sinal de controle não nulo quando o sinal erro atuante é nulo; (b) curvas de  $e(t)$  e  $m(t)$  mostrando sinal de controle nulo quando o sinal de erro atuante é nulo.

Note que a ação de controle integral, embora remova o desajuste ou erro em regime estacionário, pode resultar em uma resposta oscilatória com amplitude ligeiramente decrescente ou mesmo com amplitude crescente, ambas usualmente indesejáveis. (Para detalhes, vide Cap. 6.)

**Controle integral de sistemas de controle de nível de líquido.** Na Seção 5.2, verificamos que o controle proporcional de um sistema de nível de líquido resulta em um erro em regime estacionário com uma entrada em degrau. Mostraremos agora que este erro pode ser eliminado se for incluída no controlador uma ação de controle integral.

A Fig. 5.35(a) mostra um sistema de controle de nível de líquido. Supomos que o controlador é um controlador integral. Consideraremos ainda que as variáveis  $x$ ,  $q_1$ ,  $h$  e  $q_0$ , medidas em relação aos seus valores respectivos de regime estacionário  $\bar{x}$ ,  $\bar{Q}$ ,  $\bar{H}$  e  $\bar{q}_0$ , são pequenas quantidades de modo que o sistema pode ser considerado linear. Sob estas hipóteses, o diagrama de blocos do sistema pode ser obtido como indicado na Fig. 5.35(b). Da Fig. 5.35(b), a função de transferência

de malha-fechada entre  $H(s)$  e  $X(s)$  é

$$\frac{H(s)}{X(s)} = \frac{KR}{RCs^2 + s + KR}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{E(s)}{X(s)} &= \frac{X(s) - H(s)}{X(s)} \\ &= \frac{RCs^2 + s}{RCs^2 + s + KR} \end{aligned}$$

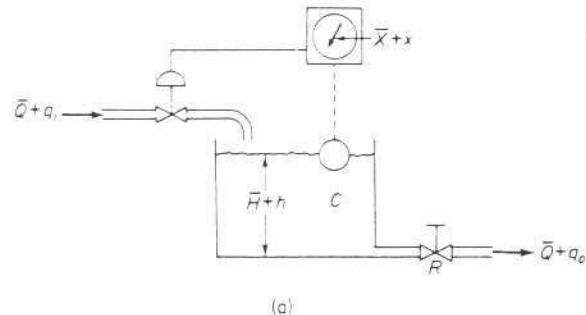


Fig. 5.35 (a) Sistema de controle de nível de líquido; (b) diagrama de blocos do sistema.

Desde que o sistema é estável, o erro em regime estacionário para a resposta em degrau unitário é obtido pela aplicação do teorema do valor final como segue:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(RCs^2 + s)}{RCs^2 + s + KR} \frac{1}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

O controle integral do sistema de nível de líquido, portanto, elimina o erro em regime estacionário na resposta à entrada em degrau. Esta é uma vantagem importante em relação ao controle proporcional que resulta em desajuste.

**Resposta para distúrbios de torque (controle proporcional).** Vamos investigar o efeito de um distúrbio de torque que ocorre em um elemento de carga. Considere o sistema indicado na Fig. 5.36. O controlador proporcional fornece um torque  $T$  para posicionar o elemento de carga, que consiste em momento de inércia e atrito viscoso. O distúrbio de torque é denotado por  $N$ .

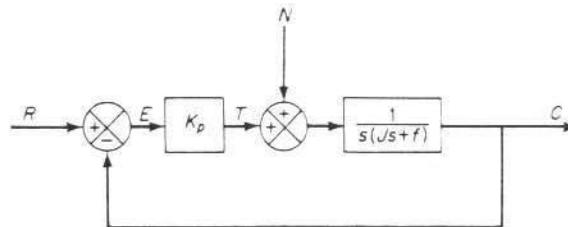


Fig. 5.36 Sistema de controle com um distúrbio de torque.

Supondo nula a entrada de referência ou  $R(s) = 0$ , a função de transferência entre  $C(s)$  e  $N(s)$  é dada por

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{1}{Js^2 + fs + K_p}$$

Portanto,

$$\frac{E(s)}{N(s)} = -\frac{C(s)}{N(s)} = -\frac{1}{Js^2 + fs + K_p}$$

O erro em regime estacionário devido a um distúrbio de torque em degrau de valor  $T_n$  é dado por

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-s}{Js^2 + fs + K_p} \frac{T_n}{s} \\ &= -\frac{T_n}{K_p} \end{aligned}$$

Em regime permanente, o controlador proporcional fornece o torque  $-T_n$ , que é igual em módulo, mas oposto em sinal, ao torque de distúrbio  $T_n$ . A saída em regime permanente, devida ao torque de distúrbio em degrau, é

$$c_{ss} = -e_{ss} = \frac{T_n}{K_p}$$

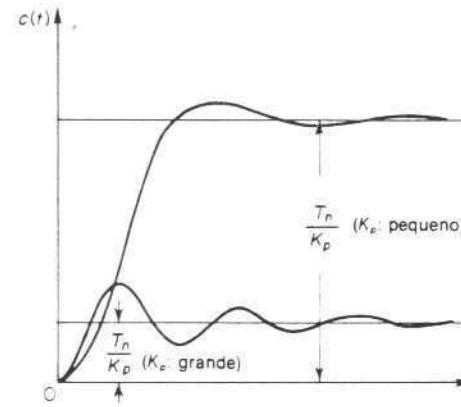


Fig. 5.37 Curvas de resposta típicas para o distúrbio de torque em degrau.

O erro em regime estacionário pode ser reduzido pelo aumento do valor do ganho  $K_p$ . O aumento deste valor, entretanto, resultará em uma resposta mais oscilatória do sistema. Curvas de resposta típicas para um pequeno valor de  $K_p$  e um grande valor de  $K_p$  são indicadas na Fig. 5.37.

Desde que o valor do ganho  $K_p$  não pode ser aumentado demasiadamente, é desejável modificar o controlador proporcional para um controlador proporcional-mais-integral.

**Resposta a distúrbios de torque (controle proporcional-mais-integral).** Para eliminar o desajuste devido ao distúrbio de torque, o controlador proporcional deve ser substituído por um controlador proporcional-mais-integral.

Se for adicionada ao controlador uma ação de controle integral, enquanto houver um sinal de erro, haverá um torque desenvolvido pelo controlador para reduzir este erro, desde que o sistema de controle é estável.

A Fig. 5.38 mostra o controle proporcional-mais-integral do elemento de carga, consistindo em momento de inércia e atrito viscoso.

A função de transferência de malha-fechada entre  $C(s)$  e  $N(s)$  é

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{s}{Js^3 + fs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}}$$

Na ausência da entrada de referência, ou  $r(t) = 0$ , o sinal erro é obtido de

$$E(s) = -\frac{s}{Js^3 + fs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}} N(s)$$

Se este sistema de controle for estável, isto é, se as raízes da equação característica

$$Js^3 + fs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i} = 0$$

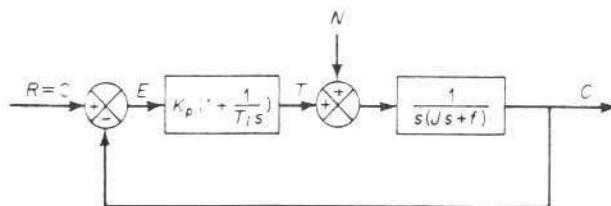


Fig. 5.38 Controle proporcional-mais-integral de um elemento de carga consistindo em momento de inércia e fricção viscosa.

possuem partes reais negativas, então o erro em regime estacionário na resposta a um torque de distúrbio em degrau de valor  $T_n$  é obtido aplicando-se o teorema de valor final como segue:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-s^2}{Js^3 + fs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i} s} \frac{T_n}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto o erro em regime estacionário em relação ao distúrbio por torque pode ser eliminado se o controlador for do tipo proporcional-mais-integral.

Note que a ação de controle integral adicionada ao controlador proporcional converteu o sistema originalmente de segunda-ordem em um sistema de terceira-ordem. Consequentemente, o sistema de controle pode tornar-se instável para um valor grande de  $K_p$ , desde que as raízes da equação característica podem possuir partes reais positivas. (O sistema de segunda-ordem é sempre estável se os coeficientes na equação diferencial do sistema são todos positivos.)

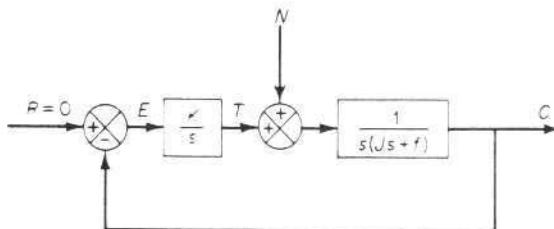


Fig. 5.39 Controle integral de um elemento de carga consistindo em momento de inércia e fricção viscosa.

É importante observar que, se o controlador fosse um controlador integral, como na Fig. 5.39, então o sistema sempre resultaria instável porque a equação característica

$$Js^3 + fs^2 - K = 0$$

possuiria raízes com partes reais positivas. Um sistema instável deste tipo não poderia ser usado na prática.

Note que, no sistema da Fig. 5.38, a ação de controle proporcional tende a estabilizar o sistema, enquanto a ação de controle integral tende a eliminar ou reduzir o erro em regime estacionário em resposta a várias entradas.

**Ação de controle derivativa.** A ação de controle derivativa, quando adicionada a um controlador proporcional, possibilita um meio de obter um controlador com alta sensibilidade. Uma vantagem em usar ação de controle derivativa é que ela responde à taxa de variação do erro atuante e pode produzir uma correção significativa antes de o valor do erro atuante tornar-se demasiadamente grande. O controle derivativo, portanto, antecipa o erro atuante e inicia uma ação corretiva mais cedo, tendendo a aumentar a estabilidade do sistema.

Embora o controle derivativo não afete diretamente o erro em regime estacionário, ele introduz amortecimento no sistema e portanto permite o uso de um valor maior do ganho  $K$ , o que resulta em uma melhora na precisão em regime estacionário.

Devido ao fato de o controle derivativo operar sobre a taxa de variação do erro atuante e não sobre o próprio erro atuante, este modo nunca é usado sozinho. É sempre utilizado em combinação com ação proporcional ou ação proporcional-mais-integral.

**Sistemas de controle proporcional com carga de inércia.** Antes de discutirmos o efeito da ação derivativa no desempenho do sistema, consideraremos o controle proporcional de uma carga de inércia.

Considere o sistema indicado na Fig. 5.40(a). A função de transferência de malha-fechada é obtida como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{Js^2 + K_p}$$

Desde que as raízes da equação característica

$$Js^2 + K_p = 0$$

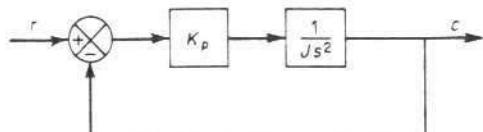
são imaginárias, a resposta a uma entrada em degrau unitário continua a oscilar indefinidamente, como indicado na Fig. 5.40(b).

Sistemas de controle exibindo estas características de resposta não são desejáveis. Veremos que a adição de um controle derivativo estabilizará o sistema.

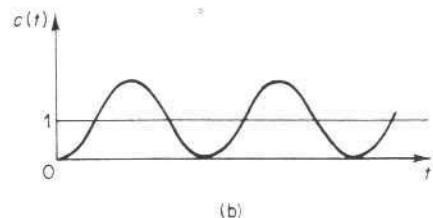
**Controle proporcional-mais-derivativo de um sistema com carga de inércia.** Modifiquemos o controlador proporcional para um controlador proporcional-mais-derivativo cuja função de transferência é  $K_p[1 + T_d s]$ . O torque desenvolvido pelo controlador é proporcional a  $K_p e + T_d \dot{e}$ . O controle derivativo é essencialmente antecipatório, mede a velocidade de erro instantânea, prediz a grande sobrelevação antecipadamente no tempo e produz uma ação contrária apropriada antes de ocorrer uma sobrelevação demasiadamente grande.

Considere o sistema indicado na Fig. 5.41(a). A função de transferência de malha-fechada é dada por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p(1 + T_d s)}{Js^2 + K_p T_d s + K_p}$$

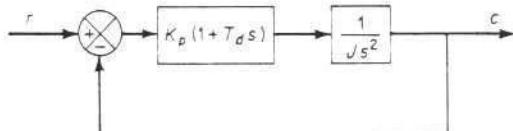


(a)

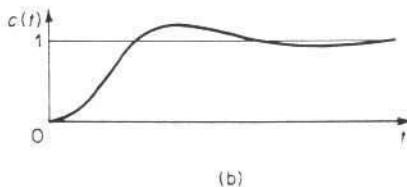


(b)

Fig. 5.40 (a) Controle proporcional de um sistema com carga de inércia; (b) resposta a uma entrada em degrau unitário.



(a)



(b)

Fig. 5.41 (a) Controle proporcional-mais-derivativo com um sistema com carga de inércia; (b) resposta a uma entrada em degrau unitário.

A equação característica

$$Js^2 + K_p T_d s + K_p = 0$$

agora possui duas raízes com partes reais negativas para valores positivos de  $J$ ,  $K_p$  e  $T_d$ . Portanto, o controle derivativo introduz um efeito de amortecimento. Uma curva de resposta típica  $c(t)$  para uma entrada com degrau unitário é fornecida na Fig. 5.41(b). Obviamente, a curva de resposta mostra uma melhoria significativa em relação à curva de resposta original indicada na Fig. 5.40(b).

## 5.5 REDUÇÃO DE VARIAÇÕES DE PARÂMETROS PELO USO DE REALIMENTAÇÃO

A principal finalidade de usar realimentação em sistemas de controle é reduzir a sensibilidade do sistema em relação a variações de parâmetros e distúrbios indesejáveis.

Se necessitarmos construir um sistema de controle de malha-aberta conveniente, devemos selecionar todos os componentes da função de transferência de malha-aberta  $G(s)$  muito cuidadosamente de modo que respondam precisamente. No caso de construir um sistema de controle de malha-fechada, entretanto, os componentes podem ser menos precisos desde que a sensibilidade em relação a variações de parâmetros em  $G(s)$  é reduzida por um fator de  $1 + G(s)$ .

Para ilustrar esta afirmação, considere os sistemas de malha-aberta e de malha-fechada indicados nas Figs. 5.42(a) e (b), respectivamente. Suponha que devido a variações de parâmetros,  $G(s)$  é variada para  $G(s) + \Delta G(s)$ , onde  $|G(s)| \gg |\Delta G(s)|$ . Então, no sistema de malha-aberta indicado na Fig. 5.42(a), a saída é dada por

$$C(s) + \Delta C(s) = [G(s) + \Delta G(s)]R(s)$$

Portanto, a variação na saída é dada por

$$\Delta C(s) = \Delta G(s)R(s)$$

No sistema de malha-fechada indicado na Fig. 5.42(b),

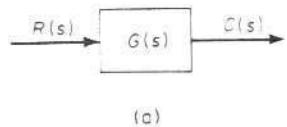
$$C(s) + \Delta C(s) = \frac{G(s) + \Delta G(s)}{1 + G(s) + \Delta G(s)} R(s)$$

ou

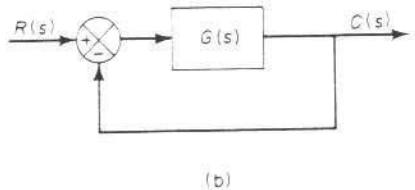
$$\Delta C(s) = \frac{\Delta G(s)}{1 + G(s)} R(s)$$

Portanto, a variação na saída do sistema de malha-fechada, devida a variações de parâmetros em  $G(s)$ , é reduzida por um fator  $1 + G(s)$ . Em muitos casos práticos, o módulo de  $1 + G(s)$  é normalmente muito maior do que um.

Note que, reduzindo os efeitos das variações dos parâmetros dos componentes, estamos também contornando o componente que causa a variação, com um laço de realimentação.

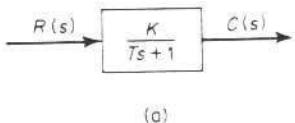


(a)

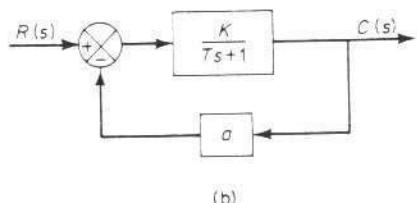


(b)

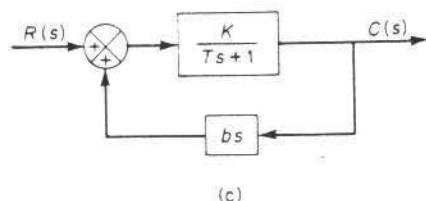
Fig. 5.42 (a) Sistema de malha-aberta; (b) sistema de malha-fechada.



(a)



(b)



(c)

Fig. 5.43 (a) Sistema de malha-aberta; (b) sistema de malha-fechada com constante de tempo  $T/(1+Ka)$ ; (c) sistema de malha-fechada com constante de tempo  $T - bK$ .

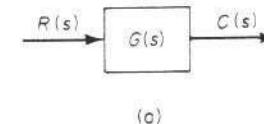
**Modificações de constante de tempo pelo uso de realimentação.** Considere o sistema mostrado na Fig. 5.43(a). A constante de tempo do sistema é  $T$ . A adição de uma malha de realimentação negativa em volta deste elemento reduz a constante de tempo. A Fig. 5.43(b) mostra o sistema com a mesma função de transferência do ramo direto daquela indicada na Fig. 5.43(a), com a exceção da malha de realimentação negativa que foi adicionada. A constante de tempo deste sistema foi reduzida para  $T/(1 + Ka)$ . Note também que a constante de ganho para este sistema foi reduzida de  $K$  para  $K/(1 + Ka)$ .

Se, ao invés de uma malha de realimentação negativa, fosse adicionada uma malha de realimentação positiva em volta da função de transferência  $K/(Ts + 1)$  e se a função de transferência da realimentação for escolhida apropriadamente, então a constante de tempo seria nula ou com um valor muito pequeno. Considere o sistema indicado na Fig. 5.43(c). Desde que a função de transferência de malha-fechada é

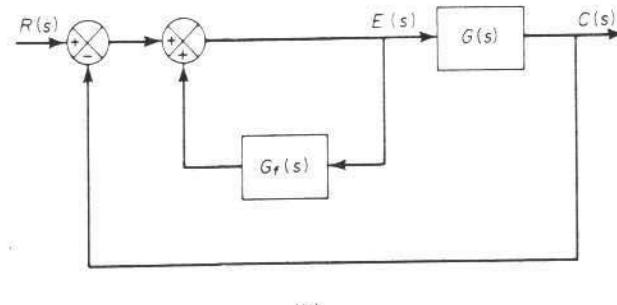
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{(T - bK)s + 1}$$

a constante de tempo pode ser reduzida através de uma escolha apropriada de  $b$ . Se  $b$  é escolhida igual a  $T/K$ , então resulta uma constante de tempo nula. Note, entretanto, que se os distúrbios acarretam um valor de  $T - bK$  negativo ao invés de nulo, resulta um sistema instável. Então, se for empregada realimentação positiva para reduzir a constante de tempo para um valor pequeno, devemos tomar cuidado para que  $T - bK$  nunca se torne negativo.

**Aumento de ganhos de malha pelo uso de realimentação positiva.** O sistema indicado na Fig. 5.44(a) possui a função de transferência  $C(s)/R(s) = G(s)$ . Consi-



(a)



(b)

Fig. 5.44 (a) Sistema de malha-aberta; (b) sistema de malha-fechada cuja função de transferência é aproximadamente unitária.

dere agora o sistema indicado na Fig. 5.44(b). A função de transferência de malha-fechada para este sistema é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 - G_f(s) + G(s)}$$

Se  $G_f(s)$  é escolhida próxima à unidade, ou  $G_f(s) \approx 1$ , então

$$\frac{C(s)}{R(s)} \approx 1$$

Essencialmente, isto significa que a malha interna, usando realimentação positiva, aumentou o ganho direto para um valor muito grande. Conforme estabelecido anteriormente, quando o ganho de malha é muito grande, a função de transferência de malha-fechada  $C(s)/R(s)$  torna-se igual ao inverso da função de transferência do elemento de realimentação. Como o sistema indicado na Fig. 5.44(b) possui realimentação unitária,  $C(s)/R(s)$  torna-se praticamente igual à unidade. [Portanto,  $C(s)/R(s)$  não é sensível a variações de parâmetros de  $G(s)$ .]

**Eliminação de integração.** A adição de uma malha menor em volta de um integrador modifica-o para um elemento de retardo de primeira ordem. Considere o sistema indicado na Fig. 5.45(a). A realimentação negativa da saída, conforme a Fig. 5.45(b), modifica o integrador  $K/s$  para um elemento de retardo de primeira ordem  $K/(s + K)$ .

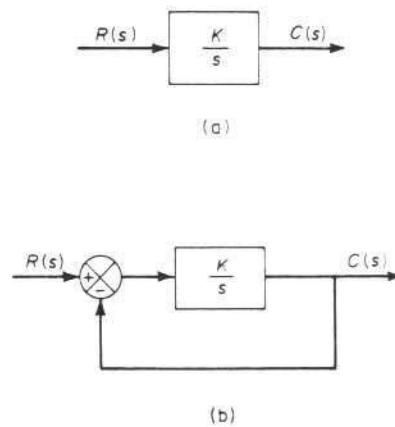


Fig. 5.45 (a) Elemento integrante; (b) elemento de retardo de primeira-ordem.

**Comentários sobre o uso de malhas de realimentação.** Como foi visto na discussão anterior, o controle por realimentação, o controle de malha-fechada reduz a sensibilidade de um sistema em relação a variações de parâmetros e portanto diminui os efeitos de variações do ganho no ramo direto em resposta a variações da pressão de suprimento, tensão elétrica de alimentação, temperatura etc. No estudo de controladores feito nas Seções 5.2 e 5.3, vimos também que os elementos que

desempenham as várias ações de controle estão na parte de realimentação dos mecanismos controladores e que os elementos de realimentação em um controlador essencialmente aumentam a linearidade do amplificador e aumentam a faixa da sensibilidade proporcional.

O uso de malhas de realimentação nos sistemas de controle, entretanto, aumenta o número de componentes dos sistemas, aumentando a complexidade e introduzindo também a possibilidade de instabilidade.

## 5.6 TEORIA DE SISTEMAS FLUIDOS

**Introdução.** Dispositivos fluidos através dos quais fluem ar, gases ou líquidos em canais intrincados e precisos são denominados *dispositivos a fluidos*. Estes dispositivos utilizam componentes sólidos, ou circuitos, para desempenharem as funções de sensores, lógica, amplificação e controle. A teoria de sistemas fluidos, o estudo geral de dispositivos e sistemas a fluidos, é uma das mais novas e mais interessantes áreas desenvolvidas em anos recentes. As vantagens de dispositivos a fluidos são que eles podem ser completamente rudes (devido à ausência de partes móveis mecânicas) e desempenhar funções de controle e cálculo em condições adversas. Dispositivos a fluidos podem operar em amplas faixas de temperatura, temperaturas extremamente altas, sujeitos a choques, vibração, força-G (aceleração) e radiação. (Portanto, dispositivos a fluidos são ideais para operações em locais difíceis e perigosos onde falham outros dispositivos.) Além disso, a simplicidade dos dispositivos básicos a fluidos assegura alta confiabilidade, longa vida e manutenção muito pequena.

Em algumas aplicações de dispositivos a fluidos, o meio controlante é também o meio de fluxo ou potência. Neste caso, o consumo de potência de dispositivos a fluidos não constitui um problema. Nas aplicações onde for limitada a potência disponível, entretanto, como em um sistema de satélite, o consumo relativamente alto de potência de dispositivos a fluido torna-se um problema. Reduzindo-se as dimensões do jato e as pressões de operação, o consumo de potência pode ser reduzido de um certo valor; entretanto, os valores mínimos das dimensões do jato e das pressões de operação são determinados pelos ruídos no sinal e reproduzibilidade de fabricação.

Em relação à velocidade de resposta de dispositivos fluidos, ela é comparável àquelas de dispositivos pneumáticos ou hidráulicos convencionais ou relés eletromecânicos. [Isto significa que a velocidade de resposta de dispositivo a fluidos é muito menor do que aquelas apresentadas por dispositivos eletrônicos. As respostas eletrônicas são geralmente expressas em termo de nanosegundos ( $10^{-9}$  s) ou nanosegundos ( $10^{-9}$  s), enquanto respostas de dispositivos a fluidos são expressas em termo de milissegundos ( $10^{-3}$  s).]

Nesta seção discutiremos inicialmente aqueles dispositivos a fluidos denominados amplificadores com aderência de parede, e então apresentaremos a teoria de sistemas digitais a fluidos, uma das mais promissoras aplicações da teoria de sistemas fluidos. Finalmente discutiremos uma aplicação de sistemas digitais a fluidos.

**Fenômenos de aderência de parede.** O princípio de operação de dispositivos a fluidos é conhecido como interação de jato ou fenômeno de aderência de parede. Um jato fluido pode ser desviado de sua direção normal de fluxo introduzindo um outro jato perpendicular ao primeiro, como indicado na Fig. 5.46. Se o jato de fluido entra em uma câmara relativamente estreita e atinge uma parede, ele “adere” à parede, conforme indicado na Fig. 5.47. Este fenômeno é denominado “efeito de parede”. É possível eliminar estes efeitos se aplicarmos um jato ou fluxo na região

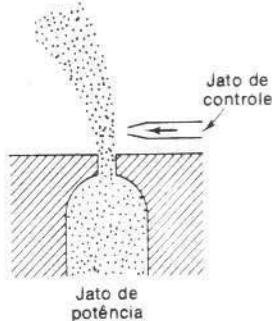


Fig. 5.46 Interação de jato em um dispositivo com fluido.

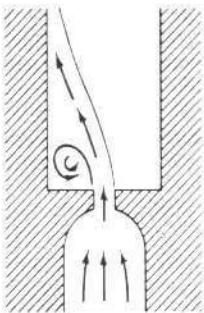


Fig. 5.47 Fenômeno de aderência de parede.

de baixa pressão abaixo do ponto onde o jato atinge a parede. Este fato torna possível projetar um dispositivo biestável, ou *flip-flop*, propiciando jatos de controle em qualquer lado do jato principal, como indicado na Fig. 5.48. (Um dispositivo biestável é aquele que possui duas saídas possíveis e que alternará de uma saída para a outra quando do recebimento de sinais de entrada com fase correta.) Este dispositivo biestável é conveniente para operações lógicas utilizando sinais binários.

Os amplificadores a fluido baseados nos fenômenos de aderência de parede são denominados amplificadores de aderência de parede. Estes amplificadores são normalmente construídos com vidro, plástico, alumínio, latão ou aço inoxidável.

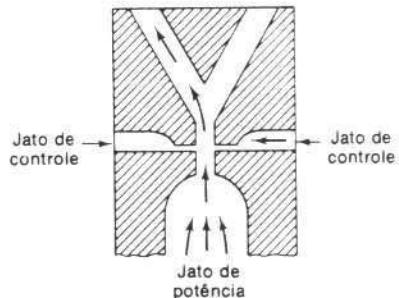


Fig. 5.48 Dispositivo biestável.

**Amplificadores biestáveis a fluidos (*flip-flops*).** Os amplificadores de aderência de parede são basicamente dispositivos biestáveis. O fluido continuará a fluir em um canal até que seja atuado por um sinal (um jato de fluido) que dirige o fluxo principal de fluido para um outro canal de parede.

A Fig. 5.49 mostra diagramas esquemáticos de um amplificador biestável ou *flip-flop*. Neste elemento, a saída pode ser chaveada de um canal de saída para o

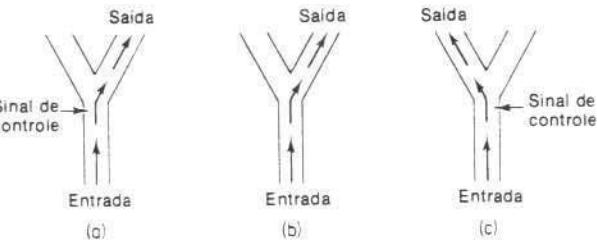


Fig. 5.49 Diagrama esquemático de um amplificador biestável. (a) sinal de controle aplicado à esquerda; (b) sinal de controle removido; (c) sinal de controle aplicado à direita.

outro aplicando-se ar sob pressão no acesso de controle oposto. A saída continuará através deste canal mesmo após ser removido o sinal de controle. O elemento continua a operar como um canal de saída simples até que haja uma variação de sinal. Portanto, este dispositivo possui uma memória. Elementos *flip-flop* servem como banco de memória em um sistema a fluido.

Em dispositivos a fluido, é comumente utilizada para indicar o grau de recuperação uma representação percentual da captura de saída relacionada com a fonte de alimentação, tal como a pressão de saída *versus* a pressão de entrada. Para o elemento *flip-flop* aqui considerado, a máxima pressão de saída é aproximadamente 35% da pressão de suprimento, enquanto o máximo fluxo de saída é aproximadamente 50% do fluxo de suprimento. Os 50% restantes do fluxo de suprimento escoarão através dos compartimentos de exaustão. A pressão mínima de controle que acarreta um chaveamento é aproximadamente 10% da pressão de suprimento.

**Amplificadores digitais.** Um amplificador digital é similar a um elemento *flip-flop*, exceto que não possui memória. O fluxo de um canal da saída continuará enquanto houver um sinal de controle presente. Um sinal aplicado a qualquer acesso de controle produzirá uma saída no canal de saída oposto.

Operando independentemente de outros elementos com fluidos, o amplificador digital pode ser usado para funções simples, tais como cilindros operantes, relés e ar ou outras unidades lógicas.

Em um amplificador digital, a pressão de controle igual a 10% da pressão de suprimento modificará e manterá o fluxo de saída. A pressão de saída máxima é aproximadamente 50% da pressão de suprimento e o fluxo máximo é aproximadamente 70% do fluxo de suprimento. (O fluxo correspondente a 30% do suprimento restante sairá através dos compartimentos de exaustão.)

**Amplificadores proporcionais.** Embora os amplificadores de aderência de parede sejam basicamente dispositivos biestáveis, podem ser modificados para dispositivos proporcionais pela ampliação das passagens seguindo o bocal onde ocorre a aderência de parede, conforme indicado na Fig. 5.50. Neste amplificador, o fluxo do jato principal é distribuído entre as duas passagens de saída de acordo com o balanço dos fluxos de controle.

O amplificador proporcional é um dispositivo de saída-entrada diferencial. Referindo-se à Fig. 5.50, notamos que o sinal de entrada é a diferença de pressão existente entre os acessos  $C_1$  e  $C_2$ . A saída é a diferença de pressão existente entre os canais  $O_1$  e  $O_2$ .

Neste dispositivo o jato é defletido pela diferença de pressão no sinal de entrada que modula a fração do fluxo do jato que cada canal de saída recebe. A Fig.

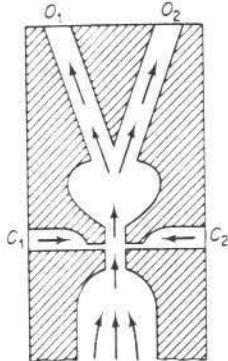


Fig. 5.50 Amplificador proporcional por aderência de parede.

5.51 mostra as curvas características de um amplificador proporcional com aderência de parede.

Para dar uma idéia dos ganhos destes amplificadores, notemos que ganhos de pressão iguais a 10 e ganhos de potência de 100, por estágio, podem ser obtidos. Se dois dispositivos deste tipo são montados em cascata, conforme a Fig. 5.52, então os ganhos são multiplicados.

Como no caso de sistemas elétricos e mecânicos, a oposição total ao fluxo do circuito, representada pela resistência, capacidade e indutância combinadas em uma resultante, é denominada *impedância*. O número de elementos com fluidos que podem ser operados em paralelo de um elemento similar simples é representado pela capacidade de *fan-out*. ("Similar" refere-se à impedância e não aos dispositivos desempenhando a mesma função.) A capacidade de *fan-out* de amplificadores com aderência de parede é aproximadamente quatro.

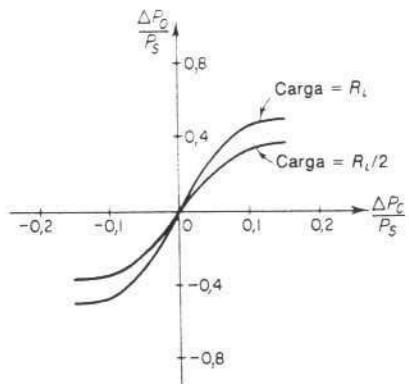


Fig. 5.51 Curvas características de um amplificador proporcional por aderência de parede. ( $P_s$  = pressão de suprimento.  $\Delta P_c$  = diferença de pressão existente entre as portas de controle.  $\Delta P_0$  = diferença de pressão existente entre os canais de saída e  $R_L$  = resistência de carga.)

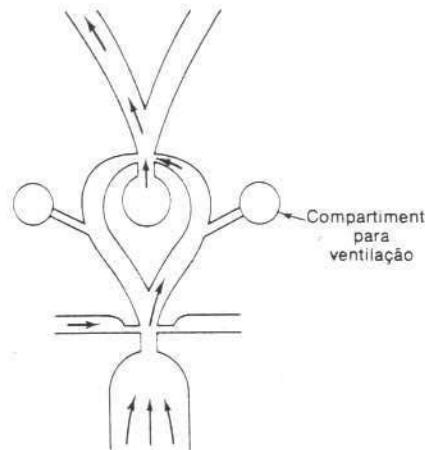


Fig. 5.52 Amplificador em cascata.

**Teoria de sistemas digitais fluidos.** Dispositivos digitais com fluidos são componentes com fluidos que desempenham funções lógicas, tais como FLIP-FLOP, OR/NOT e AND.

As portas lógicas com fluidos podem ser montadas em circuitos digitais familiares. (Uma porta é um dispositivo ou circuito que permite passagem de um sinal apenas se certos requisitos de controle forem satisfeitos.) A Tabela 5.1 mostra algumas portas lógicas com fluidos e suas respectivas tabelas-verdade. (Uma tabela-verdade é uma correlação tabular de relações entre a entrada e a saída para elementos lógicos.) Como pode ser visto na Tabela 5.1, os dispositivos digitais com fluidos podem permitir, ou inibir, a transmissão de sinal pela aplicação, remoção, ou outras combinações dos sinais de entrada.

A teoria de sistemas digitais fluidos desempenha as mesmas funções lógicas da sua correspondente eletrônica. Há, entretanto, algumas áreas onde cada uma possui vantagens distintas. (Normalmente, a escolha é clara.) Por exemplo, em aplicações onde a confiabilidade em condições extremas (por exemplo, alta temperatura ou radiação) é mais importante que a velocidade de operação, devem ser escolhidos sistemas digitais com fluidos. Se é exigida operação lógica com alta velocidade em condições normais, são preferíveis os dispositivos eletrônicos. Aplicações de sistemas digitais com fluidos são quase sempre encontradas em armazenagem, alimentação de máquinas, sequenciadoras, operadoras etc.

Muitas funções de relés de controle podem ser desempenhadas por meio de dispositivos com fluidos, e muitas funções lógicas de relés e sistemas eletrônicos podem ser implementadas através de dispositivos com fluido.

**Uma aplicação típica de sistema com fluido\***. Componentes com fluidos podem sensoriar posições, propiciar comandos de operações, desempenhar engrenamentos lógicos e controlar, por meio de válvulas, o sistema de controle de máquinas.

Considere o sistema mecânico indicado na Fig. 5.53. Deseja-se projetar um sistema lógico de controle para manter a sequência de uma furadeira, de modo que, quando a broca está retraída e um botão é atuado, a furadeira avança para baixo. A broca avança descendente e então retorna à sua posição para cima a fim de

\*Este exemplo é obtido de *Fluidics-Plugging the Control Capability Gap* por The General Purpose Control Department, General Electric Company, Bloomington, Illinois.

**Tabela 5.1** Portas lógicas com fluido e suas respectivas tabelas-verdade

completar o ciclo. Para retorno de emergência, exige-se um botão para retrair a broca em qualquer instante.

Apresentaremos uma solução para este problema utilizando um sistema digital com fluidos. A Fig. 5.54 mostra um circuito lógico que pode desempenhar a sequência de operações desejada. O elemento FLIP-FLOP 1 é acionado pelo botão de início (partida). O botão de início é soltado, porém o elemento continuará a fornecer a saída desejada. A saída do elemento FLIP-FLOP 1 alimenta o elemento AND, que combina este sinal com o outro sinal proveniente da chave de limite

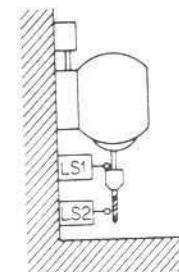


Fig. 5.53 Sistema mecánico

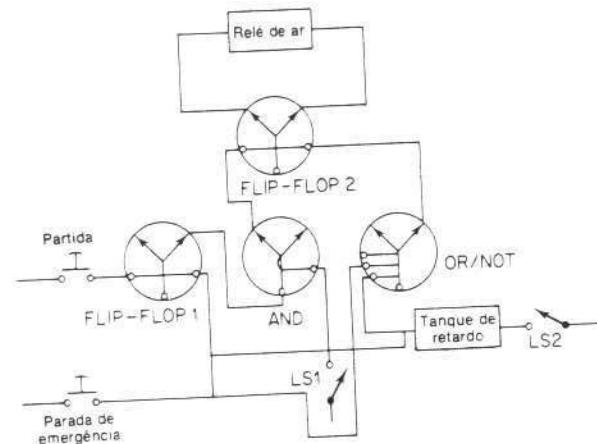


Fig. 5.54 Circuito lógico

(LS 1). Este sinal ativa o FLIP-FLOP 2, que desloca o relé de ar e inicia o movimento da broca para baixo. O suporte de broca move-se para baixo e opera a broca até que o sinal proveniente de LS 2 atinja o tanque de retardo. Este desloca o elemento OR/NOT, que por sua vez chaveia o FLIP-FLOP 2 que aciona o relé de ar para a sua posição original. O suporte de broca move-se agora para cima. O ciclo repetir-se-á quando o botão de inicio for empurrado e LS 1 for ativado.

Se o botão de parada de emergência for acionado em qualquer momento, o elemento OR/NOT e o FLIP-FLOP 1. O elemento OR/NOT acionará o FLIP-FLOP 2, o que causará a imediata retração do suporte da broca.

## PROBLEMAS ILUSTRATIVOS E SOLUÇÕES

**Problema A.5.1** O termo normalmente usado para definir o ganho ou sensibilidade de um controlador proporcional é a *banda proporcional*. Esta é a variação percentual na entrada para o controlador (sinal erro) necessária para causar 100% de variação na saída do atuador.

Portanto, uma banda proporcional pequena corresponde a um alto ganho ou alta sensibilidade proporcional.

Qual é a banda proporcional se o controlador e atuador tiverem um ganho global de 4%/%? (Note que as variações totais na entrada do controlador e na saída do atuador são dadas como 100%. Portanto um ganho de 4%/% significa que há uma variação de 4% na saída se a variação na entrada for 1%).

Solução

$$\text{Banda proporcional} = \frac{100\%}{\text{ganho em } \%/\%} = \frac{100\%}{4\%/\%} = 25\%$$

**Problema A.5.2** Considere o sistema de controle de nível de líquido indicado na Fig. 5.55. Suponha que o ponto de ajuste do controlador está fixado. Supondo um distúrbio em degrau de valor  $n_0$ , determine o erro. Suponha que  $n_0$  seja pequeno e as variações nas variáveis em degrau de nível estacionário respectivos também sejam pequenas. O controlador é do tipo proporcional.

Se o controlador não for proporcional, mas integral, qual será o erro em regime estacionário?

**Solução.** A Fig. 5.56 representa um diagrama de blocos do sistema quando o controlador é proporcional com ganho  $K_p$ . (Suponha que a função de transferência da válvula pneumática

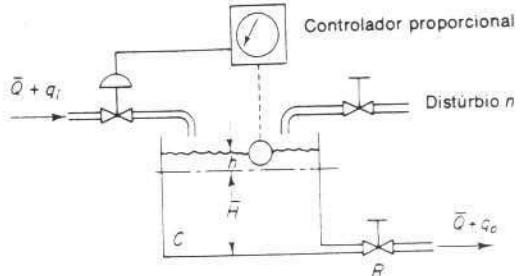


Fig. 5.55 Sistema de controle de nível de líquido.

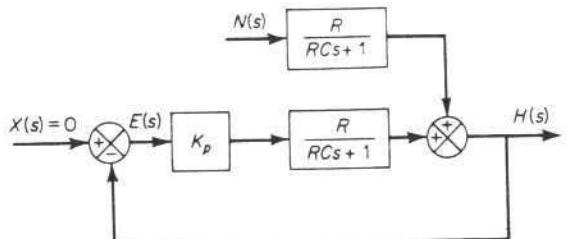


Fig. 5.56 Diagrama de blocos do sistema de controle de nível de líquido indicado na Fig. 5.55.

seja unitária. Desde que o ponto de ajuste está fixado, a variação no ponto de ajuste é nula, ou  $X(s) = 0$ . A transformada de Laplace de  $h(t)$  é

$$H(s) = \frac{K_p R}{R C s + 1} E(s) + \frac{R}{R C s + 1} N(s)$$

Então,

$$E(s) = -H(s) = -\frac{K_p R}{R C s + 1} E(s) - \frac{R}{R C s + 1} N(s)$$

Portanto,

$$E(s) = -\frac{R}{R C s + 1 + K_p R} N(s)$$

Desde que,

$$N(s) = \frac{n_0}{s}$$

obtemos

$$\begin{aligned} E(s) &= -\frac{R}{R C s + 1 + K_p R} \frac{n_0}{s} \\ &= \frac{R n_0}{1 - K_p R} \left( \frac{1}{s + \frac{1 + K_p R}{R C}} \right) - \frac{R n_0}{1 + K_p R} \frac{1}{s} \end{aligned}$$

A solução temporal para  $t > 0$  é

$$e(t) = \frac{R n_0}{1 - K_p R} \left[ \exp \left( -\frac{1 + K_p R}{R C} t \right) - 1 \right]$$

Portanto, a constante de tempo é  $R C / (1 + K_p R)$ . (Na ausência do controlador, a constante de tempo é igual a  $R C$ .) Conforme aumenta o ganho do controlador, diminui a constante de tempo. O erro em regime estacionário é

$$e(\infty) = -\frac{R n_0}{1 + K_p R}$$

Conforme o ganho  $K_p$  do controlador é aumentado, o erro em regime estacionário, ou o desajuste, é reduzido. Portanto, matematicamente, quanto maior for o ganho  $K_p$ , menores serão o desajuste e a constante de tempo. Em sistemas práticos, entretanto, se o ganho  $K_p$  do controlador proporcional for aumentado para um valor muito grande, deve resultar uma oscilação na saída desde que desprezamos em nossa análise todos os pequenos atrasos e pequenas constantes de tempo que podem existir no sistema de controle real. (Se estes pequenos atrasos e constantes de tempo forem incluídos na análise, a função de transferência torna-se de maior ordem e, para valores muito grandes de  $K_p$ , há a possibilidade de ocorrer oscilação ou mesmo instabilidade.)

Se o controlador for integral, supondo que a função de transferência do controlador seja

$$G_c = \frac{K}{s}$$

obtemos

$$E(s) = -\frac{Rs}{RCs^2 + s + KR} N(s)$$

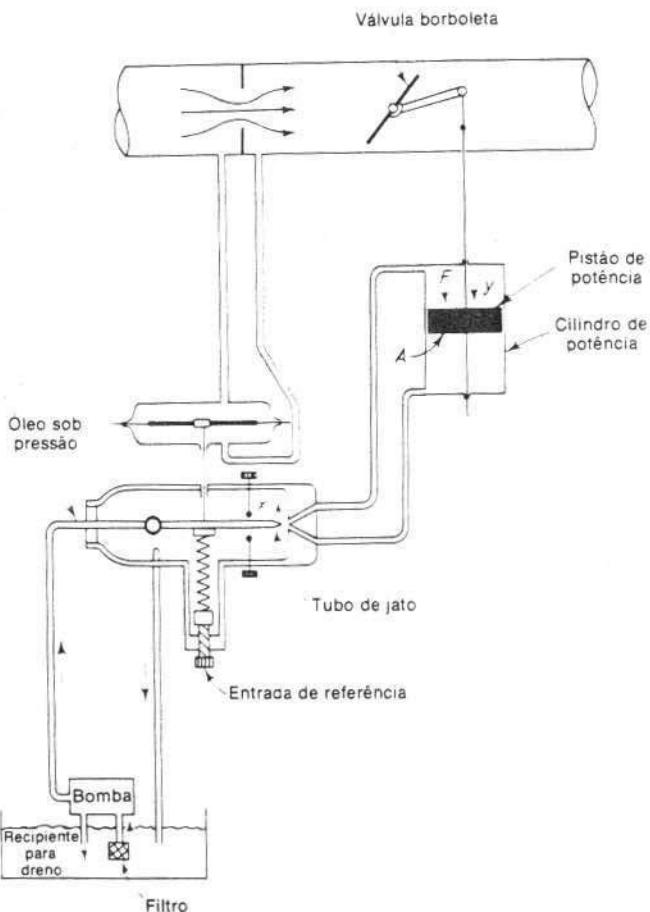


Fig. 5.57 Diagrama esquemático de um sistema de controle de fluxo usando um controlador de tubo de jato hidráulico.

O erro em regime estacionário para um distúrbio em degrau  $N(s) = n_0/s$  é

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-Rs^2}{RCs^2 + s + KR} \frac{n_0}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, um controlador integral elimina o erro em regime estacionário, ou desajuste, devido ao distúrbio em degrau. (O valor de  $K$  deve ser escolhido de modo que a resposta transitória devida à entrada de comando e/ou distúrbio amortecam com uma velocidade razoável. Vide Cap. 6 para análise de resposta transitória.)

**Problema A.5.3** A Fig. 5.57 mostra um controlador de cano de jato hidráulico aplicado a um sistema de controle de fluxo. O controlador de cano de jato governa a posição da válvula borboleta. Discuta a operação deste sistema. Construa um gráfico da curva possível relacionando o deslocamento  $x$  do bocal em relação à força total  $F$  atuando no pistão de potência.

**Solução.** A operação deste sistema é a seguinte: A taxa de fluxo é medida pelo orifício, e a diferença de pressão produzida por este orifício é transmitida ao diafragma do dispositivo medidor de pressão. O diafragma é ligado ao bocal de giro livre, ou cano de jato, através de uma ligação. O óleo a alta pressão é ejetado do bocal durante todo o tempo. Quando o bocal está na posição neutra, não flui óleo através de qualquer um dos canos para mover o pistão de potência. Se o bocal é deslocado pelo movimento do braço de balanço para um lado, o óleo sob alta pressão flui através do cano correspondente, e o óleo no cilindro de potência flui para o reservatório de dreno através do outro cano.

Suponha que o sistema esteja inicialmente em repouso. Se a entrada de referência for variada subitamente para uma taxa de fluxo maior, então o bocal é movido de modo tal a mover o pistão de potência e abrir a válvula borboleta. Haverá então um aumento na taxa de fluxo, a diferença de pressão através do orifício torna-se maior e o bocal retorna à posição neutra. O movimento do pistão de potência cessa quando  $x$ , o deslocamento do bocal, retorna e pára na posição neutra. (O controlador de cano de jato, portanto, possui uma propriedade de integração.)

A relação entre a força total  $F$  agindo no pistão de potência e o deslocamento  $x$  do bocal é indicada na Fig. 5.58. A força total é igual à diferença de pressão  $\Delta P$  através do pistão vezes a área  $A$  do pistão de potência. Para um pequeno deslocamento  $x$  do bocal, a força total  $F$  e o deslocamento  $x$  podem ser considerados proporcionais.

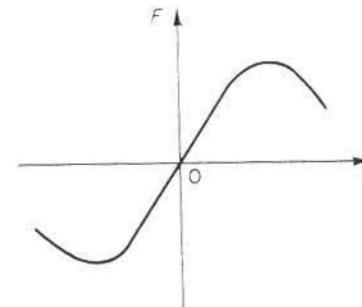


Fig. 5.58 Curva força versus deslocamento.

**Problema A.5.4** Desenhe um diagrama de blocos do controlador pneumático indicado na Fig. 5.59. Deduza então a função de transferência deste controlador.

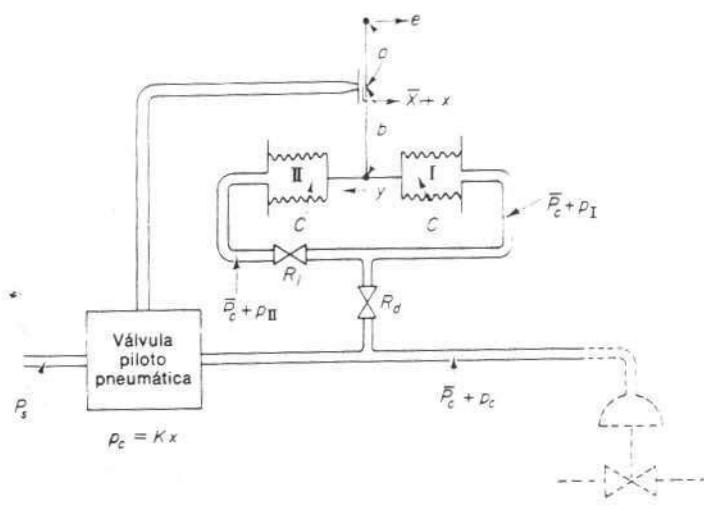


Fig. 5.59 Diagrama esquemático de um controlador pneumático.

Se a resistência  $R_d$  for removida (substituída pela tubulação de linha dimensionada), que ação de controle resultará? Se a resistência  $R_1$  for removida (substituída pela tubulação de linha dimensionada), que ação de controle resultará?

**Solução.** Vamos supor que quando  $e = 0$ , a distância haste-bocal é igual a  $\bar{x}$  e a pressão de controle é igual a  $\bar{p}_c$ . Na presente análise, suporemos pequenos desvios em relação aos respectivos valores de referência como segue:

$e$  = pequeno sinal erro

$x$  = pequena variação na distância bocal-haste

$p_e$  = pequena variação na pressão de controle

$p_{II}$  = pequena variação de pressão no fole II devida a pequena variação na pressão de controle

$y$  = pequeno deslocamento na extremidade inferior da haste

Neste controlador,  $p_e$  é transmitida ao fole I através da resistência  $R_d$ . Analogamente,  $p_e$  é transmitida ao fole II através da série de resistências  $R_d$  e  $R_1$ . Uma relação aproximada entre  $p_I$  e  $p_e$  é

$$\frac{P_I(s)}{P_e(s)} = \frac{1}{R_d Cs + 1} = \frac{1}{T_d s + 1}$$

onde

$$T_d = R_d C = \text{tempo derivativo}$$

Analogamente,  $p_{II}$  e  $p_e$  são relacionadas pela função de transferência

$$\frac{P_{II}(s)}{P_e(s)} = \frac{1}{R_1 Cs + 1} = \frac{1}{T_i s + 1}$$

onde

$$T_i = R_1 C = \text{tempo integral}$$

A equação de equilíbrio de forças para os dois foles é

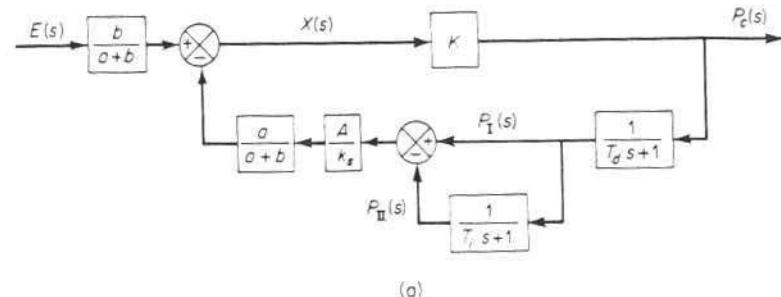
$$(p_1 - p_{II})A = k_x y$$

onde  $k_x$  é a dureza dos dois foles interligados e  $A$  é a área da seção transversal dos foles. A relação entre as variáveis  $e$ ,  $x$  e  $y$  é

$$x = \frac{b}{a+b} e - \frac{a}{a+b} y$$

A relação entre  $p_e$  e  $x$  é

$$p_e = Kx$$



(a)

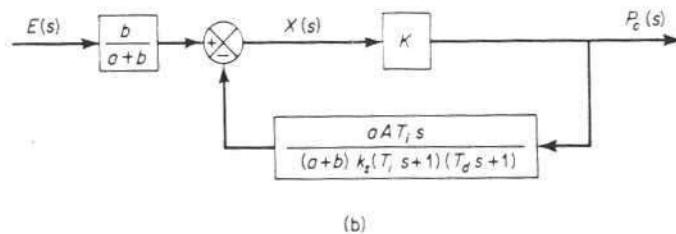


Fig. 5.60 (a) Diagrama de blocos do controlador pneumático mostrado na Fig. 5.59; (b) diagrama de blocos simplificado.

Das equações obtidas, pode ser desenhado um diagrama de blocos do controlador conforme indicado na Fig. 5.60(a). A simplificação deste diagrama de blocos resulta na Fig. 5.60(b).

A função de transferência entre  $P_c(s)$  e  $E(s)$  é

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a-b}K}{1 - K \frac{a}{a+b} \frac{A}{k_i} \left( \frac{T_i s}{T_i s + 1} \right) \left( \frac{1}{T_d s + 1} \right)}$$

Para um controlador prático, sob operação normal  $|KaAT_i|[(a+b)ks(T_i s + 1)(T_d s + 1)]$  é muito maior do que a unidade e  $T_i \gg T_d$ . Portanto, a função de transferência pode ser simplificada como segue:

$$\begin{aligned} \frac{P_c(s)}{E(s)} &\doteq \frac{bk_i(T_i s + 1)(T_d s + 1)}{aAT_i s} \\ &= \frac{bk_i}{aA} \left( \frac{T_i + T_d}{T_i} + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) \\ &\doteq K_p \left( 1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) \end{aligned}$$

onde

$$K_p = \frac{bk_i}{aA}$$

Portanto o controlador indicado na Fig. 5.59 é proporcional-mais-derivativo-mais-integral.

Se a resistência  $R_d$  for removida, ou  $R_d = 0$ , a ação resultante é a de um controlador proporcional-mais-integral.

Se a resistência  $R_i$  for removida, ou  $R_i = 0$ , a ação que resulta é a de um controlador proporcional de banda estreita ou de duas posições. (Note que as ações dos dois foles de realimentação se cancelam e não há realimentação.)

**Problema A.5.5** Obtenha a função de transferência do controlador indicado na Fig. 5.33(c).

**Solução.** A Fig. 5.61 mostra o circuito de realimentação usado no controlador mostrado na Fig. 5.33(c).

$$\frac{1}{C_d s} [I_1(s) - I_2(s)] + R_d I_1(s) = E_0(s)$$

$$\frac{1}{C_d s} [I_2(s) - I_1(s)] + \frac{1}{C_i s} I_2(s) + R_i I_2(s) = 0$$

Portanto,

$$\frac{I_2(s)}{E_0(s)} = \frac{C_i s}{R_i C_i R_d C_d s^2 + (R_i C_i + R_d C_i + R_d C_d) s + 1}$$

ou

$$\frac{E_1(s)}{E_0(s)} = \frac{R_i C_i s}{R_i C_i R_d C_d s^2 + (R_i C_i + R_d C_i + R_d C_d) s + 1}$$

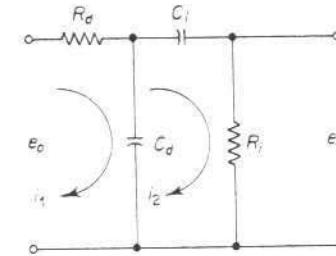


Fig. 5.61 Circuito de realimentação usado no controlador mostrado na Fig. 5.33(c).

Verificando que na Fig. 5.33(c)

$$(e_i - e_f)K = e_0, \quad e_f = e_1 \frac{R_2}{R_1}$$

obtemos

$$\left[ E_i(s) - \frac{R_2}{R_1} \left( \frac{R_i C_i E_0(s)}{R_i C_i R_d C_d s^2 + (R_i C_i + R_d C_i + R_d C_d) s + 1} \right) \right] K = E_0(s)$$

A função de transferência  $E_d(s)/E_i(s)$  é

$$\frac{E_d(s)}{E_i(s)} = \frac{K R_1 [R_i C_i R_d C_d s^2 + (R_i C_i + R_d C_i + R_d C_d) s + 1]}{K R_2 R_i C_i s - R_1 [R_i C_i R_d C_d s^2 + (R_i C_i + R_d C_i + R_d C_d) s + 1]}$$

Se o ganho de malha é muito maior do que a unidade, então esta última equação pode ser simplificada para

$$\begin{aligned} \frac{E_d(s)}{E_i(s)} &= \frac{R_1 [R_i C_i R_d C_d s^2 + (R_i C_i + R_d C_i + R_d C_d) s + 1]}{R_2 R_i C_i s} \\ &= K_p \left[ T_d s + \left( 1 + \frac{R_d}{R_i} + \frac{T_d}{T_i} \right) + \frac{1}{T_i s} \right] \end{aligned}$$

onde

$$K_p = R_1/R_2, \quad T_d = R_d C_d, \quad T_i = R_i C_i$$

Definindo

$$\alpha = 1 + \frac{R_d}{R_i} + \frac{T_d}{T_i}$$

Então,

$$\frac{E_d(s)}{E_i(s)} = K_p \alpha \left( 1 + \frac{T_d}{\alpha} s + \frac{1}{\alpha T_i s} \right)$$

Portanto, o controlador é proporcional-mais-derivativo-mais-integral.

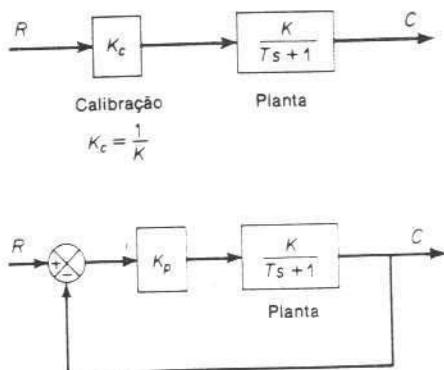


Fig. 5.62 Diagramas de blocos de um sistema de controle de malha-aberta e um sistema de controle de malha-fechada.

**Problema A.5.6** Considere o sistema de controle de malha-aberta e o sistema de controle de malha-fechada indicados na Fig. 5.62. No sistema de malha-aberta o ganho  $K_c$  é calibrado de modo que  $K_c = 1/K$ . Portanto, a função de transferência do sistema de controle de malha-aberta é

$$G_0(s) = \frac{1}{K} \frac{K}{Ts - 1} = \frac{1}{Ts + 1}$$

No sistema de controle de malha-fechada, o ganho  $K_p$  do controlador é ajustado de modo que  $K_p K >> 1$ .

Supondo uma entrada com degrau unitário, compare os erros em regime estacionário para estes sistemas de controle.

**Solução.** Para o sistema de controle de malha-aberta, o sinal erro é

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

ou

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - C(s) \\ &= [1 - G_0(s)]R(s) \end{aligned}$$

O erro de regime estacionário para a resposta de entrada ao degrau é

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s[1 - G_0(s)]\frac{1}{s} \\ &= 1 - G_0(0) \end{aligned}$$

Se  $G_0(0)$ , o ganho c.c. do sistema de controle de malha aberta, é igual à unidade, então o erro em regime estacionário é nulo. Devido a variações ambientais e envelhecimento de componentes, entretanto, o ganho c.c.  $G_0(0)$  apresentará deriva em relação ao zero conforme

transcorre o tempo e o erro em regime estacionário não permanecerá nulo por muito tempo. Este erro em regime estacionário em um sistema de controle de malha-aberta persistirá até que o sistema seja recalibrado.

Para o sistema de controle de malha-fechada, o sinal erro é

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - C(s) \\ &= \frac{1}{1 + G(s)} R(s) \end{aligned}$$

onde

$$G(s) = \frac{K_p K}{Ts + 1}$$

O erro de regime estacionário para uma entrada em degrau é

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{1}{1 + G(s)} \right] \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{1 + G(0)} \\ &= \frac{1}{1 + K_p K} \end{aligned}$$

No sistema de controle de malha fechada, o ganho  $K_p$  é ajustado em um valor muito maior do que  $1/K$ . Portanto o erro em regime estacionário pode ser feito pequeno, embora não nulo.

Vamos supor a seguinte variação na função de transferência da planta, supondo  $K_c$  e  $K_p$  constantes:

$$\frac{K + \Delta K}{Ts + 1}$$

Por simplicidade, vamos supor  $K = 10$ ,  $\Delta K = 1$ , ou  $\Delta K/K = 0.1$ . Então o erro em regime estacionário para uma entrada em degrau unitário no sistema de controle de malha-aberta resulta

$$\begin{aligned} e_{ss} &= 1 - \frac{1}{K} (K + \Delta K) \\ &= 1 - 1,1 \\ &= -0,1 \end{aligned}$$

No sistema de controle de malha-fechada, se  $K_p$  é ajustado para  $100/K$ , então o erro em regime estacionário para uma entrada em degrau unitário resulta

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \frac{1}{1 + G(0)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{100}{K} (K + \Delta K)} \\ &= \frac{1}{1 + 110} \\ &= 0,009 \end{aligned}$$

Portanto, o sistema de controle de malha-fechada é superior ao sistema de controle de malha-aberta na presença de variações ambientais, envelhecimento de componentes etc. que, definitivamente, afetam o desempenho em regime estacionário.

**Problema A.5.7** O diagrama de blocos da Fig. 5.63 mostra um sistema de controle de velocidade no qual o elemento de saída do sistema é sujeito a um distúrbio de torque. No diagrama,  $\Omega_r(s)$ ,  $\Omega(s)$ ,  $T(s)$  e  $N(s)$  correspondem às transformadas de Laplace da velocidade de referência, velocidade de saída, torque de excitação e torque de distúrbio, respectivamente. Na ausência de um torque de distúrbio, a velocidade de saída é igual à velocidade de referência.

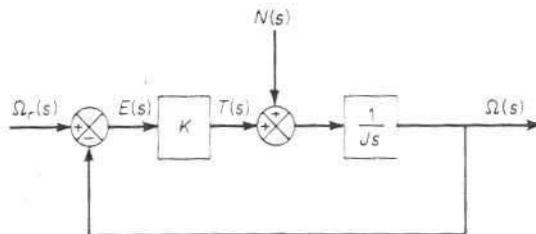


Fig. 5.63 Diagrama de blocos de um sistema de controle de velocidade.

Investigue a resposta deste sistema ao torque de distúrbio de degrau unitário. Suponha que a entrada de referência é nula, ou  $\Omega_r(s) = 0$ .

**Solução.** A Fig. 5.64 apresenta um diagrama de blocos modificado e conveniente para a presente análise. A função de transferência de malha-fechada é

$$\frac{\Omega_N(s)}{N(s)} = \frac{1}{Js + K}$$

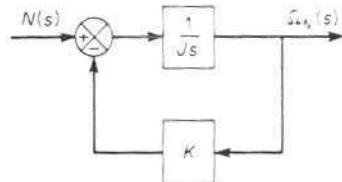


Fig. 5.64 Diagrama de blocos do sistema de controle de velocidade da Fig. 5.63 quando  $\Omega_r(s) = 0$ .

onde  $\Omega_N(s)$  é a transformada de Laplace da velocidade de saída devida ao torque de distúrbio. Para um torque de distúrbio com entrada unitária, a velocidade de saída em regime estacionário é

$$\omega_N(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Omega_N(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{Js + K} \frac{1}{s} \\ = \frac{1}{K}$$

Desta análise concluimos que, se um torque de distúrbio em degrau for aplicado ao elemento de saída do sistema, resultará uma velocidade de erro, de modo que o torque motor cancelará exatamente o torque do distúrbio. Para desenvolver este torque motor é necessário que haja um erro na velocidade de modo a resultar um torque não nulo.

**Problema A.5.8** No sistema considerado no Problema A.5.7, deseja-se eliminar tanto quanto possível os erros de velocidade devidos a distúrbios de torques.

É possível cancelar o efeito de um distúrbio de torque em regime estacionário de modo que um distúrbio de torque constante aplicado ao elemento de saída não acarrete variação de velocidade em regime estacionário?

**Solução.** Suponha que escolhemos um controlador conveniente cuja função de transferência é  $G_c(s)$ , como indicado na Fig. 5.65. Então, na ausência da entrada de referência, a função de

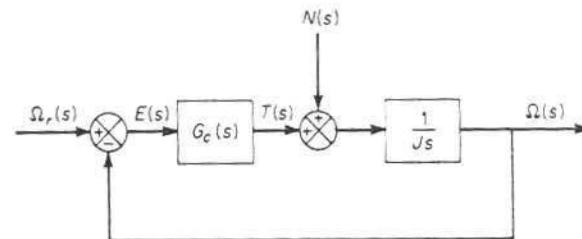


Fig. 5.65 Diagrama de blocos de um sistema de controle de velocidade.

transferência entre a velocidade de saída  $\Omega_N(s)$  e o torque de distúrbio  $N(s)$  é

$$\frac{\Omega_N(s)}{N(s)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{Js} G_c(s)} \\ = \frac{1}{Js + G_c(s)}$$

A velocidade de saída em regime estacionário devida a um torque de distúrbio em degrau unitário é

$$\omega_N(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Omega_N(s) \\ = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{Js + G_c(s)} \frac{1}{s} \\ = \frac{1}{G_c(0)}$$

De maneira a satisfazer o requisito de

$$\omega_N(\infty) = 0$$

devemos escolher  $G_c(0) = \infty$ . Isto pode ser realizado se escolhermos

$$G_c(s) = \frac{K}{s}$$

A ação de controle integral continuará a corrigir até que o erro seja nulo. Este controlador, entretanto, apresenta um problema de estabilidade porque a equação característica possui duas raízes imaginárias.

Um método para estabilizar este sistema é adicionar um modo proporcional ao controlador, ou escolher

$$G_c(s) = K_p + \frac{K}{s}$$

Com este controlador, o diagrama de blocos da Fig. 5.65 na ausência da entrada de referência pode ser modificado para o da Fig. 5.66. A função de transferência de malha-fechada

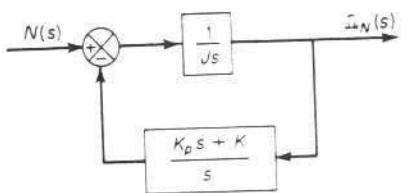


Fig. 5.66 Diagrama de blocos do sistema de controle de velocidade da Fig. 5.65 quando  $G_c(s) = K_p + (K/s)$  e  $\Omega_d(s) = 0$ .

$\Omega_d(s)/N(s)$  resulta

$$\frac{\Omega_d(s)}{N(s)} = \frac{s}{Js^2 + K_p s + K}$$

Para um torque de distúrbio com degrau unitário, a velocidade de saída em regime estacionário é

$$\begin{aligned} \omega_N(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s\Omega_d(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{Js^2 + K_p s + K} \frac{1}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, verificamos que o controlador proporcional-mais-integral elimina o erro de velocidade em regime estacionário.

O uso da ação de controle integral aumentou a ordem do sistema de uma unidade. (Isto tende a produzir uma resposta oscilatória.)

No sistema presente, um torque de distúrbio em degrau acarretará um erro transitório na velocidade de saída, porém o erro resulta nulo em regime estacionário. O integrador fornece uma saída não nula com erro nulo. (A saída não nula do integrador produz um torque motor que cancela exatamente o torque do distúrbio.)

Note que o integrador na função de transferência da planta não elimina o erro em regime estacionário devido ao torque do distúrbio. Para eliminar isto, deve haver um integrador antes do ponto onde entra o torque do distúrbio.

**Problema A.5.9** A Fig. 5.67(a) apresenta um diagrama esquemático de um dispositivo de controle pneumático. Consiste em quatro câmaras separadas por três diafragmas que são rigidamente ligados conforme indicado no diagrama. Este dispositivo possui dois tubos de entrada onde são conectadas duas pressões de controle  $P_1$  e  $P_2$ . Se tais pressões forem aplicadas, a montagem de diafragmas distorce e interrompe uma das duas entradas de fornecimento. A pressão de saída  $P_0$  é então igual ou a  $P_s$  ou a 0. A pressão de saída  $P_0$  pode ser indicada em um gráfico versus a diferença de pressão  $P_1 - P_2$ , conforme a Fig. 5.67(b). Este dispositivo pode ser utilizado como um dispositivo lógico.

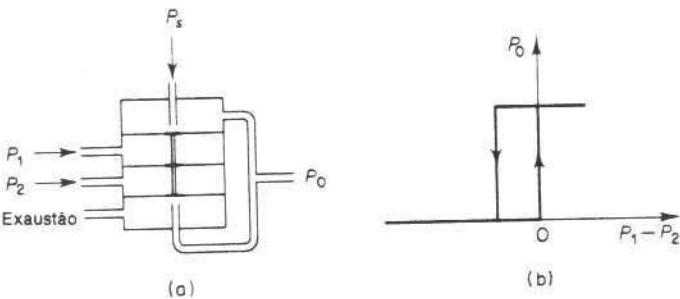


Fig. 5.67 (a) Diagrama esquemático de um dispositivo de controle pneumático; (b) curva característica.

Se uma pressão de polarização for aplicada a uma das câmaras, conforme a Fig. 5.68(a), a curva característica é deslocada conforme a Fig. 5.68(b).

A Fig. 5.69 mostra uma combinação dos dois dispositivos. Que operação lógica pode ser desempenhada por esta combinação? Supondo que a pressão de suprimento é igual a 1 e as pressões de entrada nos pontos A e B sejam ou 0 ou 1, determine a pressão de saída no ponto F.

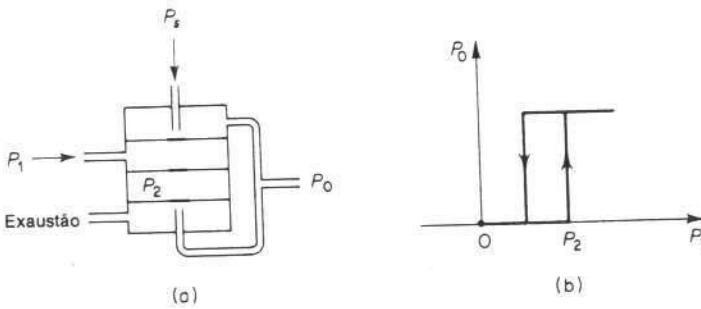


Fig. 5.68 (a) Diagrama esquemático de um dispositivo de controle pneumático; (b) curva característica.

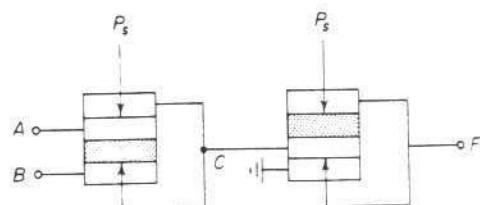


Fig. 5.69 Combinação de dois dispositivos de controle pneumáticos.

**Solução.** Da Fig. 5.69, obtemos a seguinte tabela:

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
0	0	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

Portanto, a operação lógica obtida é a NOR; isto é,  $F = \bar{A} \cdot \bar{B}$ .

## PROBLEMAS

**Problema B.5.1** O diagrama esquemático de um controlador pneumático é indicado na Fig. 5.70. Desenhe um diagrama de blocos do controlador e posteriormente deduza a função de transferência.

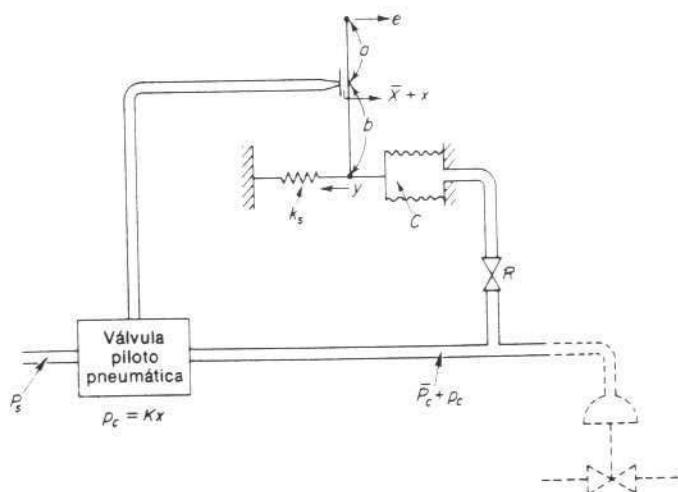


Fig. 5.70 Diagrama esquemático de um controlador pneumático.

**Problema B.5.2** A Fig. 5.71 mostra o diagrama esquemático de um servomotor hidráulico no qual o sinal erro é amplificado em dois estágios. Desenhe um diagrama de blocos do sistema e determine, posteriormente, a função de transferência entre  $y$  e  $x$ .

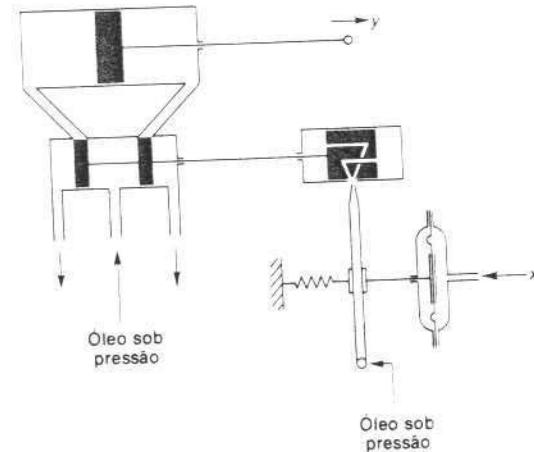


Fig. 5.71 Diagrama esquemático de um servomotor hidráulico.

**Problema B.5.3** A Fig. 5.72 fornece o diagrama esquemático de um servomotor hidráulico. Que tipo de ação de controle produz este servomotor?

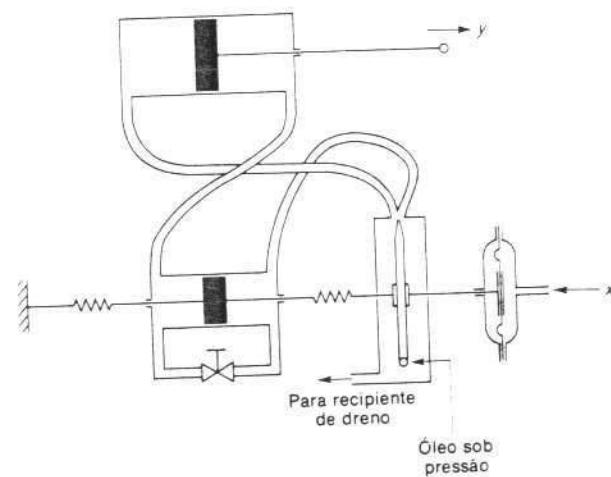


Fig. 5.72 Diagrama esquemático de um servomotor hidráulico.

**Problema B.5.4** A Fig. 5.73 mostra o diagrama esquemático de um sistema de controle de velocidade. O eixo é excitado a uma velocidade  $\omega$  através de uma redução por engrenagens. Os volantes girantes resultam em uma força centrífuga que é oposta à força da mola. A velocidade desejada é ajustada pela mola de pré-carga. Que tipo de ação de controle produz o controlador?

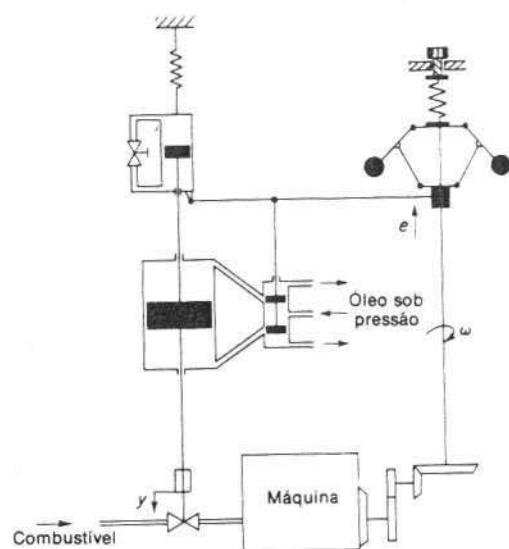


Fig. 5.73 Diagrama esquemático de um sistema de controle de velocidade.

**Problema B.5.5** Considere o controlador indicado na Fig. 5.74. Que tipo de ação de controle exerce este controlador?

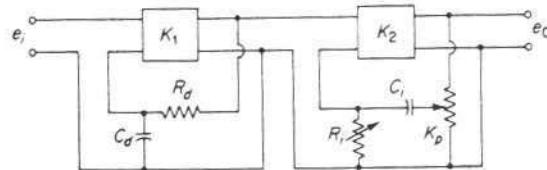


Fig. 5.74 Diagrama esquemático de um controlador eletrônico.

**Problema B.5.6** A Fig. 5.75(a) apresenta o diagrama esquemático de um sistema de controle de altitude de satélite. Pequenos jatos aplicam força de reação para girar o corpo do satélite na altitude desejada. Os dois jatos posicionados anti-simetricamente e indicados por A e B operam em pares. Suponha que cada jato aplique ao sistema uma força  $F/2$  e um torque  $Fl$ . O momento de inércia em relação ao centro de massa é  $J$ .

Suponha que o controlador de altitude seja do tipo proporcional-mais-derivativo. A representação do sistema em diagrama de blocos é fornecida na Fig. 5.75(b). Determine o valor do tempo derivativo de modo que a relação de amortecimento  $\zeta$  seja 0.7.

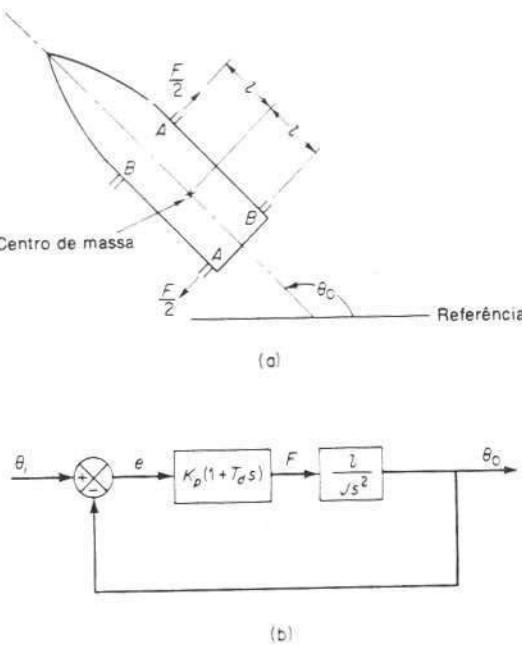


Fig. 5.75 (a) Diagrama esquemático de um sistema de controle de altitude de satélite; (b) diagrama de bloco.

**Problema B.5.7** Considere o sistema de múltiplos laços indicado na Fig. 5.76. Obtenha a função de transferência de malha-fechada entre  $C(s)$  e  $N(s)$ .

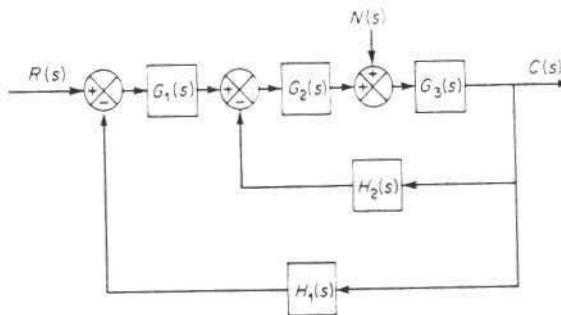


Fig. 5.76 Sistema de múltiplas malhas.

**Problema B.5.8** Se o caminho direto de um sistema de controle contém pelo menos um elemento integrante, então a saída continua a variar enquanto existir um erro. A saída pára quando o erro é precisamente zero. Se um distúrbio externo entra no sistema, é desejável ter um elemento integrante entre o elemento de medida do erro e o ponto onde entra o distúrbio, de modo que o efeito do distúrbio externo seja feito nulo em regime estacionário.

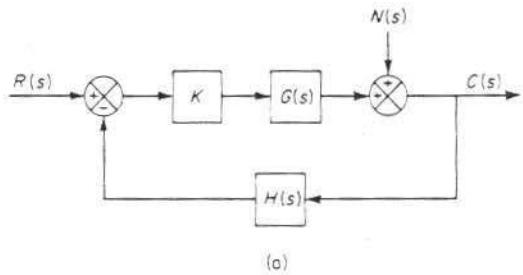
Mostre que se o distúrbio é uma função rampa, então o erro em regime estacionário, devido a este distúrbio em rampa, pode ser eliminado somente se dois integradores precedem o ponto onde entra o distúrbio.

**Problema B.5.9** Considere o sistema indicado na Fig. 5.77(a) onde  $K$  é um ganho ajustável e  $G(s)$  e  $H(s)$  são componentes fixos. A função de transferência de malha-fechada para o distúrbio é

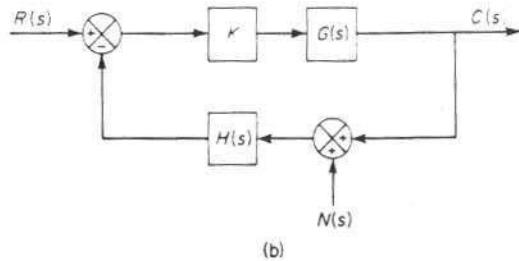
$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{1}{1 + KG(s)H(s)}$$

Para minimizar o efeito dos distúrbios, o ganho ajustável  $K$  deve ser escolhido tão grande quanto possível.

Isto é também verdade para o sistema mostrado na Fig. 5.77(b)?



(a)



(b)

Fig. 5.77 (a) Sistema de controle com distúrbio entrando no ramo direto; (b) sistema de controle com distúrbio entrando no ramo de realimentação.

**Problema B.5.10** A Fig. 5.78 mostra o diagrama esquemático de um dispositivo com fluido. Que função este dispositivo desempenha?

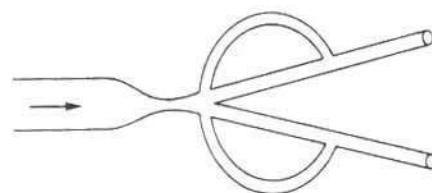


Fig. 5.78 Diagrama esquemático de um dispositivo com fluido.

**Problema B.5.11** Um resistor com fluido é um elemento passivo com fluido que, devido a perdas viscosas, produz uma queda de pressão em função do fluxo que o atravessa e possui uma função de transferência com componentes essencialmente reais na faixa de frequência de interesse.

Qual é o análogo elétrico de um elemento passivo com fluido que, devido à compressibilidade do fluido, produz uma pressão atrasada em relação ao fluxo por essencialmente 90°?

Qual é o análogo elétrico de um elemento passivo com fluido que, devido à inércia do fluido, possui uma queda de pressão avançada em relação ao fluxo por essencialmente 90°?

# 6

# Análise de Resposta Transitória

## 6.1 INTRODUÇÃO

Afirmamos no Cap. 4 que o primeiro passo na análise de um sistema de controle era derivar um modelo matemático para o sistema. Uma vez obtido tal modelo, existem vários métodos disponíveis para a análise do desempenho do sistema.

Na prática, o sinal de entrada em um sistema de controle não é conhecido *a priori*, mas é de caráter aleatório, e a entrada instantânea não pode ser expressa analiticamente. Apenas em alguns casos especiais se conhece o sinal de entrada *a priori* e se pode expressá-lo analiticamente ou por curvas, como no caso do controle automático de ferramentas de corte.

Na análise e projeto de sistemas de controle, devemos ter uma base para comparar o desempenho de vários sistemas de controle. Esta base pode ser obtida especificando-se sinais de teste de entrada particulares e comparando-se as respostas de vários sistemas a estes sinais de entrada.

Muitos critérios de projeto são baseados em tais sinais ou na resposta de sistemas a mudanças nas condições iniciais (sem utilizar qualquer sinal de teste). O uso de sinais de teste pode ser justificado pela correlação que existe entre as características de um sistema para um sinal de entrada de teste típico e a capacidade do sistema para responder aos sinais de entrada reais.

**Sinais de teste típicos.** Os sinais de entrada de teste comumente usados são as funções-degrau, funções-rampa, funções-aceleração, funções-impulso, funções-senoïdais etc. Com estes sinais de teste, tanto análises matemáticas como experimentais de sistemas de controle podem ser feitas com facilidade, pois estes sinais são funções muito simples do tempo.

A determinação de qual ou quais destes sinais de entrada típicos devem ser usados para analisar características do sistema depende da forma da entrada a que o sistema será sujeito mais freqüentemente durante operação normal. Se as entradas para um sistema de controle são funções que variam gradativamente com o tempo, para então uma função rampa de tempo pode ser um bom sinal de teste; e para um

sistema sujeito a entradas tipo choque, uma função impulso pode ser o melhor. Uma vez projetado um sistema de controle baseado em sinais de teste, normalmente o desempenho do sistema para entradas reais é satisfatório. O uso de tais sinais de teste nos permite comparar o desempenho de todos os sistemas na mesma base.

Este capítulo trata da resposta de sistemas a sinais aperiódicos (como, por exemplo, funções do tempo: degrau, rampa, aceleração e impulso). (Análise e projeto de sistemas baseados em sinais de teste senoidais são dados nos Caps. 9 e 10.)

**Resposta transitória e resposta estacionária.** A resposta temporal de um sistema de controle consiste em duas partes: a resposta transitória e a resposta estacionária. Entendemos por resposta transitória aquela que vai do estado inicial até o estado final. Por resposta estacionária, entendemos a maneira como a saída do sistema se comporta quando  $t$  tende a infinito.

**Estabilidade absoluta, estabilidade relativa, e erro estacionário.** Ao projetar um sistema de controle, devemos poder prever o comportamento dinâmico do sistema a partir do conhecimento dos componentes. A característica mais importante do comportamento dinâmico de um sistema de controle é a estabilidade absoluta, isto é, se o sistema é estável ou instável. Um sistema de controle está em equilíbrio se, na ausência de qualquer perturbação ou entrada, a saída permanece no mesmo estado. Um sistema de controle invariante no tempo e linear é estável se a saída volta ao seu estado de equilíbrio quando o sistema é sujeito a uma perturbação. Um sistema de controle, invariante no tempo e linear, é instável se uma oscilação da saída continua indefinidamente ou a saída diverge sem limite a partir de seu estado de equilíbrio quando o sistema é sujeito a uma perturbação. Em casos reais, a saída de um sistema físico pode aumentar até um certo valor mas ser limitada por "barreiras" mecânicas, ou o sistema pode parar de funcionar ou se tornar não linear após a saída ultrapassar uma certa amplitude de tal forma que as equações diferenciais lineares não são mais válidas. Não discutiremos a estabilidade de sistemas não lineares neste capítulo. (Tais análises sobre sistemas não lineares são vistas nos Caps. 11 e 15.)

Outros comportamentos (além de estabilidade absoluta) do sistema que devemos considerar cuidadosamente incluem a estabilidade relativa e o erro estacionário. Dado que um sistema de controle físico envolve armazenamento de energia, a saída do sistema, quando sujeito a uma entrada, não pode seguir a entrada imediatamente mas exibe uma resposta transitória antes que um regime permanente possa ser alcançado. A resposta transitória de um sistema de controle real muitas vezes mostra oscilações amortecidas antes de ir a um estado ou regime estacionário. Se a saída de um sistema em regime estacionário não concorda exatamente com a entrada, diz-se que o sistema apresenta erro estacionário. Este erro indica a precisão do sistema. Ao analisar um sistema de controle, devemos examinar o comportamento da resposta transitória, tal como o tempo necessário para alcançar um novo regime ou estado estacionário e o valor do erro enquanto o sistema segue um sinal de entrada, bem como o comportamento em regime estacionário.

## 6.2 FUNÇÕES DE RESPOSTA AO IMPULSO

Para um sistema linear, invariante no tempo, a função de transferência  $G(s)$  é

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

onde  $X(s)$  é a transformada de Laplace da entrada e  $Y(s)$  é a transformada de Laplace da saída. Segue-se que a saída  $Y(s)$  pode ser formulada como o produto de  $G(s)$  e  $X(s)$ , ou

(6.1)

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

Note que multiplicação no domínio complexo é equivalente à convolução no domínio do tempo, e portanto a transformada inversa de Laplace da Eq. (6.1) é dada pela seguinte integral de convolução:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t x(\tau)g(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t g(\tau)x(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

onde

$$g(t) = x(t) = 0 \quad \text{para } t < 0$$

**Funções de resposta ao impulso.** Considere a saída (resposta) de um sistema a uma entrada de impulso unitário quando as condições iniciais são nulas. Como a transformada de Laplace da função impulso unitário é a unidade, a transformada de Laplace da saída do sistema é simplesmente

(6.2)

$$Y(s) = G(s)$$

A transformada inversa de Laplace da saída do sistema, dada pela Eq. (6.2), é a função resposta ao impulso, ou

$$y(t) = g(t) = \text{função resposta ao impulso}$$

Esta função também é chamada a função "peso" do sistema.

A função resposta ao impulso  $g(t)$  é portanto a resposta de um sistema linear a uma entrada de impulso unitário quando as condições iniciais são nulas. A transformada de Laplace desta função nos dá a função de transferência. Portanto, a função de transferência e a função resposta ao impulso de um sistema linear invariantes no tempo contém a mesma informação sobre a dinâmica do sistema. Desta forma, é possível obter uma informação completa sobre as características dinâmicas do sistema excitando-o com uma entrada impulsiva e medindo a resposta. Na prática, uma entrada em forma de um pulso, cuja duração é muito curta comparada com as constantes de tempo significativas do sistema, pode ser considerada como impulsiva.

Considere a resposta de um sistema de primeira-ordem para uma entrada em pulso de amplitude  $1/t_1$  e duração  $t_1$ . Se a duração  $0 < t < t_1$  desta entrada é suficientemente pequena comparada com a constante de tempo do sistema  $T$ , então a resposta é aproximadamente uma resposta ao impulso unitário. Um método para determinar se  $t_1$  é suficientemente pequeno é aplicar uma entrada em pulso com amplitude  $2/t_1$  e duração  $t_1/2$ . Se as respostas à entrada em pulso original e do pulso modificado são praticamente as mesmas,  $t_1$  pode ser considerado suficientemente pequeno. A Fig. 6.1 mostra as curvas de resposta de um sistema de primeira-ordem a entradas em pulso e a entrada em impulso. Observe que, se  $t_1 < 0.17$ , a resposta do sistema é praticamente idêntica à resposta ao impulso unitário.

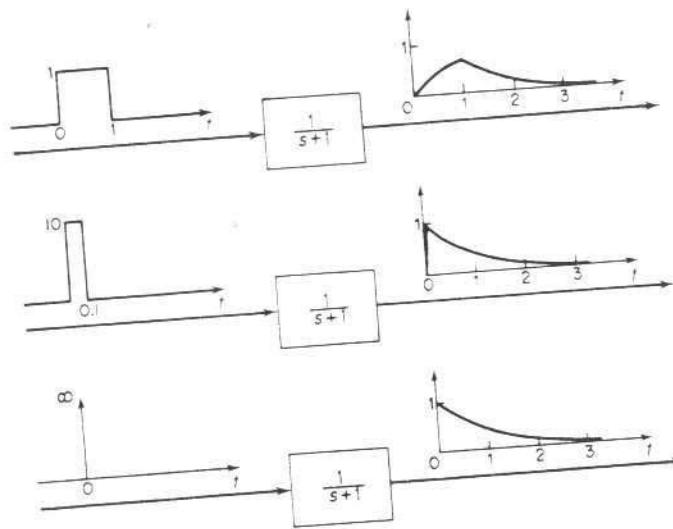


Fig. 6.1 Curvas de resposta para um sistema de primeira-ordem sujeito a entradas em pulso e impulso.

**Integrais de convolução.** Na prática podemos aproximar uma função impulso por uma função pulso de amplitude grande e de duração pequena, cuja área é igual à magnitude, ou área, da função impulso. Se a função de entrada  $x(t)$  é uma função em pulso com amplitude  $1/t_1$  e duração  $t_1$ , então a integral de convolução

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)g(t-\tau) d\tau$$

se torna

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{t_1} \frac{1}{t_1} g(t-\tau) d\tau \\ &\approx g(t) \quad \text{para } t_1 \text{ suficientemente pequeno} \end{aligned}$$

Portanto, a resposta de um sistema para um pulso de grande amplitude e pequena duração tendo área unitária é praticamente igual à função resposta ao impulso.

**Aproximação para integrais de convolução.** Considere o sistema visto na Fig. 6.2. Suponha que a função resposta ao impulso é  $g(t)$ . (É claro que a função de transferência do sistema é  $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$ ). A entrada  $x(t)$  se inicia em  $t = 0$  e dura até  $t = t_1$ . Achemos a resposta deste sistema para  $x(t)$  usando uma aproximação para a integral de convolução:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)g(t-\tau) d\tau$$

pela soma das respostas a  $N$  funções em pulso.

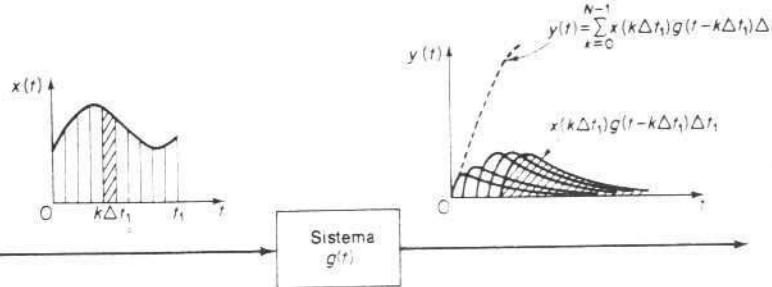


Fig. 6.2 Saída do sistema como uma somatória de convolução.

A entrada  $x(t)$  pode ser aproximada por uma seqüência de  $N$  funções em pulso cuja duração é  $\Delta t_1$ , onde  $\Delta t_1 = t_1/N$ . Se  $\Delta t_1$  é suficientemente pequeno quando comparado com a menor constante de tempo do sistema, então o  $k$ -ésimo pulso pode ser considerado como um impulso cuja magnitude é a área  $x(k\Delta t_1)\Delta t_1$ . A resposta ao  $k$ -ésimo pulso é então

$$x(k \Delta t_1) \Delta t_1 g(t - k \Delta t_1)$$

que é o produto da área do impulso e a função resposta ao impulso atrasada por  $k\Delta t_1$ .

Como o sistema em consideração é linear, o princípio da superposição se aplica. Portanto a resposta  $y(t)$  do sistema à seqüência de  $N$  funções em pulso é dada pela soma de convolução:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k \Delta t_1) g(t - k \Delta t_1) \Delta t_1 \quad (6.3)$$

onde

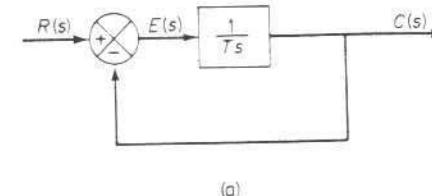
$$g(\tau) = 0 \quad \text{para } \tau < 0$$

A Eq. (6.3) fornece a resposta no instante  $t$ . Note que como  $g(\tau) = 0$  para  $\tau < 0$ , a resposta não precede a entrada. Portanto,

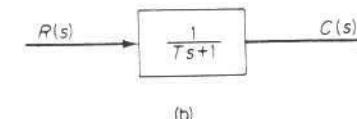
$$\begin{aligned} y(0 \leq t < \Delta t_1) &= x(0)g(t) \Delta t_1 \\ y(\Delta t_1 \leq t < 2\Delta t_1) &= [x(0)g(t) - x(\Delta t_1)g(t - \Delta t_1)] \Delta t_1 \\ y(2\Delta t_1 \leq t < 3\Delta t_1) &= [x(0)g(t) - x(\Delta t_1)g(t - \Delta t_1) \\ &\quad + x(2\Delta t_1)g(t - 2\Delta t_1)] \Delta t_1 \\ &\vdots \\ y(N\Delta t_1 - \Delta t_1 \leq t \leq N\Delta t_1) &= \left[ \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t_1)g(t - k\Delta t_1) \right] \Delta t_1 \end{aligned}$$

### 6.3 SISTEMAS DE PRIMEIRA-ORDEM

Considere o sistema de primeira-ordem visto na Fig. 6.3(a).



(a)



(b)

Fig. 6.3 (a) Diagrama de blocos de um sistema de primeira-ordem; (b) diagrama de blocos simplificado.

Fisicamente, este sistema pode representar um circuito  $R-C$ , um sistema térmico etc. Um diagrama de blocos simplificado é visto na Fig. 6.3(b). A relação entrada-saída é dada por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (6.4)$$

A seguir, analisaremos as respostas do sistema a entradas como degrau unitário, rampa unitária, e função impulso unitário. As condições iniciais serão nulas.

Note que todos os sistemas com a mesma função de transferência irão exibir a mesma saída em resposta à mesma entrada. Para qualquer sistema físico dado, pode-se dar uma interpretação física à resposta matemática.

**Resposta a degrau unitário de sistemas de primeira-ordem.** Como a transformada de Laplace da função de degrau unitário é  $1/s$ , substituindo  $R(s) = 1/s$  na Eq. (6.4), obtemos

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \frac{1}{s}$$

Expandindo  $C(s)$  em frações parciais, temos

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1} \quad (6.5)$$

Tomando a transformada inversa de Laplace da Eq. (6.5), obtemos

$$c(t) = 1 - e^{-t/T} \quad (t \geq 0) \quad (6.6)$$

A Eq. (6.6) diz que, inicialmente, a saída  $c(t)$  é nula e finalmente se torna unitária. Uma das características importantes desta curva de resposta exponencial  $c(t)$  é que em  $t = T$  o valor de  $c(t)$  é 0,632, ou a resposta  $c(t)$  alcançou 63,2% de sua variação total. Isto pode ser visto facilmente substituindo-se  $t = T$  em  $c(t)$ . Ou seja,

$$c(T) = 1 - e^{-1} = 0,632$$

Sabe-se que  $T$  é a constante de tempo do sistema. Quanto menor for a constante de tempo, mais rápida será a resposta do sistema. Outra característica importante da curva de resposta exponencial é que a inclinação da linha tangente em  $t = 0$  é  $1/T$ , pois

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{T} e^{-t/T} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T} \quad (6.7)$$

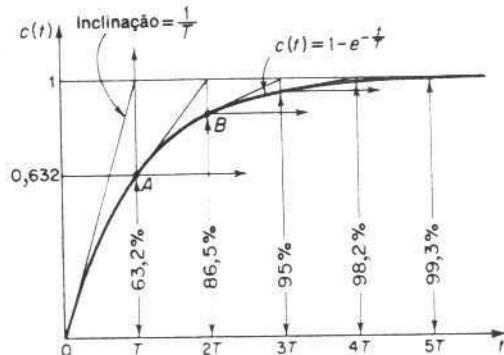


Fig. 6.4 Curva de resposta exponencial.

A saída alcançaria o valor final em  $t = T$  caso se mantivesse a sua velocidade inicial de resposta. Da Eq. (6.7) vemos que a inclinação da curva de resposta  $c(t)$  decresce monotonamente de  $1/T$  em  $t = 0$  para zero em  $t = \infty$ .

A curva de resposta exponencial  $c(t)$  dada pela Eq. (6.6) é vista na Fig. 6.4. Em uma constante de tempo, a curva de resposta exponencial foi de 0 a 63,2% do valor final. Em duas constantes de tempo, a resposta alcança 86,5% do valor final. Em  $t = 3T, 4T$  e  $5T$ , a resposta alcança 95, 98,2 e 99,3%, respectivamente, do valor final. Portanto, para  $t \geq 4T$ , a resposta permanece dentro de 2% do valor final. Como visto da Eq. (6.6), o regime estacionário é alcançado matematicamente somente após um tempo infinito. Na prática, entretanto, uma estimativa razoável do tempo de resposta é o tempo que a curva de resposta necessita para alcançar a linha de 2% do valor final, ou quatro constantes de tempo.

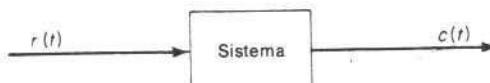


Fig. 6.5 Um sistema geral.

Considere o sistema visto na Fig. 6.5. Para determinar experimentalmente se o sistema é ou não de primeira-ordem, faça o gráfico da curva  $\log |c(t) - c(\infty)|$ , onde  $c(t)$  é a saída do sistema, em função de  $t$ . Se a curva é uma reta, o sistema é de primeira-ordem. A constante de tempo  $T$  pode ser lida do gráfico como sendo o tempo  $T$  que satisfaz a seguinte equação:

$$c(T) - c(\infty) = 0,368 [c(0) - c(\infty)]$$

Note que ao invés de fazer o gráfico de  $|c(t) - c(\infty)|$  em função de  $t$ , é conveniente fazer o gráfico de  $|c(t) - c(\infty)|/c(0) - c(\infty)$  em função de  $t$  em papel semilogarítmico, como visto na Fig. 6.6.

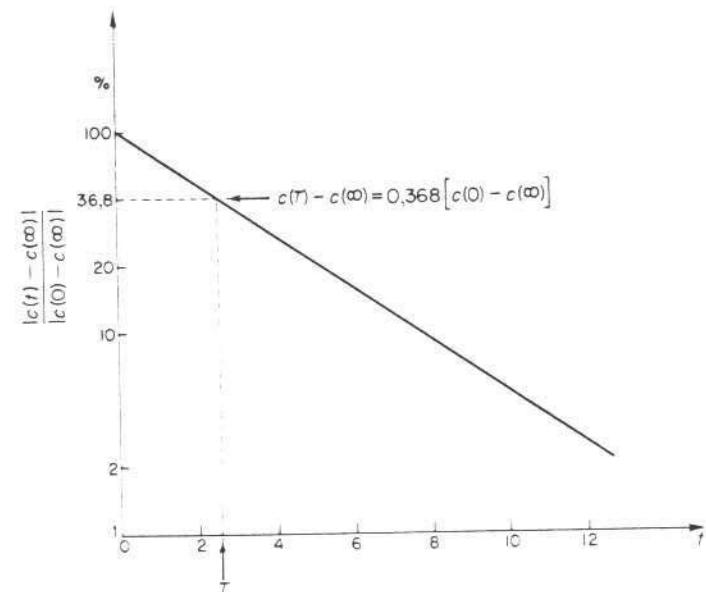


Fig. 6.6 Gráfico de  $|c(t) - c(\infty)|/c(0) - c(\infty)$  em função de  $t$  em papel semilog.

**Resposta a rampa unitária de sistemas de primeira-ordem.** Como a transformada de Laplace da função rampa unitária é  $1/s^2$ , obtemos a saída do sistema da Fig. 6.3(a) como

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \frac{1}{s^2}$$

Expandido  $C(s)$  em frações parciais, temos

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts + 1} \quad (6.8)$$

Tomando a transformada inversa de Laplace da Eq. (6.8), obtemos

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T} \quad (t \geq 0)$$

O sinal de erro  $e(t)$  é então

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) - c(t) \\ &= T(1 - e^{-t/T}) \end{aligned}$$

Quando  $t$  tende a infinito,  $e^{-t/T}$  tende a zero, e portanto o sinal de erro  $e(t)$  tende a  $T$  ou

$$e(\infty) = T$$

A entrada rampa unitária e a saída do sistema são vistas na Fig. 6.7. O erro ao seguir a entrada rampa unitária é igual a  $T$  para  $t$  suficientemente grande. Quanto menor a constante de tempo  $T$ , menor é o erro estacionário ao seguir uma entrada em rampa.

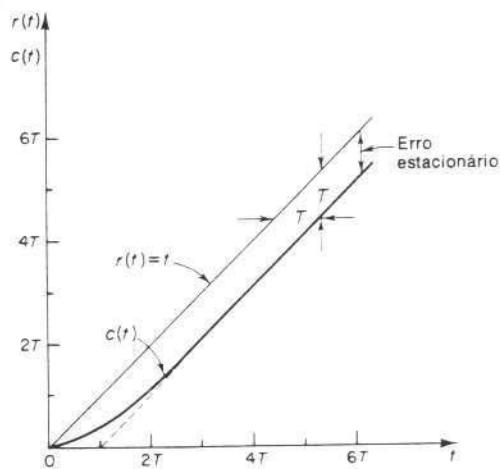


Fig. 6.7 Resposta a rampa unitária do sistema visto na Fig. 6.3(a).

**Resposta ao impulso unitário de sistemas de primeira-ordem.** Para a entrada impulso unitário  $R(s) = 1$ , e a saída do sistema da Fig. 6.3(a) pode ser obtida como

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

ou

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} \quad (t \geq 0) \quad (6.9)$$

A curva de resposta dada pela Eq. (6.9) é vista na Fig. 6.8.

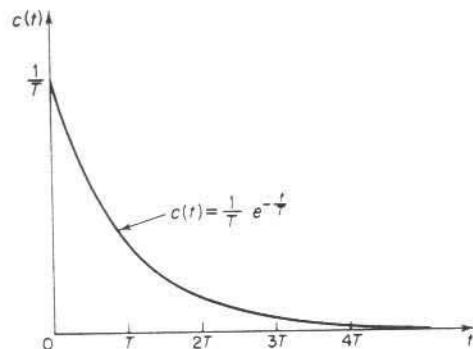


Fig. 6.8 Resposta a impulso unitário do sistema visto na Fig. 6.3(a).

**Uma propriedade importante de sistemas lineares invariantes no tempo.** Na análise vista acima, mostramos que para a entrada rampa unitária, a saída  $c(t)$  é

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T} \quad (t \geq 0)$$

Para a entrada degrau unitário, que é a derivada da entrada rampa unitária, a saída  $c(t)$  é

$$c(t) = 1 - e^{-t/T} \quad (t \geq 0)$$

Finalmente, para a entrada impulso unitário, que é a derivada da entrada degrau unitário, a saída  $c(t)$  é

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} \quad (t \geq 0)$$

A comparação da resposta do sistema a estas três entradas mostra claramente que a resposta à derivada de um sinal de entrada pode ser obtida diferenciando a resposta do sistema para o sinal original. Também pode ser visto que a resposta à integral do sinal original pode ser obtida integrando a resposta do sistema ao sinal original e determinando as constantes de integração a partir da condição inicial de saída zero. Como mencionado no Cap. 4, esta é a propriedade de sistemas lineares invariantes no tempo. Sistemas variantes no tempo e sistemas não lineares não possuem esta propriedade.

#### 6.4 SISTEMAS DE SEGUNDA-ORDEM

Nesta seção, vamos primeiro obter a resposta de um sistema de controle de segunda-ordem específico a uma entrada em degrau e depois estender a análise para a solução de outros sistemas de segunda-ordem.

**Um servomecanismo.** Considere o servomecanismo visto na Fig. 6.9(a). O objetivo deste sistema é controlar a posição da carga mecânica de acordo com a posição de referência. A operação deste sistema é como segue: Um par de potenciômetros age como um dispositivo que mede erro. Eles convertem as posições de

entrada e saída em sinais elétricos proporcionais. O sinal de entrada de comando determina a posição angular  $r$  do braço móvel do potenciômetro de entrada. A posição angular  $r$  é a entrada de referência para o sistema, e o potencial elétrico do braço é proporcional à posição angular do braço. A posição do eixo de saída determina a posição angular  $c$  do braço móvel do potenciômetro de saída. A diferença de potencial  $e_r - e_c = e$  é o sinal de erro, onde  $e_r$  é proporcional a  $r$  e  $e_c$  é proporcional a  $c$ ; ou seja,  $e_r = K_r r$  e  $e_c = K_c c$ , onde  $K_r$  é uma constante de proporcionalidade. O sinal de erro que aparece nos terminais do potenciômetro é amplificado pelo amplificador cuja constante de ganho é  $K_1$ . A tensão de saída deste amplificador é aplicada ao circuito de armadura do motor dc. (O amplificador deve ter uma impedância de entrada muito alta porque os potenciômetros são essencialmente circuitos de alta impedância e não toleram drenagem de corrente. Ao mesmo tempo, o amplificador deve ter impedância de saída baixa pois ele alimenta o circuito de armadura do motor.) Uma tensão fixa é aplicada ao enrolamento de campo. Se existe um erro, o motor desenvolve um torque para virar a carga de saída de tal forma a reduzir o erro para zero. Para corrente de campo constante, o torque desenvolvido pelo motor é

$$T = K_2 i_a$$

onde  $K_2$  é a constante de torque do motor e  $i_a$  é a corrente de armadura. Para o circuito de armadura,

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_3 \frac{d\theta}{dt} = K_1 e \quad (6.10)$$

onde  $K_3$  é a força contra eletromotriz do motor e  $\theta$  é o deslocamento angular do eixo do motor. A equação para equilíbrio de torque é

$$J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + f_0 \frac{d\theta}{dt} = T = K_2 i_a \quad (6.11)$$

onde  $J_0$  é a inércia da combinação do motor, carga, e engrenagens referidos ao eixo do motor e  $f_0$  é o coeficiente de atrito viscoso da combinação do motor, carga e engrenagens referidos ao eixo do motor. A função de transferência entre o deslocamento angular do eixo do motor e o sinal de erro é obtida das Eqs. (6.10) e (6.11) como segue:

$$\frac{\Theta(s)}{E(s)} = \frac{K_1 K_2}{s(L_a s + R_a)(J_0 s + f_0) + K_2 K_3 s} \quad (6.12)$$

onde  $\Theta(s) = \mathcal{L}[\theta(t)]$  e  $E(s) = \mathcal{L}[e(t)]$ . Supomos que a relação das engrenagens é tal que o eixo de saída gira  $n$  vezes para cada revolução do eixo do motor. Portanto,

$$C(s) = n\Theta(s) \quad (6.13)$$

onde  $C(s) = \mathcal{L}[c(t)]$  e  $c(t)$  é o deslocamento angular do eixo de saída. A relação entre  $E(s)$ ,  $R(s)$  e  $C(s)$  é

$$E(s) = K_0 [R(s) - C(s)] \quad (6.14)$$

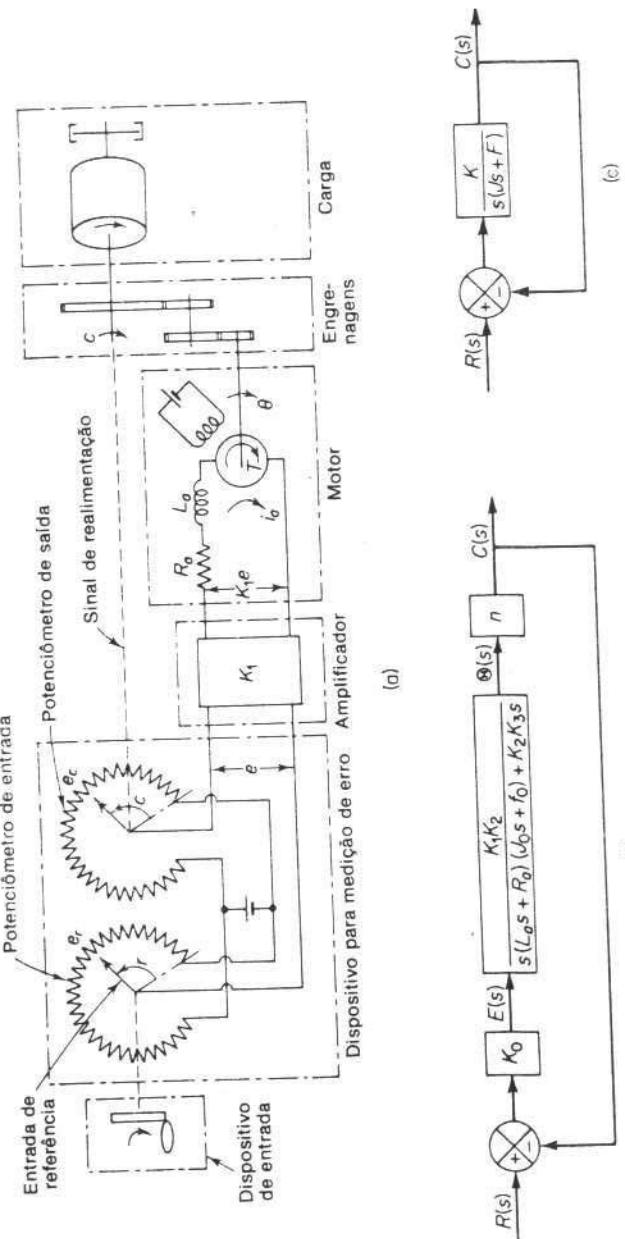


Fig. 6.9 (a) Diagrama esquemático de um servomecanismo; (b) e (c) são diagramas de blocos.

onde  $R(s) = \mathcal{L}[r(t)]$ . O diagrama de blocos deste sistema pode ser construído a partir das Eqs. (6.12), (6.13) e (6.14), como visto na Fig. 6.9(b). A função de transferência do elo direto deste sistema é

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s[(L_a s + R_a)(J_0 s + f_0) + K_2 K_3]}$$

Como  $L_a$  é normalmente pequeno, ele pode ser desprezado, e a função de transferência de elo direto se torna

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s[R_a(J_0 s + f_0) + K_2 K_3]} \\ &= \frac{K_0 K_1 K_2 n / R_a}{J_0 s^2 + \left(f_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}\right) s} \end{aligned} \quad (6.15)$$

O termo  $[f_0 + (K_2 K_3 / R_a)]s$  indica que a força contra eletromotriz do motor tem o efeito de aumentar o atrito viscoso do sistema. A inércia  $J_0$  e o coeficiente de atrito viscoso  $f_0 + (K_2 K_3 / R_a)$  são referidos ao eixo do motor. Quando  $J_0$  e  $f_0 + (K_2 K_3 / R_a)$  são multiplicados por  $1/n^2$ , a inércia e o coeficiente de atrito viscoso são expressos em termos do eixo de saída. Introduzindo novos parâmetros definidos por

$J = J_0/n^2$  = momento de inércia referido ao eixo de saída

$F = [f_0 + (K_2 K_3 / R_a)]/n^2$  = coeficiente de atrito viscoso referido ao eixo de saída

$K = K_0 K_1 K_2 / n R_a$

podemos simplificar a função de transferência  $G(s)$  dada pela Eq. (6.15), resultando

$$G(s) = \frac{K}{Js^2 + Fs}$$

O diagrama de blocos do sistema visto na Fig. 6.9(b) é então simplificado como visto na Fig. 6.9(c).

A seguir, investigaremos as respostas dinâmicas deste sistema para entradas degrau unitário, rampa unitária e impulso unitário.

**Resposta a degrau de sistemas de segunda-ordem.** A função de transferência de malha-fechada do sistema visto na Fig. 6.9(c) é

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{K}{Js^2 + Fs + K} \\ &= \frac{K}{\left[s + \frac{F}{2J} + \sqrt{\left(\frac{F}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}}\right] \left[s + \frac{F}{2J} - \sqrt{\left(\frac{F}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}}\right]} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Os pólos de malha-fechada são complexos se  $F^2 - 4JK < 0$ , e são reais se  $F^2 - 4JK \geq 0$ . Na análise de resposta transitória, é conveniente escrever

$$\frac{K}{J} = \omega_n^2, \quad \frac{F}{J} = 2\zeta\omega_n = 2\sigma$$

onde  $\sigma$  é chamada de atenuação;  $\omega_n$  é a freqüência natural não amortecida; e  $\zeta$  é o coeficiente de amortecimento do sistema. O coeficiente de amortecimento  $\zeta$  é a relação entre o amortecimento real  $F$  e o amortecimento crítico  $F_c = 2\sqrt{JK}$  ou

$$\zeta = \frac{F}{F_c} = \frac{F}{2\sqrt{JK}}$$

Com esta notação, o sistema visto na Fig. 6.9(c) pode ser modificado para aquele visto na Fig. 6.10, e a função de transferência de malha-fechada  $C(s)/R(s)$  dada pela Eq. (6.16) pode ser escrita

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6.17)$$

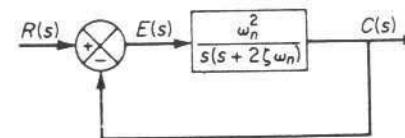


Fig. 6.10 Sistema de segunda-ordem.

O comportamento dinâmico de sistemas de segunda-ordem pode então ser descrito em termos de dois parâmetros  $\zeta$  e  $\omega_n$ . Se  $0 < \zeta < 1$ , os pólos de malha-fechada são complexos conjugados e se situam no semiplano esquerdo do plano  $s$ . O sistema então é dito subamortecido, e a resposta transitória é oscilatória. Se  $\zeta = 1$ , o sistema é dito criticamente amortecido. Sistemas sobreamortecidos correspondem a  $\zeta > 1$ . A resposta transitória de sistemas amortecidos criticamente e sobreamortecidos não oscila. Se  $\zeta = 0$ , a resposta transitória não decai.

Determinaremos agora a resposta do sistema visto na Fig. 6.10 para entrada degrau unitário. Consideramos três casos diferentes: o subamortecido ( $0 < \zeta < 1$ ), o criticamente amortecido ( $\zeta = 1$ ), e o sobreamortecido ( $\zeta > 1$ ).

(1) Caso subamortecido ( $0 < \zeta < 1$ ): Neste caso,  $C(s)/R(s)$  pode ser escrito

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

onde  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ . A freqüência  $\omega_d$  é chamada de freqüência natural amortecida. Para uma entrada degrau unitário,  $C(s)$  pode ser escrita

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s} \quad (6.18)$$

A transformada inversa de Laplace da Eq. (6.18) pode ser obtida facilmente se  $C(s)$  é escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned}$$

No Cap. 2 mostramos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$

Portanto a transformada inversa de Laplace da Eq. (6.18) é obtida como segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[C(s)] &= c(t) \\ &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left( \omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) \quad (t \geq 0) \end{aligned} \quad (6.19)$$

Este resultado pode, obviamente, ser obtido diretamente usando-se uma tabela de transformadas de Laplace. Da Eq. (6.19), pode-se ver que a freqüência da oscilação transitória é a freqüência natural amortecida  $\omega_d$  e portanto varia com o coeficiente de amortecimento  $\zeta$ . O sinal de erro para este sistema é a diferença entre a entrada e a saída, e portanto é

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) - c(t) \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

Este sinal de erro apresenta uma oscilação senoidal amortecida. Em regime permanente, ou em  $t = \infty$ , não existe erro entre a entrada e saída.

Se o coeficiente de amortecimento  $\zeta$  é igual a zero, a resposta se torna não amortecida e as oscilações continuam indefinidamente. A resposta  $c(t)$  para o caso de amortecimento nulo pode ser obtida substituindo-se  $\zeta = 0$  na Eq. (6.19), resultando

$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t \quad (t \geq 0) \quad (6.20)$$

Portanto, da Eq. (6.20), vemos que  $\omega_n$  representa a freqüência natural não amortecida do sistema. Isto é,  $\omega_n$  é a freqüência em que o sistema oscilaria se o amortecimento fosse diminuído para zero. Se o sistema linear tem amortecimento, mesmo que só um pouco, a freqüência natural não amortecida não pode ser observada experimentalmente. A freqüência que pode ser observada é a freqüência natural amortecida  $\omega_d$ , que é igual a  $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ . Esta freqüência é sempre menor que a freqüência natural não amortecida. Um aumento em  $\zeta$  irá reduzir a freqüência natural amortecida  $\omega_d$ . Se  $\zeta$  é aumentado além da unidade, a resposta se torna sobreamortecida e não irá oscilar.

(2) Caso de amortecimento crítico ( $\zeta = 1$ ): Se os dois pólos de  $C(s)/R(s)$  são aproximadamente iguais, o sistema pode ser aproximado por um com amortecimento crítico.

Para uma entrada degrau unitário,  $R(s) = 1/s$  e  $C(s)$  pode ser escrita

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \quad (6.21)$$

A transformada inversa de Laplace da Eq. (6.21) pode ser determinada como sendo

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad (t \geq 0) \quad (6.22)$$

Este resultado pode obviamente ser obtido fazendo-se  $\zeta$  tender a 1 (um) na Eq. (6.19) e usando-se o seguinte limite:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sin \omega_d t}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \omega_n t$$

(3) Caso sobreamortecido ( $\zeta > 1$ ): Neste caso, os dois pólos de  $C(s)/R(s)$  são reais negativos e distintos. Para uma entrada degrau unitário,  $R(s) = 1/s$  e  $C(s)$  pode ser escrita

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})s} \quad (6.23)$$

A transformada inversa de Laplace da Eq. (6.23) é

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \\ &= 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right) \quad (t \geq 0) \end{aligned} \quad (6.24)$$

onde  $s_1 = (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$  e  $s_2 = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$ . Portanto, a resposta  $c(t)$  inclui dois termos de exponencial decrescente.

Quando  $\zeta$  é consideravelmente maior que a unidade, uma das exponenciais decrescentes decai mais rapidamente que a outra, de tal forma que o termo da exponencial mais rápida (que corresponde a uma constante de tempo menor) pode ser desprezado. Isto é, se  $-s_2$  está localizado muito mais perto do eixo  $j\omega$  do que  $-s_1$  (o que significa  $|s_2| \ll |s_1|$ ), então, para se obter uma solução aproximada podemos desprezar  $-s_1$ . Isto é válido porque o efeito de  $-s_1$  na resposta é muito menor que o de  $-s_2$ , pois o termo contendo  $s_1$  na Eq. (6.24) decai muito mais rapidamente do que o termo contendo  $s_2$ . Uma vez que o termo de exponencial mais rápida desaparece, a resposta é similar à de um sistema de primeira-ordem, e  $C(s)/R(s)$  pode ser aproximado por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}{s + \zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} = \frac{s_2}{s + s_2}$$

Esta forma aproximada é uma consequência direta do fato de que os valores inicial e final tanto do  $C(s)/R(s)$  original como da aproximação são iguais.

Com a função de transferência aproximada  $C(s)/R(s)$ , a resposta a degrau unitário pode ser obtida como

$$C(s) = \frac{\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}{(s + \zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})s}$$

A resposta temporal  $c(t)$  é então

$$c(t) = 1 - e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (t \geq 0)$$

Isto fornece uma resposta aproximada ao degrau unitário quando um dos pólos de  $C(s)/R(s)$  pode ser desprezado. Um exemplo da resposta temporal aproximada  $c(t)$  com  $\zeta = 2$ ,  $\omega_n = 1$  é visto na Fig. 6.11, junto com a solução exata para  $c(t)$ . A solução aproximada é

$$c(t) = 1 - e^{-0.27t} \quad (t \geq 0)$$

e a solução exata para este caso é

$$c(t) = 1 + 0.077e^{-3.73t} - 1.077e^{-0.27t} \quad (t \geq 0)$$

A principal diferença entre as curvas de resposta exata e aproximada reside na parte inicial das curvas de resposta.

Uma família de curvas  $c(t)$  com vários valores de  $\zeta$  é vista na Fig. 6.12, onde a abscissa é a variável adimensional  $\omega_n t$ . As curvas são funções somente de  $\zeta$ . Estas curvas são obtidas das Eqs. (6.19), (6.22) e (6.24). O sistema descrito por estas equações está inicialmente em repouso.

Note que dois sistemas de segunda-ordem com o mesmo  $\zeta$  mas diferentes  $\omega_n$  terão o mesmo sobre-sinal e o mesmo padrão oscilatório. Diz-se que tais sistemas possuem a mesma estabilidade relativa.

É importante notar que para sistemas de segunda-ordem cujas funções de transferência de malha-fechada são diferentes daquela dada pela Eq. (6.17), as

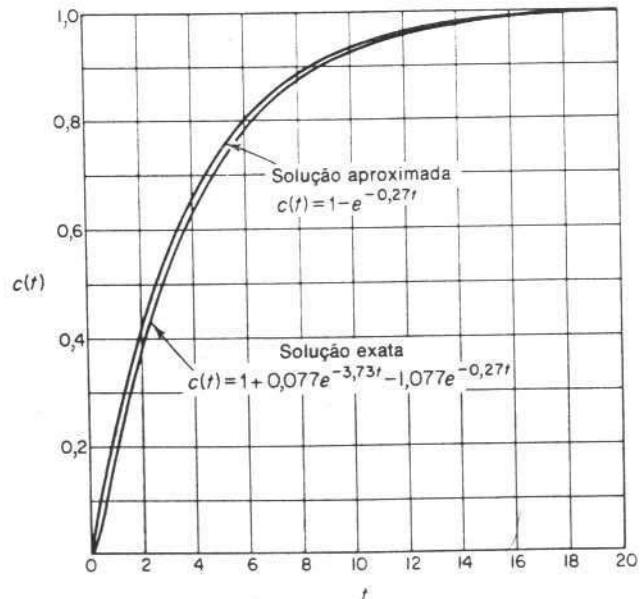


Fig. 6.11 Curvas de resposta a degrau unitário para o sistema visto na Fig. 6.10 (caso sobreamortecido.).

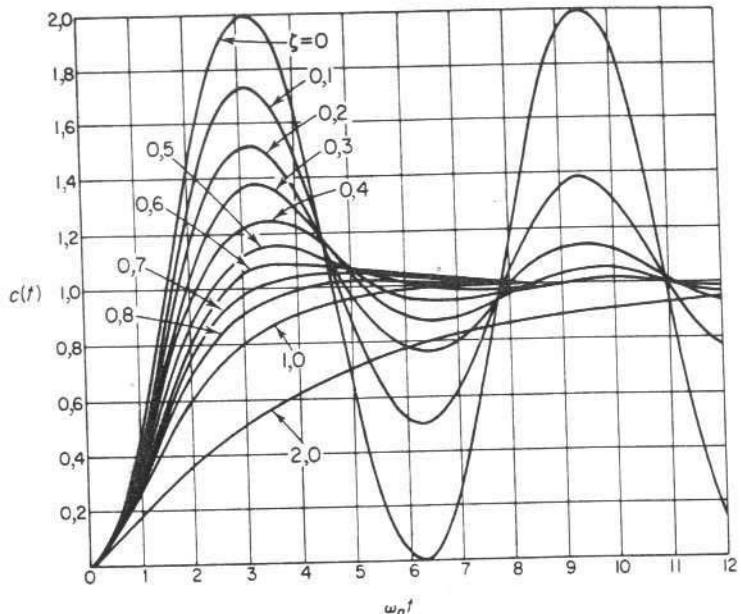


Fig. 6.12 Curvas de resposta a degrau unitário para o sistema visto na Fig. 6.10.

curvas de resposta ao degrau podem ter um aspecto bem diferente daquelas mostradas na Fig. 6.12.

Da Fig. 6.12, vemos que um sistema subamortecido com  $\zeta$  entre 0,5 e 0,8 chega perto do valor final mais rapidamente que um sistema com amortecimento crítico ou um sistema sobreamortecido. Entre os sistemas que respondem sem oscilação, um sistema com amortecimento crítico apresenta a resposta mais rápida. Um sistema sobreamortecido sempre é lento ao responder a quaisquer entradas.

**Definições de especificações de resposta transitória.** Em muitos casos práticos, as características de desempenho desejadas de sistemas de controle são especificadas em termos e grandezas no domínio do tempo. Sistemas com armazenamento de energia não podem responder instantaneamente e terão respostas transitórias sempre que sujeitos a entradas ou perturbações.

Freqüentemente, as características de desempenho de um sistema de controle são especificadas em termos da resposta transitória para uma entrada degrau unitário, pois esta entrada é fácil de se gerar e é suficientemente severa. (Se a resposta a uma entrada em degrau é conhecida, é matematicamente possível computar a resposta para qualquer entrada.)

A resposta transitória de um sistema para uma entrada degrau unitário depende das condições iniciais. Para conveniência na comparação de respostas transitórias de vários sistemas, costuma-se usar a condição inicial padrão de que o sistema está inicialmente em repouso com a saída e todas suas derivadas nulas. Desta forma as características de resposta podem ser facilmente comparadas.

A resposta transitória de um sistema de controle na prática geralmente apresenta oscilações amortecidas antes de alcançar o estado ou regime estacionário. Ao

especificar as características de resposta transitória de um sistema de controle para uma entrada degrau unitário, é comum se especificar o seguinte:<sup>\*</sup>

1. tempo de atraso,  $t_d$
2. tempo de subida,  $t_r$
3. instante do pico,  $t_p$
4. sobre-sinal máximo,  $M_p$
5. tempo de acomodação,  $t_s$

Estas especificações são definidas a seguir e mostradas graficamente na Fig. 6.13.

1. Tempo de atraso,  $t_d$ : o tempo de atraso é o tempo necessário para a resposta alcançar pela primeira vez a metade do valor final.
2. Tempo de subida,  $t_r$ : o tempo de subida é o tempo necessário para a resposta passar de 10% a 90%, 5% a 95%, ou 0% a 100% do seu valor final. Para sistemas de segunda-ordem sobreamortecidos, usa-se normalmente o tempo de subida de 0 a 100%. Para sistemas sobreamortecidos, normalmente se usa o tempo de subida de 10 a 90%.
3. Instante do pico,  $t_p$ : o instante do pico é o tempo necessário para a resposta alcançar o primeiro pico do sobre-sinal.
4. Sobre-sinal máximo (percentual),  $M_p$ : o sobre-sinal máximo é o máximo valor de pico da curva de resposta medida a partir do valor unitário (um). Se o valor final de regime estacionário da resposta difere da unidade, então comumente se usa o máximo sobre-sinal percentual. É definido por

$$\text{Sobre-sinal máximo percentual} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

O valor do sobre-sinal máximo (percentual) indica diretamente a estabilidade relativa do sistema.

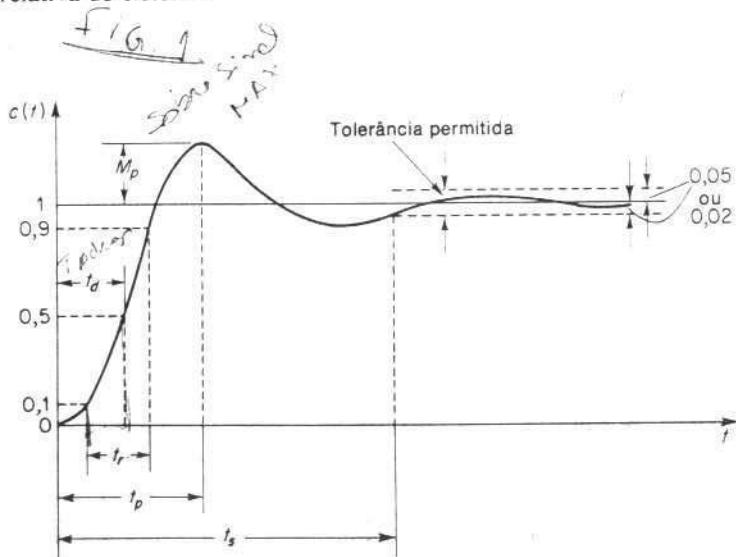


Fig. 6.13 Curva de resposta a degrau unitário mostrando  $t_d$ ,  $t_r$ ,  $t_p$ ,  $M_p$ , e  $t_s$ .

\* N. do T.: Os índices em  $t_d$ ,  $t_r$ ,  $t_p$ ,  $t_s$  vêm do inglês *delay time*, *rise time*, *peak time*, *settling time*.

5. Tempo de acomodação,  $t_s$ : o tempo de acomodação é o tempo necessário para a curva de resposta alcançar e permanecer dentro de uma faixa em torno do valor final, faixa esta de magnitude especificada por uma porcentagem absoluta do valor final (normalmente 5% ou 2%). O tempo de acomodação está relacionado com a maior constante de tempo do sistema de controle. A escolha de que porcentagem usar no critério de erro pode ser determinada a partir dos objetivos do projeto de sistema em questão.

As especificações de domínio de tempo que acabamos de ver são bastante importantes visto que a maioria dos sistemas de controle são sistemas de domínio do tempo; isto é, eles devem apresentar respostas temporais aceitáveis. (Isto significa que o sistema de controle deve ser modificado até que a resposta transitória seja satisfatória.) Note que se especificamos os valores de  $t_d$ ,  $t_r$ ,  $t_p$ ,  $t_s$  e  $M_p$ , então a forma da curva de resposta está virtualmente determinada. Isto pode ser visto claramente na Fig. 6.14.

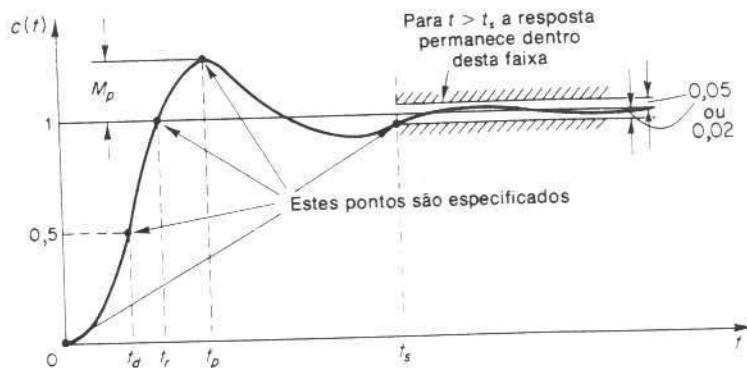


Fig. 6.14 Especificações de resposta transitória.

Note que nem todas estas especificações são aplicáveis para qualquer caso em estudo. Por exemplo, para um sistema sobreamortecido, os termos instante do pico e sobre-sinal máximo não se aplicam. (Para sistemas que apresentam erros de regime estacionário para entradas em degrau, este erro deve ser mantido dentro de um nível percentual especificado. Discussões detalhadas de erros de regime estacionário são vistas no Cap. 7.)

**Alguns comentários sobre especificações de respostas transitórias.** Exceto em certas aplicações onde não se podem tolerar oscilações, é desejável que a resposta transitória seja suficientemente rápida e suficientemente amortecida. Portanto, para uma desejada resposta transitória de um sistema de segunda-ordem, o coeficiente de amortecimento deve estar entre 0,4 e 0,8. Valores pequenos de  $\zeta$  ( $\zeta < 0,4$ ) resultam em sobre-sinal excessivo na resposta transitória, e um sistema com um valor grande de  $\zeta$  ( $\zeta > 0,8$ ) responderá de forma lenta.

Veremos mais tarde que o sobre-sinal máximo e o tempo de subida são especificações conflitantes. Em outras palavras, não se podem minimizar sobre-sinal máximo e o tempo de subida simultaneamente. Se diminuirmos um deles, o outro necessariamente aumentará.

**Sistemas de segunda-ordem e especificações de resposta transitória.** A seguir, obteremos expressões para o tempo de subida, instante do pico, sobre-sinal máximo, e tempo de acomodação de sistemas de segunda-ordem dados pela Eq. (6.17). Estas expressões serão obtidas em termos de  $\zeta$  e  $\omega_n$ . Supõe-se que o sistema é subamortecido.

Tempo de subida  $t_r$ : Referindo-se à Eq. (6.19), obtemos o tempo de subida  $t_r$ , fazendo  $c(t_r) = 1$  ou

$$c(t_r) = 1 = 1 - e^{-\zeta\omega_d t_r} \left( \cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r \right) \quad (6.25)$$

Como  $e^{-\zeta\omega_d t_r} \neq 0$ , obtemos da Eq. (6.25) a seguinte equação:

$$\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r = 0$$

ou

$$\tan \omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = -\frac{\omega_d}{\sigma}$$

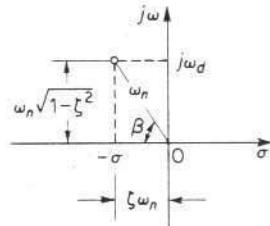


Fig. 6.15 Definição do ângulo  $\beta$ .

Portanto, o tempo de subida  $t_r$  é

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left( \frac{\omega_d}{-\sigma} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad (6.26)$$

onde  $\beta$  é definido na Fig. 6.15. Pode-se ver que os valores de  $\tan^{-1}(-\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta)$  fica entre  $\pi/2$  e  $\pi$ . Se  $\zeta = 0_+$ , então  $\tan^{-1}(-\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta) = \pi/2$ ; e se  $\zeta = 1_-$ , então  $\tan^{-1}(-\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta) = \pi$ . Claramente, para um valor pequeno de  $t_r$ ,  $\omega_n$  deve ser grande.

Instante do pico  $t_p$ : Referindo-se à Eq. (6.19), podemos obter o instante do pico diferenciando  $c(t)$  com respeito ao tempo e fazendo a derivada igual a zero, ou

$$\frac{dc}{dt} \Big|_{t=t_p} = (\sin \omega_d t_p) \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_d t_p} = 0$$

Isto resulta na seguinte equação:

$$\sin \omega_d t_p = 0$$

ou

$$\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

Como o instante do pico  $t_p$  corresponde ao primeiro pico do sobre-sinal,  $\omega_d t_p = \pi$ . Portanto,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (6.27)$$

O instante do pico  $t_p$  corresponde a meio ciclo da freqüência de oscilação amortecida.

Sobre-sinal máximo  $M_p$ : O sobre-sinal máximo ocorre no instante do pico ou em  $t = t_p = \pi/\omega_d$ . Portanto, da Eq. (6.19),  $M_p$  é obtido como

$$\begin{aligned} M_p &= c(t_p) - 1 \\ &= -e^{-\zeta\omega_n(\pi/\omega_d)} \left( \cos \pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \pi \right) \\ &= e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} \end{aligned} \quad (6.28)$$

O sobre-sinal máximo percentual é  $e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} \times 100\%$ .

Tempo de acomodação  $t_s$ : Para um sistema subamortecido de segunda-ordem, a resposta transitória é obtida da Eq. (6.19) como

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left( \omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \quad (t \geq 0)$$

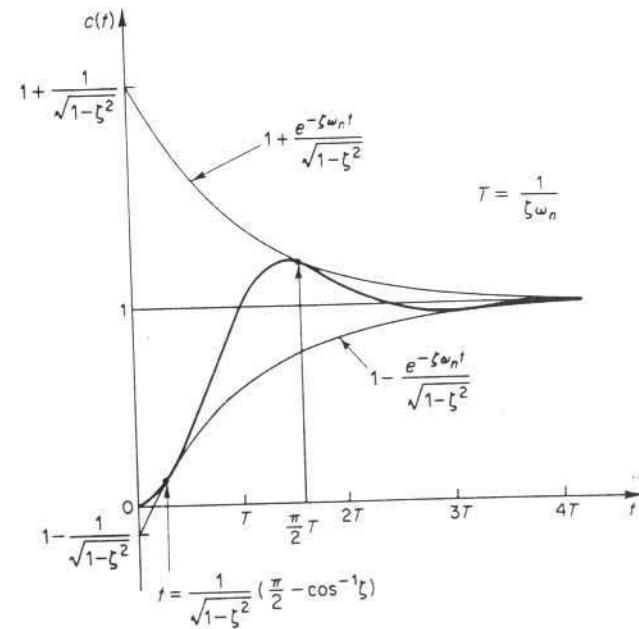


Fig. 6.16 Um par de curvas envoltórias da curva de resposta a degrau unitário do sistema visto na Fig. 6.10.

As curvas  $1 \pm (e^{-\zeta\omega_n t} / \sqrt{1 - \zeta^2})$  são as curvas envoltórias da resposta transitória para uma entrada degrau unitário. A curva de resposta  $c(t)$  sempre permanece internamente a um par de curvas envoltórias, como visto na Fig. 6.16. A constante de tempo destas curvas envoltórias é  $1/\zeta\omega_n$ .

A velocidade de declínio da resposta transitória depende do valor da constante de tempo  $1/\zeta\omega_n$ . Para um dado  $\omega_n$ , o tempo de acomodação  $t_s$  é uma função do coeficiente de amortecimento  $\zeta$ . Da Fig. 6.12, vemos que para o mesmo  $\omega_n$  e para uma gama de  $\zeta$  entre 0 e 1, o tempo de acomodação  $t_s$  para um sistema de amortecimento muito baixo é maior do que para um sistema adequadamente amortecido. Para um sistema sobreamortecido o tempo de acomodação  $t_s$  se torna grande por causa do início lento da resposta.

O tempo de acomodação correspondendo a uma faixa de tolerância de  $\pm 2\%$  pode ser medido em termos da constante de tempo  $T = 1/\zeta\omega_n$ , a partir das curvas da Fig. 6.12 para diferentes valores de  $\zeta$ . Os resultados são mostrados na Fig. 6.17. Para  $0 < \zeta < 0.9$ , se é utilizado o critério de  $5\%$ , então  $t_s$  é aproximadamente quatro vezes a constante de tempo do sistema ou

$$t_s = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (6.29)$$

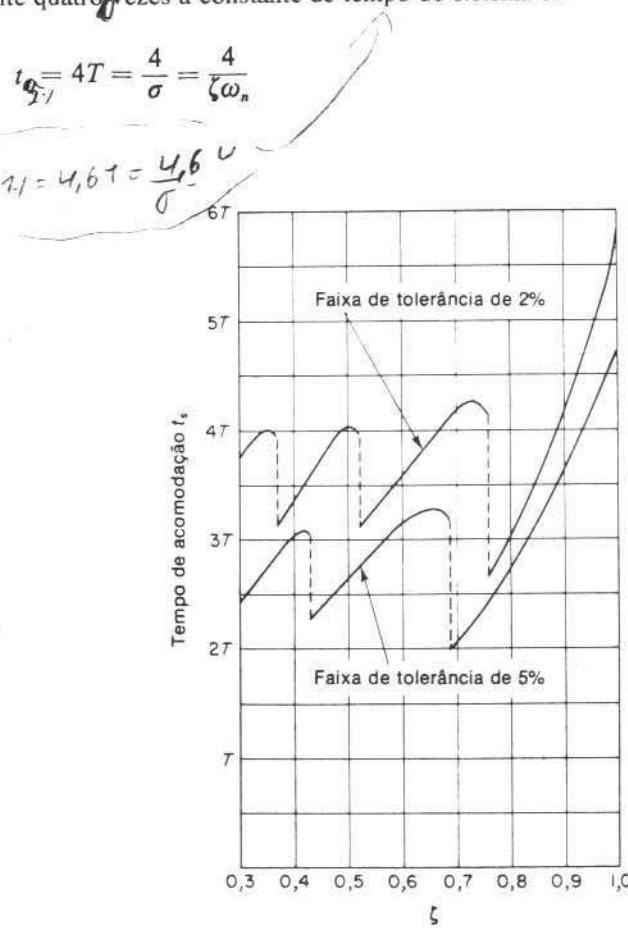


Fig. 6.17 Curvas de tempo de acomodação  $t_s$  em função de  $\zeta$ .

Se é utilizado o critério de 5%, então  $t_s$  é aproximadamente três vezes a constante de tempo ou

$$t_s = 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (6.30)$$

O tempo de acomodação dado pela Eq. (6.29) [ou Eq. (6.30)] tem um valor mínimo em torno de  $\zeta = 0.76$  (ou  $\zeta = 0.68$ ) e em seguida aumenta quase linearmente para valores grandes de  $\zeta$ . As descontinuidades nas curvas da Fig. 6.17 acontecem porque uma variação infinitesimal no valor de  $\zeta$  pode causar uma variação finita no tempo de acomodação, como visto na Fig. 6.18.

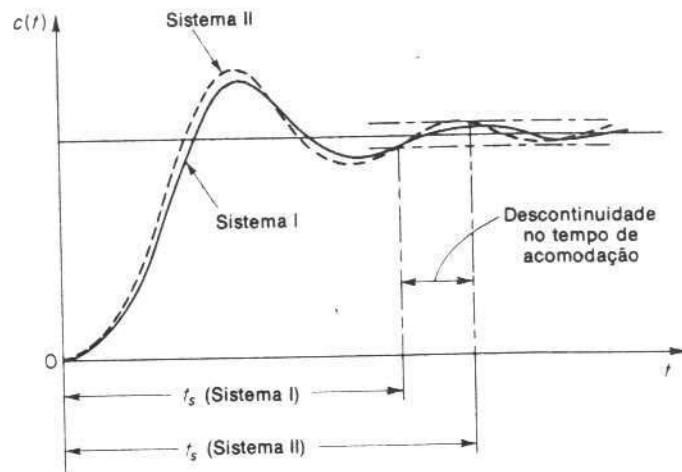
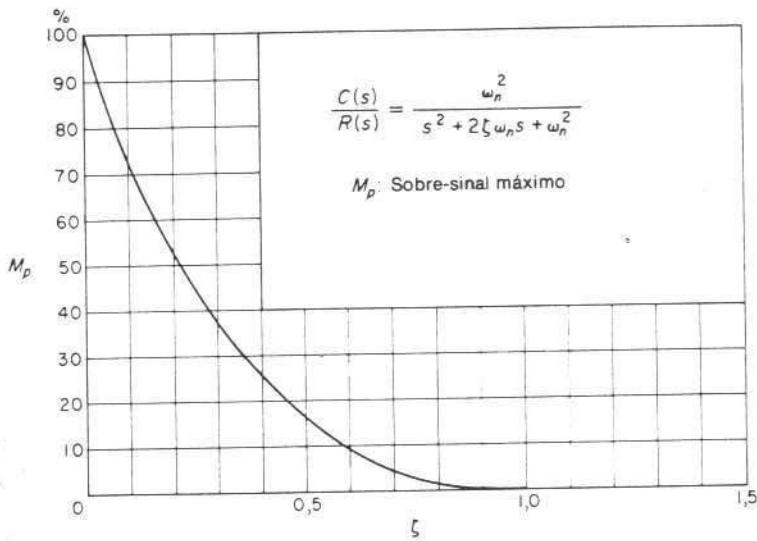


Fig. 6.18 Curvas de resposta a degrau unitário mostrando uma descontinuidade no tempo de acomodação.

Note que o tempo de acomodação é inversamente proporcional ao produto do coeficiente de amortecimento e a freqüência natural não amortecida do sistema. Como o valor de  $\zeta$  é normalmente determinado a partir da especificação requerida de sobre-sinal máximo, o tempo de acomodação é determinado principalmente pela freqüência natural não amortecida  $\omega_n$ . Isto significa que a duração do período transitório pode ser modificada, sem modificar o sobre-sinal máximo, através do ajuste da freqüência natural não amortecida.

Da análise anterior, é evidente que para uma resposta rápida,  $\omega_n$  deve ser grande. Para limitar o sobre-sinal máximo  $M_p$  e fazer o tempo de acomodação pequeno, o coeficiente de amortecimento  $\zeta$  não deve ser muito pequeno. A relação entre o sobre-sinal máximo percentual  $M_p$  e o coeficiente de amortecimento  $\zeta$  é mostrada na Fig. 6.19. Note que se o coeficiente de amortecimento está entre 0,4 e 0,8, então o sobre-sinal máximo percentual para resposta a degrau está entre 25% e 2,5%.

*Exemplo 6.1* Considere o sistema visto na Fig. 6.10, onde  $\zeta = 0,6$  e  $\omega_n = 5$  rad/s. Vamos obter o tempo de subida  $t_r$ , instante do pico  $t_p$ , sobre-sinal máximo  $M_p$ , e o tempo de acomodação  $t_s$ , quando o sistema é sujeito a uma entrada degrau unitário.



Para os valores dados de  $\zeta$  e  $\omega_n$ , obtemos  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 4$  e  $\sigma = \zeta \omega_n = 3$ .

Tempo de subida  $t_r$ : O tempo de subida é

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{3,14 - \beta}{4}$$

$$2\beta\omega = 1$$

onde  $\beta$  é dado por

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\omega_d}{\sigma} = \tan^{-1} \frac{4}{3} = 0,93 \text{ rad}$$

O tempo de subida  $t_r$  é então

$$t_r = \frac{3,14 - 0,93}{4} = 0,55 \text{ s}$$

Instante do pico  $t_p$ : O instante do pico é

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3,14}{4} = 0,785 \text{ s}$$

Sobre-sinal máximo  $M_p$ : O sobre-sinal máximo é

$$M_p = e^{-(\sigma \cdot \omega_d) \pi} = e^{-(3/4) \times 3,14} = 0,095$$

O sobre-sinal máximo percentual é então 9,5%.

Tempo de acomodação  $t_s$ : Para o critério de 2%, o tempo de acomodação é

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{3} = 1,33 \text{ s}$$

Para o critério de 5%,

$$t_s = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{3} = 1 \text{ s}$$

**Resposta impulsiva de sistemas de segunda-ordem.** Para uma entrada impulso unitário  $r(t)$ , a correspondente transformada de Laplace é unitária, ou  $R(s) = 1$ . A resposta ao impulso unitário  $C(s)$  do sistema de segunda-ordem visto na Fig. 6.10 é

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

A transformada inversa de Laplace desta equação resulta na solução temporal para a resposta  $c(t)$  como segue:

Para  $0 \leq \zeta < 1$ ,

$$c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \quad (t \geq 0) \quad (6.31)$$

Para  $\zeta = 1$ ,

$$c(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \quad (t \geq 0) \quad (6.32)$$

Para  $\zeta > 1$ ,

$$c(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (t \geq 0) \quad (6.33)$$

Note que podemos, sem tomar a transformada inversa de Laplace de  $C(s)$ , obter a resposta temporal  $c(t)$  diferenciando a correspondente resposta ao degrau unitário, uma vez que a função impulso unitário é a derivada temporal da função degrau unitário. Uma família de curvas de resposta a impulso unitário dadas pelas Eqs. (6.31) e (6.32) com vários valores de  $\zeta$  é vista na Fig. 6.20. As curvas  $c(t)/\omega_n$  são mostradas em função da variável adimensional  $\omega_n t$ , e portanto são funções apenas de  $\zeta$ . Para os casos de amortecimento crítico e sobreamortecimento, a resposta ao impulso unitário é sempre positiva ou nula; i.e.,  $c(t) \geq 0$ . Isto pode ser visto nas Eqs. (6.32) e (6.33). Para o caso subamortecido, a resposta ao impulso unitário  $c(t)$  oscila em torno de zero e assume valores positivos e negativos.

Da análise anterior podemos concluir que, se a resposta ao impulso unitário  $c(t)$  não muda de sinal, o sistema ou é criticamente amortecido ou é sobreamortecido, e neste caso a correspondente resposta ao degrau não tem sobre-sinal mas cresce ou decresce monotonicamente e tende a um valor constante.

O sobre-sinal máximo para a resposta ao impulso unitário do sistema subamortecido ocorre em

$$t = \frac{\tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (0 < \zeta < 1)$$

e o sobre-sinal máximo é

$$c(t)_{\max} = \omega_n \exp \left( -\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) \quad (0 < \zeta < 1)$$

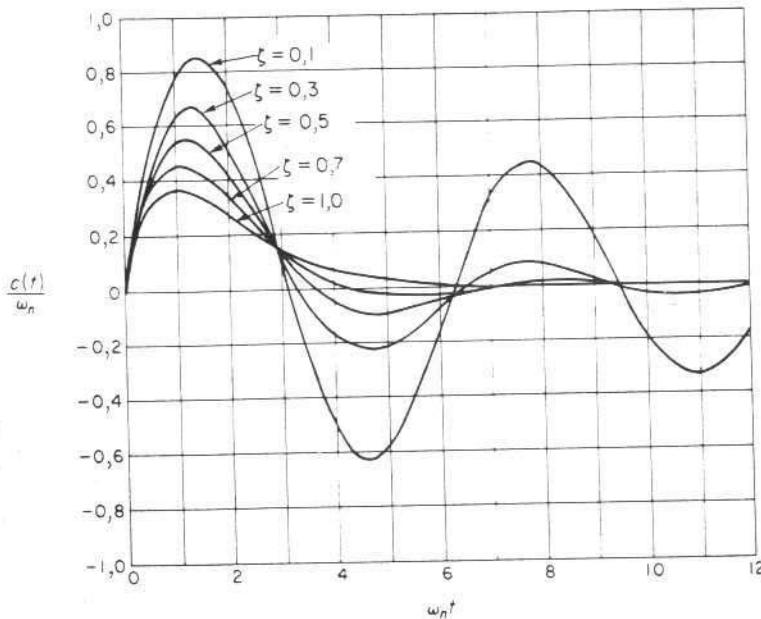


Fig. 6.20 Curvas de resposta a impulso unitário do sistema visto na Fig. 6.10.

Como a função de resposta ao impulso é a derivada temporal da função de resposta degrau unitário, o sobre-sinal máximo  $M_p$  para a resposta a degrau unitário pode ser determinado da correspondente resposta ao impulso unitário. Em outras palavras, a área sob a curva de resposta ao impulso unitário de  $t = 0$  até o tempo do primeiro cruzamento do zero, como visto na Fig. 6.21, é  $1 + M_p$ , onde  $M_p$  é o sobre-sinal máximo (para a resposta a degrau unitário) dado pela Eq. (6.28). O instante do pico  $t_p$  (para a resposta a degrau unitário) dado pela Eq. (6.27) corresponde ao tempo em que a resposta ao impulso unitário cruza pela primeira vez o eixo.

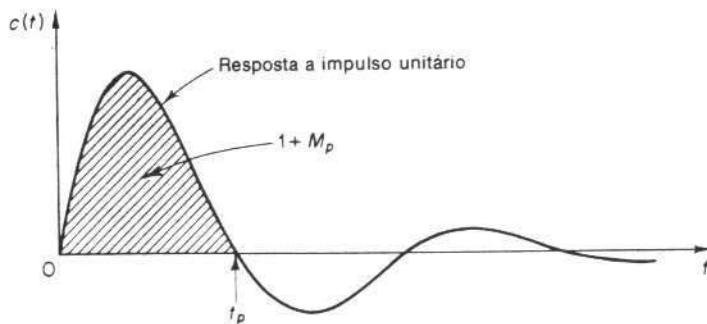


Fig. 6.21 Curva de resposta a impulso unitário do sistema visto na Fig. 6.10.

**Erro estacionário para respostas a rampa.** A resposta transitória de um sistema de segunda-ordem sujeito a uma entrada em rampa pode ser obtida através de um método simples. (Veja o Problema A.6.5.) Nesta análise, examinaremos o erro estacionário quando o sistema de segunda-ordem é sujeito a tal entrada.

Para o sistema visto na Fig. 6.22, obtemos

$$E(s) = \frac{Js^2 + Fs}{Js^2 + Fs + K} R(s)$$

O erro estacionário para a resposta para a rampa unitária pode ser obtido como segue: Para uma entrada rampa unitária  $r(t) = t$ , obtemos  $R(s) = 1/s^2$ . O erro estacionário  $e_{ss}$  é

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Js^2 + Fs}{Js^2 + Fs + K} \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{F}{K} \\ &= \frac{2\zeta}{\omega_n} \end{aligned}$$

onde

$$\zeta = \frac{F}{2\sqrt{KJ}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}$$

Para garantir uma resposta transitória aceitável bem como um erro estacionário admissível em resposta a uma entrada em rampa,  $\zeta$  não deve ser muito pequeno e  $\omega_n$  deve ser suficientemente grande. É possível fazer o erro estacionário  $e_{ss}$  pequeno fazendo o valor do ganho  $K$  grande. (Um valor grande para  $K$  tem uma vantagem adicional de suprimir efeitos indesejáveis de zonas mortas, histerese, atrito de Coulomb etc.) Um valor grande para  $K$  faria, entretanto,  $\zeta$  pequeno e aumentaria o sobre-sinal máximo, o que é indesejável.

Portanto é necessário achar uma solução de compromisso entre o valor do erro estacionário para entrada em rampa e o sobre-sinal máximo para uma entrada em degrau unitário. No sistema visto na Fig. 6.22, pode ser difícil obter um compromisso razoável. Nesses casos, então, é desejável se considerar outros tipos de ações de controle que podem melhorar tanto a resposta transitória como o comportamento estacionário. A seguir, consideraremos dois métodos para melhorar o com-

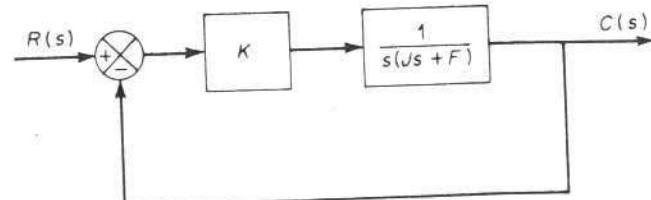


Fig. 6.22 Sistema de controle.

portamento, um usando um controlador proporcional-mais-derivada e o outro usando realimentação de tacômetro.

**Controle proporcional-mais-derivada de sistemas de segunda-ordem.** Um compromisso entre comportamento aceitável de resposta transitória e de regime estacionário pode ser obtido pelo uso de ações de controle proporcional-mais-derivada.

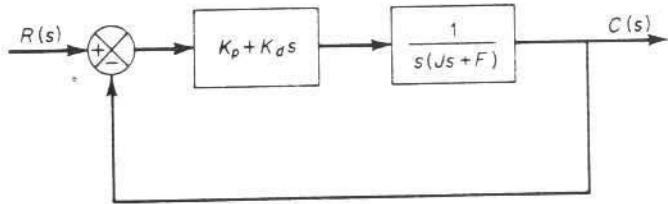


Fig. 6.23 Sistema de controle.

Considere o sistema visto na Fig. 6.23. A função de transferência de malha-fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p + K_d s}{Js^2 + (F + K_d)s + K_p}$$

O erro estacionário para uma entrada em rampa unitária é

$$e_{ss} = \frac{F}{K_p}$$

A equação característica é

$$Js^2 + (F + K_d)s + K_p = 0 \quad (6.34)$$

O coeficiente de amortecimento efetivo deste sistema é portanto  $F + K_d$  ao invés de  $F$ . Como o coeficiente de amortecimento deste sistema é

$$\zeta = \frac{F + K_d}{2\sqrt{K_p J}}$$

é possível se fazer tanto o erro estacionário  $e_{ss}$  para uma entrada em rampa como o sobre-sinal máximo para uma entrada em degraus pequenos fazendo-se  $F$  pequeno,  $K_p$  grande, e  $K_d$  grande suficiente de tal forma que  $\zeta$  fique entre 0,4 e 0,7.

A seguir, examinaremos a resposta a degrau unitário do sistema visto na Fig. 6.23. Definimos

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_p}{J}}, \quad z = \frac{K_p}{K_d}$$

A função de transferência de malha-fechada pode então ser escrita

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{z} \frac{s + z}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Quando um sistema de segunda-ordem tem um zero perto dos pólos de malha-fechada, o comportamento de resposta transitória se torna consideravelmente diferente daquele de um sistema de segunda-ordem sem um zero.

Se o zero em  $s = -z$  está localizado perto do eixo  $j\omega$ , o efeito do zero na resposta a degrau unitário é bastante significativo. Curvas de resposta a degrau típicas deste sistema com  $\zeta = 0,5$  e com vários valores para  $z/(\zeta\omega_n)$  são vistas na Fig. 6.24.

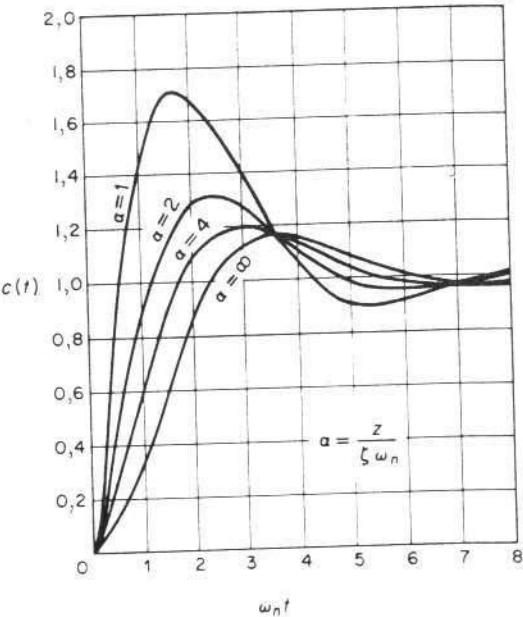


Fig. 6.24 Curvas de resposta a degrau unitário do sistema de segunda-ordem.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \left( \frac{\omega_n^2}{z} \right) \left( \frac{s + z}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right)$$

$$\zeta = 0,5$$

**Tacômetros.** Um outro método para melhorar o desempenho de servomecanismos é adicionar realimentação por tacômetro. Este método é de ajuste fácil e relativamente econômico. Um tacômetro DC é um gerador que produz uma tensão proporcional à sua velocidade de rotação. É usado como um transdutor, convertendo a velocidade do eixo em rotação para uma tensão DC proporcional. Em um tacômetro DC um ímã permanente fornece um fluxo constante no entreferro de ar. Portanto, a tensão induzida pelo tacômetro  $e$  pode ser escrita

$$e = K\psi\dot{\theta} = K_1\dot{\theta}$$

onde  $K$  é uma constante,  $\psi$  é o fluxo no entreferro de ar e  $\dot{\theta}$  é a velocidade de rotação. Como  $\psi$  é uma constante,  $K_1 = K\psi$  também é uma constante. A função de transferência do tacômetro DC é

$$\frac{E(s)}{\Theta(s)} = K_1 s$$

Um diagrama esquemático de um tacômetro DC é visto na Fig. 6.25(a). Embora sua saída seja uma tensão DC, se esta é convertida em uma tensão AC, então o tacômetro DC pode também ser usado em servomecanismos AC.

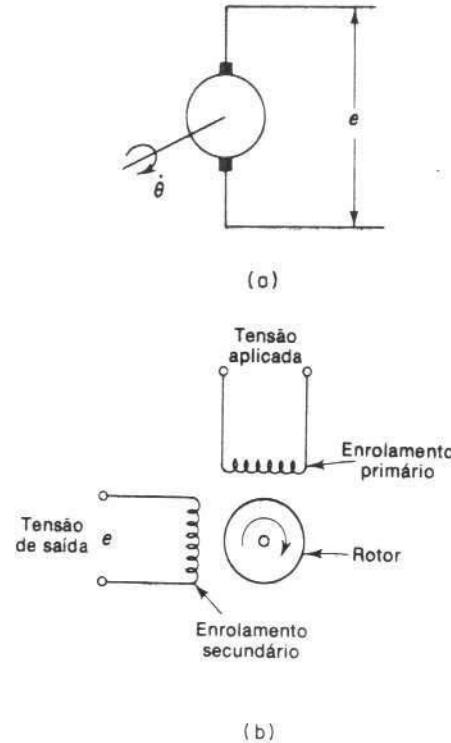


Fig. 6.25 (a) Diagrama esquemático de um tacômetro DC; (b) diagrama esquemático de um tacômetro AC.

O tacômetro AC é um dispositivo similar a um motor de indução de duas fases. (Motores de duas fases geralmente se prestam bem para o papel de tacômetros AC.) A Fig. 6.25(b) mostra o diagrama esquemático de um tacômetro AC. Uma tensão AC fixa é aplicada ao enrolamento primário do tacômetro. O enrolamento secundário é colocado a 90 graus em termos espaciais a partir do enrolamento primário. Portanto, quando o eixo do rotor está estacionário, a tensão de saída é nula. Quando o eixo do rotor está em rotação, a tensão de saída no enrolamento secundário é proporcional à velocidade do rotor. A polaridade da tensão de saída é determinada pela direção de rotação. A função de transferência de um tacômetro AC é

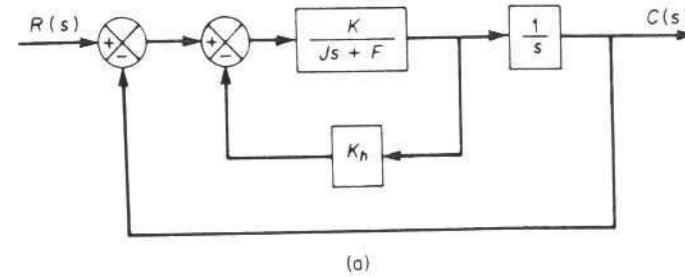
$$\frac{E(s)}{\Theta(s)} = K_2 s$$

onde  $E(s)$  é a transformada de Laplace da tensão de saída,  $\Theta(s)$  é a transformada de Laplace da posição do rotor, e  $K_2$  é uma constante. Embora a saída de um tacômetro AC seja uma tensão AC, este tacômetro pode ser usado em um servomecanismo DC se a tensão AC de saída é convertida em uma tensão DC através de um demodulador.

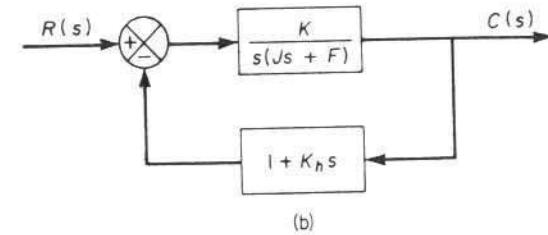
Note que um tacômetro utilizado com finalidades de amortecimento é geralmente construído como parte integral do servomotor.

**Servomecanismos com realimentação de velocidade.** A derivada do sinal de saída pode ser usada para melhorar o desempenho do sistema. Para se obter a derivada do sinal de posição de saída, é desejável usar um tacômetro ao invés de diferenciar fisicamente o sinal de saída. (Note que a diferenciação amplifica efeitos de ruído. De fato, se ruídos descontínuos estão presentes, a diferenciação amplifica os ruídos descontínuos mais do que o sinal útil. Por exemplo, a saída de um potenciômetro é um sinal de tensão descontínua porque, à medida que o terminal móvel do potenciômetro passa nos enrolamentos, tensões são induzidas nos enrolamentos seguintes gerando transistórios. A saída do potenciômetro não deve portanto ser seguida de um elemento de diferenciação.)

Considere o servomecanismo visto na Fig. 6.26(a). Neste dispositivo, o sinal de velocidade, junto com o sinal de posição, é realimentado para a entrada para produzir o sinal de erro atuante. Em qualquer servomecanismo, tal sinal de veloci-



(a)



(b)

Fig. 6.26 (a) Diagrama de blocos de um servomecanismo; (b) diagrama de blocos simplificado.

dade pode ser facilmente gerado por um tacômetro. O diagrama de blocos visto na Fig. 6.26(a) pode ser simplificado, como visto na Fig. 6.26(b), resultando

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + (F + KK_h)s + K}$$

A equação característica é

$$Js^2 + (F + KK_h)s - K = 0 \quad (6.35)$$

Comparando a Eq. (6.35) com a Eq. (6.34), vemos que elas são da mesma forma. Se  $KK_h$  e  $K$  fossem iguais a  $K_d$  e  $K_p$ , respectivamente, então as duas equações seriam idênticas. Portanto podemos esperar que a realimentação de velocidade forneça melhorias semelhantes no desempenho do sistema quando comparada com o uso de ações de controle proporcional-mais-derivada.

O erro estacionário para uma entrada em rampa é

$$e_{ss} = \frac{F}{K}$$

O coeficiente de amortecimento  $\zeta$  é

$$\zeta = \frac{F + KK_h}{2\sqrt{KJ}} \quad (6.36)$$

A freqüência natural não amortecida  $\omega_n = \sqrt{K/J}$  não é afetada pela realimentação de velocidade. Observando que o sobre-sinal máximo para uma entrada degrau unitário pode ser controlado através do valor do coeficiente de amortecimento  $\zeta$ , podemos reduzir tanto o erro estacionário  $e_{ss}$  quanto o sobre-sinal máximo fazendo  $F$  pequeno e  $K$  grande e então ajustando a constante de realimentação de velocidade  $K_h$  de tal forma que  $\zeta$  esteja entre 0,4 e 0,7.

Lembrar que a realimentação de velocidade tem o efeito de aumentar o coeficiente de amortecimento sem afetar a freqüência natural não amortecida do sistema.

**Exemplo 6.2** Para o sistema visto na Fig. 6.27, determine os valores do ganho  $K$  e a constante de realimentação de velocidade  $K_h$  de tal forma que o sobre-sinal máximo na resposta a degrau unitário seja 0,2 e o instante do pico seja 1 s. Com estes valores de  $K$  e  $K_h$ , obtenha o tempo de subida e o tempo de acomodação.

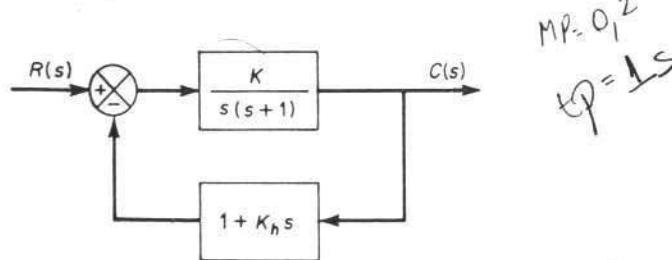


Fig. 6.27 Sistema de controle.

Determinação dos valores de  $K$  e  $K_h$ : O sobre-sinal máximo  $M_p$  é dado pela Eq. (6.28) como sendo

$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$$

Este valor deve ser 0,2. Portanto,

$$e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} = 0,2$$

ou

$$\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1,61$$

que fornece

$$\zeta = 0,456$$

O instante do pico  $t_p$  é especificado como 1 s; portanto, da Eq. (6.27),

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 1$$

ou

$$\omega_d = 3,14$$

Como  $\zeta$  é 0,456,  $\omega_n$  é

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 3,53$$

Como a freqüência natural  $\omega_n$  é igual a  $\sqrt{K}$  neste exemplo,

$$K = \omega_n^2 = 12,5$$

Então,  $K_h$  é, da Eq. (6.36),

$$K_h = \frac{2\sqrt{K}\zeta - 1}{K} = 0,178$$

Tempo de subida  $t_r$ : Da Eq. (6.26), o tempo de subida  $t_r$  é

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

onde

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\omega_d}{\sigma} = \tan^{-1} 1,95 = 1,10$$

Portanto,  $t_r$  é

$$t_r = 0,65 \text{ s}$$

$$\begin{aligned} \rho &= 1,61 \\ &\sqrt{1-\zeta^2} = \sqrt{1-0,456^2} \\ &= 1,61 \\ &\zeta = \frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1,61 \\ &\zeta = 0,456 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1,61 \sqrt{1-\zeta^2} &= \pi \\ 2,5921 - 2,5921\zeta^2 &= \pi^2 \\ 2,5921(1-\zeta^2) &= \pi^2 \end{aligned}$$

Tempo de acomodação  $t_s$ : Para o critério de 2%,

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 2,48 \text{ s}$$

Para o critério de 5%:

$$t_s = \frac{3}{\sigma} = 1,86 \text{ s}$$

## 6.5 SISTEMAS DE ORDEM SUPERIOR

Nesta seção, discutiremos inicialmente a resposta a degrau unitário de um tipo particular de sistema de terceira-ordem. Em seguida apresentaremos, em termos gerais, uma análise de resposta transitória de sistemas de ordem superior. Finalmente, discutiremos análise de estabilidade no plano complexo.

\* **Resposta a degrau unitário de sistemas de terceira-ordem.** Discutiremos a resposta a degrau unitário de um sistema de terceira-ordem freqüentemente encontrado, cuja função de transferência de malha-fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2 p}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + p)}$$

A resposta a degrau unitário deste sistema pode ser obtida como segue:

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\beta\zeta^2(\beta - 2) + 1} \left\{ \beta\zeta^2(\beta - 2) \cos \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \frac{\beta\zeta[\zeta^2(\beta - 2) + 1]}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t \right\} - \frac{e^{-pt}}{\beta\zeta^2(\beta - 2) + 1} \quad (t \geq 0)$$

onde

$$\beta = \frac{p}{\zeta\omega_n}$$

Note que, como

$$\beta\zeta^2(\beta - 2) + 1 = \zeta^2(\beta - 1)^2 + (1 - \zeta^2) > 0$$

o coeficiente do termo  $e^{-pt}$  é sempre negativo.

O efeito do pôlo real  $s = -p$  na resposta a degrau unitário é de reduzir o sobre-sinal máximo e aumentar o tempo de acomodação. A Fig. 6.28 mostra curvas de resposta a degrau unitário deste sistema de terceira-ordem com  $\zeta = 0,5$ . O quociente  $\beta = p/(\zeta\omega_n)$  é um parâmetro na família de curvas.

Se o pôlo real está localizado à direita dos pólos complexos-conjugados, então há uma tendência para resposta lenta. O sistema se comportará como um sistema sobreamortecido. Os pólos complexos-conjugados adicionarão ondulação na curva de resposta.

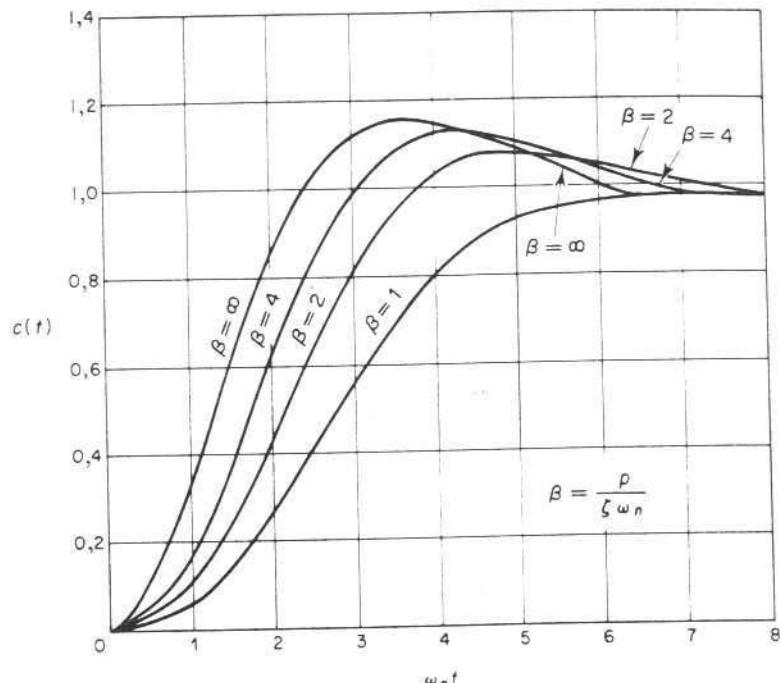


Fig. 6.28 Curvas de resposta a degrau unitário de um sistema de terceira-ordem.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2 p}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + p)}, \quad \zeta = 0,5$$

**Resposta transitória de sistemas de ordem superior.** Considere o sistema visto na Fig. 6.29. A função de transferência de malha-fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (6.37)$$

Em geral,  $G(s)$  e  $H(s)$  são dados como relações de polinômios em  $s$ , ou

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \quad \text{ou} \quad H(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

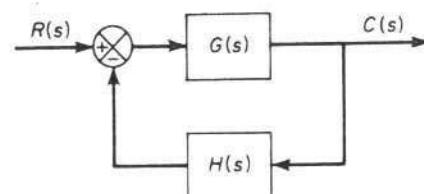


Fig. 6.29 Sistema de controle.

onde  $p(s)$ ,  $q(s)$ ,  $n(s)$ , e  $d(s)$  são polinômios em  $s$ . A função de transferência de malha-fechada dada pela Eq. (6.37) pode ser escrita então

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{p(s)d(s)}{q(s)d(s) + p(s)n(s)} \\ &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \end{aligned}$$

Para determinar a resposta transitória deste sistema para qualquer entrada, é necessário fatorar o polinômio do denominador. (Vários métodos são disponíveis para este fatoramento de polinômios. Neste livro apresentaremos uma técnica conveniente chamada método do lugar das raízes. Veja Cap. 8.) Uma vez que o polinômio do denominador foi fatorado,  $C(s)/R(s)$  pode ser escrita

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \quad (6.38)$$

Examinemos o comportamento da resposta deste sistema para uma entrada degrau unitário. Supomos que os pólos de malha-fechada são todos distintos. (Este é geralmente o caso em sistemas práticos.) Para uma entrada degrau unitário, a Eq. (6.38) pode ser escrita

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s + p_i} \quad (6.39)$$

onde  $a_i$  é o resíduo do polo em  $s = -p_i$ .

Se todos os pólos de malha-fechada estão no semiplano esquerdo do plano  $s$ , as magnitudes relativas dos resíduos determinam a importância relativa dos componentes na forma expandida de  $C(s)$ . Se há um zero de malha-fechada perto de um polo de malha-fechada, então o resíduo neste polo é pequeno e o coeficiente do termo de resposta transitória correspondendo a este polo se torna pequeno. Um par de pólos e zeros localizados perto um do outro efetivamente se cancelarão. Se o polo está localizado muito longe da origem, o resíduo neste polo pode ser pequeno. Os transitórios correspondendo a tal polo remoto são pequenos e de curta duração. Os termos na forma expandida de  $C(s)$ , tendo resíduos muito pequenos, pouco contribuem para a resposta transitória e podem ser desprezados. Se isto é feito, o sistema de ordem superior pode ser aproximado por um de ordem inferior. (Tal aproximação freqüentemente nos permite estimar as características de resposta de um sistema de ordem superior a partir daquelas de um sistema simplificado.)

Os pólos de  $C(s)$  consistem em pólos reais e pares de pólos complexos conjugados. Um par de pólos complexos-conjugados fornece um termo de segunda-ordem em  $s$ . Como a forma fatorada da equação característica de ordem superior consiste em termos de primeira e segunda-ordem, então a Eq. (6.39) pode ser reescrita:

$$C(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s \prod_{j=1}^q (s + p_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2)} \quad (6.40)$$

onde  $q + 2r = n$ . Se os pólos de malha-fechada são distintos, a Eq. (6.40) pode ser expandida em frações parciais como segue:

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{b_k(s + \zeta_k \omega_k) + c_k \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2}$$

Desta última equação, podemos ver que a resposta de um sistema de ordem superior é composta de um certo número de termos envolvendo as funções simples vistas nas respostas de sistemas de primeira e segunda-ordem. A resposta a degrau unitário  $c(t)$ , a transformada inversa de Laplace de  $C(s)$ , é então

$$\begin{aligned} c(t) &= a + \sum_{j=1}^q a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r b_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t \\ &\quad + \sum_{k=1}^r c_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t \quad (t \geq 0) \end{aligned} \quad (6.41)$$

Se todos os pólos de malha-fechada estão no semiplano esquerdo do plano  $s$ , então os termos exponenciais e os termos amortecidos exponencialmente na Eq. (6.41) tenderão a zero quanto  $t$  cresce. A saída em regime estacionário é então  $c(\infty) = a$ .

Vamos supor que o sistema em consideração é estável. Então os pólos de malha-fechada que estão localizados longe do eixo  $j\omega$  têm partes reais negativas de valor grande. Os termos exponenciais que correspondem a estes pólos decaem rapidamente a zero. (Note que a distância horizontal de um polo de malha-fechada ao eixo  $j\omega$  determina o tempo de acomodação de transitórios devidos àquele polo. Quanto menor a distância, maior é o tempo de acomodação.)

A curva de resposta de um sistema estável de ordem superior é a soma de um certo número de curvas exponenciais e curvas senoidais amortecidas. Exemplos de curvas de resposta a degrau de sistemas de ordem superior são vistos na Fig. 6.30.

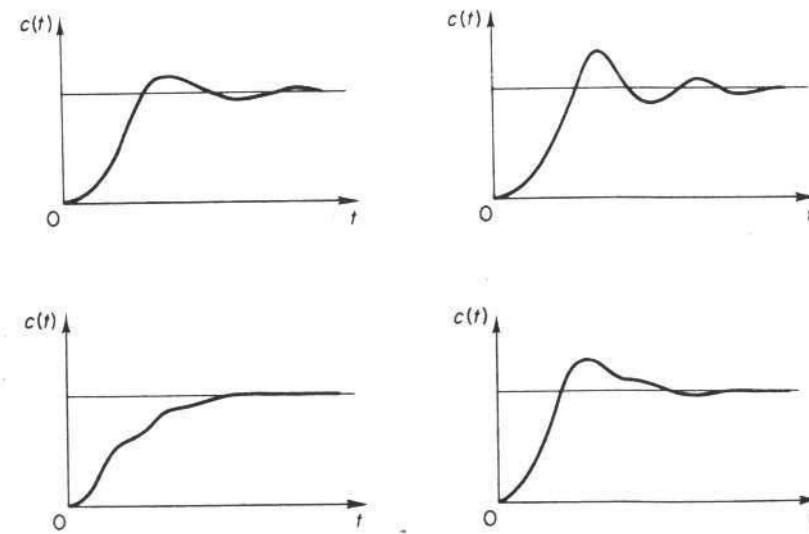


Fig. 6.30 Curvas de resposta a degrau de sistemas de ordem superior.

Uma característica particular de tais curvas de resposta é que pequenas oscilações são superpostas em oscilações maiores ou sobre curvas exponenciais. Componentes de decaimento rápido têm significância somente na parte inicial da resposta transitória.

Lembre-se de que o tipo de resposta transitória é determinado pelos pólos de malha-fechada, ao passo que a forma da resposta transitória é determinada principalmente pelos zeros de malha-fechada. Como vimos antes, os pólos da entrada  $R(s)$  fornecem os termos de resposta estacionária na solução, enquanto que os pólos de  $C(s)/R(s)$  entram nos termos de resposta transitória exponenciais. (Os pólos de malha-fechada sempre aparecem na solução temporal como termos de resposta exponenciais.) Os zeros de  $C(s)/R(s)$  não afetam os expoentes nos termos de resposta exponencial, mas sim as magnitudes e sinais dos resíduos. (A curva de resposta temporal depende dos coeficientes dos termos individuais exponenciais, bem como dos seus expoentes.)

**Pólos de malha-fechada dominantes.** A dominância relativa de pólos de malha-fechada é determinada pela relação das partes reais dos pólos de malha-fechada, bem como pelos valores relativos dos resíduos calculados nos pólos de malha-fechada. Os valores dos resíduos dependem tanto dos pólos como dos zeros de malha-fechada.

Se a relação das partes reais excede cinco, e não há zeros na vizinhança, então os pólos de malha-fechada mais perto do eixo  $j\omega$  dominarão a resposta transitória porque estes pólos correspondem a termos de resposta transitória que decaem lentamente. Os pólos de malha-fechada que têm efeitos dominantes sobre o comportamento de resposta transitória são chamados pólos *dominantes*. Frequentemente, os pólos de malha-fechada dominantes ocorrem na forma de pares complexos-conjugados. Os pólos de malha-fechada dominantes são os mais importantes entre os pólos de malha-fechada.

O ganho de um sistema de ordem superior é freqüentemente ajustado até que exista um par de pólos de malha-fechada complexos-conjugados dominantes. A presença de tais pólos em um sistema estável reduz o efeito de tais não-linearidades como zona-morta, histerese e atrito de Coulomb.

Lembre-se que, embora o conceito de pólos de malha-fechada dominantes seja útil para estimar o comportamento dinâmico de um sistema de malha-fechada, devemos ser cuidadosos e verificar se as hipóteses são satisfeitas antes de utilizar este conceito.

**Resposta não-oscilatória de sistemas de ordem superior.** Se o sistema de malha-fechada não tem pólos complexos-conjugados, então a resposta transitória é não-oscilatória. Transitórios não-oscilatórios podem ser colocados em gráfico semilog, e se a maior constante de tempo for dominante, o gráfico tenderá a uma linha reta cuja inclinação é determinada pela constante de tempo. A subtração da parte da resposta transitória devida a esta constante de tempo fornecerá outras constantes de tempo menores.

**Análise de estabilidade no plano complexo.** A estabilidade de um sistema linear a malha-fechada pode ser determinada pela localização dos pólos de malha-fechada no plano  $s$ . Se qualquer destes pólos estiver no semiplano direito do plano  $s$ , então, para tempos crescentes eles vão resultar no modo dominante, e a resposta transitória aumenta monotonicamente ou oscila com amplitude crescente. Isto representa um sistema instável. Para tal sistema, tão logo a fonte de energia seja ligada, a saída poderá crescer com o tempo. Se não existir saturação no sistema ou algum obstáculo ou breque mecânico, então o sistema pode vir a sofrer danificação e parar de

funcionar uma vez que a resposta de um sistema físico real não pode aumentar indefinidamente. Portanto, pólos de malha-fechada no semiplano direito não são permitíveis no sistema de controle linear usual. Se todos os pólos de malha-fechada estão no semiplano esquerdo do plano  $s$ , qualquer resposta transitória alcança um equilíbrio. Isto representa um sistema estável.

O fato de um sistema linear ser estável ou instável é uma propriedade do sistema em si e não depende da entrada do sistema. Os pólos da entrada, ou função excitadora, não afetam a propriedade de estabilidade do sistema, mas contribuem somente para os termos de resposta estacionária na solução. Portanto, o problema de estabilidade absoluta pode ser resolvido de imediato não escolhendo pólos de malha-fechada no semiplano direito do plano  $s$ , incluindo o eixo  $j\omega$ . (Matematicamente, pólos de malha-fechada no eixo  $j\omega$  resultarão em oscilações, com amplitude nem decrescente nem crescente com o tempo. Em casos práticos, onde ruído se faz presente, a amplitude das oscilações pode crescer com uma taxa determinada pela potência do ruído. Portanto, um sistema de controle não deve ter pólos de malha-fechada no eixo  $j\omega$ .)

Note que o mero fato de que todos os pólos de malha-fechada estão no semiplano esquerdo do plano  $s$  não garante características satisfatórias para a resposta transitória. Se há pólos de malha-fechada complexos-conjugados dominantes perto do eixo  $j\omega$ , a resposta transitória pode apresentar oscilações excessivas ou ser muito lenta. Portanto, para garantir uma característica de resposta transitória rápida e ainda bem amortecida, é necessário que os pólos de malha-fechada do sistema se localizem em regiões particulares do plano complexo, como por exemplo, a região limitada pela área hachurada na Fig. 6.31.

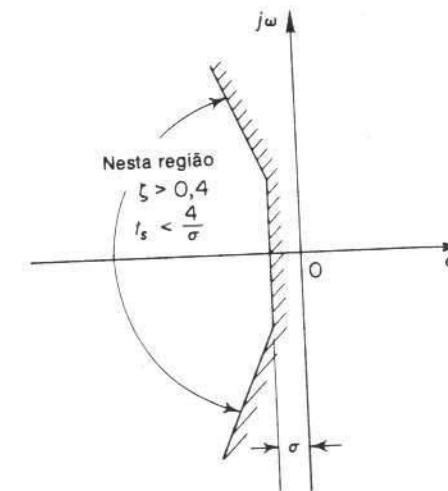


Fig. 6.31 Região do plano complexo satisfazendo as condições  $\zeta > 0,4$  e  $t_s < 4/\sigma$ .

Uma vez que estabilidade relativa e desempenho transitório de um sistema de controle de malha-fechada estão diretamente relacionados com a configuração de pólos e zeros de malha-fechada no plano  $s$ , freqüentemente se torna necessário ajustar um ou mais parâmetros do sistema para obter configurações satisfatórias. Os efeitos de variação de parâmetros do sistema nos pólos de malha-fechada serão discutidos com detalhes no Cap. 8.

## 6.6 CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE ROUTH

O problema mais importante em sistemas de controle linear é o da estabilidade. Ou seja, em que condições um sistema se tornará instável? Se ele é instável, como devemos estabilizá-lo? Na Seção 6.5 foi dito que um sistema de controle é estável se e somente se todos os pólos de malha-fechada estão no semiplano esquerdo do plano  $s$ . Como a maioria dos sistemas de malha fechada lineares tem funções de transferência de malha-fechada da forma

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

onde os  $a$ 's e  $b$ 's são constantes e  $m \leq n$ , devemos inicialmente fatorar os polinômios  $A(s)$  para achar os pólos de malha-fechada. Este processo leva muito tempo para polinômios de ordem maior que 2. Um critério simples, conhecido como o critério de estabilidade de Routh, nos permite determinar o número de pólos de malha-fechada que estão no semiplano direito  $s$  sem ter que fatorar o polinômio.

**Critério de estabilidade de Routh.** O critério de estabilidade de Routh nos diz se há ou não raízes positivas de uma equação polinomial sem ter que resolver a equação. Este critério de estabilidade se aplica a polinômios com apenas um número finito de termos. Quando o critério é aplicado a um sistema de controle, pode-se obter informação sobre estabilidade absoluta diretamente dos coeficientes da equação característica.

O procedimento no critério de estabilidade de Routh é o seguinte:

1. Escreva o polinômio em  $s$  na seguinte forma:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (6.42)$$

onde os coeficientes são grandezas reais. Supomos que  $a_n \neq 0$ ; isto é, qualquer raiz nula foi removida.

2. Se qualquer dos coeficientes é zero ou negativo na presença de pelo menos um coeficiente positivo, então há uma raiz ou raízes que são imaginárias ou que têm partes reais positivas. Portanto, em um caso como este, o sistema não é estável. Se estivermos interessados apenas na estabilidade absoluta, não há necessidade de seguir com o procedimento. Note que todos os coeficientes devem ser positivos. Esta é uma condição necessária, como pode ser visto pelo seguinte argumento: Um polinômio em  $s$  tendo coeficientes reais pode ser sempre fatorado em fatores lineares e quadráticos, tais como  $(s+a)$  e  $(s^2+bs+c)$ , onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são reais. Os fatores lineares resultam em raízes reais do polinômio, e os fatores quadráticos, em raízes complexas. O fator  $(s^2+bs+c)$  resulta em raízes com partes reais negativas somente se  $b$  e  $c$  são ambos positivos. Para que todas as raízes tenham partes reais negativas, as constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  etc. em todos os fatores devem ser positivas. O produto de qualquer número de fatores lineares e quadráticos contendo apenas coeficientes positivos sempre resulta em um polinômio com coeficientes positivos. É importante notar que a condição de que todos os coeficientes sejam positivos não é suficiente para assegurar estabilidade. A condição necessária mas não suficiente para estabilidade é que os coeficientes da Eq. (6.42) estejam todos presentes e todos tenham um sinal positivo. (Se todos os  $a$ 's são negativos, eles podem ser tornados positivos multiplicando-se ambos os lados da equação por  $-1$ .)

3. Se todos os coeficientes são positivos, arranje os coeficientes do polinômio em linhas e colunas de acordo com o seguinte padrão:

$s^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	.	.	.
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	.	.	.
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	.	.	.
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	.	.	.
$s^{n-4}$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
$s^2$	$e_1$	$e_2$					
$s^1$	$f_1$						
$s^0$	$g_1$						

Os coeficientes  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  etc. são calculados como segue:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

O cálculo dos  $b$ 's continua até que os restantes sejam todos nulos. O mesmo padrão de multiplicação em cruz dos coeficientes das duas linhas anteriores é seguido para calcular os  $c$ 's  $d$ 's,  $e$ 's etc. Ou seja,

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

e

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

Este processo continua até que a linha  $n$ -ésima tenha sido completada. A tabela completa de coeficientes é triangular. Note que, ao desenvolver a tabela, uma linha

inteira pode ser dividida ou multiplicada por um número positivo visando simplificar os cálculos subsequentes sem alterar a conclusão de estabilidade.

O critério de estabilidade de Routh diz que o número de raízes da Eq. (6.42) com partes reais positivas é igual ao número de mudanças de sinal dos coeficientes da primeira coluna da tabela. Deve-se notar que o valor exato dos termos da primeira coluna não é de importância; apenas os sinais são necessários. A condição necessária e suficiente para que todas as raízes da Eq. (6.42) fiquem no semiplano esquerdo do plano  $s$  é que todos os coeficientes da Eq. (6.42) sejam positivos e que todos os termos da primeira coluna da tabela tenham sinal positivo.

**Exemplo 6.3** Vamos aplicar o critério de estabilidade de Routh para o seguinte polinômio de terceira-ordem:

$$a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 = 0$$

onde todos os coeficientes são números positivos. A tabela de coeficientes se torna

$s^3$	$a_0$	$a_2$	
$s^2$	$a_1$	$a_3$	
$s^1$	$\frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$		
$s^0$	$a_3$		

A condição de que todas as raízes tenham partes reais negativas é dada por

$$a_1a_2 > a_0a_3$$

**Exemplo 6.4** Considere o seguinte polinômio:

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

Vamos seguir o procedimento apresentado e construir a tabela de coeficientes. (As duas primeiras linhas podem ser obtidas diretamente do polinômio dado. Os demais termos são obtidos a partir destes. Se qualquer dos coeficientes é inexistente, este pode ser substituído por um zero na tabela.)

$s^4$	1	3	5		$s^4$	1	3	5	
$s^3$	2	4	0		$s^3$	2	4	0	
$s^2$	1	5			$s^2$	1	5		
$s^1$	-6				$s^1$	-3			
$s^0$	5				$s^0$	5			

A segunda linha é dividida por dois

Neste exemplo, o número de mudanças de sinal dos coeficientes da primeira coluna é igual a dois. Isto significa que há duas raízes com partes reais positivas. Note que o resultado não se altera quando os coeficientes de qualquer linha são multiplicados ou divididos por um número positivo para simplificar os cálculos.

**Casos especiais.** Se um termo da primeira coluna é nulo, mas os termos restantes não são nulos ou não há termo restante, então o termo nulo é substituído por um número positivo muito pequeno  $\epsilon$  e o resto da tabela é calculado. Por exemplo, considere a seguinte equação:

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

A tabela de coeficientes é

$s^3$	1	1	
$s^2$	2	2	
$s^1$	$0 \approx \epsilon$		
$s^0$	2		

Se o sinal do coeficiente acima do zero ( $\epsilon$ ) é o mesmo que o sinal do coeficiente abaixo, isto indica que há um par de raízes imaginárias. De fato, a Eq. (6.43) tem duas raízes em  $s = \pm j$ .

Se, entretanto, o sinal do coeficiente acima do zero ( $\epsilon$ ) é oposto ao do coeficiente abaixo, isto indica que há uma mudança de sinal.\* Por exemplo, para a seguinte equação:

$$s^3 - 3s + 2 = (s - 1)^2(s + 2) = 0$$

A tabela de coeficientes é

uma mudança de sinal :	$s^3$	1	-3	
	$s^2$	$0 \approx \epsilon$	2	
uma mudança de sinal :	$s^1$	-3	$-\frac{2}{\epsilon}$	
	$s^0$	2		

Há duas mudanças de sinal dos coeficientes da primeira coluna. Isto está de acordo com o resultado correto indicado pela forma fatorada da equação polinomial.

Se todos os coeficientes em uma linha calculada forem nulos, isto indica que há raízes de igual módulo mas radialmente opostas no plano  $s$ , isto é, duas raízes reais com módulo igual mas sinal oposto e/ou duas raízes imaginárias conjugadas. Em tal caso, o cálculo do resto da tabela pode ser continuado formando um polinômio auxiliar com os coeficientes da última linha e usando os coeficientes da derivada deste polinômio na linha seguinte. Tais raízes com igual módulo e situadas radialmente opostas no plano  $s$  podem ser determinadas resolvendo o polinômio auxiliar, que é sempre par. Para um polinômio auxiliar de grau  $2n$ , há  $n$  pares de raízes iguais e opostas. Por exemplo, considere a seguinte equação:

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

\*N. do T.: Este caso de coeficiente nulo na primeira coluna não é tão simples como descrito pelo autor, podendo em casos mais complexos levar a erro, como descrito em On the Routh-Hurwitz Criterion, T. S. Chang e C. T. Chen; IEEE Trans. Automatic Control, 19, pp. 250-251, 1974, e nos comentários publicados na mesma revista, vol. 20, pp. 295-297, 1975.

A tabela de coeficiente é

$s^5$	1	24	-25	
$s^4$	2	48	-50	← Polinômio auxiliar $P(s)$
$s^3$	0	0		

Os termos na linha  $s^3$  são todos nulos. O polinômio auxiliar é então formado dos coeficientes da linha  $s^4$ . O polinômio auxiliar  $P(s)$  é

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

que indica que há dois pares de raízes de igual módulo e sinal oposto. Estes pares são obtidos resolvendo-se a equação polinomial auxiliar  $P(s) = 0$ . A derivada de  $P(s)$  com respeito a  $s$  é

$$\frac{dP(s)}{ds} = 8s^3 + 96s$$

Os termos na linha  $s^3$  são substituídos pelos coeficientes da última equação, ou seja, 8 e 96. A tabela de coeficientes, então, se torna

$s^5$	1	24	-25	
$s^4$	2	48	-50	
$s^3$	8	96		← Coeficientes de $dP(s)/ds$
$s^2$	24	-50		
$s^1$	112,7	0		
$s^0$	-50			

Vemos que há uma mudança de sinal na primeira coluna da nova tabela. Portanto, a equação original tem uma raiz com parte real positiva. Resolvendo a equação polinomial auxiliar, obtemos as raízes

$$2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$$

obtemos

$$s^2 = 1, \quad s^2 = -25$$

ou

$$s = \pm 1, \quad s = \pm j5$$

Estes dois pares de raízes são uma parte das raízes da equação original. De fato, a equação original pode ser escrita em forma fatorada como segue:

$$(s+1)(s-1)(s+j5)(s-j5)(s+2) = 0$$

Claramente, a equação original tem uma raiz com parte real positiva.

**Análise de estabilidade relativa.** O critério de estabilidade de Routh provê a resposta à questão de estabilidade absoluta. Isto, em muitos casos práticos, não é suficiente. Normalmente queremos informação sobre a estabilidade relativa do sistema. Um método útil de se examinar a estabilidade relativa é o de deslocar o eixo do plano  $s$  e aplicar o critério de estabilidade de Routh. Ou seja, substituímos

$$s = z - \sigma \quad (\sigma = \text{constante})$$

na equação característica do sistema, escrevemos o polinômio em termos de  $z$ , e então aplicamos o critério de estabilidade de Routh para o novo polinômio em  $z$ . O número de mudanças de sinal na primeira coluna da tabela feita para o polinômio em  $z$  é igual ao número de raízes que estão localizadas para a direita da linha vertical  $s = -\sigma$ . Portanto, este teste revela o número de raízes que estão à direita da linha vertical  $s = -\sigma$ .

**Aplicação do critério de estabilidade de Routh para a análise de sistemas de controle.** O critério de estabilidade de Routh é de utilidade limitada na análise de sistemas de controle lineares, principalmente porque ele não sugere como melhorar a estabilidade relativa ou como estabilizar um sistema instável. Entretanto, é possível determinar os efeitos da modificação de um ou dois parâmetros de um sistema examinando os valores que causam instabilidade. Em seguida, consideraremos o problema de determinar a região de estabilidade para um valor de um parâmetro.

Considere o sistema visto na Fig. 6.32. Vamos determinar a região de valores de  $K$  para haver estabilidade.

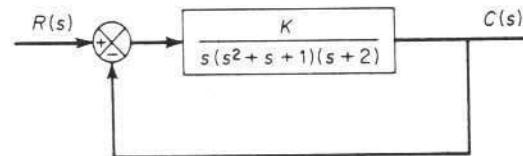


Fig. 6.32 Sistema de controle.

A função de transferência de malha-fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2) + K}$$

A equação característica é

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

A tabela dos coeficientes se torna

$s^4$	1	3	$K$
$s^3$	3	2	0
$s^2$	$\frac{7}{3}$		$K$
$s^1$	$2 - \frac{9}{7}K$		
$s^0$	$K$		

Para estabilidade,  $K$  deve ser positivo, e todos os coeficientes da primeira coluna devem ser positivos. Portanto,

$$\frac{14}{9} > K > 0$$

Quando  $K = 14/9$ , o sistema se torna oscilatório e, matematicamente, a oscilação é mantida com amplitude constante.

## 6.7 COMPUTADORES ANALÓGICOS

Esta seção apresenta os princípios de operação de computadores eletrônicos analógicos e as técnicas de montar diagramas computacionais para resolver equações diferenciais e para simular sistemas físicos.

Sabe-se que o computador analógico é uma das ferramentas mais úteis para o engenheiro analisar e projetar tanto sistemas lineares como não-lineares.\* Iniciaremos nossa discussão descrevendo os elementos de um computador eletrônico analógico.

**Amplificadores operacionais.** Um amplificador operacional é um amplificador usado para produzir várias operações matemáticas, como inversão de sinal, soma e integração. É um amplificador DC e tem um ganho muito alto, aproximadamente  $10^6 \sim 10^8$ . A corrente requerida na entrada de um amplificador operacional é desprezível. A tensão de saída é usualmente limitada a  $\pm 100$  volts. A Fig. 6.33(a) mostra um diagrama esquemático de um amplificador operacional. A tensão de saída  $e_o$  e a tensão de entrada  $e_g$  são relacionadas pela seguinte equação:

$$e_o = -Ke_g$$

onde  $K = 10^6 \sim 10^8$ . Um amplificador operacional, portanto, muda o sinal algébrico.

A Fig. 6.33(b) mostra um amplificador operacional em série com uma impedância de entrada  $Z_i$  e com uma impedância  $Z_o$  inserida no elo de realimentação. Como a impedância interna do amplificador é muito alta, a corrente de entrada é essencialmente desprezível, ou

$$i_g = 0$$

Então, pela lei de Kirchhoff,

$$i_1 = i_2$$

Tomando a transferência de Laplace de ambos os lados desta equação, obtemos

$$I_1(s) = I_2(s)$$

onde

$$I_1(s) = \frac{E_i(s) - E_g(s)}{Z_i(s)}$$

$$I_2(s) = \frac{E_g(s) - E_o(s)}{Z_o(s)}$$

\*N. d. T.: Com a grande disponibilidade atual de computadores digitais, os computadores analógicos já não são tão importantes, não só em análise como em projeto.

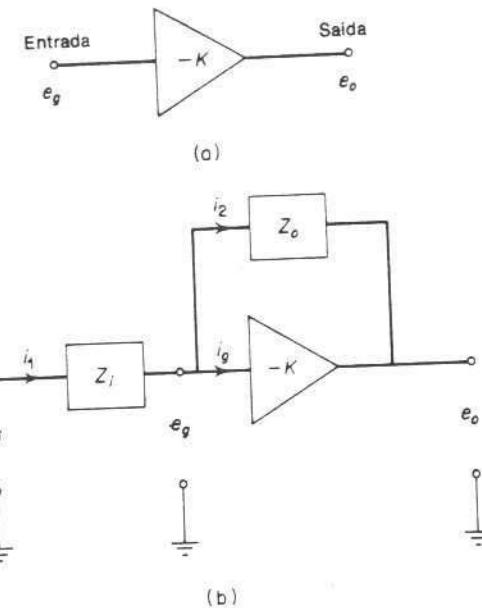


Fig. 6.33 (a) Diagrama esquemático de um amplificador operacional; (b) diagrama esquemático de um amplificador operacional com impedâncias de entrada e de realimentação.

Portanto, obtemos

$$\frac{E_o(s)}{Z_i(s)} = \frac{E_g(s)}{Z_i(s)} + \frac{E_g(s)}{Z_o(s)} - \frac{E_o(s)}{Z_o(s)} \quad (6.44)$$

Observando que

$$E_o(s) = -KE_g(s)$$

e que  $K$  é um número muito grande (entre  $10^6$  e  $10^8$ ), obtemos a seguinte equação, desprezando os primeiros dois termos do lado direito da Eq. (6.44):

$$E_o(s) = -\frac{Z_o(s)}{Z_i(s)} E_i(s) \quad (6.45)$$

A Eq. (6.45) é a equação básica relacionando  $e_i$  e  $e_o$  do amplificador operacional DC de alto ganho visto na Fig. 6.33(b).

**Inversão de sinal.** Se usarmos resistores como impedâncias de entrada e de realimentação, como visto na Fig. 6.34, então a Eq. (6.45) se torna

$$E_o(s) = -\frac{R_o}{R_i} E_i(s)$$

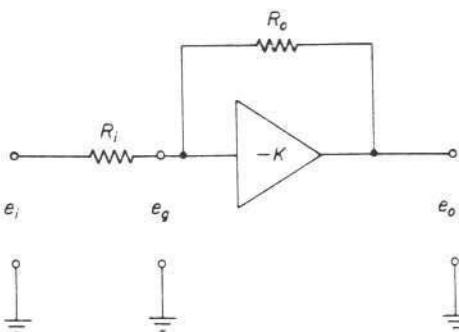
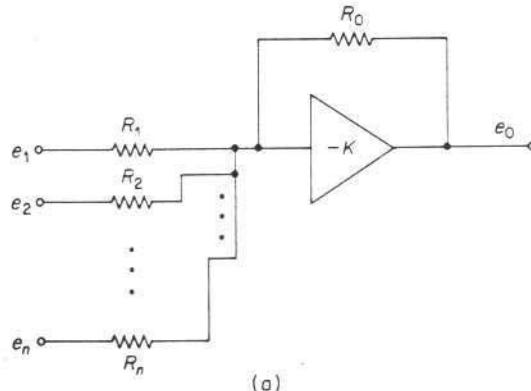


Fig. 6.34 Inversor de sinal.

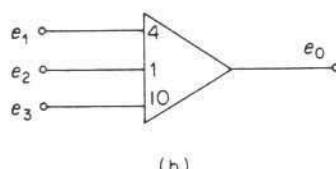
A tensão de saída é igual à tensão de entrada vezes uma constante ( $-R_o/R_i$ ), que é negativa. Portanto, a Fig. 6.34 mostra um circuito fornecendo uma inversão de sinal.

**Soma.** A soma de várias entradas pode ser feita usando-se resistores como impedâncias de entrada e de realimentação do amplificador operacional DC de alto ganho. A Fig. 6.35(a) mostra um diagrama esquemático de um somador que adiciona  $n$  entradas. A saída  $e_o$  é

$$e_o = -\left(\frac{R_o}{R_1}e_1 + \frac{R_o}{R_2}e_2 + \dots + \frac{R_o}{R_n}e_n\right)$$



(a)



(b)

Fig. 6.35 (a) Diagrama esquemático de um somador; (b) símbolo de um somador.

Se, por exemplo,  $n = 3$  e  $R_o = 1 \text{ M}\Omega = 10^6 \Omega$ ,  $R_1 = 0,25 \text{ M}\Omega$ ,  $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$ , e  $R_3 = 0,1 \text{ M}\Omega$ , então,

$$e_o = -(4e_1 + e_2 + 10e_3)$$

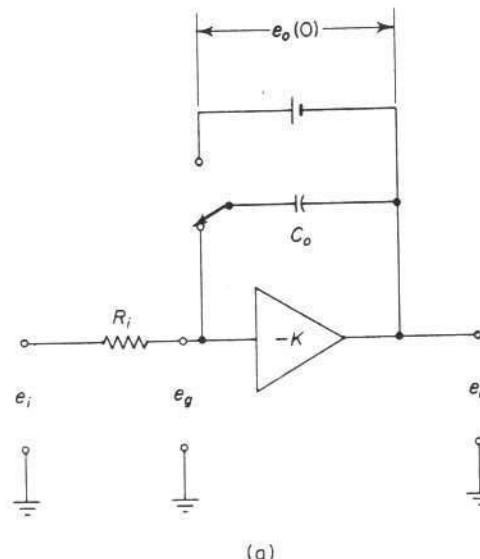
A Fig. 6.35(b) mostra um símbolo usado comumente para tal caso.

**Integração.** Se um capacitor é usado como a impedância de realimentação e um resistor como impedância de entrada, como visto na Fig. 6.36(a), então a Eq. (6.45) se torna

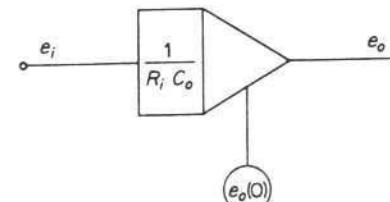
$$E_o(s) = -\frac{1}{R_i C_o s} E_i(s)$$

ou

$$e_o = -\frac{1}{R_i C_o} \int e_i dt \quad (6.46)$$



(a)



(b)

Fig. 6.36 (a) Diagrama esquemático de um integrador; (b) símbolo de um integrador.

Note que ao integrar a entrada  $e_i$  para obter a saída  $e_o$ , a condição inicial deve ser fornecida. Indicando a condição inicial por  $e_o(0)$ , podemos escrever a Eq. (6.46) como

$$e_o(t) = -\frac{1}{R_i C_0} \int_0^t e_i(t) dt + e_o(0)$$

Cada integrador deve ser inicialmente polarizado por uma tensão DC para dar a condição inicial requerida.

A Fig. 6.36(b) mostra um símbolo comumente usado para um integrador. Se, por exemplo,  $R_i = 0,25 \text{ M}\Omega$  e  $C_0 = 1 \mu\text{F}$ , então  $1/(R_i C_0) = 4$ . A condição inicial  $e_o(0)$  é indicada no círculo. (Note que alguns amplificadores operacionais usam resistores padrões de 1, 0,25 e 0,10 MΩ e um capacitor padrão de 1 μF. Em tal caso, os valores de  $1/R_i C_0$  são iguais somente a 1, 4 ou 10.)

**Multiplicação por uma fração.** A multiplicação de  $e_i$  por uma constante  $\alpha$ , onde  $0 < \alpha < 1$ , pode ser feita com o potenciômetro visto na Fig. 6.37(a). A saída  $e_o$  é

$$e_o = \frac{R_o}{R_i} e_i$$

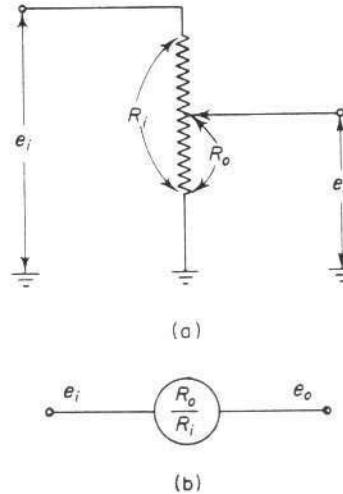


Fig. 6.37 (a) Potenciômetro; (b) símbolo do potenciômetro.

A Fig. 6.37(b) mostra o símbolo comumente usado para um potenciômetro.

**Resolvendo equações diferenciais.** Vamos ilustrar o procedimento para resolver equações diferenciais pelo uso do computador eletrônico analógico. Considere, como exemplo, a seguinte equação diferencial:

$$\ddot{x} + 10\dot{x} + 16x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 8 \quad (6.47)$$

O primeiro passo na montagem de um diagrama de computação é supor que a derivada de ordem mais alta está disponível. Então, resolver a equação diferencial para esta derivada da ordem mais alta. Na equação diferencial do exemplo,

$$\ddot{x} = -10\dot{x} - 16x$$

A variável  $\ddot{x}$  pode ser obtida integrando  $\dot{x}$ , e  $x$  pode ser obtida integrando  $\dot{x}$ . A Fig. 6.38 mostra um diagrama de computação para este sistema. Note que a soma das entradas do primeiro integrador é o termo de derivada mais alta que supomos disponível. Note também que as condições iniciais são indicadas nos círculos.

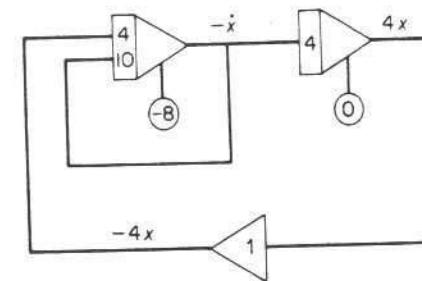


Fig. 6.38 Diagrama de computação analógica para resolver a Eq. (6.47).

É importante lembrar que há uma mudança de sinal associada com cada amplificador operacional. Portanto, se o número de amplificadores operacionais (integradores e somadores) em uma malha-fechada é par, as tensões de saída aumentarão até que saturem. Portanto, o número de amplificadores operacionais em qualquer malha-fechada deve ser ímpar. (No diagrama de computação visto na Fig. 6.38, a malha interna tem um amplificador operacional, e a malha de saída, três.) Isto serve como um teste conveniente para ver se há algum erro na montagem do diagrama de computação.

**Geração de funções senoidais.** Ilustraremos a seguir a geração de um sinal senoidal, como por exemplo,  $10 \sin 3t$ . Para montar um diagrama de computação analógica, vamos obter uma equação diferencial cuja solução seja  $10 \sin 3t$ .

Seja

$$x(t) = 10 \sin 3t$$

Então

$$\dot{x}(t) = -90 \sin 3t$$

Portanto a equação diferencial requerida é

$$\ddot{x} + 9x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 30$$

Resolvendo esta equação diferencial para a derivada de ordem mais elevada, obtemos

$$\ddot{x} = -9x$$

Supondo que  $\ddot{x}$  é disponível,  $x$  pode ser obtido integrando  $\ddot{x}$  duas vezes. Um diagrama de computação para este sistema é visto na Fig. 6.39.

Note que a saída do segundo integrador é  $9x$  e que a tensão de saída oscila entre  $\pm 90$  V. (As condições iniciais determinam a amplitude da oscilação de tensão.)

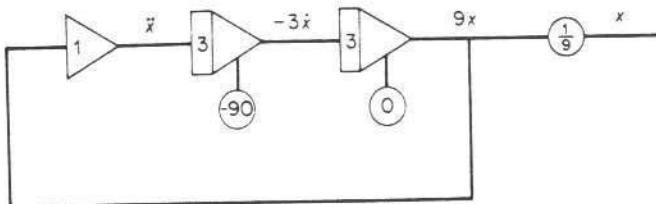


Fig. 6.39 Diagrama de computação analógica para gerar um sinal senoidal  $x(t) = 10 \sin 3t$ .

**Fatores de escala de magnitude.** A tensão de saída de qualquer amplificador não deve exceder  $\pm 100$  V para evitar saturação. Saturação de voltagem causará erros na solução. Por outro lado, a tensão máxima de qualquer amplificador não deve ser muito pequena. Para assegurar uma precisão adequada, é desejável que a máxima excursão da tensão de saída de qualquer amplificador operacional esteja em torno de  $\pm 70$  a  $\pm 90$  V.

Ao montar o diagrama de computação, é desejável que a máxima excursão da tensão de saída de qualquer amplificador seja mais ou menos a mesma. A este respeito, a escolha dos fatores de escala de magnitude é de grande importância. Os fatores de escala de magnitude relacionam tensões de saída dos amplificadores com as quantidades físicas correspondentes.

Considere o sistema dado pela Eq. (6.47). Vamos supor que  $x$  tem unidades de comprimento em *feet*. Então  $x(0) = 0$  ft, e  $\dot{x}(0) = 8$  ft/s. Resolvendo a Eq. (6.47) para a derivada de maior ordem, obtemos

$$\ddot{x} = -10\dot{x} - 16x \quad (6.48)$$

Vamos definir  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  como fatores de escala de magnitude e reescrever a Eq. (6.48) como

$$k_1\ddot{x} = -\frac{10k_1}{k_2}(k_2\dot{x}) - \frac{16k_1}{k_3}(k_3x) \quad (6.49)$$

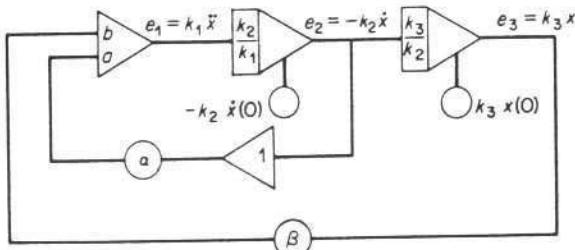


Fig. 6.40 Diagrama de computação analógica sem fatores de escala para resolver a Eq. (6.47).

Referindo-se à Fig. 6.40, a tensão de saída do primeiro amplificador (somador) é  $e_1 = k_1\ddot{x}$ . A tensão de saída do segundo amplificador (primeiro integrador) é  $e_2 = -k_2\dot{x}$ , e, finalmente, a tensão de saída do terceiro amplificador (segundo integrador) é  $e_3 = k_3x$ . Estas tensões de saída devem estar limitadas a  $\pm 100$  V.

A freqüência natural não-amortecida deste sistema é 4 rad/s. Uma solução aproximada para  $0 < t \ll 1$  é

$$x(t) = 2 \sin 4t$$

Portanto, para  $0 < t \ll 1$ ,

$$\dot{x}(t) = 8 \cos 4t$$

$$\ddot{x}(t) = -32 \sin 4t$$

Note que esta solução só é válida para valores muito pequenos de  $t$ . Desta solução, obtemos

$$\text{Valor máximo de } |x(t)| = 2$$

$$\text{Valor máximo de } |\dot{x}(t)| = 8$$

$$\text{Valor máximo de } |\ddot{x}(t)| = 32$$

[Note que em sistemas mais complexos (especialmente em sistemas não-lineares) os valores máximos de  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ ,  $\ddot{x}(t)$ , ... não são disponíveis. Devemos então estimar estes valores máximos. Se os valores estimados estão muito errados, então o diagrama de computação deve ser revisado até que se torne aceitável.] Gostaríamos de escolher  $k_1$ ,  $k_2$ , e  $k_3$  de tal forma que  $e_1 = -e_2 = e_3 = 90$  V para os máximos valores de  $\ddot{x}$ ,  $\dot{x}$  e  $x$ , respectivamente. (Escolhemos 90 V em vez de 100 V como uma estimativa conservadora.) Portanto,

$$k_1 = \frac{90}{|\ddot{x}|_{\max}} = \frac{90}{32} = \frac{45}{16} \text{ volts/ft/s}^2$$

$$k_2 = \frac{90}{|\dot{x}|_{\max}} = \frac{90}{8} = \frac{45}{4} \text{ volts/ft/s}$$

$$k_3 = \frac{90}{|x|_{\max}} = \frac{90}{2} = 45 \text{ volts/ft}$$

Portanto

$$\frac{k_2}{k_1} = 4, \quad \frac{k_3}{k_2} = 4$$

Note que da Fig. 6.40, obtemos

$$k_1\ddot{x} = e_1 = -(-a\alpha e_2 + b\beta e_3) \quad (6.50)$$

Da Eq. (6.49),

$$k_1\ddot{x} = -\frac{10k_1}{k_2}(-e_2) - \frac{16k_1}{k_3}e_3 \quad (6.51)$$

Equacionando as Eqs. (6.50) e (6.51), obtemos

$$a\alpha = \frac{10k_1}{k_2}, \quad b\beta = \frac{16k_1}{k_3}$$

Portanto,

$$a\alpha = 2,5, \quad b\beta = 1$$

Vamos escolher  $a = 4$ ,  $\alpha = 2,5/4$ , e  $b = \beta = 1$ . Então, todas as constantes desconhecidas na Fig. 6.40 estão determinadas. O diagrama de computação com fator de escala adequado é visto na Fig. 6.41. As condições iniciais são

$$e_2(0) = -k_2\dot{x}(0) = -\frac{45}{4} \times 8 = -90 \text{ volts}$$

$$e_3(0) = k_3x(0) = 45 \times 0 = 0 \text{ volts}$$

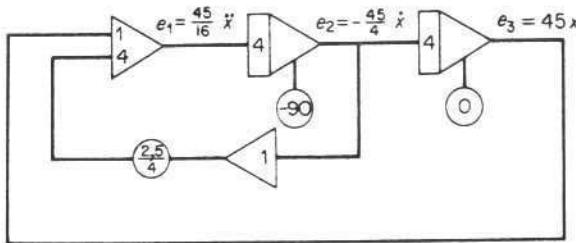


Fig. 6.41 Diagrama de computação analógica com fatores de escala adequados para resolver a Eq. (6.47).

Note que o diagrama visto na Fig. 6.41 não é o diagrama definitivo que gostaríamos de usar como diagrama de computação para resolver a Eq. (6.48). Para minimizar o efeito de ruído e manter a alta precisão, é desejável usar o número mínimo possível de amplificadores. (Em qualquer computador analógico, o número de integradores e somadores é limitado. Ao resolver um problema complexo requerendo muitos integradores e somadores, é necessário usar o número mínimo para cada equação para se economizar componentes.)

No caso do diagrama da Fig. 6.41, é possível eliminar um somador. O diagrama de computação simplificado usando os mesmos fatores de magnitude de escala é visto na Fig. 6.42. Note que como o ganho da malha interna é  $4 \times 1 \times (2,5/4) \times 4 = 10$ , o potenciômetro foi eliminado. Comparando o diagrama de computação visto na Fig. 6.38 com aquele da Fig. 6.42, vemos que o último é melhor do ponto de vista de precisão, uma vez que todos os amplificadores têm excursão sobre uma porção maior de sua região de linearidade.

**Fatores de escala de tempo.** A escala de tempo relaciona a variável independente do problema físico à variável independente do computador analógico. Para fenômenos que acontecem muito rapidamente, é necessário diminuir a velocidade com que tais problemas são simulados no computador.

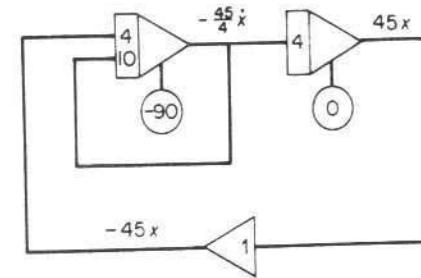


Fig. 6.42 Versão simplificada do diagrama de computação visto na Fig. 6.41.

Façamos com que a equação seguinte relate o tempo real  $t$  em segundos ao tempo do computador (ou tempo de máquina)  $\tau$  em segundos:

$$\tau = \lambda t$$

onde  $\lambda$  é o fator de escala de tempo. Se  $\lambda$  é escolhido como 0,1, então, 10 s de tempo real são equivalentes a 1 segundo de computador. Isto significa que, se a resposta leva 10 s de tempo real para ser completada, então a resposta é completada em 1 s no computador. Ou vice-versa, se  $\lambda$  é escolhido como sendo 10, então, 1 s de tempo real é equivalente a 10 s de tempo de computador.

Como um exemplo, considere a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10 \frac{dx}{dt} + 16x = 20 \operatorname{sen} \omega t, \quad x(0) = 0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 8 \quad (6.52)$$

Vamos converter a variável independente de  $t$  para  $\tau$ . Como

$$\tau = \lambda t$$

obtemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \lambda \frac{dx}{d\tau}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda^2 \frac{d^2x}{d\tau^2}$$

A Eq. (6.52) torna-se então

$$\lambda^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} + 10\lambda \frac{dx}{d\tau} + 16x = 20 \operatorname{sen} \frac{\omega}{\lambda} \tau \quad (6.53)$$

Para tornar a solução mais lenta de um fator de 5, substituímos  $\lambda = 5$  na Eq. (6.53). A equação para o computador é então

$$25 \frac{d^2x}{d\tau^2} + 50 \frac{dx}{d\tau} + 16x = 20 \operatorname{sen} \frac{\omega}{5} \tau$$

As condições iniciais são transformadas para

$$x(0) = 0, \quad \frac{dx}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = \frac{1}{\lambda} \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{1}{5}(8) = 1,6$$

Como um outro exemplo, considere a seguinte equação:

$$100 \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 0,5x = \sin t, \quad x(0) = 2, \quad \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = 5 \quad (6.54)$$

Em virtude da grande diferença nos valores dos coeficientes, a simulação da Eq. (6.54) no computador não é desejável. Se escolhemos para  $\lambda$  um valor tal que os coeficientes de todos os termos são da mesma ordem de magnitude, então, a solução do computador terá em geral menos erro. No presente exemplo, se  $\lambda$  é escolhido como sendo 0,1, então

$$\tau = 0,1t$$

$$\frac{dx}{dt} = 0,1 \frac{dx}{d\tau}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0,01 \frac{d^2x}{d\tau^2}$$

A Eq. (6.54) agora se torna

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 0,2 \frac{dx}{d\tau} + 0,5x = \sin 10\tau$$

As condições iniciais são

$$x(0) = 2, \quad \frac{dx}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = 50$$

Note que em um problema particular, além da escala de tempo, pode também ser necessário escolher fatores de escala de magnitude de tal forma que a magnitude da função de excitação não seja nem muito grande nem muito pequena e que as saídas dos amplificadores tenham uma excursão cobrindo a maior parte de sua região de linearidade ( $\pm 100$  V).

**Simulação de sistemas físicos em computador analógico.** A simulação de sistemas dinâmicos é uma aplicação muito importante do computador analógico. Em particular, o computador analógico é muito útil para se determinar os efeitos de variações de parâmetros no desempenho do sistema.

Considere o sistema visto na Fig. 6.43. Queremos simular este sistema em um computador analógico e investigar o efeito de variações em  $a$  e  $b$  na resposta a degrau unitário.

A função de transferência de malha-fechada é

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{as + b}{s^3 + 3s^2 + (2 + a)s + b}$$

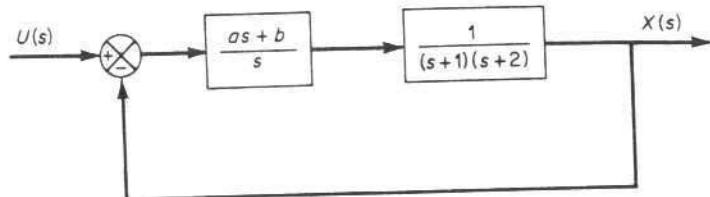


Fig. 6.43 Sistema de controle.

A equação diferencial correspondendo a esta função de transferência é

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + (2 + a)\dot{x} + bx = a\ddot{u} + bu \quad (6.55)$$

Isolando no lado esquerdo a derivada de ordem mais alta da Eq. (6.55), obtemos

$$\ddot{x} = -3\ddot{x} - (2\dot{x} + a\dot{x} - a\ddot{u}) - (bx - bu) \quad (6.56)$$

onde  $x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0$ . Um diagrama de computação analógica, correspondendo à Eq. (6.56), é visto na Fig. 6.44. Este diagrama mostra apenas uma possibilidade. Se as gamas de variação dos valores de  $a$  e  $b$  são especificadas, podem-se determinar fatores de escala de magnitude adequados.

Os efeitos das constantes  $a$  e  $b$  na resposta a degrau unitário podem ser investigados variando-se o ajuste dos potenciômetros que envolvem  $a$  e  $b$ . (Se  $a, b > 1$ , poderemos necessitar da adição de amplificadores ao diagrama de computação.) As condições iniciais são ajustadas para zero.

Como outro exemplo da simulação de um sistema dinâmico, considere o sistema mecânico visto na Fig. 6.45(a). As equações

$$m_1\ddot{x}_1 + f_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 + f_2\dot{x}_2 + k_3x_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0$$

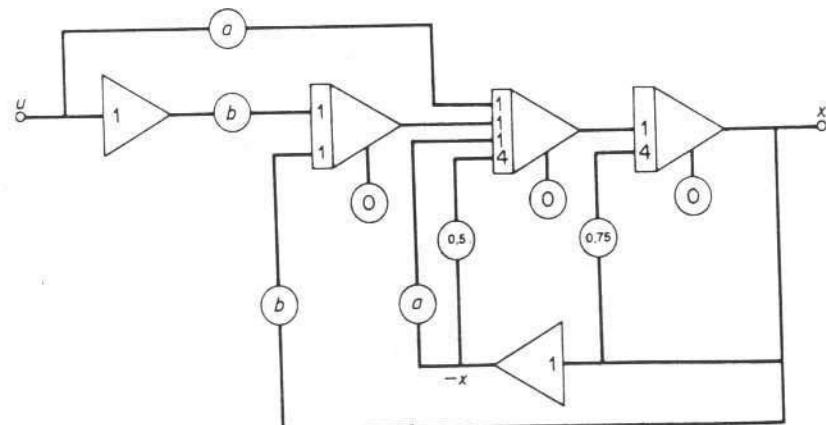
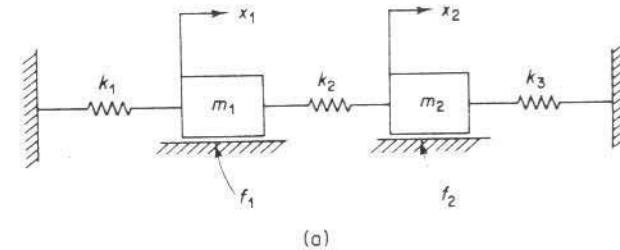


Fig. 6.44 Diagrama de computação analógica para resolver a Eq. (6.56).

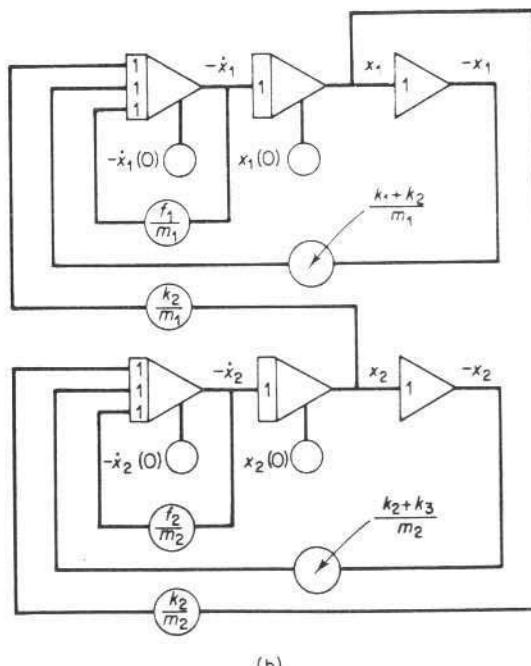
Um diagrama de simulação em computador analógico para este sistema é visto na Fig. 6.45(b).

**Comentários de conclusão.** No decurso da análise e projeto de sistemas complicados, simulações em computadores analógicos têm um papel importante. Os efeitos de mudanças nos parâmetros do sistema sobre o desempenho deste podem ser facilmente determinados. A vantagem de simulações analógicas (ou digitais) reside no fato de que qualquer escala de tempo pode ser usada.

Em geral, a representação matemática precisa de um componente complicado é muito difícil. É provável que algumas das características importantes do componente não sejam incluídas na simulação (por desconhecimento). Isto pode causar



(a)



(b)

Fig. 6.45 (a) Sistema mecânico; (b) diagrama de simulação analógica para o sistema mecânico.

erros sérios na solução. Para evitar tais erros, o simulador pode incluir componentes do sistema real. Se tais componentes são incluídos, não se perde nenhuma característica importante do componente. A solução, entretanto, deve ser obtida em tempo real.

Apesar de ainda não termos discutido componentes não-lineares, o computador analógico é bastante versátil e conveniente de ser usado na simulação de sistemas de controle contendo tais componentes. Operações não-lineares como a multiplicação de duas variáveis podem ser feitas facilmente com o computador eletrônico analógico. Circuitos eletrônicos-padrão são disponíveis para simular não-linearidades comumente encontradas, como zona morta, saturação, histerese e atrito de Coulomb.

### PROBLEMAS ILUSTRATIVOS E SOLUÇÕES

**Problema A.6.1** Explique por que o controle proporcional de um processo que não possui uma propriedade de integração (o que significa que a função de transferência do processo não inclui o fator  $1/s$ ) sofre de offset (desvio) em resposta a entradas em degrau.

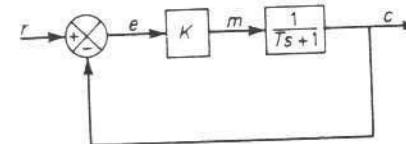


Fig. 6.46 Sistema de controle.

**Solução.** Considere, para exemplo, o sistema visto na Fig. 6.46. Em regime estacionário, se  $c$  fosse igual a uma constante não nula  $r$ , então  $e = 0$  e  $m = Ke = 0$ , resultando em  $c = 0$ , o que contradiz a hipótese de que  $c = r = \text{constante não nula}$ .

Um offset não nulo deve existir para a operação adequada de tal sistema de controle. Em outras palavras, em regime estacionário, se  $e$  fosse igual a  $r/(1+K)$ , então  $m = Kr/(1+K)$  e  $c = Kr/(1+K)$ , o que resulta no sinal de erro suposto  $e = r/(1+K)$ . Portanto o offset é  $r/(1+K)$ .

**Problema A.6.2** Considere o sistema de controle de nível de líquido como visto na Fig. 6.47. O controlador é do tipo proporcional. A entrada de referência do controlador é fixa.

Desenhe um diagrama de blocos do sistema, supondo que as variações nas variáveis sejam pequenas. Investigue a resposta do nível do segundo tanque sujeito a uma perturbação em degrau  $u$ .

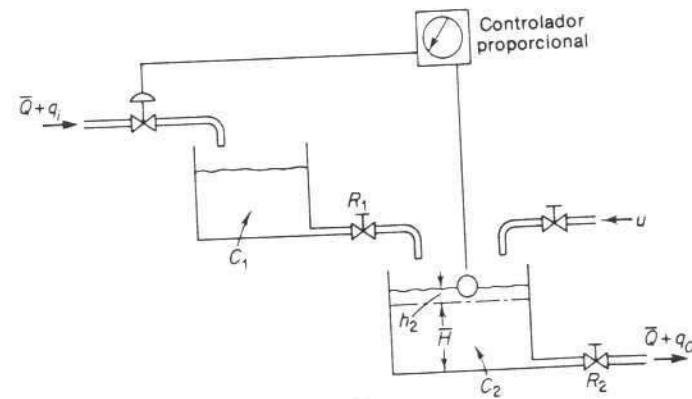


Fig. 6.47 Sistema de controle de nível de líquido.

**Solução.** A Fig. 6.48(a) é um diagrama de blocos deste sistema quando as variações nas variáveis são pequenas. Como a entrada de referência do controlador é fixa,  $r = 0$ . (Note que  $r$  é a variação na referência.)

Para investigar a resposta do nível do segundo tanque sujeito a uma perturbação em degrau  $u$ , achamos conveniente modificar o diagrama de blocos da Fig. 6.48(a) para aquele da Fig. 6.48(b).

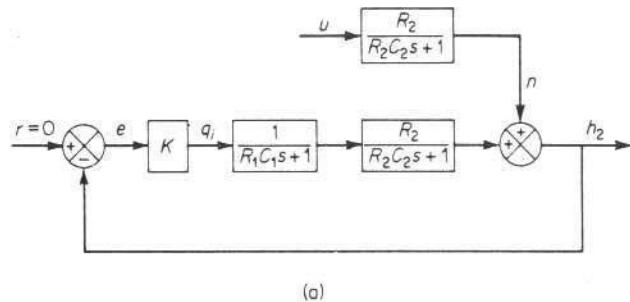
A função de transferência entre  $H_2(s)$  e  $U(s)$  pode ser obtida como

$$\frac{H_2(s)}{U(s)} = \frac{R_2(R_1C_1s + 1)}{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1) + KR_2}$$

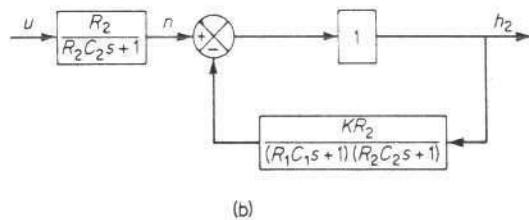
Desta equação, a resposta  $H_2(s)$  para uma perturbação  $U(s)$  pode ser determinada. O efeito do controlador é visto pela presença de  $K$  no denominador desta última equação.

Para uma perturbação em degrau de magnitude  $U_0$ , obtemos

$$h_2(\infty) = \frac{R_2}{1 + KR_2} U_0$$



(a)



(b)

Fig. 6.48 (a) Diagrama de blocos do sistema visto na Fig. 6.47; (b) diagrama de blocos modificado.

ou

$$\text{Erro estacionário} = -\frac{R_2}{1 + KR_2} U_0$$

O sistema apresenta *offset* para uma perturbação em degrau. Na resposta a uma perturbação em degrau, tanto o coeficiente de amortecimento quanto a frequência natural não-amortecida

dependem do valor do ganho  $K$ . Este ganho deve ser ajustado de tal forma que a resposta transitória a perturbações apresente amortecimento razoável bem como velocidade razoável.

**Problema A.6.3** Considere a resposta a degrau unitário do sistema de segunda-ordem

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

A amplitude da senóide amortecida exponencialmente varia seguindo uma série geométrica. No instante  $t = t_p = \pi/\omega_d$ , a amplitude é igual a  $e^{-(\sigma/\omega_d)\pi}$ . Após uma oscilação, ou em  $t = t_p + 2\pi/\omega_d = 3\pi/\omega_d$ , a amplitude é igual a  $e^{-(\sigma/\omega_d)3\pi}$ ; após mais um ciclo de oscilação, a amplitude é  $e^{-(\sigma/\omega_d)5\pi}$ . O logaritmo desta relação de amplitude é o chamado decremento logarítmico. Determine o decremento logarítmico para este sistema de segunda-ordem.

**Solução.** A relação de amplitude por um período de oscilação amortecida é

$$\frac{c(t_1)}{c(t_1 + \frac{2\pi}{\omega_d})} = \frac{e^{-(\sigma/\omega_d)\pi}}{e^{-(\sigma/\omega_d)3\pi}} = e^{2(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{2\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

onde

$$t_1 = t_p + n \frac{2\pi}{\omega_d} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Portanto, o decremento logarítmico  $\delta$  é

$$\delta = \ln \left| \frac{c(t_1)}{c(t_1 + \frac{2\pi}{\omega_d})} \right| = \frac{2\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Ele é uma função apenas do coeficiente de amortecimento  $\xi$ .

**Problema A.6.4** Considere um sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência de malha aberta é

$$G(s) = \frac{K}{s(Js + F)}$$

Discussir os efeitos da variação dos valores de  $K$  e  $F$  sobre o erro estacionário na resposta a rampa unitária. Esboce curvas de resposta a rampa unitária típica para um valor baixo, médio e alto para a constante  $K$ .

**Solução.** A função de transferência de malha-fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Fs + K}$$

Para uma entrada rampa unitária,  $R(s) = 1/s^2$ . Portanto,

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s) - C(s)}{R(s)} = \frac{Js^2 + Fs}{Js^2 + Fs + K}$$

ou

$$E(s) = \frac{Js^2 + Fs}{Js^2 + Fs + K} \frac{1}{s^2}$$

O erro estacionário é

$$e_{ss} = e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{F}{K}$$

Vemos que podemos reduzir o erro estacionário  $e_{ss}$  aumentando o ganho  $K$  ou diminuindo o coeficiente de atrito viscoso  $F$ . Entretanto, aumentando o ganho ou diminuindo o coeficiente de atrito viscoso, obtém-se um decréscimo no coeficiente de amortecimento, resultando em uma resposta transitória mais oscilatória. Dobrando  $K$ ,  $e_{ss}$  diminui para a metade do seu valor original, enquanto que  $\zeta$  é diminuído para 0,707 do seu valor original visto que  $\zeta$  é inversamente proporcional à raiz quadrada de  $K$ . Por outro lado, diminuindo  $F$  para metade do seu valor original, tanto  $e_{ss}$  como  $\zeta$  diminuem para as metades dos seus valores originais, respectivamente. Portanto, é recomendável aumentar o valor de  $K$  ao invés de diminuir o valor de  $F$ . Após o transitório ter desaparecido e ter-se alcançado um estado estacionário, a velocidade de saída se torna igual à velocidade de entrada. Entretanto, há um erro posicional estacionário entre a entrada e a saída. Exemplos da resposta a rampa unitária do sistema para três valores distintos de  $K$  são ilustrados na Fig. 6.49.

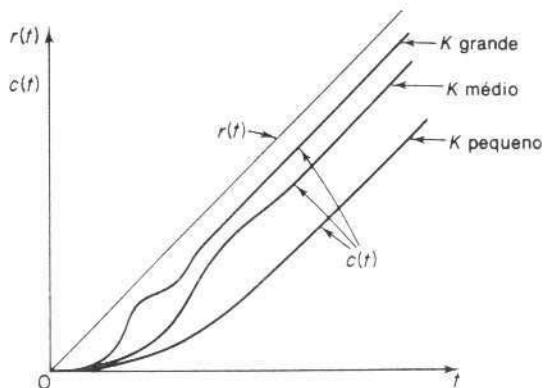


Fig. 6.49 Curvas de resposta a rampa unitária do sistema considerado no Problema A.6.4.

**Problema A.6.5** Obtenha a resposta a rampa unitária do sistema dado por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Obtenha também o erro estacionário.

**Solução.** Para uma entrada rampa unitária,  $R(s) = 1/s^2$ . A saída  $C(s)$  pode ser escrita

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s^2}$$

Para o caso subamortecido ( $0 \leq \zeta < 1$ ),  $c(t)$ , a transformada inversa de Laplace de  $C(s)$ , pode ser obtida como

$$\begin{aligned} c(t) &= t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + e^{-\zeta\omega_n t} \left( \frac{2\zeta}{\omega_n} \cos \omega_d t + \frac{2\zeta^2 - 1}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \\ &= t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left( \omega_d t + \tan^{-1} \frac{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}{2\zeta^2 - 1} \right) \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \omega_d &= \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \\ \tan^{-1} \frac{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}{2\zeta^2 - 1} &= 2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \end{aligned}$$

Para o caso de amortecimento crítico ( $\zeta = 1$ ),  $c(t)$  é

$$c(t) = t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{2}{\omega_n} e^{-\omega_n t} \left( 1 + \frac{\omega_n t}{2} \right) \quad (t \geq 0)$$

Para o caso sobreamortecido ( $\zeta > 1$ ),  $c(t)$  é

$$\begin{aligned} c(t) &= t - \frac{2\zeta}{\omega_n} - \frac{2\zeta^2 - 1 - 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \\ &\quad + \frac{2\zeta^2 - 1 + 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

(A resposta a rampa unitária deste sistema pode também ser obtida integrando-se a resposta a degrau unitário com relação ao tempo e determinando as constantes de integração, usando-se a condição de que as condições iniciais na saída são nulas.) O sinal de erro  $e(t)$  neste caso é

$$e(t) = r(t) - c(t) = t - c(t)$$

O erro estacionário,  $e_{ss}$ , para  $\zeta > 0$  é então

$$e_{ss} = e(\infty) = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

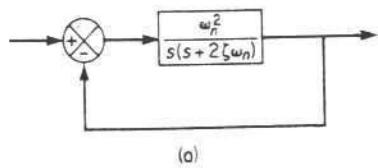
**Problema A.6.6** Considere o sistema visto na Fig. 6.50(a). O erro estacionário para uma entrada rampa unitária é  $e_{ss} = 2\zeta/\omega_n$ . Mostre que o erro estacionário para seguir uma entrada em rampa pode ser eliminado se a entrada é introduzida no sistema através de um elemento tipo proporcional-mais-derivada, como visto na Fig. 6.50(b), com o valor de  $k$  adequadamente escolhido.

**Solução.** A função de transferência de malha-fechada do sistema visto na Fig. 6.50(b) é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(1 + ks)\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

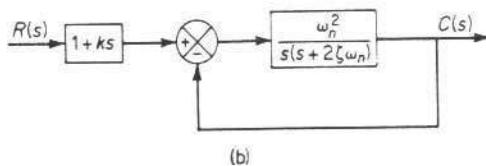
Então

$$R(s) - C(s) = \left( \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s - \omega_n^2 k s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right) R(s)$$



(a)

Fig. 6.50 Sistemas de controle.



(b)

Se a entrada for uma rampa unitária, então o erro estacionário é

$$\begin{aligned} e(\infty) &= r(\infty) - c(\infty) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s - \omega_n^2 k s}{s^2 - 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right) \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{2\zeta\omega_n - \omega_n^2 k}{\omega_n^2} \end{aligned}$$

Portanto, se  $k$  é escolhido como sendo

$$k = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

então o erro estacionário ao se seguir uma rampa pode ser feito igual a zero. Observe que se houver quaisquer variações nos valores de  $\zeta$  e/ou  $\omega_n$  devido a variações ambientais ou envelhecimento, então um erro estacionário não nulo poderá resultar para uma resposta a rampa.

**Problema A.6.7** Considere o servomecanismo visto na Fig. 6.51. Determine os valores de  $K$  e  $k$  de tal forma que o sobre-sinal máximo na resposta a degrau unitário seja de 25% e o instante do pico seja 2 s.

**Solução.** O sobre-sinal máximo  $M_p$  é

$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$$

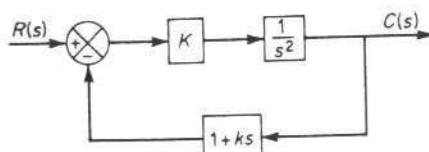


Fig. 6.51 Diagrama de blocos de um servomecanismo.

que é especificado como sendo 25%. Portanto,

$$e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} = 0,25$$

onde temos que

$$\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi = 1,39$$

ou

$$\zeta = 0,4$$

O instante do pico  $t_p$  é especificado como sendo 2 s. Portanto,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 2$$

ou

$$\omega_d = 1,57$$

Então, a freqüência natural não amortecida  $\omega_n$  é

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1,57}{\sqrt{1-0,4^2}} = 1,71$$

Do diagrama de blocos, obtemos

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + Ks + K}$$

Observando que

$$\omega_n = \sqrt{K}, \quad \zeta = \frac{Kk}{2\omega_n}$$

obtemos

$$K = \omega_n^2 = 1,71^2 = 2,93$$

$$k = \frac{2\zeta\omega_n}{K} = \frac{2 \times 0,4 \times 1,71}{2,93} = 0,47$$

**Problema A.6.8** A Fig. 6.52(a) mostra um sistema mecânico vibratório. Quando uma força (entrada em degrau) de 2 lb é aplicada ao sistema, a massa oscila, como visto na Fig. 6.52(b). Determine  $m$ ,  $f$  e  $k$  do sistema a partir desta curva de resposta.

**Solução.** A função de transferência deste sistema é

$$\frac{X(s)}{P(s)} = \frac{1}{ms^2 + fs + k}$$

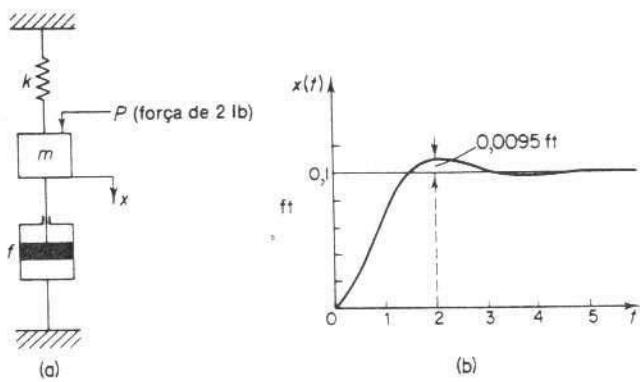


Fig. 6.52 (a) Sistema mecânico vibratório; (b) curva de resposta a degrau.

Como

$$P(s) = \frac{2}{s}$$

obtemos

$$X(s) = \frac{2}{s(ms^2 + fs + k)}$$

Segue-se então que o valor estacionário de  $x$  é

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \frac{2}{k} = 0,1 \text{ ft}$$

Portanto

$$k = 20 \text{ lb/ft}$$

Note que  $M_p = 9.5\%$  corresponde a  $\zeta = 0.6$ . O instante do pico  $t_p$  é dado por

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi}{0.8\omega_n}$$

A curva experimental mostra que  $t_p = 2$  s. Portanto,

$$\omega_n = \frac{3,14}{2 \times 0,8} = 1,96 \text{ rad/s}$$

Como  $\omega_n^2 = k/m = 20/m$ , obtemos

$$\begin{aligned} m &= \frac{20}{\omega_n^2} = \frac{20}{1,96^2} = 5,2 \text{ slugs} \\ &= 166 \text{ lb} \end{aligned}$$

Então  $f$  é determinado a partir de

$$2\zeta\omega_n = \frac{f}{m}$$

ou

$$f = 2\zeta\omega_n m = 2 \times 0,6 \times 1,96 \times 5,2 = 12,2 \text{ lb/ft/s}$$

**Problema A.6.9** Considere um sistema cujos pólos de malha-fechada e zeros de malha-fechada estão localizados no plano  $s$  em uma linha paralela ao eixo  $j\omega$ , como visto na Fig. 6.53. Mostre que a resposta impulsiva de um sistema como este é uma função co-senoidal amortecida.

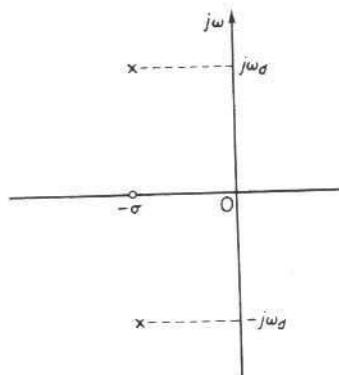


Fig. 6.53 Configuração de pólos e zeros de malha-fechada.

**Solução.** A função de transferência de malha-fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + \sigma)}{(s + \sigma + j\omega_d)(s + \sigma - j\omega_d)}$$

Para uma entrada impulso unitário,  $R(s) = 1$  e

$$C(s) = \frac{K(s + \sigma)}{(s + \sigma)^2 + \omega_d^2}$$

A transformada inversa de Laplace de  $C(s)$  é

$$c(t) = Ke^{-\sigma t} \cos \omega_d t \quad (t \geq 0)$$

que é uma função co-senoidal amortecida.

**Problema A.6.10** Considere o sistema visto na Fig. 6.54. Este sistema é excitado por dois sinais, um a entrada de referência e o outro a perturbação externa. Mostre que a equação característica deste sistema é a mesma, independentemente de qual sinal é escolhido como entrada.

**Solução.** A função de transferência que relaciona a entrada de referência e a saída correspon-

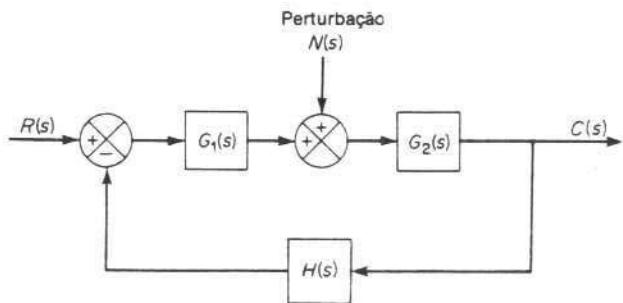


Fig. 6.54 Sistema de controle.

\* dente, sem considerar a-perturbação externa, é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H} \quad (6.57)$$

A função de transferência que relaciona a perturbação externa e a correspondente saída na ausência da entrada de referência é

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H} \quad (6.58)$$

Note que os denominadores das Eqs. (6.57) e (6.58) são os mesmos. A equação característica é

$$1 + G_1 G_2 H = 0$$

Esta contém a informação necessária para determinar características básicas da resposta do sistema. (Lembre-se que para um dado sistema há apenas uma equação característica. Isto significa que a equação característica de uma dada função de transferência é a mesma independentemente de qual sinal é escolhido como entrada.)

**Problema A.6.11** Os zeros de malha-aberta e os zeros de malha-fechada são idênticos para um sistema a malha-fechada?

**Solução.** Não. Considere um sistema a malha-fechada cuja função de transferência do elo direto é  $G(s) = p(s)/q(s)$  e a função de transferência do elo de realimentação é  $H(s) = n(s)/d(s)$ , onde  $p(s)$ ,  $q(s)$ ,  $n(s)$  e  $d(s)$  são polinômios em  $s$ . Então,

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \\ &= \frac{p(s)d(s)}{q(s)d(s) + p(s)n(s)} \end{aligned}$$

Vemos que os zeros da função de transferência de malha-fechada são aqueles valores de  $s$  que fazem  $p(s)d(s) = 0$  e que os zeros da função de transferência de malha-aberta são aqueles valores de  $s$  que fazem  $p(s)n(s) = 0$ . (Portanto, alguns dos zeros da função de transferência de malha-fechada são os mesmos dos da função de transferência de malha-aberta.)

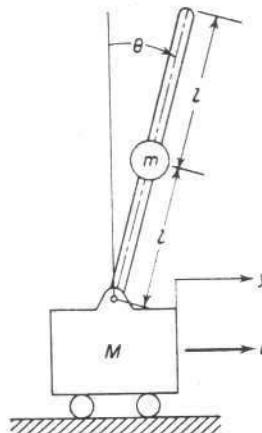


Fig. 6.55 Pêndulo invertido montado em um carrinho motorizado.

**Problema A.6.12\*** Considere o pêndulo invertido montado em um carrinho motorizado visto na Fig. 6.55. Este é um modelo do controle de altitude de um foguete por ocasião do lançamento. O objetivo do problema do controle de altitude é manter o foguete na posição vertical. No problema presente, queremos manter o pêndulo na posição vertical. O foguete (ou o pêndulo invertido neste problema) é instável e pode cair a qualquer instante e em qualquer direção.

Neste problema, consideramos apenas um problema bidimensional de tal forma que o pêndulo visto na Fig. 6.55 se move apenas no plano da folha do livro. Para manter o pêndulo invertido na vertical, suponha que medimos  $\theta$  e  $\dot{\theta}$  continuamente e que usamos um controlador do tipo proporcional-mais-derivada para produzir a força de controle  $u$ , ou

$$u = M(a\theta + b\dot{\theta})$$

Determine as condições para  $a$  e  $b$  de tal forma que o sistema seja estável. Suponha que não há atrito no eixo ligando o pêndulo ao carrinho nem nas rodas do carrinho. Suponha também que  $\theta$  e  $\dot{\theta}$  são pequenos.

**Solução.** Usando os símbolos definidos na Fig. 6.55, podemos obter as equações diferenciais descrevendo a dinâmica do sistema como segue: Observando que  $\theta$  e  $\dot{\theta}$  são pequenos, de tal forma que  $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1$ , temos

$$(J + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{y} - mgl\theta = 0 \quad (6.59)$$

$$ml\ddot{\theta} + (M + m)\ddot{y} = u \quad (6.60)$$

$$M(a\theta + b\dot{\theta}) = u \quad (6.61)$$

onde  $J$  é o momento de inércia do pêndulo invertido relativo ao centro de massa. Como  $J$  pode ser dado por

$$J = \frac{ml^2}{3}$$

\*O problema de controlar sistemas instáveis como o pêndulo invertido montado em um carrinho motorizado é visto com detalhes na Referência H-6.

a Eq. (6.59) pode ser escrita

$$\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{y} - mgl\theta = 0$$

do qual

$$\ddot{y} = -\frac{4}{3}l\ddot{\theta} + g\theta \quad (6.62)$$

Substituindo as Eqs. (6.62) e (6.61) na Eq. (6.60), temos

$$ml\ddot{\theta} + (M+m)\left(-\frac{4}{3}l\ddot{\theta} + g\theta\right) = M(a\theta + b\dot{\theta}) \quad (6.63)$$

Vamos definir

$$\frac{m}{M} = \mu$$

Então, a Eq. (6.63) se torna

$$\ddot{\theta} + \frac{3b}{(\mu+4)l}\dot{\theta} + \frac{3[a-(1+\mu)g]}{(\mu+4)l}\theta = 0$$

Para haver estabilidade, os coeficientes de  $\theta$  e  $\dot{\theta}$  devem ser positivos. Portanto, as condições de estabilidade são

$$b > 0, \quad a > (1 + \mu)g$$

Se os valores de  $a$  e  $b$  são escolhidos satisfazendo estas condições, qualquer pequeno desvio na inclinação pode ser recuperado sem causar a queda do pêndulo.

**Problema A.6.13** Determine a resposta a degrau unitário de um sistema com realimentação unitária cuja função de transferência de malha-aberta é

$$G(s) = \frac{5(s+20)}{s(s+4,59)(s^2+3,41s+16,35)}$$

**Solução.** A função de transferência de malha-fechada é

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{5(s+20)}{s(s+4,59)(s^2+3,41s+16,35) + 5(s+20)} \\ &= \frac{5s+100}{s^4+8s^3+32s^2+80s+100} \\ &= \frac{5(s+20)}{(s^2+2s+10)(s^2+6s+10)} \end{aligned}$$

A resposta a degrau unitário deste sistema é então

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{5(s+20)}{s(s^2+2s+10)(s^2+6s+10)} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{\frac{3}{8}(s+1) - \frac{17}{8}}{(s+1)^2 + 3^2} + \frac{-\frac{11}{8}(s+3) - \frac{13}{8}}{(s+3)^2 + 1^2} \end{aligned}$$

A resposta temporal  $c(t)$  pode ser achada tomando-se a transformada inversa de Laplace de  $C(s)$  como segue:

$$c(t) = 1 + \frac{3}{8}e^{-t} \cos 3t - \frac{17}{24}e^{-t} \sin 3t - \frac{11}{8}e^{-3t} \cos t - \frac{13}{8}e^{-3t} \sin t \quad (t \geq 0)$$

## PROBLEMAS

**Problema B.6.1** Um termômetro requer 1 min para indicar 98% da resposta a uma entrada em degrau. Supondo que o termômetro é um sistema de primeira-ordem, determine a constante de tempo.

Se o termômetro é colocado em um banho, cuja temperatura varia linearmente a uma taxa de  $10^\circ/\text{min}$ , quanto erro haverá na leitura do termômetro?

**Problema B.6.2** Qual seria o erro se o circuito visto na Fig. 6.56 fosse usado como um integrador?

**Problema B.6.3** Determine a resposta a degrau unitário de um sistema com realimentação unitária cuja função de transferência de malha-aberta é

$$G(s) = \frac{4}{s(s+5)}$$

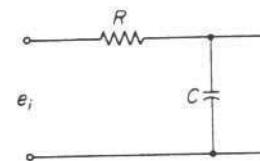


Fig. 6.56 Sistema elétrico.

**Problema B.6.4** Considere a resposta a degrau unitário de um sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência de malha-aberta é

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

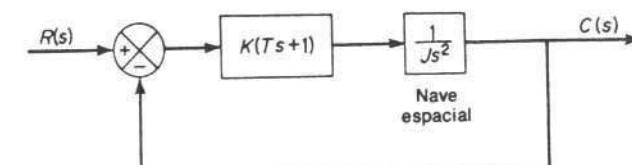


Fig. 6.57 Sistema de controle de atitude de uma nave espacial.

Determine o tempo de subida, o instante do pico, o sobre-sinal máximo, e o tempo de acomodação.

**Problema B.6.5** Considere o sistema a malha-fechada dado por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Determine os valores de  $\zeta$  e  $\omega_n$  de tal forma que o sistema responda a uma entrada em degrau com aproximadamente 5% de sobre-sinal e com um tempo de acomodação de 2 s. (Usar o critério de 2%).

**Problema B.6.6** A Fig. 6.57 é um diagrama de blocos de um sistema de controle de altitude de uma nave espacial. Supondo a constante de tempo  $T$  do controlador como 3 s e a relação do torque para inércia  $K/J$  como  $2/9$  rad<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>, determine o coeficiente de amortecimento do sistema.

**Problema B.6.7** Considere um sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência de malha-aberta é

$$G(s) = \frac{0,4s + 1}{s(s + 0,6)}$$

Determine a resposta a entrada degrau unitário. Qual é o tempo de subida deste sistema? Qual é o sobre-sinal máximo?

**Problema B.6.8** Determine a resposta a impulso unitário e a resposta a degrau unitário de um sistema com realimentação unitária cuja função de transferência de malha-aberta é

$$G(s) = \frac{2s + 1}{s^2}$$

**Problema B.6.9** Considere o sistema visto na Fig. 6.58. Mostre que a função de transferência  $Y(s)/X(s)$  tem um zero no semiplano direito do plano  $s$ . Em seguida obtenha  $y(t)$  quando  $x(t)$  é um degrau unitário. Faça um gráfico de  $y(t)$  em função de  $t$ .

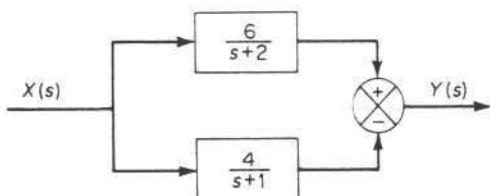


Fig. 6.58 Sistema com um zero no semiplano direito do plano  $s$  (Sistema não de mínima fase.)

**Problema B.6.10** Aplique o critério de estabilidade de Routh para a seguinte equação:

$$s^4 + Ks^3 + s^2 + s + 1 = 0$$

e determine a gama de valores de  $K$  para haver estabilidade.

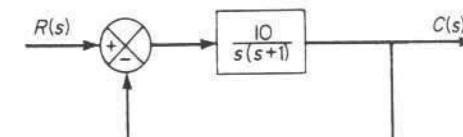
**Problema B.6.11** Determine a gama de valores de  $K$  para haver estabilidade de um sistema de controle a realimentação unitária cuja função de transferência de malha-aberta é

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 2)}$$

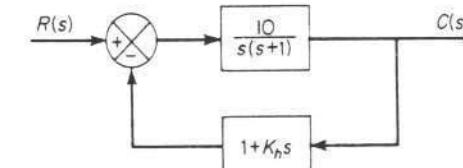
**Problema B.6.12** Os dois sistemas abaixo são estáveis?

1.  $G(s) = \frac{10(s + 1)}{s(s - 1)(s + 5)}, \quad H(s) = 1$
2.  $G(s) = \frac{10}{s(s - 1)(2s + 3)}, \quad H(s) = 1$

**Problema B.6.13** Considere o sistema visto na Fig. 6.59(a). O coeficiente de amortecimento deste sistema é 0,137 e a freqüência natural não amortecida é 3,16 rad/s. Para melhorar a estabilidade relativa, usamos uma realimentação por tacômetro. A Fig. 6.59(b) mostra o sistema com realimentação com tacômetro.



(a)



(b)

Fig. 6.59 (a) Sistema de controle; (b) sistema de controle com realimentação por tacômetro.

Determine o valor de  $K_h$  de tal forma que o coeficiente de amortecimento do sistema seja 0,5. Desenhe curvas de resposta a degrau unitário tanto para o sistema original como para o sistema com realimentação a tacômetro. Desenhe também as curvas de erro em função do tempo para a resposta a rampa unitária para ambos os sistemas.

**Problema B.6.14** Faça um diagrama de computação analógica para o sistema de mola-massa-viscosidade descrito por

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = u(t)$$

onde

$$x(0) = 2 \text{ ft}, \quad \dot{x}(0) = 5 \text{ ft/s}$$

A entrada  $u(t)$  é uma função degrau e é dada por

$$u(t) = 10 \text{ lb}$$

**Problema B.6.15** Suponha que a característica dinâmica de um processo é dada por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (0 < \zeta < 1)$$

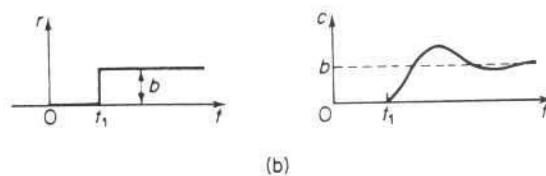
A resposta deste sistema a uma entrada em degrau  $a1(t)$  bem como para uma entrada em degrau atrasado  $b1(t - t_1)$  é vista nas Figs. 6.60(a) e 6.60(b), respectivamente. Podemos ver a partir destas curvas de resposta que, se escolhermos os valores de  $a, b$  e  $t_1$  de forma adequada, podemos então obter a resposta com tempo de acomodação finito sem oscilação como visto na Fig. 6.60(c). O método de controle de se aplicar uma entrada em degrau e uma entrada em degrau atrasado para obter uma resposta com tempo de acomodação finito e sem oscilação é chamado *controle posicast*. (Este nome foi dado por O.J.M. Smith.)

Se a característica dinâmica de um processo pode ser representada por uma função de transferência de segunda-ordem subamortecida, então este método pode ser aplicado convenientemente para ajustar a entrada de referência do controlador para iniciar o ciclo do processo.

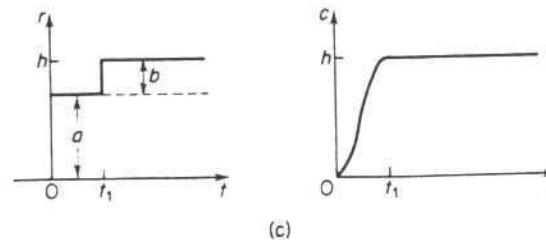
Suponha que desejamos iniciar o processo e levar a saída  $c(t)$  para  $h$  através de controle *posicast*. Determine os valores de  $a, b$  e  $t_1$  vistos na Fig. 6.60(c) em termos de  $h, \zeta$  e  $\omega_n$ .



(a)



(b)



(c)

Fig. 6.60 (a) Entrada em degrau e curva de resposta; (b) entrada em degrau atrasado e curva de resposta; (c) curvas de entrada e resposta mostrando a característica de controle *posicast*.

# Análise de Erros e Introdução à Otimização de Sistemas

## 7.1 COEFICIENTES DE ERRO ESTÁTICO

As características de resposta transitória discutidas no Cap. 6 são facetas importantes do desempenho de sistemas de controle. Uma outra característica importante se relaciona com o erro do sistema. Os erros em um sistema de controle podem ser atribuídos a muitos fatores. Variações na entrada de referência causarão erros inevitáveis durante períodos transitórios e podem também ocasionar erros estacionários. Imperfeições nos componentes do sistema, como por exemplo, atrito estático, folga (*backlash*), e deriva de amplificadores, bem como envelhecimento ou deterioração, causarão erros em regime estacionário.

Em capítulos anteriores, foi dito que o erro estacionário é uma medida da precisão de um sistema de controle. O desempenho em regime estacionário de um sistema de controle estável é geralmente julgado pelo erro estacionário devido a entradas em degrau, rampa, ou aceleração. Nesta seção, investigaremos tal desempenho em regime estacionário. Mais precisamente, pesquisaremos um tipo de erro estacionário que é causado pela incapacidade de um sistema de seguir certos tipos de entradas.

Qualquer sistema de controle físico sofre inherentemente de erro estacionário em resposta a certos tipos de entradas. Um sistema pode não apresentar erro estacionário para entradas em degrau, mas o mesmo sistema pode apresentar erro estacionário não nulo para uma entrada em rampa. (A única maneira de se eliminar este erro é modificando a estrutura do sistema.) O fato de um dado sistema apresentar erro estacionário para um dado tipo de entrada depende do tipo de função de transferência de malha-aberta do sistema, o que será discutido a seguir.

**Classificações de sistemas de controle.** Sistemas de controle podem ser classificados de acordo com a sua habilidade para seguir entradas em degrau, entradas em

rampa, entradas parabólicas etc. Este é um esquema razoável de classificação porque as entradas reais podem ser freqüentemente consideradas como combinações de tais entradas. Os valores dos erros estacionários devidos a estas entradas individuais são indicativos da qualidade do sistema.

Considere a seguinte função de transferência de malha-aberta  $G(s)H(s)$ :

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_n s + 1)}{s^N(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_p s + 1)}$$

Elá envolve o termo  $s^N$  no denominador, representando um pólo de multiplicidade  $N$  na origem. O presente esquema de classificação é baseado no número de integrações indicadas pela função de transferência de malha-aberta. Um sistema é chamado de tipo 0, tipo 1, tipo 2, ... se  $N = 0, N = 1, N = 2, \dots$ , respectivamente. Note que esta classificação é diferente daquela de ordem de um sistema. Aumentando-se o número do tipo, melhora a precisão mas piora o problema da estabilidade. Um compromisso entre precisão em regime estacionário e estabilidade relativa sempre é necessário. Na prática, raramente se tem um sistema de tipo 3 ou maior porque geralmente é difícil projetar sistemas estáveis com mais do que duas integrações no ramo direto.

Veremos mais tarde que, se  $G(s)H(s)$  é escrita de tal forma que cada termo no numerador e denominador, exceto o termo  $s^N$ , tende à unidade quando  $s$  tende a zero, então o ganho de malha-aberta  $K$  está diretamente relacionada com o erro estacionário.

**Erros estacionários.** Considere o sistema visto na Fig. 7.1. A função de transferência de malha-fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

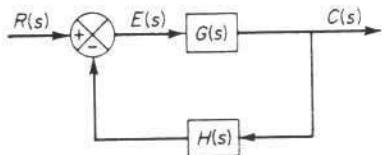


Fig. 7.1 Sistema de controle.

A função de transferência entre o sinal de erro atuante  $e(t)$  e o sinal de entrada  $r(t)$  é

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)H(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

onde o erro atuante  $e(t)$  é a diferença entre o sinal de entrada e o sinal de realimentação.

O teorema do valor final provê uma maneira conveniente de se determinar o desempenho estacionário de um sistema estável. Como  $E(s)$  é

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

o erro atuante estacionário é

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s R(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Os coeficientes de erro estático definidos a seguir são figuras de mérito de sistemas de controle. Quanto maiores os coeficientes, menor o erro estacionário. Em um dado sistema, a saída pode ser posição, velocidade, pressão, temperatura etc. A forma física da saída é, entretanto, imaterial nesta análise. Portanto, daqui em diante chamaremos a saída de "posição", a taxa de variação da saída de "velocidade" etc. Isto significa que em um sistema de controle de temperatura "posição" representa a temperatura de saída, "velocidade" representa a taxa de variação da temperatura de saída etc.

**Coefficiente de erro de posição estático  $K_p$ .** O erro atuante estacionário do sistema para uma entrada degrau unitário é

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \frac{1}{s} \\ = \frac{1}{1 + G(0)H(0)}$$

O coeficiente de erro de posição estático  $K_p$  é definido por

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = G(0)H(0)$$

Portanto, o erro atuante estacionário é dado em termos do coeficiente de erro de posição estático  $K_p$  pela expressão

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$$

Para um sistema do tipo 0,

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = K$$

Para um sistema do tipo 1 ou maior,

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^N(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = \infty \quad (N \geq 1)$$

Portanto, para um sistema do tipo 0, o coeficiente de erro de posição estático  $K_p$  é finito, enquanto que para um sistema do tipo 1 ou maior  $K_p$  é infinito.

Para uma entrada degrau unitário, o erro atuante estacionário  $e_{ss}$  pode ser resumido como segue:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K} \quad \text{para sistemas do tipo 0}$$

$$e_{ss} = 0 \quad \text{para sistemas do tipo 1 ou maior}$$

Da análise feita, vemos que a resposta de um sistema de controle com realimentação unitária para uma entrada em degrau envolve um erro estacionário se não há integração no ramo direto. (Se erros pequenos podem ser tolerados para entradas em degrau, então um sistema do tipo 0 pode ser admissível, contanto que o ganho  $K$  seja suficientemente grande. Entretanto, se o ganho  $K$  é grande demais, fica difícil se obter uma estabilidade relativa adequada.) Se desejarmos um erro estacionário nulo para uma entrada em degrau, então o tipo do sistema deve ser 1 ou maior.

**Coeficiente de erro de velocidade estático  $K_v$ .** O erro atuante estacionário do sistema com uma entrada rampa unitária (entrada velocidade unitária) é dado por

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)H(s)}$$

O coeficiente de erro de velocidade estático  $K_v$  é definido por

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$$

Portanto, o erro atuante estacionário é dado em termos do coeficiente de erro de velocidade estático  $K_v$  pela expressão

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

O termo *erro de velocidade* é usado aqui para significar o erro para uma entrada em rampa. A dimensão do erro de velocidade é a mesma que a do erro do sistema, isto é, o erro de velocidade não é um erro na velocidade, mas um erro na posição devido a uma entrada em rampa.

Para um sistema do tipo 0,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = 0$$

Para um sistema do tipo 1,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = K$$

Para um sistema do tipo 2 ou maior,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^N(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = \infty \quad (N \geq 2)$$

O erro atuante estacionário  $e_{ss}$  para a entrada rampa unitária pode ser resumido como segue:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty \quad \text{para sistemas do tipo 0}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K} \quad \text{para sistemas do tipo 1}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0 \quad \text{para sistemas do tipo 2 ou maior}$$

A análise feita mostra que um sistema do tipo 0 é incapaz de seguir uma entrada em rampa no regime estacionário. O sistema do tipo 1 com realimentação unitária pode seguir a entrada em rampa com um erro finito. Em operação estacionária, a velocidade de saída é exatamente igual à velocidade de entrada, mas há um erro na posição. Este erro é proporcional à velocidade da entrada e inversamente proporcional ao ganho  $K$ . A Fig. 7.2 mostra um exemplo da resposta de um sistema do tipo 1 com realimentação unitária para entrada em rampa. O sistema de ordem 2 ou maior pode seguir uma entrada em rampa com erro atuante nulo em regime estacionário.

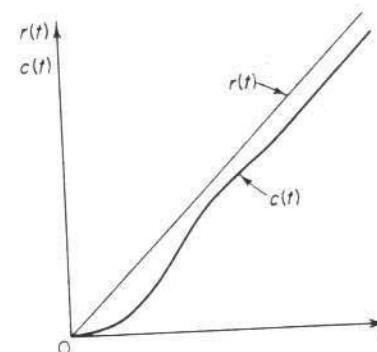


Fig. 7.2 Resposta de um sistema com realimentação unitária, do tipo 1, para uma entrada em rampa.

**Coeficiente de erro de aceleração estático  $K_a$ .** O erro atuante estacionário do sistema com uma entrada parábola unitária (entrada de aceleração) que é definida por

$$r(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

é dado por

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 G(s)H(s)}$$

O coeficiente de erro de aceleração estático  $K_a$  é definido pela equação

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) H(s)$$

O erro atuante estacionário é então

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

Note que o erro de aceleração, o erro estacionário devido a uma entrada em parábola, é um erro na posição.

Os valores de  $K_a$  são obtidos como segue:

Para um sistema do tipo 0,

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = 0$$

Para um sistema do tipo 1,

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = 0$$

Para um sistema do tipo 2,

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^2(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = K$$

Para um sistema do tipo 3 ou maior,

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^N(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = \infty \quad (N \geq 3)$$

Portanto, o erro atuante estacionário para a entrada parábola unitária é

$$e_{ss} = \infty \quad \text{para sistemas do tipo 0 ou tipo 1}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K} \quad \text{para sistemas do tipo 2}$$

$$e_{ss} = 0 \quad \text{para sistemas do tipo 3 ou maior}$$

Note que tanto sistemas do tipo 0 como do tipo 1 são incapazes de seguir uma entrada em parábola em regime estacionário. O sistema do tipo 2 com realimentação unitária pode seguir uma entrada em parábola com um sinal de erro atuante finito. A Fig. 7.3 mostra um exemplo da resposta de um sistema do tipo 2 com realimentação unitária para um entrada em parábola. O sistema do tipo 3 ou maior com realimentação unitária segue uma entrada em parábola com erro atuante nulo em regime estacionário.

**Resumo.** A Tabela 7.1 resume os erros estacionários para sistemas do tipo 0, tipo 1 e tipo 2 quando sujeitos a várias entradas. Os valores finitos para erros

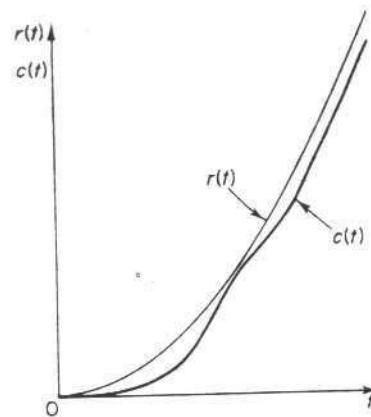


Fig. 7.3 Resposta de um sistema com realimentação unitária, do tipo 2, para uma entrada na parábola.

Tabela 7.1 Erro estacionário em termos do ganho  $K$

	Entrada em degrau $r(t) = 1$	Entrada em rampa $r(t) = t$	Entrada de aceleração $r(t) = \frac{1}{2}t^2$
Sistema do tipo 0	$\frac{1}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
Sistema do tipo 1	0	$\frac{1}{K}$	$\infty$
Sistema do tipo 2	0	0	$\frac{1}{K}$

estacionários aparecem na linha diagonal. Acima da diagonal, os erros estacionários são infinitos; abaixo da diagonal eles são nulos.

Lembre-se de que os termos *erro de posição*, *erro de velocidade*, e *erro de aceleração* significam desvios em regime estacionário na posição de saída. Um erro de velocidade finita significa que depois de os transitórios desaparecerem, a entrada e a saída se movem com a mesma velocidade mas com uma diferença de posição finita.

Os coeficientes de erro  $K_p$ ,  $K_v$  e  $K_a$  descrevem a habilidade de um sistema em reduzir ou eliminar erros estacionários. Portanto, eles são indicativos do desempenho em regime estacionário. Em geral é desejável aumentar os coeficientes de erro, enquanto se mantém a resposta transitória dentro de limites aceitáveis. Se há qualquer conflito entre o coeficiente de erro de velocidade estático e o coeficiente de erro de aceleração estático, então o último pode ser considerado menos importante do que o anterior. Nota-se que para melhorar o desempenho em regime estacionário, podemos aumentar o tipo do sistema adicionando uma integração ou integrações no ramo direto. Entretanto, isto introduz problemas adicionais de

estabilidade. O projeto de um sistema satisfatório com mais do que duas integrações no ramo direto é geralmente difícil.

**Correlação entre a integral do erro na resposta a degrau e erro estacionário na resposta a rampa.** Discutiremos a seguir a correlação entre a integral do erro na resposta a degrau unitário de um sistema e o erro estacionário na resposta a rampa unitária do mesmo sistema.

Em um sistema de controle com realimentação unitária, a área total abaixo da curva de erro  $\int_0^\infty e(t)dt$  como resultado da resposta a degrau unitário fornece o erro estacionário na resposta a entrada rampa unitária. Para provar isto, vamos definir

$$\mathcal{L}[e(t)] = \int_0^\infty e^{-st} e(t) dt = E(s)$$

Então

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-st} e(t) dt = \int_0^\infty e(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} E(s)$$

Note que

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}$$

Portanto

$$\int_0^\infty e(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{R(s)}{1 + G(s)} \right]$$

Para uma entrada degrau unitário,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e(t) dt &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{1 + G(s)} \frac{1}{s} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)} \\ &= \frac{1}{K_v} \end{aligned}$$

= erro estacionário na resposta a rampa unitária

Portanto em um sistema de controle com realimentação unitária, temos

$$\int_0^\infty e(t) dt = e_{ssr} \quad (7.1)$$

onde

$e(t)$  = erro na resposta a degrau unitário

$e_{ssr}$  = erro estacionário na resposta a rampa unitária

Se  $e_{ssr}$  é nulo, então  $e(t)$  deve mudar de sinal pelo menos uma vez. Isto significa que um sistema com erro de velocidade nulo (um sistema tendo  $K_v = \infty$ ) apresentará pelo menos um sobre-sinal, quando o sistema é sujeito a uma entrada em degrau.

**Exemplo 7.1** Considere o sistema visto na Fig. 7.4. Vamos obter a resposta a degrau unitário do sistema, esboçar a curva de resposta, calcular graficamente a integral do sinal de erro,  $\int_0^\infty e(t)dt$ , e verificar a Eq. (7.1). (O limite superior de integração deve, naturalmente, ser aproximado por algum tempo finito  $T$ , onde  $T$  é o tempo além do qual a saída praticamente permanece unitária.)

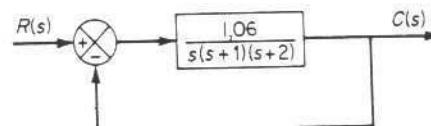


Fig. 7.4 Sistema de controle.

A função de transferência de malha-fechada para este sistema é dada por

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1 + G(s)} \\ &= \frac{1,06}{s(s+1)(s+2) + 1,06} \\ &= \frac{1,06}{(s+2,33)(s+0,33+j0,58)(s+0,33-j0,58)} \end{aligned}$$

Para uma entrada degrau unitário,

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

A resposta a degrau unitário é então obtida como

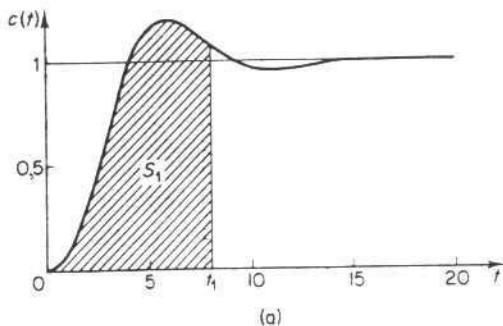
$$\begin{aligned} c(t) &= \mathcal{L}^{-1}[C(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1,06}{s(s+2,33)[(s+0,33)^2 + 0,58^2]}\right] \end{aligned}$$

Referindo-se à fórmula,

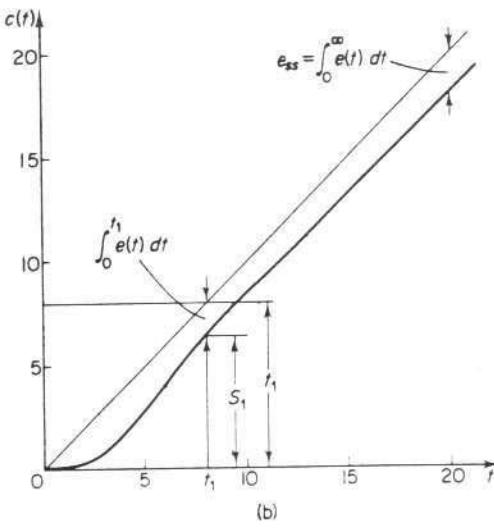
$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+a)[(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2]}\right] &= \frac{1}{a\omega_n^2} - \frac{e^{-at}}{a[(a-\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2]} \\ &+ \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n[(a-\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2]} \left[ \left(2\zeta - \frac{a}{\omega_n}\right) \cos\omega_dt + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(2\zeta^2 - \frac{a\zeta}{\omega_n} - 1\right) \sin\omega_dt \right] \end{aligned}$$

e observando que no presente sistema

$$a = 2,33, \quad \zeta = 0,5, \quad \omega_n = 0,667, \quad \omega_d = 0,58$$



(a)



(b)

Fig. 7.5 (a) Resposta a degrau unitário do sistema visto na Fig. 7.4; (b) resposta a rampa unitária do sistema visto na Fig. 7.4.

obtemos  $c(t)$  como segue:

$$c(t) = 1 - 0,103e^{-2,33t} - e^{-0,33t}(0,897 \cos 0,58t + 0,933 \sin 0,58t) \quad (t \geq 0) \quad (7.2)$$

A Eq. (7.2) fornece a resposta a entrada degrau unitário; veja a Fig. 7.5(a).

Agora examinaremos a resposta do sistema a uma entrada rampa unitária. Quando todas as condições iniciais são nulas, a resposta a rampa unitária do sistema pode ser obtida integrando a curva de resposta a degrau unitário. A Fig. 7.5(b) mostra a curva de resposta a rampa unitária para o presente sistema. [Note que a área  $S_1$  abaixo da curva de resposta a degrau unitário de  $t = 0$  a  $t = t_1$  dá o valor da saída em  $t = t_1$  com uma entrada rampa unitária. Veja Figs. 7.5(a) e (b).]

No sistema presente, a resposta a degrau unitário se acomoda em aproximadamente  $t = 20$ . Portanto, a diferença entre 20 e a área abaixo da curva de resposta a degrau unitário de  $t =$

$0$  a  $t = 20$  dá o erro estacionário na resposta a rampa unitária. Este valor do erro deve ser igual ao valor dado por  $1/\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$ .

Da curva de resposta da Fig. 7.5(a), obtemos os seguintes dados:

$t$	Área $S$ abaixo da curva de resposta a degrau unitário de $0$ a $t$	Área de erro $1 \times t - S$
0	0	0
2	0,16	1,84
4	1,50	2,50
6	3,80	2,20
8	6,10	1,90
10	8,15	1,85
12	10,10	1,90
14	12,06	1,94
16	14,07	1,93
18	16,08	1,92
20	18,08	1,92

A área de erro em regime estacionário é determinada como 1,92.

O coeficiente de erro de velocidade estática para este sistema é obtido a partir da função de transferência de malha-aberta como:

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \\ &= \frac{1,06}{2} \\ &= 0,53 \end{aligned}$$

Portanto o erro estacionário na resposta a rampa unitária é dado por

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 1,89$$

O valor obtido graficamente e o valor obtido analiticamente do erro estacionário na resposta a rampa unitária estão próximos um do outro. Portanto, verificamos a Eq. (7.1). (Note que se estes dois valores diferirem consideravelmente, então conferimos para verificar de onde vem a discrepância, achamos os erros e os corrigimos.)

## 7.2 COEFICIENTES DE ERRO DINÂMICO

Uma característica da definição de coeficientes de erro estático é que apenas um dos coeficientes assume um valor finito para um dado sistema. Os outros coeficientes são ou nulos ou infinitos. O erro estacionário obtido através dos coeficientes de erro estático ou é nulo, ou um valor finito não nulo, ou é infinito. Portanto, a variação do erro com o tempo não pode ser obtida através do uso de tais coeficientes. Os coeficientes de erro dinâmico apresentados nesta seção fornecem alguma informação sobre como o erro varia com o tempo; ou seja, se o erro estacionário do sistema com uma dada entrada cresce ou não proporcionalmente a  $t$ ,  $t^2$  etc.

**Sistemas com erros dinâmicos diferentes mas com coeficientes de erro estático idênticos.** Primeiro demonstraremos que dois sistemas com erros dinâmicos dife-

rentes podem ter coeficientes de erro estático idênticos. Considere os seguintes sistemas:

$$G_1(s) = \frac{10}{s(s+1)}, \quad G_2(s) = \frac{10}{s(5s+1)}$$

Os coeficientes de erro estático são dados por

$$\begin{aligned} K_{p1} &= \infty, & K_{p2} &= \infty \\ K_{v1} &= 10, & K_{v2} &= 10 \\ K_{a1} &= 0, & K_{a2} &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, os dois sistemas têm o mesmo erro estacionário para a mesma entrada em degrau. Comentários semelhantes se aplicam a erros estacionários para entradas rampa e em parábola. Esta análise indica que é impossível estimar o erro dinâmico do sistema a partir dos coeficientes de erro estático.

**Coeficientes de erro dinâmico.** Agora introduziremos coeficientes de erro dinâmico para descrever erros dinâmicos. Limitaremos nossos sistemas para os de realimentação unitária. Dividindo o polinômio do numerador de  $E(s)/R(s)$  pelo seu polinômio do denominador,  $E(s)/R(s)$  pode ser expandido em uma série em potências ascendentes de  $s$  como segue:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}s + \frac{1}{k_3}s^2 + \dots$$

Os coeficientes  $k_1, k_2, k_3, \dots$  da série de potências são definidos como os *coeficientes de erro dinâmico*. Ou seja,

- $k_1$  = coeficiente de erro de posição dinâmico
- $k_2$  = coeficiente de erro de velocidade dinâmico
- $k_3$  = coeficiente de erro de aceleração dinâmico

Em um dado sistema, os coeficientes de erro dinâmico estão relacionados com os coeficientes de erro estático. Considere o seguinte sistema do tipo 0 com realimentação unitária:

$$G(s) = \frac{K}{Ts+1}$$

Os coeficientes de erro de posição estático, os coeficientes de erro de velocidade estático, e os coeficientes de erro de aceleração estático são, respectivamente,

$$\begin{aligned} K_p &= K \\ K_v &= 0 \\ K_a &= 0 \end{aligned}$$

Como  $E(s)/R(s)$  pode ser expandido como

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1+Ts}{1+K+Ts} = \frac{1}{1+K} + \frac{TK}{(1+K)^2}s + \dots$$

os coeficientes de erro dinâmico são dados em termos dos coeficientes de erro estático como segue:

O coeficiente de erro de posição dinâmico é

$$k_1 = 1 + K = 1 + K_p$$

O coeficiente de erro de velocidade dinâmico é

$$k_2 = \frac{(1+K)^2}{TK}$$

Como um outro exemplo, considere o sistema de controle com realimentação unitária com a seguinte função de transferência no ramo direto:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s}$$

Os coeficientes de erro estático são dados por

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{\omega_n}{2\zeta}$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s) = 0$$

Como  $E(s)/R(s)$  pode ser expandido como

$$\begin{aligned} \frac{E(s)}{R(s)} &= \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{\frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \\ &= \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \left(\frac{1 - 4\zeta^2}{\omega_n^2}\right)s^2 + \dots \end{aligned}$$

o coeficiente de erro de velocidade dinâmico é igual ao coeficiente de erro de velocidade estático, ou seja,

$$k_2 = \frac{\omega_n}{2\zeta} = K_v$$

O coeficiente de erro de aceleração dinâmico é dado por

$$k_3 = \frac{\omega_n^2}{1 - 4\zeta^2}$$

Se uma análise similar é feita para sistemas de ordem superior, podemos

mostrar que para um sistema do tipo  $N$ , os coeficientes de erro dinâmico são dados por

$$\begin{aligned} k_{n+1} &= \infty && \text{para } n < N \\ k_{n+1} &= \lim_{s \rightarrow 0} s^N G(s) && \text{para } n = N \end{aligned}$$

onde  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Os valores de  $k_{n+1}$  para  $n > N$  são determinados pelos resultados da expansão de  $E(s)/R(s)$  em torno da origem.

**Vantagem dos coeficientes de erro dinâmico.** Uma vantagem dos coeficientes de erro dinâmico se torna clara quando  $E(s)$  é escrita da seguinte forma:

$$E(s) = \frac{1}{k_1} R(s) + \frac{1}{k_2} s R(s) + \frac{1}{k_3} s^2 R(s) + \dots$$

A região de convergência desta série é a vizinhança de  $s = 0$ . Isto corresponde a  $t = \infty$  no domínio do tempo. A correspondente solução no tempo ou o erro estacionário é dado como segue, supondo todas as condições iniciais iguais a zero e desprezando impulsos em  $t = 0$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{k_1} r(t) + \frac{1}{k_2} \dot{r}(t) + \frac{1}{k_3} \ddot{r}(t) + \dots \right]$$

O erro estacionário devido à função de entrada e suas derivadas pode então ser dado em termos dos coeficientes de erro dinâmico. Esta é uma vantagem dos coeficientes de erro dinâmico.

*Exemplo 7.2* Determine os coeficientes de erro dinâmico do sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência no ramo direto é dada por

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

Determine também o erro estacionário para a entrada definida por

$$r(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

Para o presente sistema,

$$\begin{aligned} \frac{E(s)}{R(s)} &= \frac{1}{1 + G(s)} \\ &= \frac{s + s^2}{10 + s + s^2} \\ &= 0,1s + 0,09s^2 - 0,019s^3 + \dots \end{aligned}$$

ou

$$E(s) = 0,1sR(s) + 0,09s^2R(s) - 0,019s^3R(s) + \dots$$

No domínio do tempo, o erro estacionário é dado por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [0,1\dot{r}(t) + 0,09\ddot{r}(t) - 0,019r(t) + \dots]$$

Os coeficientes de erro dinâmico são

$$\begin{aligned} k_1 &= \infty \\ k_2 &= \frac{1}{0,1} = 10 \\ k_3 &= \frac{1}{0,09} = 11,1 \end{aligned}$$

Como  $r(t)$  é dado por

$$r(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

obtemos

$$\dot{r}(t) = a_1 + 2a_2 t, \quad \ddot{r}(t) = 2a_2, \quad \dddot{r}(t) = 0$$

O erro estacionário é então

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} [0,1(a_1 + 2a_2 t) + 0,09(2a_2)] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (0,1a_1 + 0,18a_2 + 0,2a_2 t) \end{aligned}$$

A menos que  $a_2 = 0$ , o erro estacionário se torna infinito.

Da análise apresentada pode-se ver que, se  $E(s)/R(s)$  é expandido em torno da origem em uma série de potências, os coeficientes sucessivos da série indicam o erro dinâmico do sistema quando este é sujeito a uma entrada que varia lentamente. Os coeficientes de erro dinâmico fornecem uma maneira simples de se estimar o sinal de erro para entradas arbitrárias e o erro estacionário, sem a necessidade de se resolver o sistema de equações diferenciais.

**Uma observação sobre os coeficientes de erro de velocidade dinâmico.** É importante ressaltar que o coeficiente de erro de velocidade dinâmico  $k_2$  pode ser estimado a partir da constante de tempo do sistema de primeira-ordem que aproxima a dada função de transferência de malha-fechada nas vizinhanças de  $s = 0$ .

Considere um sistema de controle com realimentação unitária com a seguinte função de transferência de malha-fechada:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1 + T_a s + T_b s^2 + \dots}{1 + T_1 s + T_2 s^2 + \dots}$$

Nas vizinhanças de  $s = 0$ ,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + (T_1 - T_a)s + \dots}$$

O coeficiente de erro de velocidade dinâmico  $k_2$  é então dado por

$$k_2 = \frac{1}{T_1 - T_a} \quad (7.3)$$

Isto pode ser verificado expandindo-se a função  $E(s)/R(s)$  em torno da origem como segue:

$$\begin{aligned} \frac{E(s)}{R(s)} &= 1 - \frac{C(s)}{R(s)} \\ &= 1 - \frac{1}{1 + (T_1 - T_a)s} \\ &= 1 - 1 + (T_1 - T_a)s + \dots \\ &= (T_1 - T_a)s + \dots \end{aligned}$$

O coeficiente de erro de velocidade dinâmico é então dado pela Eq. (7.3).

Da análise que vimos, podemos concluir que se  $C(s)/R(s)$  é aproximado por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + T_{eq}s} \quad \text{para } s \ll 1$$

então o coeficiente de erro de velocidade dinâmico  $k_2$  é

$$k_2 = \frac{1}{T_{eq}}$$

Note que o coeficiente de erro de velocidade dinâmico  $k_2$  obtido desta forma é o mesmo que o coeficiente de erro de velocidade estático. Como  $C(s)/R(s)$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{1}{1 + T_{eq}s} \\ &= \frac{\frac{1}{T_{eq}s}}{1 + \frac{1}{T_{eq}s}} \\ &= \frac{G(s)}{1 + G(s)} \end{aligned}$$

o coeficiente de erro de velocidade estático  $K_r$  é

$$\begin{aligned} K_r &= \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{T_{eq}s} \\ &= \frac{1}{T_{eq}} \end{aligned}$$

### 7.3 CRITÉRIOS DE ERRO

No projeto de um sistema de controle, é importante que o sistema satisfaça as especificações de desempenho dadas. Como os sistemas de controle são dinâmicos, as especificações de desempenho podem ser dadas em termos do comportamento da resposta transitória para determinadas entradas, como entradas em degrau, entradas em rampa etc., ou em termos de um índice de desempenho.

**Índices de desempenho.** Um índice de desempenho é um número que indica a qualidade do desempenho do sistema. Um sistema de controle é considerado ótimo se os valores dos parâmetros são escolhidos de tal forma que o índice de desempenho escolhido é minimizado ou maximizado. Os valores ótimos dos parâmetros dependem diretamente do índice de desempenho selecionado.

**Características necessárias para índices de desempenho.** Um índice de desempenho deve oferecer seletividade; isto é, um ajuste ótimo dos parâmetros deve ser distinguido claramente de um ajuste não ótimo dos parâmetros. Adicionalmente, um índice de desempenho deve fornecer um único número positivo ou nulo, com o último sendo obtido se e apenas se a medida do desvio é identicamente nula. Para ser útil, um índice de desempenho deve ser uma função dos parâmetros do sistema e deve apresentar um máximo ou mínimo. Finalmente, para ser prático, um índice de desempenho deve ser computado com facilidade, analítica ou experimentalmente.

**Índices de desempenho de erro.** Em seguida, discutiremos vários critérios de erro em que os correspondentes índices de desempenho são integrais de alguma função ou função ponderada do desvio da saída do sistema real relativo à saída desejada. Como os valores das integrais podem ser obtidos como funções dos parâmetros do sistema, uma vez especificado o índice de desempenho, o sistema ótimo pode ser projetado ajustando-se os parâmetros para fornecer, por exemplo, o menor valor para a integral.

Vários índices de desempenho de erro têm sido propostos na literatura especializada. Discutiremos os quatro seguintes nesta seção.

$$\int_0^\infty e^2(t) dt, \quad \int_0^\infty te^2(t) dt, \quad \int_0^\infty |e(t)| dt, \quad \int_0^\infty t |e(t)| dt$$

Considere um sistema de controle cuja saída desejada é  $x(t)$  e cuja saída real é  $y(t)$ . Iremos definir o erro  $e(t)$  como

$$e(t) = x(t) - y(t)$$

Note que a menos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

os índices de desempenho tendem a infinito. Se  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$  não tende a zero, podemos definir

$$e(t) = y(\infty) - y(t)$$

Com esta definição do erro, os índices de desempenho resultarão em números finitos.

**Critério da integral do erro quadrático.** De acordo com o critério da integral do erro quadrático (ISE, *integral square-error*), a qualidade do desempenho do sistema é avaliada pela seguinte integral:

$$\int_0^{\infty} e^2(t) dt$$

onde o limite superior  $\infty$  pode ser substituído por  $T$  que é escolhido grande o suficiente para que  $e(t)$  seja desprezível para  $T < t$ . O sistema ótimo é aquele que minimiza esta integral. Este índice de desempenho tem sido usado frequentemente, tanto para entradas determinísticas (como entradas em degrau) quanto para entradas aleatórias, por causa da facilidade de se computar a integral tanto analítica quanto experimentalmente. A Fig. 7.6 mostra  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $e(t)$ ,  $e^2(t)$ , e  $\int e^2(t) dt$  quando a saída desejada  $x(t)$  é um degrau unitário. A integral de  $e^2(t)$  de 0 a  $T$  é a área total abaixo da curva  $e^2(t)$ .

Uma característica deste índice de desempenho é que ele dá grande peso para erros grandes e pequeno peso para erros pequenos. Este critério não é muito seletivo pois, para o seguinte sistema de segunda-ordem,

$$C(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

uma variação em  $\zeta$  de 0,5 a 0,7 não causa muita variação no valor da integral.

Um sistema projetado usando este critério tende a apresentar uma rápida diminuição em um erro inicial grande. Portanto a resposta é rápida e oscilatória. Desta forma, o sistema tem baixa estabilidade relativa.

Note, entretanto, que o critério de integral do erro quadrático freqüentemente

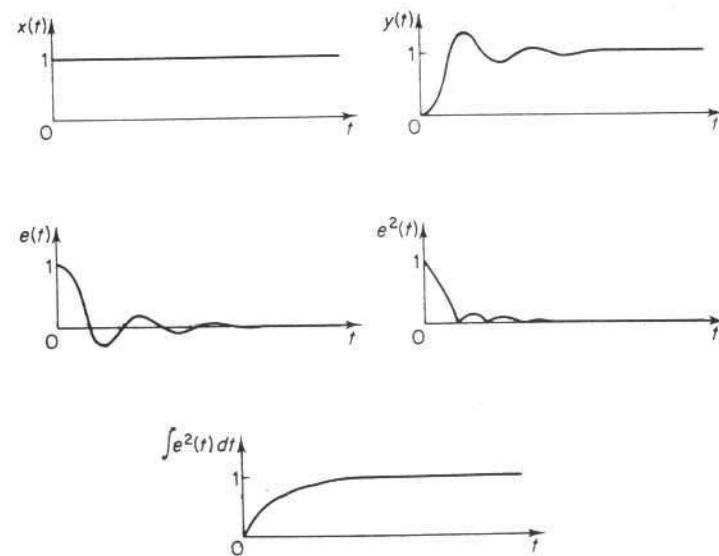


Fig. 7.6 Curvas mostrando a saída desejada  $x(t)$ , a saída real  $y(t)$ , o erro  $e(t)$ , o erro quadrático  $e^2(t)$ , e a integral do erro quadrático  $\int e^2(t) dt$  em função de  $t$ .

é de significância prática porque a minimização do índice de desempenho resulta na minimização do consumo de potência para alguns sistemas, como por exemplo, sistemas de naves espaciais.

**Critério da integral do erro quadrático multiplicado pelo tempo.** O índice de desempenho baseado no critério da integral do erro quadrático multiplicado pelo tempo (ITSE, *integral-of-time-multiplied square-error*) é

$$\int_0^{\infty} te^2(t) dt$$

O sistema ótimo é aquele que minimiza esta integral.

Uma característica deste critério é que, na resposta a degrau unitário do sistema, um erro inicial grande é ponderado com peso baixo, enquanto que erros que ocorrem mais tarde na resposta transitória são bastante penalizados. Este critério tem melhor seletividade do que o critério da integral do erro quadrático.

**Critério da integral do erro absoluto.** O índice de desempenho definido pelo critério da integral do erro absoluto (IAE, *integral absolute-error*) é

$$\int_0^{\infty} |e(t)| dt$$

Este é um dos índices de desempenho de mais fácil aplicação. Se este critério é usado, tanto sistemas altamente subamortecidos como altamente sobreamortecidos não podem ser feitos ótimos. Um sistema ótimo baseado neste critério é um sistema que tem um amortecimento razoável e uma característica de resposta transitória satisfatória; entretanto, a seletividade deste índice de desempenho não é muito boa. Embora este índice de desempenho não possa ser facilmente computado analiticamente, ele é particularmente conveniente para estudos com computador analógico. A Fig. 7.7 mostra a curva de  $e(t)$  versus  $t$  e a curva  $|e(t)|$  versus  $t$ .

Note que a minimização da integral do erro absoluto está diretamente relacionada com a minimização do consumo de combustível de sistemas aeroespaciais.

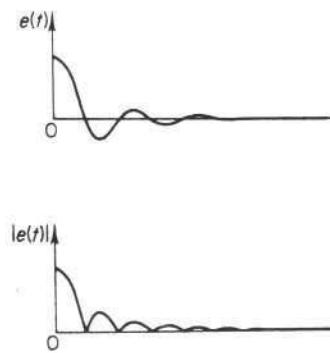


Fig. 7.7 Curvas mostrando  $e(t)$  em função de  $t$  e  $|e(t)|$  em função de  $t$ .

**Critério da integral do erro absoluto multiplicado pelo tempo.** De acordo com este critério, o critério ITAE (*integral-of-time-multiplied absolute-error*), o sistema ótimo é aquele que minimiza o seguinte índice de desempenho:

$$\int_0^\infty t |e(t)| dt$$

Como nos critérios precedentes, um erro inicial grande em uma resposta a degrau unitário é ponderado com pequeno peso, e erros que ocorrem mais tarde na resposta transitória são bastante penalizados.

A característica de um sistema projetado que usa este critério é que o sobre-sinal na resposta transitória é pequeno e oscilações são bem amortecidas. Este critério possui boa seletividade e constitui uma melhora sobre o critério de integral de erro absoluto. Entretanto, ele é difícil de ser computado analiticamente, embora possa ser medido experimentalmente com facilidade.

**Comparação dos vários critérios de erro.** A Fig. 7.8 mostra várias curvas de desempenho de erro. O sistema considerado é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

A inspeção destas curvas mostra que o critério da integral do erro quadrático não tem boa seletividade porque a curva é um tanto achatada perto do ponto onde o

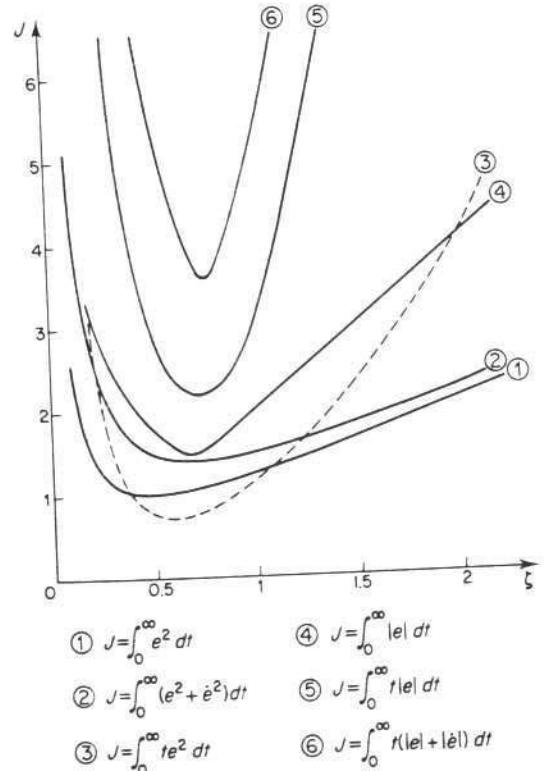


Fig. 7.8 Curvas de desempenho de erro.

índice de desempenho é mínimo. A adição do quadrado da taxa de erro ao integrando do índice de desempenho, ou

$$\int_0^\infty [e^2(t) + \dot{e}^2(t)] dt$$

leva o valor ótimo de  $\zeta$  para 0,707, mas a seletividade é novamente ruim. Da Fig. 7.8 vemos claramente que os outros índices de desempenho têm boa seletividade.

As curvas na Fig. 7.8 indicam que, no sistema de segunda-ordem em consideração,  $\zeta = 0,7$  corresponde ao valor ótimo ou quase-ótimo com relação a cada um dos índices de desempenho utilizados. Quando o coeficiente de amortecimento  $\zeta$  é 0,7, o sistema de segunda-ordem resulta com uma resposta rápida para entrada em degrau com aproximadamente 5% de sobre-sinal.

**Aplicação do critério ITAE para sistemas de ordem  $n$ .**\* O critério ITAE foi utilizado para o seguinte sistema de ordem  $n$ :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{a_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

e os coeficientes que minimizam

$$\int_0^\infty t |e| dt$$

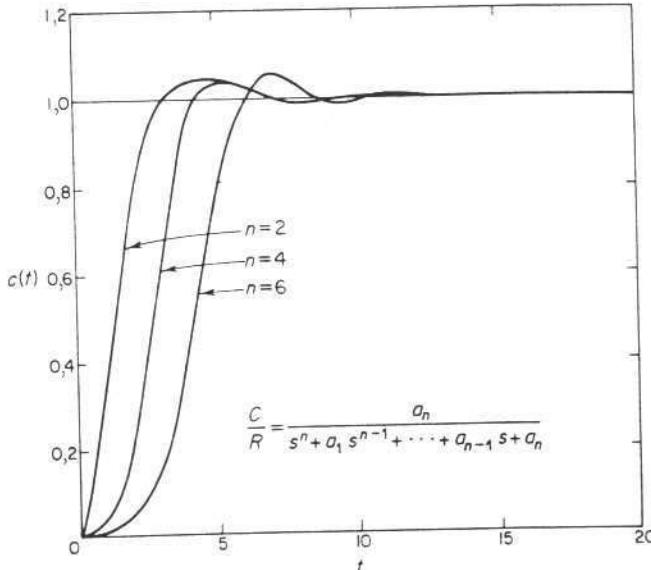


Fig. 7.9 Curvas de resposta a degrau de sistemas com funções de transferência ótimas baseadas no critério ITAE.

\*Referência: G-S.

foram determinados. Claramente, esta função de transferência resulta em um erro estacionário nulo para entradas em degrau.

A Tabela 7.2 mostra a forma ótima da função de transferência de malha-fechada da baseada neste critério ITAE. A Fig. 7.9 mostra as curvas de resposta a degrau dos sistemas ótimos.

**Tabela 7.2** Forma ótima da função de transferência de malha-fechada baseada no critério ITAE (sistemas de erro nulo para degraus)

$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{a_n}{s^n - a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}, \quad a_n = \omega_n^n$
$s + \omega_n$
$s^2 + 1,4\omega_n s + \omega_n^2$
$s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 2,15\omega_n^2 s + \omega_n^3$
$s^4 - 2,1\omega_n s^3 + 3,4\omega_n^2 s^2 + 2,7\omega_n^3 s + \omega_n^4$
$s^5 + 2,8\omega_n s^4 + 5,0\omega_n^2 s^3 + 5,5\omega_n^3 s^2 + 3,4\omega_n^4 s + \omega_n^5$
$s^6 + 3,25\omega_n s^5 - 6,60\omega_n^2 s^4 + 8,60\omega_n^3 s^3 + 7,45\omega_n^4 s^2 + 3,95\omega_n^5 s + \omega_n^6$

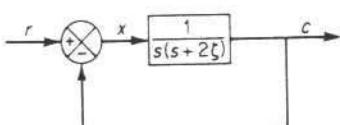
#### 7.4 INTRODUÇÃO À OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS

Nesta seção, resolveremos problemas simples de otimização em que minimizamos certos índices de desempenho de erro. Introduziremos a técnica direta e a técnica da transformada de Laplace para resolver este problema. Apresentaremos uma técnica alternativa (Liapunov) para a solução de problemas de otimização similares no Cap. 16.

**Computação direta dos índices de desempenho “ISE”.** Considere o sistema de controle visto na Fig. 7.10. Suponha que uma entrada degrau unitário  $r(t)$  é aplicada ao sistema em  $t = 0$ . Supomos que o sistema está inicialmente em repouso. O problema é determinar o valor ótimo de  $\zeta > 0$  de tal forma que

$$J = \int_0^\infty x^2(t) dt \quad (7.4)$$

seja mínimo, onde  $x(t)$  é o sinal de erro.



**Fig. 7.10** Sistema de controle.

Da Fig. 7.10, a equação do sistema é obtida como segue:

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x = r$$

Em termos do sinal de erro  $x = r - c$ ,

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x = 0 \quad (t > 0) \quad (7.5)$$

A solução da Eq. (7.5) pode ser escrita como

$$x(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} \quad (7.6)$$

onde

$$\lambda_1 = -\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad \lambda_2 = -\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$k_1$  e  $k_2$  são determinados das condições iniciais.

Substituindo a Eq. (7.6) na Eq. (7.4) e observando que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  têm partes reais negativas, obtemos

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty x^2(t) dt \\ &= \int_0^\infty (k_1^2 e^{2\lambda_1 t} + 2k_1 k_2 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} + k_2^2 e^{2\lambda_2 t}) dt \\ &= -\frac{k_1^2}{2\lambda_1} - \frac{2k_1 k_2}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{k_2^2}{2\lambda_2} \end{aligned}$$

Como  $\lambda_1 + \lambda_2 = -2\zeta$ ,  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ , podemos simplificar  $J$  como segue:

$$J = -\frac{k_1^2 \lambda_2 + k_2^2 \lambda_1}{2} + \frac{k_1 k_2}{\zeta} \quad (7.7)$$

As constantes  $k_1$  e  $k_2$  são determinadas das condições iniciais como segue:

$$1 = k_1 + k_2, \quad 0 = k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2$$

ou

$$k_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad k_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Substituindo os valores de  $k_1$  e  $k_2$  na Eq. (7.7), obtemos

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \left( \lambda_2^3 + \lambda_1^3 + \frac{2\lambda_1 \lambda_2}{\zeta} \right) \\ &= -\frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \left\{ (\lambda_1 + \lambda_2)[(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 3\lambda_1 \lambda_2] + \frac{2\lambda_1 \lambda_2}{\zeta} \right\} \\ &= \zeta + \frac{1}{4\zeta} \end{aligned}$$

O valor ótimo de  $\zeta$  pode ser obtido diferenciando  $J$  com relação a  $\zeta$ , equacionando  $dJ/d\zeta$  a zero, e resolvendo para  $\zeta$ . Como

$$\frac{dJ}{d\zeta} = 1 - \frac{1}{4\zeta^2} = 0$$

o valor ótimo de  $\zeta > 0$  é

$$\zeta = 0,5$$

(Claramente,  $\zeta = 0,5$  corresponde a um mínimo pois  $d^2J/d\zeta^2 > 0$ .) O valor mínimo de  $J$  é

$$\min. J = 0,5 + 0,5 = 1$$

**Teorema da integração real.** A seguir computaremos  $\int_0^\infty f(t)dt$  usando o método da transformada de Laplace. Fazendo isto, usaremos o seguinte teorema da integração real:

**Teorema da integração real:** Se  $f(t)$  é de ordem exponencial, então a transformada de Laplace de  $\int_0^\infty f(t)dt$  existe e é

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

onde

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

Para provar este teorema, usamos integração por partes.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] &= \int_0^\infty \left[ \int_0^t f(t) dt \right] e^{-st} dt \\ &= -\frac{e^{-st}}{s} \int_0^t f(t) dt \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{e^{-st}}{s} \int_0^t f(t) dt \right] + \frac{F(s)}{s} \end{aligned}$$

Como  $f(t)$  é de ordem exponencial, quando a parte real de  $s$  é suficientemente grande, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-st}}{s} \int_0^t f(t) dt \rightarrow 0$$

Portanto

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Isto prova o teorema.

**Técnica da transformada de Laplace para a computação de índices de desempenho “ISE”.** Usando os teoremas da integração e do valor final, obtemos

$$\int_0^\infty f(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{F(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} F(s)$$

Esta é a equação básica para calcular o índice de desempenho ISE. No problema presente,

$$f(t) = x^2(t)$$

Portanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^2(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} F(s)$$

onde

$$F(s) = \mathcal{L}[x^2(t)]$$

Considere outra vez o sistema de controle visto na Fig. 7.10. Para este sistema,

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 2\zeta s}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

Portanto, para a entrada degrau unitário,

$$X(s) = \frac{s^2 + 2\zeta s}{s^2 + 2\zeta s + 1} \frac{1}{s} = \frac{s + \zeta}{s^2 + 2\zeta s + 1} + \frac{\zeta}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

A transformada inversa de Laplace é

$$x(t) = e^{-\zeta t} \left( \cos \sqrt{1 - \zeta^2} t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \sqrt{1 - \zeta^2} t \right) \quad (t \geq 0)$$

Portanto

$$\begin{aligned} x^2(t) &= e^{-2\zeta t} \left[ \frac{1}{2(1 - \zeta^2)} + \frac{1}{2} \frac{1 - 2\zeta^2}{1 - \zeta^2} \cos 2\sqrt{1 - \zeta^2} t \right. \\ &\quad \left. + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin 2\sqrt{1 - \zeta^2} t \right] \end{aligned}$$

Então,

$$F(s) = \mathcal{L}[x^2(t)] = \frac{1}{2(1 - \zeta^2)} \frac{1}{s + 2\zeta} + \frac{1 - 2\zeta^2}{2(1 - \zeta^2)} \frac{s + 2\zeta}{(s + 2\zeta)^2 + 4(1 - \zeta^2)}$$

$$+ \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{2\sqrt{1 - \zeta^2}}{(s + 2\zeta)^2 + 4(1 - \zeta^2)} \quad (7.8)$$

Tomando o limite quando  $s$  tende a zero, resulta

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 0} F(s) &= \frac{1}{2(1 - \zeta^2)} \frac{1}{2\zeta} + \frac{1 - 2\zeta^2}{2(1 - \zeta^2)} \frac{\zeta}{2} + \frac{\zeta}{2} \\ &= \zeta + \frac{1}{4\zeta}\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}J &= \int_0^\infty x^2(t) dt \\ &= \zeta + \frac{1}{4\zeta}\end{aligned}\tag{7.9}$$

Este valor de  $J$ , convém mencionar, é o mesmo que foi obtido pelo método direto, e portanto o valor ótimo de  $\zeta$  que minimiza  $J$  é 0,5.

**Teorema da diferenciação complexa.** Ao calcular o índice de desempenho  $\int_0^\infty tf(t)dt$ , achamos conveniente usar o seguinte teorema da diferenciação complexa:

**Teorema da diferenciação complexa:** Se  $f(t)$  é transformável segundo Laplace, então, exceto em pontos singulares de  $F(s)$ ,

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s)$$

onde

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

Para provar isto, note que

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \\ &= - \int_0^\infty tf(t)e^{-st} dt\end{aligned}$$

Portanto está provado o teorema.

**Técnica da transformada de Laplace para a computação de índices de desempenho “ITSE”.** Considere a seguir o sistema visto na Fig. 7.10, com o seguinte índice de desempenho:

$$J = \int_0^\infty tx^2(t) dt$$

Novamente supomos que o sistema está em repouso antes que a entrada degrau unitário seja aplicada. Achemos o valor ótimo de  $\zeta$  que minimiza o índice de desempenho.

Usando os teoremas de integração real e diferenciação complexa, temos

$$\mathcal{L}[tx^2(t)] = -\frac{d}{ds}F(s)$$

onde

$$F(s) = \mathcal{L}[x^2(t)]$$

No problema presente,  $F(s)$  é dado pela Eq. (7.8).

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[tx^2(t)] &= -\frac{d}{ds}F(s) \\ &= \frac{1}{2(1 - \zeta^2)} \frac{1}{(s + 2\zeta)^2} + \frac{1 - 2\zeta^2}{2(1 - \zeta^2)} \frac{(s + 2\zeta)^2 - 4(1 - \zeta^2)}{[(s + 2\zeta)^2 + 4(1 - \zeta^2)]^2} \\ &\quad + \frac{4\zeta(s + 2\zeta)}{[(s + 2\zeta)^2 + 4(1 - \zeta^2)]^2}\end{aligned}$$

Usando o teorema do valor final,

$$\int_0^\infty tx^2(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ -\frac{d}{ds}F(s) \right]$$

Tomando o limite de  $-dF(s)/ds$  quando  $s$  tende a zero, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 0} \left[ -\frac{d}{ds}F(s) \right] &= \frac{1}{2(1 - \zeta^2)} \frac{1}{4\zeta^2} + \frac{1 - 2\zeta^2}{2(1 - \zeta^2)} \frac{2\zeta^2 - 1}{4} + \frac{\zeta^2}{2} \\ &= \zeta^2 + \frac{1}{8\zeta^2}\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}J &= \int_0^\infty tx^2(t) dt \\ &= \zeta^2 + \frac{1}{8\zeta^2}\end{aligned}\tag{7.10}$$

Para se obter o valor ótimo de  $\zeta$  que minimiza  $J$ , diferenciamos  $J$  com relação a  $\zeta$ :

$$\frac{dJ}{d\zeta} = 2\zeta - \frac{1}{4\zeta^3} = 0$$

que resulta no seguinte:

$$\zeta = 0,595$$

Claramente,  $d^2J/d\zeta^2 > 0$ . O valor ótimo de  $\zeta$  é 0,595, e o valor mínimo de  $J$  é

$$\min. J = 0,595^2 + \frac{1}{8 \times 0,595^2} = 0,71$$

## PROBLEMAS ILUSTRATIVOS E SOLUÇÕES

**Problema A.7.1** Determine o erro estacionário na saída de um sistema de controle linear com realimentação unitária quando a entrada é dada por

$$r(t) = r_0 + r_1 t + \frac{r_2}{2} t^2$$

**Solução.** O erro estacionário é a soma dos erros devidos a cada componente de entrada. Portanto, o erro estacionário é determinado como

$$e_{ss} = \frac{r_0}{1 + K_p} + \frac{r_1}{K_v} + \frac{r_2}{K_a}$$

O erro estacionário se torna infinito a menos que o sistema seja de ordem 2 ou maior.

**Problema A.7.2** Considere o sistema de controle com realimentação unitária com função de transferência do ramo direto  $G(s)$ . Suponha que a função de transferência de malha-fechada pode ser escrita como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)}$$

Mostre que

$$\int_0^\infty e(t) dt = (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - (T_a + T_b + \cdots + T_m)$$

onde  $e(t)$  é o erro na resposta a degrau unitário. Mostre também que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s G(s)} = (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - (T_a + T_b + \cdots + T_m)$$

**Solução.** Vamos definir

$$(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1) = P(s)$$

e

$$(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1) = Q(s)$$

Então

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

e

$$E(s) = \frac{Q(s) - P(s)}{Q(s)} R(s)$$

Para uma entrada degrau unitário,  $R(s) = 1/s$ . Portanto,

$$E(s) = \frac{Q(s) - P(s)}{s Q(s)}$$

E usando o fato de que

$$\int_0^\infty e(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{E(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} E(s)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e(t) dt &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Q(s) - P(s)}{s Q(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Q'(s) - P'(s)}{Q(s) + s Q'(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} [Q'(s) - P'(s)] \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{s \rightarrow 0} P'(s) = T_a + T_b + \cdots + T_m$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} Q'(s) = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$$

temos

$$\int_0^\infty e(t) dt = (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - (T_a + T_b + \cdots + T_m)$$

Observe que, como

$$\int_0^\infty e(t) dt = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s G(s)}$$

imediatamente obtemos a seguinte relação:

$$\frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s G(s)} = (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - (T_a + T_b + \cdots + T_m)$$

Observe que zeros irão melhorar  $K_v$ . Pólos perto da origem causam coeficientes de erro de velocidade baixos a menos que haja zeros na vizinhança.

**Problema A.7.3** Compare os erros dos sistemas de controle com realimentação unitária tendo as seguintes funções de transferência de ramo direto:

$$G_1(s) = \frac{10}{s(s+1)}, \quad G_2(s) = \frac{10}{s(2s+1)}$$

Supõe-se que a entrada é

$$r(t) = 5 + 2t + 3t^2$$

**Solução.** Como

$$\begin{aligned} \frac{E_1(s)}{R(s)} &= \frac{1}{1+G_1(s)} = \frac{s+s^2}{10+s+s^2} \\ &= 0,1s + 0,09s^2 - 0,019s^3 + \dots \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{E_2(s)}{R(s)} &= \frac{1}{1+G_2(s)} = \frac{s-2s^2}{10+s+2s^2} \\ &= 0,1s - 0,19s^2 - 0,039s^3 + \dots \end{aligned}$$

as funções temporais de erro são dadas por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [0,1(2+6t) + 0,09 \times 6]$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [0,1(2+6t) + 0,19 \times 6]$$

Segue-se que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) < \lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t)$$

**Problema A.7.4** Considere o sistema cuja função de transferência de malha-fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1} \quad (0 < \zeta < 1)$$

Calcule  $\int_0^\infty c^2(t)dt$  para uma entrada impulso unitário.

**Solução.** Para uma entrada impulso unitário,  $R(s) = 1$ . Portanto,

$$C(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1} = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta)^2 + 1-\zeta^2}$$

A transformada inversa de Laplace de  $C(s)$  é

$$c(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta t} \sin \sqrt{1-\zeta^2} t \quad (t \geq 0)$$

Como  $c^2(t)$  é

$$\begin{aligned} c^2(t) &= \frac{1}{1-\zeta^2} e^{-2\zeta t} \sin^2 \sqrt{1-\zeta^2} t \\ &= \frac{1}{1-\zeta^2} e^{-2\zeta t} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\sqrt{1-\zeta^2} t) \end{aligned}$$

obtemos

$$\mathcal{L}[c^2(t)] = \frac{1}{2(1-\zeta^2)} \left[ \frac{1}{s+2\zeta} - \frac{s+2\zeta}{(s+2\zeta)^2 + 4(1-\zeta^2)} \right]$$

Então

$$\begin{aligned} \int_0^\infty c^2(t) dt &= \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}[c^2(t)] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2(1-\zeta^2)} \left[ \frac{1}{s+2\zeta} - \frac{s+2\zeta}{(s+2\zeta)^2 + 4(1-\zeta^2)} \right] \\ &= \frac{1}{4\zeta} \end{aligned}$$

**Problema A.7.5** Considere o seguinte sistema:

$$\ddot{x} + 2\zeta \dot{x} + x = 0 \quad (0 < \zeta \leq 0,9) \quad (7.11)$$

Determine o valor de  $\zeta$  que minimiza o seguinte índice de desempenho  $J$ :

$$J = \int_0^\infty [x^2(t) + \dot{x}^2(t)] dt$$

**Solução.** A solução da Eq. (7.11) é

$$x(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}$$

onde

$$\lambda_1 = -\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad \lambda_2 = -\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$k_1$  e  $k_2$  são determinados a partir das condições iniciais. Portanto,

$$\dot{x}(t) = k_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

Então  $x^2(t)$  e  $\dot{x}^2(t)$  são obtidos como

$$x^2(t) = k_1^2 e^{2\lambda_1 t} + 2k_1 k_2 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} + k_2^2 e^{2\lambda_2 t}$$

e

$$\dot{x}^2(t) = k_1^2 \lambda_1^2 e^{2\lambda_1 t} + 2k_1 k_2 \lambda_1 \lambda_2 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} + k_2^2 \lambda_2^2 e^{2\lambda_2 t}$$

O índice de desempenho então se torna

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty [x^2(t) + \dot{x}^2(t)] dt \\ &= \int_0^\infty [k_1^2(1 + \lambda_1^2) e^{2\lambda_1 t} + 2k_1 k_2(1 + \lambda_1 \lambda_2) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} + k_2^2(1 + \lambda_2^2) e^{2\lambda_2 t}] dt \end{aligned}$$

Fazendo a integração e calculando em  $t = \infty$  e  $t = 0$ , e observando que as partes reais de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são negativas, obtemos

$$J = -\left[ \frac{k_1^2(1 + \lambda_1^2)}{2\lambda_1} + \frac{2k_1k_2(1 + \lambda_1\lambda_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{k_2^2(1 + \lambda_2^2)}{2\lambda_2} \right]$$

Como

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2\zeta, \quad \lambda_1\lambda_2 = 1$$

obtemos

$$\begin{aligned} J &= \zeta(k_1^2 + k_2^2) - \frac{2k_1k_2}{\zeta} \\ &= \zeta(k_1 + k_2)^2 - 2k_1k_2\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) \end{aligned} \quad (7.12)$$

Das condições iniciais,

$$x(0) = c_1 = k_1 - k_2, \quad \dot{x}(0) = c_2 = k_1\lambda_1 - k_2\lambda_2$$

Como  $0 < \zeta \leq 0.9$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $k_1$  e  $k_2$  são obtidos como

$$k_1 = \frac{c_1\lambda_2 - c_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad k_2 = \frac{c_2 - \lambda_1c_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Substituindo estes valores de  $k_1$  e  $k_2$  na Eq. (7.12), obtemos

$$J = \zeta c_1^2 + c_1c_2 - \frac{c_1^2 + c_2^2}{2\zeta} \quad (7.13)$$

Para achar o valor mínimo de  $J$ , primeiro diferencie  $J$  com relação a  $\zeta$  e então iguale o resultado a zero.

$$\frac{\partial J}{\partial \zeta} = c_1^2 - \frac{c_1^2 - c_2^2}{2\zeta^2} = 0$$

Resolvendo esta equação,

$$\zeta = \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2}{2c_1^2}} \quad (7.14)$$

Como  $\partial^2 J / \partial \zeta^2 > 0$ , a Eq. (7.14) fornece o valor ótimo de  $\zeta$ , contanto que

$$\sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2}{2c_1^2}} \leq 0,9$$

ou

$$c_2^2 \leq 0,62c_1^2$$

No caso especial, quando  $c_2 = 0$ ,

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

é o valor ótimo de  $\zeta$ . Portanto, se  $c_1 = 1$  e  $c_2 = 0$ , então

$$\min. J = \zeta + \frac{1}{2\zeta} = 1,414 \quad (7.15)$$

Se  $c_2^2 > 0,62c_1^2$ , então a Eq. (7.14) se torna

$$\zeta = \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2}{2c_1^2}} > \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{0,62}{2}} = 0,9$$

Mas  $\zeta$  está limitado entre 0 e 0,9. Portanto a Eq. (7.14) não fornecerá o valor ótimo de  $\zeta$ . Para se determinar o valor ótimo de  $\zeta$ , definimos

$$c_2^2 = (0,62 + 2h)c_1^2, \quad h > 0$$

Então podemos escrever a Eq. (7.13) como segue:

$$J = \left( \zeta + \frac{0,81 + h}{\zeta} \right) c_1^2 + c_1c_2$$

O valor ótimo de  $\zeta$  que minimiza  $J$  para dados valores de  $c_1$  e  $c_2$  pode ser obtido minimizando-se a seguinte expressão  $I$  com relação a  $\zeta$ .

$$I = \zeta + \frac{0,81 + h}{\zeta}$$

O valor de  $I$  é mínimo quando  $\zeta^2 = 0,81 + h$ . Entretanto, este valor de  $\zeta$  não pode ser obtido por causa da condição  $0 < \zeta \leq 0,9$ . Como o valor de  $I$  aumenta quando  $\zeta$  diminui a partir de  $\sqrt{0,81 + h}$ , o valor ótimo de  $\zeta$  quando  $c_2^2 > 0,62c_1^2$  é 0,9.

Resumindo, o valor ótimo de  $\zeta$  é

$$\zeta = \begin{cases} \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2}{2c_1^2}} & \text{se } c_2^2 \leq 0,62c_1^2 \\ 0,9 & \text{se } c_2^2 > 0,62c_1^2 \end{cases}$$

**Problema A.7.6** Calcule os seguintes índices de desempenho:

$$\int_0^\infty |e(t)| dt,$$

$$\int_0^\infty t |e(t)| dt,$$

$$\int_0^\infty t [ |e(t)| + |\dot{e}(t)| ] dt$$

para o sistema

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1} \quad (\zeta \geq 1)$$

$$E(s) = \mathcal{L}[e(t)] = R(s) - C(s)$$

Suponha que o sistema está inicialmente em repouso e é sujeito a uma entrada de grau unitário.

**Solução.** Para uma entrada degrau unitário,  $R(s) = 1/s$  e

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{s^2 + 2\zeta s}{s^2 + 2\zeta s + 1} \frac{1}{s} \\ &= \frac{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \frac{1}{s + \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} + \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \frac{1}{s + \zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} \end{aligned}$$

Para  $\zeta \geq 1$ , o sistema não apresenta sobre-sinal. Portanto  $|e(t)| = e(t)$  para todo  $t \geq 0$ . Os dados índices de desempenho podem então ser computados como segue:

$$\begin{aligned} 1. \quad \int_0^\infty |e(t)| dt &= \int_0^\infty e(t) dt \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} E(s) \\ &= \frac{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \frac{1}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} + \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \frac{1}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} \\ &= 2\zeta \quad (\zeta \geq 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \int_0^\infty t |e(t)| dt &= \int_0^\infty te(t) dt \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ -\frac{d}{ds} E(s) \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \frac{1}{(s + \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \frac{1}{(s + \zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})^2} \right] \\ &= 4\zeta^2 - 1 \quad (\zeta \geq 1) \end{aligned}$$

3. Observando que  $\dot{e}(t) < 0$  e  $|\dot{e}(t)| = -\dot{e}(t)$  para  $t \geq 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t(|e(t)| + |\dot{e}(t)|) dt &= \int_0^\infty [te(t) - t\dot{e}(t)] dt \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ -\frac{d}{ds} E(s) + \frac{d}{ds} sE(s) \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ (-1 + s) \frac{d}{ds} E(s) + E(s) \right] \\ &= 4\zeta^2 - 1 + 2\zeta \quad (\zeta \geq 1) \end{aligned}$$

Para fins de comparação, forneceremos alguns outros índices de desempenho calculados para o mesmo sistema. [Referir-se às Eqs. (7.9), (7.10) e (7.15).]

$$\int_0^\infty e^2(t) dt = \zeta + \frac{1}{4\zeta} \quad (\zeta > 0)$$

$$\int_0^\infty te^2(t) dt = \zeta^2 + \frac{1}{8\zeta^2} \quad (\zeta > 0)$$

$$\int_0^\infty [e^2(t) + \dot{e}^2(t)] dt = \zeta + \frac{1}{2\zeta} \quad (\zeta > 0)$$

Gráficos destes seis índices de desempenho são vistos na Fig. 7.8 em função de  $\zeta$ . (Note que as curvas vistas na Fig. 7.8 são válidas para  $\zeta > 0$ . Os três índices de desempenho calculados neste problema são válidos apenas para  $\zeta \geq 1$ .)

## PROBLEMAS

**Problema B.7.1** Mostre que o erro estacionário na resposta a entradas em rampa pode ser feito nulo se a função de transferência de malha-fechada é dada por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{a_{n-1}s + a_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

**Problema B.7.2** Obtenha os coeficientes de erro de velocidade dinâmico dos seguintes sistemas:

$$1. \quad \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{(s+1)(5s^2+2s+10)}$$

$$2. \quad \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3s+10}{5s^2+2s+10}$$

**Problema B.7.3** Considere o sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência de malha-aberta é

$$G(s) = \frac{100}{s(0,1s+1)}$$

Determine o erro estacionário quando a entrada é

$$r(t) = 1 + t + at^2, \quad a \geq 0$$

**Problema B.7.4** Considere o sistema visto na Fig. 7.11. Suponha que a entrada é uma entrada em rampa, ou

$$r(t) = at$$

onde  $a$  é uma constante arbitrária.

Mostre que ajustando-se adequadamente o valor de  $K_i$ , o erro estacionário na resposta a entradas em rampa pode ser feito nulo.

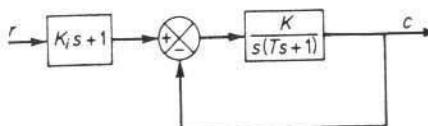


Fig. 7.11 Sistema de controle.

**Problema B.7.5** Considere um sistema descrito por

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x = 0$$

Determine o valor do coeficiente de amortecimento  $\zeta$  de tal forma que

$$\int_0^\infty (x^2 + \mu \dot{x}^2) dt \quad (\mu \geq 0)$$

seja minimizado.

**Problema B.7.6** A função de transferência de malha-fechada para uma entrada de perturbação  $n(t)$  é dada por

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{s(s+a)}{s^2 + as + 10}$$

Determine o valor da constante  $a$  de tal forma que a integral do erro quadrático devido a uma perturbação em degrau seja minimizada.

**Problema B.7.7** Considere um sistema de controle com realimentação unitária com a função de transferência de malha-aberta

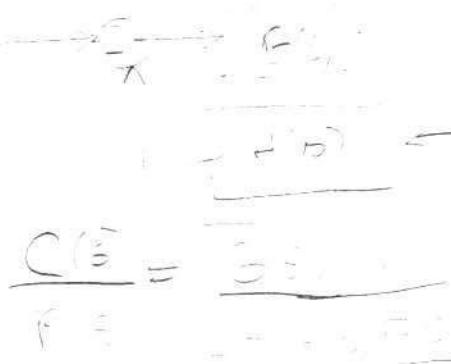
$$G(s) = \frac{(a+b)s+ab}{s^2}$$

Para uma entrada degrau unitário, calcule os seguintes índices de desempenho:

$$J_1 = \int_0^\infty e^2(t) dt$$

$$J_2 = \int_0^\infty te^2(t) dt$$

Se  $a = b$ , quais são os valores de  $J_1$  e  $J_2$ ?



# 8

## O Método do Lugar das Raízes

### 8.1 INTRODUÇÃO

A característica básica da resposta transitória de um sistema em malha-fechada é determinada a partir dos pólos da malha-fechada. Portanto, em problemas de análise, é importante localizar os pólos em malha-fechada no plano  $s$ . No projeto de sistemas em malha-fechada, queremos ajustar os pólos e zeros de malha-aberta de modo a colocar os pólos e zeros em malha-fechada nas posições desejadas do plano  $s$ .

Os pólos de malha-fechada são as raízes da equação característica. Para determiná-los necessitamos fatorar o polinômio característico. Em geral, este procedimento é trabalhoso se o grau do polinômio característico é três, ou maior. As técnicas clássicas de fatoração de polinômios não são convenientes porque conforme varia o ganho da função de transferência em malha-aberta, devem ser repetidos os cálculos.

Um método simples para determinar as raízes da equação característica foi desenvolvido por W. R. Evans e é extensivamente usado em engenharia de controle. Este método, denominado *método do lugar das raízes*, é um método pelo qual as raízes da equação característica são colocadas em um gráfico para todos os valores de um parâmetro do sistema. As raízes correspondentes a um valor particular deste parâmetro podem então ser localizadas no gráfico resultante. Note que o parâmetro usualmente é o ganho, porém qualquer outra variável da função de transferência em malha-aberta pode ser utilizada. Salvo menção em contrário, suporemos que o ganho da função de transferência em malha-fechada é o parâmetro a ser variado através de todos os seus valores, isto é, de zero a infinito.

**Método do lugar das raízes.** A idéia básica na qual se baseia o método do lugar das raízes é que o valor de  $s$  que faz a função de transferência pelo laço ser igual a  $-1$  deve satisfazer a equação característica do sistema.

O lugar das raízes da equação característica do sistema em malha-fechada, conforme o ganho é variado desde zero até infinito, dá ao método o seu nome. O

gráfico correspondente mostra claramente as contribuições de cada polo ou zero de malha-aberta nas localizações dos polos em malha-fechada.

O método do lugar das raízes nos possibilita determinar os polos em malha-fechada a partir dos polos e zeros de malha-aberta, considerando o ganho como parâmetro. Conseqüentemente, evita dificuldades inerentes às técnicas clássicas, fornecendo uma imagem gráfica de todos os polos de malha-fechada para todos os valores do ganho da função de transferência em malha-aberta.

No projeto de um sistema de controle linear, verificamos que o método do lugar das raízes se torna muito útil desde que indica a maneira pela qual os polos e zeros em malha-aberta devem ser modificados de modo que a resposta satisfaça as especificações de desempenho do sistema. Este método é particularmente conveniente para se obter resultados aproximados muito rapidamente.

Desde que o método é gráfico na determinação das raízes da equação característica, ele fornece um procedimento gráfico eficaz para determinar as raízes de qualquer equação polinomial que resulte de um estudo de sistemas físicos.

**Esboço do capítulo.** Na Seção 8.2 introduziremos os conceitos que sustentam o método do lugar das raízes. A Seção 8.3 apresenta o procedimento geral para esboçar os lugares das raízes. Seguindo esta apresentação, na Seção 8.4 analisaremos sistemas de malha-fechada pelo uso do método do lugar das raízes. (A abordagem de lugar das raízes no projeto de sistemas será discutida no Cap. 10.)

## 8.2 DIAGRAMAS DE LUGAR DAS RAÍZES

**Condições de ângulo e amplitude.** Considere o sistema indicado na Fig. 8.1. A função de transferência em malha-fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (8.1)$$

A equação característica para este sistema em malha-fechada é obtida igualando-se o denominador da fração do segundo membro da Eq. (8.1) a zero. Isto é,

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

ou

$$G(s)H(s) = -1 \quad (8.2)$$

Desde que  $G(s)H(s)$  é uma quantidade complexa, a Eq. (8.2) deve ser desmembrada em duas equações a fim de se igualar os ângulos e os módulos de ambos os membros da equação, respectivamente, para obter

Condição de ângulo:

$$|G(s)H(s)| = \pm 180^\circ(2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (8.3)$$

Condição de módulo:

$$|G(s)H(s)| = 1 \quad (8.4)$$

Os valores de  $s$  que satisfazem as condições de ângulo e módulo são as raízes da equação característica, ou os polos de malha-fechada. Um gráfico (ou diagrama) dos pontos do plano complexo que satisfazem apenas a condição do ângulo é o lugar

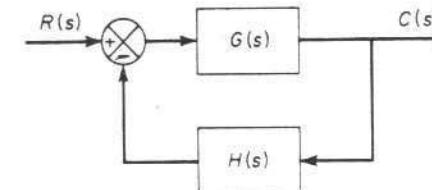


Fig. 8.1 Sistema de controle.

das raízes. As raízes na equação característica (os polos em malha-fechada) correspondentes a um dado valor do ganho podem ser determinadas a partir da condição de módulo. Os detalhes da aplicação das condições de ângulo e módulo a fim de se obter os polos em malha-fechada estão apresentados na Seção 8.3.

**Gráficos de lugar das raízes para sistemas de segunda-ordem.** Antes de apresentarmos um método para construção destes gráficos em detalhes, será ilustrado um gráfico do lugar das raízes para um sistema simples de segunda-ordem.

Considere o sistema indicado na Fig. 8.2. A função de transferência em malha-aberta  $G(s)H(s)$  é

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

A função de transferência em malha-fechada é então

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + s + K}$$

A equação característica é

$$s^2 + s + K = 0 \quad (8.5)$$

Desejamos determinar o lugar das raízes desta equação conforme  $K$  varia desde zero até infinito.

A fim de ilustrar claramente qual o aspecto do gráfico do lugar das raízes para este sistema, obteremos inicialmente as raízes da equação característica analiticamente em termos de  $K$ , e então variaremos  $K$  desde zero até infinito. Deve ser notado que este não é o modo apropriado para construir o gráfico do lugar das raízes. O modo apropriado é através de uma abordagem gráfica de tentativa-e-erro, e o trabalho gráfico pode ser muito simplificado aplicando-se as regras gerais a serem apresentadas na Seção 8.3. (Obviamente, se puder ser encontrada facilmente uma solução analítica para as raízes da equação característica, não há necessidade

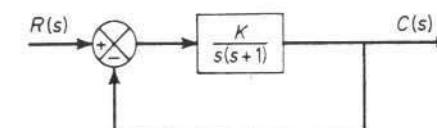


Fig. 8.2 Sistema de controle.

de se utilizar o método do lugar das raízes.) As raízes da equação característica, Eq. (8.5), são

$$s_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4K}, \quad s_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4K}$$

As raízes são reais para  $K \leq 1/4$  e complexas para  $K > 1/4$ .

O lugar das raízes correspondente a todos os valores de  $K$  está indicado na Fig. 8.3(a). O lugar das raízes está graduado com  $K$  como parâmetro. (O movimento das raízes conforme  $K$  aumenta é indicado por setas.) Uma vez desenhado o gráfico, podemos imediatamente determinar o valor de  $K$  que fornecerá uma raiz, ou um polo em malha-fechada, em um ponto desejado. Desta análise, é claro que os polos em malha-fechada correspondentes a  $K = 0$  são os mesmos polos de  $G(s)H(s)$ . Conforme o valor de  $K$  aumenta desde zero até  $1/4$ , os polos de malha-fechada movem-se para o ponto  $(-1/2, 0)$ . Para valores de  $K$  entre zero e  $1/4$ , todos os polos de malha-fechada estão sobre o eixo real. Esta é a situação correspondente a um sistema superamortecido, e a resposta impulsiva não é oscilatória. Em  $K = 1/4$ , os dois polos de malha-fechada reais se igualam. Esta situação corresponde ao caso do sistema criticamente amortecido. Conforme  $K$  aumenta a partir de  $1/4$ , os polos de malha-fechada tornam-se complexos, posicionando-se fora do eixo real, e devido à parte real dos polos de malha-fechada ser constante para  $K > 1/4$ , os polos de malha-fechada movem-se ao longo da reta  $s = -1/2$ . Portanto, para  $K > 1/4$ , o sistema comporta-se como subamortecido. Para um dado valor de  $K$ , um dos polos conjugados de malha-fechada move-se para  $s = -1/2 + j\omega$ , enquanto o outro move-se para  $s = -1/2 - j\omega$ .

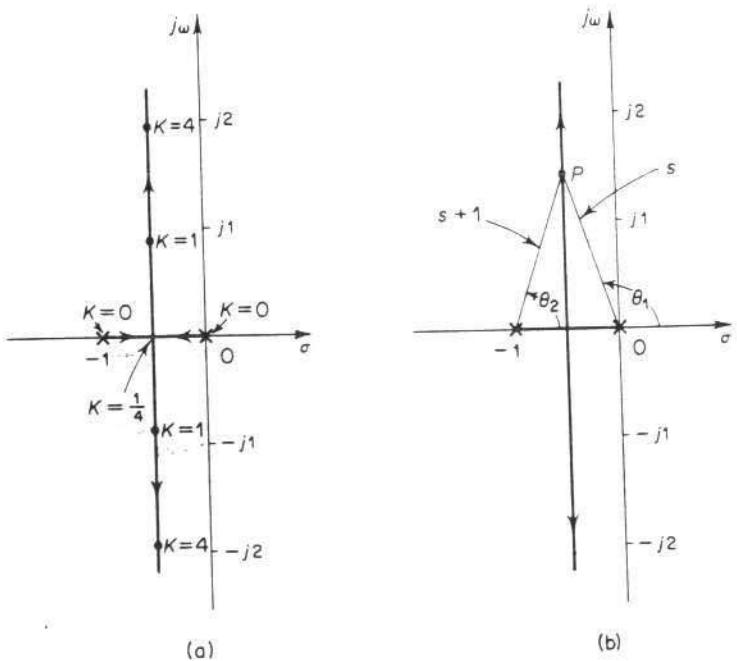


Fig. 8.3 Gráficos do lugar das raízes dos sistemas indicados na Fig. 8.2.

Mostraremos que qualquer ponto sobre o lugar das raízes satisfaz a condição de ângulo. A condição de ângulo dada pela Eq. (8.3) é

$$\left| \frac{K}{s(s+1)} \right| = \left| \frac{K}{s} \right| \left| \frac{1}{s+1} \right| = \frac{|s|}{|s+1|} = \pm 180^\circ(2k+1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Considere o ponto  $P$  sobre o lugar das raízes indicado na Fig. 8.3(b). Os números complexos  $s$  e  $s+1$  possuem ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , respectivamente, e módulos  $|s|$  e  $|s+1|$ , respectivamente. (Note que todos os ângulos são considerados positivos quando são medidos no sentido anti-horário.) A soma dos ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  nitidamente é  $180^\circ$ .

Se o ponto  $P$  estiver localizado sobre o eixo real entre  $0$  e  $-1$ , então  $\theta_1 = 180^\circ$  e  $\theta_2 = 0^\circ$ . Portanto, verificamos que qualquer ponto sobre o lugar das raízes satisfaz a condição de ângulo. Notemos também que se o ponto  $P$  não for um ponto sobre o lugar das raízes, então a soma de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  não é igual a  $\pm 180^\circ(2k+1)$ , onde  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Portanto, os pontos que não estiverem sobre o lugar das raízes não satisfazem a condição de ângulo e, portanto, não podem ser polos de malha-fechada para quaisquer valores de  $K$ .

Se os polos de malha-fechada forem especificados no lugar das raízes, então o valor correspondente de  $K$  é determinado pela condição do módulo, Eq. (8.4). Se, por exemplo, os polos de malha-fechada selecionados são  $s = -1/2 \pm j2$ , então o valor correspondente de  $K$  é determinado de

$$|G(s)H(s)| = \left| \frac{K}{s(s+1)} \right|_{s=-1/2+j2} = 1$$

ou

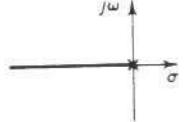
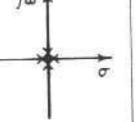
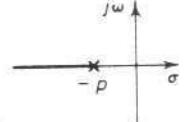
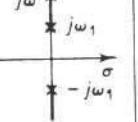
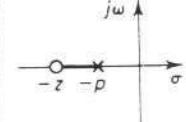
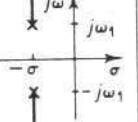
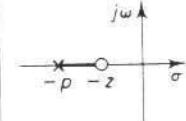
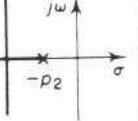
$$K = |s(s+1)|_{s=-1/2+j2} = \frac{17}{4}$$

Desde que polos complexos são conjugados, se um deles, por exemplo,  $s = -1/2 + j2$ , é especificado, então o outro é automaticamente fixado. No cálculo do valor de  $K$ , qualquer um dos polos pode ser utilizado.

Do gráfico do lugar das raízes fornecido na Fig. 8.3(a), verificamos claramente os efeitos de variações no valor de  $K$  no comportamento da resposta transitória em relação ao sistema de segunda-ordem. Um aumento no valor de  $K$  diminuirá a relação de amortecimento  $\zeta$ , resultando em um aumento na sobrelevação da resposta. Um aumento no valor de  $K$  também resultará em um aumento nas freqüências natural não amortecida e amortecida. (Se  $K$  é maior do que o valor crítico, que corresponde a um sistema criticamente amortecido, um aumento no valor de  $K$  não afetará o valor da parte real dos polos em malha-fechada.) A partir do gráfico do lugar das raízes, é evidente que os polos de malha-fechada sempre estarão no semiplano esquerdo do plano  $s$ ; consequentemente, independentemente de quanto o parâmetro  $K$  for aumentado, o sistema sempre permanecerá estável; desta forma, o sistema de segunda-ordem é sempre estável. (Note, entretanto, que se o ganho for ajustado em um valor muito alto, os efeitos de alguma das constantes de tempo que foram desprezadas podem tornar-se importantes, e o sistema que é supostamente de segunda-ordem, porém efetivamente de ordem maior, pode tornar-se instável.)

A Tabela 8.1 fornece uma coleção de gráficos simples de lugares de raízes.

**Tabela 8.1** Coleção de gráficos de lugares das raízes simples

$G(s)H(s)$	Localizações do pólo-zero de malha-aberta e lugares das raízes	$G(s)H(s)$	Localizações do pólo-zero de malha-aberta e lugares das raízes
$\frac{K}{s}$		$\frac{K}{s^2}$	
$\frac{K}{s+p}$		$\frac{K}{s^2 + \omega_1^2}$	
$\frac{K(s+z)}{s+p}$ ( $z > p$ )		$\frac{K}{(s+\sigma)^2 + \omega_1^2}$	
$\frac{K(s+z)}{s+p}$ ( $z < p$ )		$\frac{K}{(s+p_1)(s+p_2)}$	

**Lugares de ganho constante.** A Fig. 8.4 mostra um gráfico dos lugares de ganho constante do sistema indicado na Fig. 8.2.

Os lugares de ganho constante para este sistema foram obtidos a partir da condição de módulo:

$$|G(s)H(s)| = \left| \frac{K}{s(s+1)} \right| = 1$$

ou

$$|s(s+1)| = K \quad (8.6)$$

Os pontos do plano complexo que satisfazem a Eq. (8.6) para um dado  $K$  constituem um lugar de ganho constante.

**Ortogonalidade entre os lugares das raízes e os lugares de ganho constante.** Considere o sistema indicado na Fig. 8.1. No plano  $G(s)H(s)$  os lugares de  $|G(s)H(s)| = \text{constante}$  são circunferências com centro na origem, e os lugares correspondentes a  $|G(s)H(s)| = \pm 180^\circ(2k+1)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) permanecem sobre o eixo real negativo do

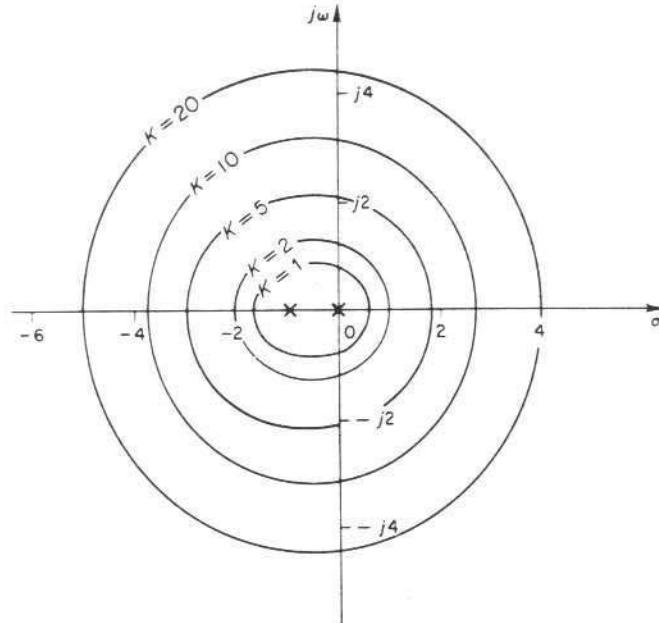


Fig. 8.4 Gráfico dos lugares de ganho constante do sistema indicado na Fig. 8.2.

plano  $G(s)H(s)$ , como indicado na Fig. 8.5. [Note que o plano complexo aqui empregado não é o plano  $s$ , mas o plano  $G(s)H(s)$ .]

Os lugares das raízes e os lugares de ganho constante no plano  $s$  constituem mapeamentos conformes dos lugares de  $|G(s)H(s)| = \pm 180^\circ(2k+1)$  e de  $G(s)H(s) = \text{constante}$  no plano  $G(s)H(s)$ .

Desde que os lugares de fase constante e ganho constante no plano  $G(s)H(s)$  são ortogonais, os lugares das raízes e os lugares de ganho constante no plano  $s$  também são ortogonais. A Fig. 8.6(a) mostra os lugares das raízes e os lugares de ganho constante para o seguinte sistema:

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s^2 + 2s + 3}, \quad H(s) = 1$$

Verifique que devido à configuração de pólo-zero ser simétrica em relação ao eixo real, os lugares de ganho constante também são simétricos em relação ao eixo real.

A Fig. 8.6(b) mostra os lugares das raízes e de ganho constante para o sistema:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}, \quad H(s) = 1$$

Note que devido à configuração dos pólos no plano  $s$  ser simétrica em relação ao eixo real, e em relação à reta paralela ao eixo imaginário passando pelo ponto ( $\sigma = -1, \omega = 0$ ), os lugares de ganho constante são simétricos em relação à reta  $\omega = 0$  (eixo real) e à reta  $\sigma = -1$ .

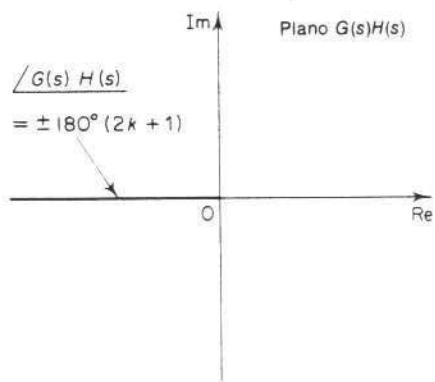
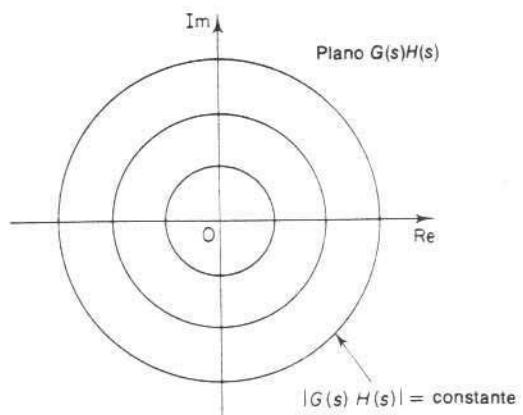


Fig. 8.5 Gráficos dos lugares de ganho constante e fase constante no plano  $G(s)H(s)$ .

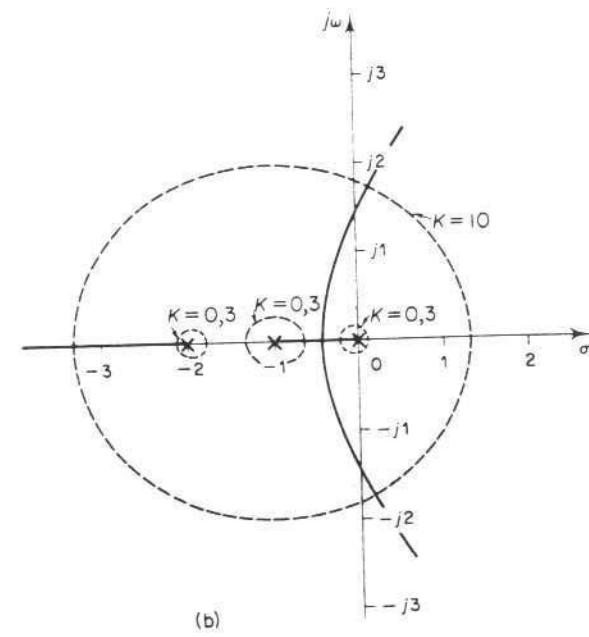
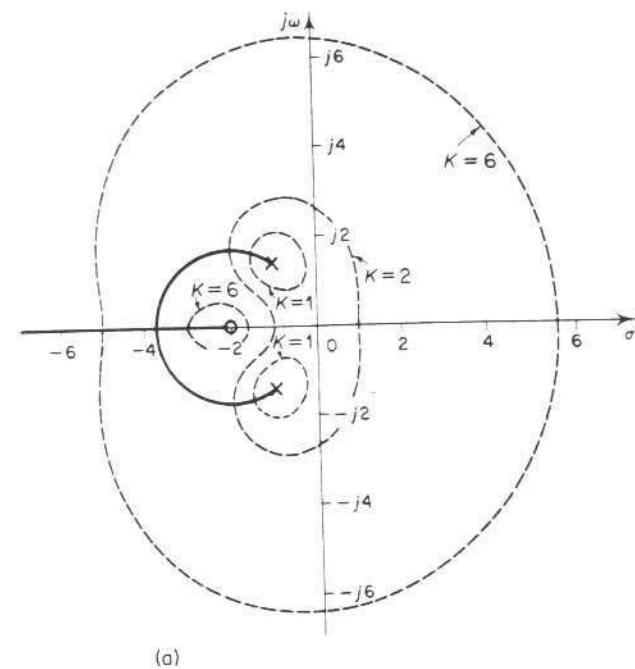


Fig. 8.6 Gráficos dos lugares das raízes e dos lugares de ganho constante.

### 8.3 DOIS EXEMPLOS ILUSTRATIVOS

Nesta seção apresentaremos dois exemplos ilustrativos para construção dos gráficos de lugar das raízes. Utilizaremos determinações gráficas, combinadas com inspeção, para determinar os lugares das raízes sobre os quais as raízes da equação característica do sistema de malha-fechada devem permanecer. Embora empreguemos apenas sistemas simples para fins de ilustração, o procedimento para determinar os lugares das raízes para sistemas de ordem maior não é mais complicado.

O primeiro passo no procedimento para construção do gráfico do lugar das raízes é determinar os lugares das possíveis raízes utilizando a condição de ângulo. Posteriormente, os lugares das raízes são calibrados ou graduados usando-se a condição de módulo.

Como as medidas gráficas de ângulos são envolvidas na análise, esboçando-se o lugar das raízes em um papel de gráfico, verifica-se a necessidade de usar as mesmas escalas nos eixos das abscissas e das ordenadas.

*Exemplo 8.1* Considere o sistema indicado na Fig. 8.7. (Suporemos que o valor do ganho  $K$  é positivo.) Para este sistema,

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}, \quad H(s) = 1$$

Esbocemos o gráfico do lugar das raízes e determinemos posteriormente o valor de  $K$  para que a relação de amortecimento  $\zeta$  de um par de pólos de malha-fechada complexos conjugados dominantes seja 0.5.

Para o sistema dado, a condição de ângulo fornece

$$\begin{aligned} |G(s)| &= \left| \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right| \\ &= -\underline{|s|} - \underline{|s+1|} - \underline{|s+2|} \\ &= \pm 180^\circ(2k+1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

A condição de módulo é

$$|G(s)| = \left| \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right| = 1$$

Um procedimento típico para esboçar o gráfico do lugar das raízes é o seguinte:

1. Determine os lugares das raízes no eixo real. O primeiro passo na construção de um gráfico do lugar das raízes é localizar os pólos de malha-aberta,  $s = 0$ ,  $s = -1$ , e  $s = -2$  no plano complexo. (Não há zeros de malha-aberta neste sistema.) As posições dos pólos de

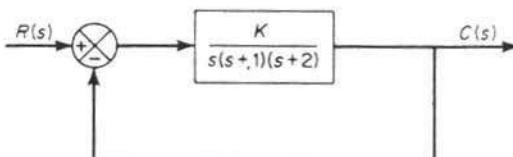


Fig. 8.7 Sistema de controle.

malha-aberta são indicadas por cruzes. (As posições dos zeros de malha-aberta serão indicadas neste livro por pequenas circunferências.) Note que os pontos de partida das lugares das raízes (os pontos correspondentes a  $K = 0$ ) são os pólos de malha-aberta. O número de lugares das raízes individuais para este sistema é três, que é igual ao número de pólos de malha-aberta.

Para determinar os lugares das raízes sobre o eixo real, selecionamos um ponto de teste  $s$ . Se o ponto de teste estiver sobre o eixo real positivo, então

$$\underline{|s|} = \underline{|s+1|} = \underline{|s+2|} = 0^\circ$$

Isto indica que a condição de ângulo não pode ser satisfeita. Consequentemente, não há nenhum lugar das raízes sobre o eixo real positivo. Posteriormente, selecione um ponto de teste sobre o eixo real negativo entre 0 e -1. Então,

$$\underline{|s|} = 180^\circ, \quad \underline{|s+1|} = \underline{|s+2|} = 0^\circ$$

Portanto,

$$-\underline{|s|} - \underline{|s+1|} - \underline{|s+2|} = -180^\circ$$

e a condição do ângulo é satisfeita. Portanto, a parte do eixo real negativo entre 0 e -1 constitui uma parte do lugar das raízes. Se um ponto de teste for selecionado entre -1 e -2, então,

$$\underline{|s|} = \underline{|s+1|} = 180^\circ, \quad \underline{|s+2|} = 0^\circ$$

Verifica-se então que a condição de ângulo não será satisfeita. Portanto, o eixo real negativo desde -1 até -2 não corresponde a uma parte do lugar das raízes. Analogamente, se um ponto de teste for localizado no eixo real negativo desde -2 até  $-\infty$ , a condição de ângulo será satisfeita. Consequentemente, existirá um lugar das raízes sobre o eixo real negativo entre 0 e -1 e entre -2 e  $-\infty$ .

2. Determine as assintotas dos lugares das raízes. As assintotas dos lugares das raízes, conforme  $s$  tende a infinito, podem ser determinadas como segue: Se um ponto de teste é selecionado muito distante da origem, então

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{s^3}$$

e a condição de ângulo fornece

$$-\underline{3/s} = \pm 180^\circ(2k+1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

ou

$$\text{Ângulo da assintota} = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{3}$$

Desde que o ângulo se repete conforme  $k$  é variado, os ângulos distintos para as assintotas são apenas  $60^\circ$ ,  $-60^\circ$  e  $180^\circ$ . Portanto, há três assintotas. Aquela correspondente ao ângulo de  $180^\circ$  está sobre o eixo real negativo.

Antes de desenhar estas assintotas no plano complexo, devemos determinar onde elas interceptam o eixo real. Desde que a equação característica deste sistema é

$$\frac{K}{s(s+1)(s+2)} = -1$$

ou

$$s^3 + 3s^2 + 2s = -K$$

se  $s$  é suposto muito grande, podemos então aproximar esta equação característica pela seguinte equação:

$$(s + 1)^3 = 0$$

A abscissa da intersecção da assintota no eixo real pode ser obtida substituindo-se  $s = \sigma_a$  e determinando-se a solução da equação para  $\sigma_a$ . Portanto,

$$\sigma_a = -1$$

e o ponto da origem das assintotas é  $(-1, 0)$ . Estas assintotas constituem partes do lugar das raízes nas regiões muito distantes da origem.

3. Determine o ponto de separação de partida. Para desenhar precisamente o gráfico do lugar das raízes devemos determinar o ponto de separação de partida, onde os ramos do lugar das raízes originários dos pólos 0 e -1 separam-se (conforme  $K$  é aumentado) do eixo real e movem-se para o plano complexo em pontos com parte imaginária não nula. O ponto de separação corresponde a um ponto no plano  $s$  onde são encontradas raízes múltiplas da equação característica.

O ponto de separação  $(-\sigma_b, 0)$  pode ser determinado como segue: Suponha um ponto de teste que esteja próximo ao eixo real negativo entre 0 e -1 conforme indicado na Fig. 8.8. Se denotarmos a distância vertical do ponto de teste, medida a partir do eixo real negativo, por  $\delta$ , então os ângulos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  dos números complexos  $s$ ,  $s + 1$  e  $s + 2$ , respectivamente, podem ser escritos como segue:

$$\theta_1 = 180^\circ - \tan^{-1} \left( \frac{\delta}{\sigma_b} \right)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left[ \frac{\delta}{-\sigma_b - (-1)} \right]$$

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left[ \frac{\delta}{-\sigma_b - (-2)} \right]$$

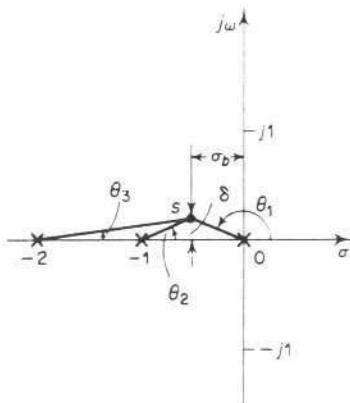


Fig. 8.8 Determinação do ponto de separação de partida.

Para um valor pequeno de  $\delta$ ,

$$\theta_1 = 180^\circ - \frac{\delta}{\sigma_b}$$

$$\theta_2 = \frac{\delta}{-\sigma_b + 1}$$

$$\theta_3 = \frac{\delta}{-\sigma_b + 2}$$

A condição de ângulo

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 180^\circ$$

resulta

$$-\frac{\delta}{\sigma_b} + \frac{\delta}{-\sigma_b + 1} + \frac{\delta}{-\sigma_b + 2} = 0^\circ$$

ou

$$\frac{1}{\sigma_b} + \frac{1}{\sigma_b - 1} + \frac{1}{\sigma_b - 2} = 0 \quad (8.7)$$

Resolvendo a Eq. (8.7), obtemos

$$3\sigma_b^2 - 6\sigma_b + 2 = 0$$

resultando

$$\sigma_b = 0,423, \quad \sigma_b = 1,577$$

Desde que  $0 > -\sigma_b > -1$ , o ponto de separação de partida deve ser  $(-0,423, 0)$ . Se o número de termos da Eq. (8.7) for quatro ou mais, deve ser utilizada uma abordagem de tentativa-e-erro para determinar o valor de  $\sigma_b$ . Esta abordagem pode ser facilitada se determinarmos um valor aproximado para  $\sigma_b$  desprezando os pólos e zeros localizados distantes do ponto de separação de partida, e posteriormente fazendo uma correção para este valor aproximado de  $\sigma_b$ .

É disponível um método alternativo para determinação do ponto de separação de partida. Apresentaremos este método a seguir: Vamos escrever a equação característica como

$$f(s) = A(s) + KB(s) = 0 \quad (8.8)$$

onde  $A(s)$  e  $B(s)$  não contêm  $K$ . Note que  $f(s) = 0$  possui raízes múltiplas nos pontos onde

$$\frac{df(s)}{ds} = 0$$

Da Eq. (8.8), obtemos

$$\frac{df(s)}{ds} = A'(s) + KB'(s) = 0 \quad (8.9)$$

onde

$$A'(s) = \frac{dA(s)}{ds},$$

$$B'(s) = \frac{dB(s)}{ds}$$

O valor particular de  $K$  que fornece raízes múltiplas da equação característica é obtido da Eq. (8.9) como

$$K = -\frac{A'(s)}{B'(s)}$$

Se substituirmos este valor de  $K$  na Eq. (8.8), obtemos

$$f(s) = A(s) - \frac{A'(s)}{B'(s)} B(s) = 0$$

ou

$$A(s)B'(s) - A'(s)B(s) = 0 \quad (8.10)$$

Se a Eq. (8.10) for resolvida em relação a  $s$ , os pontos onde ocorrem raízes múltiplas podem ser obtidos. Por outro lado, da Eq. (8.8) obtemos

$$K = -\frac{A(s)}{B(s)}$$

e

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{A'(s)B(s) - A(s)B'(s)}{B^2(s)}$$

Se  $dK/ds$  é igualado a zero, obtemos uma equação idêntica à Eq. (8.10). Portanto, os pontos de separação de partida podem ser simplesmente determinados das raízes de

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

Deve ser notado que nem todas as soluções da Eq. (8.10) ou de  $dK/ds = 0$  correspondem a pontos de separação de partida verdadeiros. Demonstraremos este fato utilizando o exemplo presente, onde

$$f(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0 \quad (8.11)$$

Referindo-se ao gráfico de  $f(\sigma)$  versus  $\sigma$  indicado na Fig. 8.9, note que os pontos  $P$  e  $Q$  correspondem a  $df(\sigma)/d\sigma = 0$ . É claro que o ponto  $Q$  corresponde a  $K < 0$ , o que significa que o ponto  $Q$  não pode ser um ponto de separação de partida do sistema sob consideração. (Se num ponto no qual  $df(s)/ds = 0$  o valor de  $K$  corresponder a um valor real positivo, então o ponto considerado é um ponto de separação de partida verdadeiro.)

Para o presente exemplo, da Eq. (8.11) obtemos

$$K = -s(s+1)(s+2) = -(s^3 + 3s^2 + 2s)$$

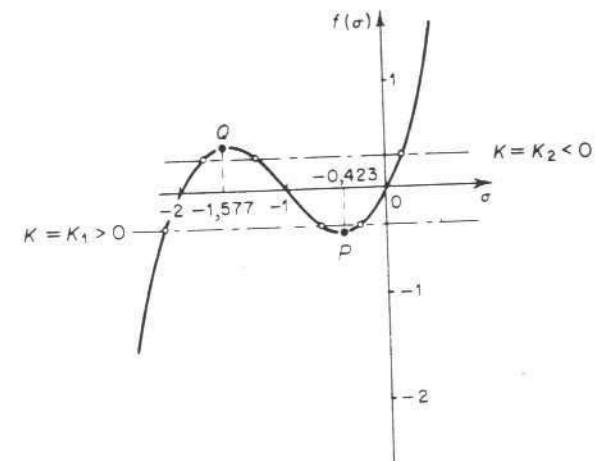


Fig. 8.9 Gráfico de  $f(\sigma)$  versus  $\sigma$ .

Impondo que  $dK/ds = 0$ , obtemos

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 6s + 2) = 0$$

ou

$$s = -0,423, \quad s = -1,577$$

Desde que o ponto de separação de partida deve estar entre 0 e -1, é claro que  $s = -0,423$  corresponde a um ponto de separação de partida verdadeiro. De fato, o cálculo dos valores de  $K$  correspondentes a  $s = -0,423$  e  $s = -1,577$  fornece

$$K = 0,385 \quad \text{para } s = -0,423$$

$$K = -0,385 \quad \text{para } s = -1,577$$

4. Determine os pontos onde os lugares das raízes cruzam o eixo imaginário. Estes pontos podem ser determinados utilizando-se o critério de estabilidade de Routh como segue. Desde que a equação característica para o presente sistema é

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

o arranjo de Routh resulta em

$s^3$	1	2
$s^2$	3	$K$
$s^1$	$\frac{6-K}{3}$	
$s^0$	$K$	

O valor de  $K$  que faz com que o termo  $s^1$  na primeira coluna seja igual a zero é  $K = 6$ . Os pontos do cruzamento do eixo imaginário podem ser determinados pela solução da equação auxiliar obtida a partir da linha  $s^2$ ; isto é,

$$3s^2 - K = 3s^2 + 6 = 0$$

que fornece

$$s = \pm j\sqrt{2}$$

As frequências dos pontos de cruzamento no eixo imaginário são portanto  $\omega = \pm \sqrt{2}$ . O valor do ganho correspondente aos pontos de cruzamento é  $K = 6$ .

Uma abordagem alternativa é substituir  $s = j\omega$  na equação característica, igualar tanto a parte real como a parte imaginária a zero, e então resolver para  $\omega$  e  $K$ . Para o sistema dado, a equação característica, com  $s = j\omega$ , é

$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + K = 0$$

ou

$$(K - 3\omega^2) + j(2\omega - \omega^3) = 0$$

Igualando-se a zero as partes real e imaginária desta última equação, obtemos

$$K - 3\omega^2 = 0, \quad 2\omega - \omega^3 = 0$$

da qual

$$\omega = \pm \sqrt{2}, \quad K = 6$$

Portanto, os lugares das raízes cruzam o eixo imaginário em  $\omega = \pm \sqrt{2}$ , e o valor de  $K$  nos pontos de cruzamento é 6.

5. Escolha um ponto de teste na vizinhança do eixo  $j\omega$  e da origem, como indicado na Fig. 8.10, e aplique a condição do ângulo. Se um ponto de teste estiver sobre um lugar das raízes, então a soma dos três ângulos  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$  deve ser  $180^\circ$ . Se o ponto de teste não satisfizer a condição do ângulo, selecione um outro ponto de teste até que este a satisfaça. (A soma dos

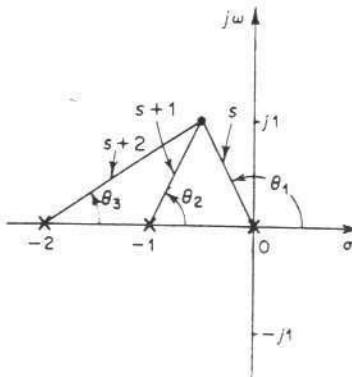


Fig. 8.10 Construção do lugar das raízes.

ângulos do ponto de teste indicará em que direção e sentido o ponto de teste deve ser movido.) Continue este processo e localize um número suficiente de pontos que satisfaça a condição do ângulo.

6. Baseado na informação obtida dos passos anteriores, desenhe um gráfico completo do lugar das raízes, como indicado na Fig. 8.11.

7. Determine um par de pólos de malha-fechada complexos conjugados dominantes tais que a relação de amortecimento  $\zeta$  seja 0,5. Os pólos de malha-fechada com  $\zeta = 0,5$  estão sobre as retas passando pela origem e fazendo ângulos de  $\beta = \pm \cos^{-1} \zeta = \pm \cos^{-1} 0,5 = \pm 60^\circ$  com o eixo real negativo. Da Fig. 8.11, os pólos de malha-fechada possuindo  $\zeta = 0,5$  são obtidos como segue:

$$s_1 = -0,33 + j0,58, \quad s_2 = -0,33 - j0,58$$

O valor de  $K$  que fornece estes pólos é determinado a partir da condição de módulo como segue:

$$K = |s(s+1)(s+2)|_{s=-0,33+j0,58} = 1,06$$

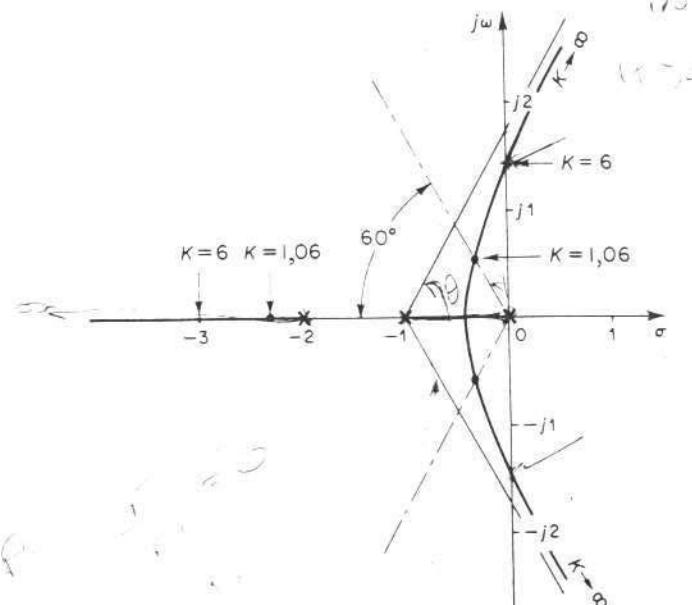


Fig. 8.11 Gráfico do lugar das raízes.

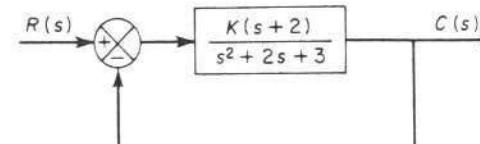


Fig. 8.12 Sistema de controle.

Usando este valor de  $K$ , é obtido o terceiro pôlo em  $s = -2,33$ .

Note que, do Passo 4, pode ser verificado que para  $K = 6$  os pôlos em malha-fechada dominantes estão sobre o eixo imaginário em  $s = \pm j\sqrt{2}$ . Com este valor de  $K$ , o sistema exibirá oscilações mantidas. Para  $K > 6$  os pôlos de malha-fechada dominantes estão no semiplano direito do plano  $s$ , resultando em um sistema instável.

Finalmente, note que, se necessário, os lugares das raízes podem ser calibrados facilmente em termos de  $K$  pelo uso da condição do módulo. Simplesmente escolhemos um ponto sobre um lugar das raízes e medimos os módulos dos três números complexos  $s$ ,  $s + 1$  e  $s + 2$ , ou multiplicando estes três módulos, o produto é igual ao valor do ganho  $K$  naquele ponto, ou

$$|s| \cdot |s + 1| \cdot |s + 2| = K$$

**Exemplo 8.2** Neste exemplo, esboçaremos o gráfico do lugar das raízes de um sistema com pôlos de malha-aberta complexos conjugados. Considere o sistema indicado na Fig. 8.12. Para este sistema,

$$G(s) = \frac{K(s + 2)}{s^2 + 2s + 3}, \quad H(s) = 1$$

Verifica-se facilmente que  $G(s)$  possui um par de pôlos complexos conjugados em

$$s = -1 + j\sqrt{2},$$

$$s = -1 - j\sqrt{2}$$

Um procedimento típico para esboçar o gráfico do lugar das raízes é o seguinte:

1. Determine os lugares das raízes sobre o eixo real. Para qualquer ponto de teste  $s$  sobre o eixo real, a soma das contribuições angulares dos pôlos complexos conjugados é  $360^\circ$ , como mostrado na Fig. 8.13. Portanto, a contribuição líquida dos pôlos complexos conjugados é zero sobre o eixo real. A localização do lugar das raízes sobre o eixo real é determinada pelo zero de malha-aberta sobre o eixo real negativo. Um teste simples revela que a parte do eixo real negativo, entre  $-2$  e  $-\infty$ , constitui uma parte do lugar das raízes. Deve ser verificado que, desde que este lugar permanece entre dois zeros (em  $s = -2$  e  $s = -\infty$ ), é na realidade uma parte de dois lugares das raízes, cada um partindo de cada um dos pôlos complexos conjugados. Em outras palavras, duas raízes devem coincidir na região sobre o eixo real negativo entre  $-2$  e  $-\infty$ .

Desde que há dois pôlos e um zero de malha aberta, há uma assintota que coincide com o eixo real negativo.

2. Determine o ângulo de partida dos pôlos de malha-aberta complexos conjugados. A presença de um par de pôlos de malha-aberta complexos conjugados requer a determinação do ângulo de partida deste pôlo. É importante o conhecimento dos ângulos desde que o lugar das raízes próximo ao pôlo complexo fornece informação de como o lugar das raízes originário do pôlo complexo migra para o eixo real ou estende-se para a assintota.

Referindo-se à Fig. 8.14, se escolhemos um ponto de teste e movê-lo em uma vizinhança muito próxima do pôlo complexo de malha-aberta em  $s = -p_1$ , verificamos que a soma das contribuições angulares do pôlo  $s = -p_1$  e do zero  $s = -z_1$  no ponto de teste pode ser considerada constante em um mesmo valor. A soma de  $\phi'_1$  e  $-\theta'_2$  permanece a mesma conforme o ponto de teste é movido em uma vizinhança muito próxima do pôlo  $s = -p_1$ . Se o ponto de teste estiver sobre o lugar das raízes, então a soma de  $\phi'_1$ ,  $-\theta_1$  e  $-\theta'_2$  deve ser  $\pm 180^\circ (2k + 1)$ , onde  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Portanto, neste exemplo,

$$\phi'_1 - (\theta_1 + \theta'_2) = \pm 180^\circ (2k + 1)$$

ou

$$\theta_1 = 180^\circ - \theta'_2 + \phi'_1 = 180^\circ - \theta_2 + \phi_1$$

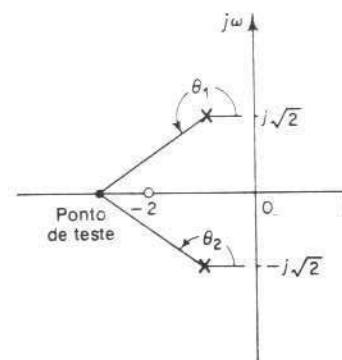


Fig. 8.13 Determinação do lugar das raízes sobre o eixo real.

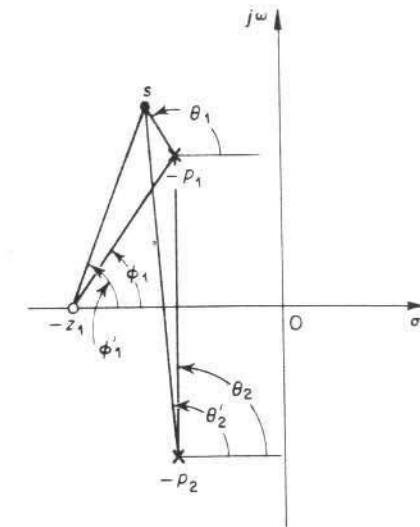


Fig. 8.14 Determinação do ângulo de partida.

O ângulo de partida é então

$$\theta_1 = 180^\circ - \theta_2 + \phi_1 = 180^\circ - 90^\circ - 55^\circ = 145^\circ$$

Desde que o lugar das raízes é simétrico em relação ao eixo real, o ângulo de partida do pôlo em  $s = -p_2$  é  $-145^\circ$ .

3. Determine o ponto de separação de chegada no eixo real. O ponto de separação de chegada no eixo real é aquele onde um par de ramos do lugar das raízes coincide conforme  $K$  é aumentado. O ponto de separação localiza-se entre  $-2$  e  $-\infty$  sobre o eixo real negativo e pode ser determinado como segue: Se um ponto de teste é escolhido sobre o eixo real, então a soma das contribuições angulares de um par de pôlos complexos conjugados é sempre  $360^\circ$ . Se o ponto de teste estiver ligeiramente fora do eixo real, entretanto, então as contribuições angulares não somam  $360^\circ$ .

Para determinar a contribuição angular, suponha que um par de pôlos complexos conjugados esteja localizado conforme a Fig. 8.15. A contribuição angular total dos pôlos pode ser escrita  $360^\circ - \Delta\psi$ , onde  $\Delta\psi$  é obtido como segue: Da Fig. 8.15,

$$\psi_1 = \tan^{-1} \frac{a}{b}, \quad \psi_2 = \tan^{-1} \frac{a - \delta}{b}$$

Portanto,

$$\psi_1 - \psi_2 = \tan^{-1} \frac{a}{b} - \tan^{-1} \frac{a - \delta}{b}$$

ou,

$$\tan(\psi_1 - \psi_2) = \frac{\frac{a}{b} - \frac{a - \delta}{b}}{1 + \frac{a(a - \delta)}{b^2}} = \frac{b\delta}{b^2 - a^2 - a\delta}$$

Se  $\delta/a \ll 1$ , então,

$$\psi_1 - \psi_2 \doteq \tan(\psi_1 - \psi_2) = \frac{b\delta}{a^2 + b^2}$$

A soma das contribuições angulares de um par de pólos complexos conjugados é igual a duas vezes  $(\psi_1 - \psi_2)$ , ou

$$2(\psi_1 - \psi_2) = \frac{2b\delta}{a^2 + b^2}$$

Portanto, em um ponto de teste próximo ao eixo real, a soma das contribuições angulares de um par de pólos complexos conjugados é dada por

$$\Delta\psi = \pm \left| \frac{2b\delta}{a^2 + b^2} \right|$$

onde o sinal mais é utilizado se os pólos estiverem à direita do ponto de teste  $s$ , enquanto o sinal negativo é utilizado se eles estiverem localizados à esquerda. Referindo-se a Fig. 8.15, verificamos que no ponto de teste  $s$  a soma dos ângulos dos três números complexos  $s + p_1$ ,  $s + p_2$ , e  $s + z$  é

$$(180^\circ - \Delta\phi) - \left(360^\circ - \left| \frac{2b\delta}{a^2 + b^2} \right| \right)$$

onde

$$\Delta\phi = \left| \frac{\delta}{\sigma - z} \right|$$

Se o ponto de teste está sobre o lugar das raízes, então a soma dos ângulos dos três números complexos deve ser  $\pm 180^\circ$ ; isto é,

$$(180^\circ - \left| \frac{\delta}{\sigma - z} \right|) - \left(360^\circ - \left| \frac{2b\delta}{a^2 + b^2} \right| \right) = \pm 180^\circ$$

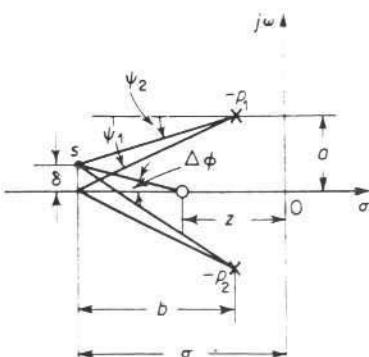


Fig. 8.15 Determinação do ponto de separação de chegada.

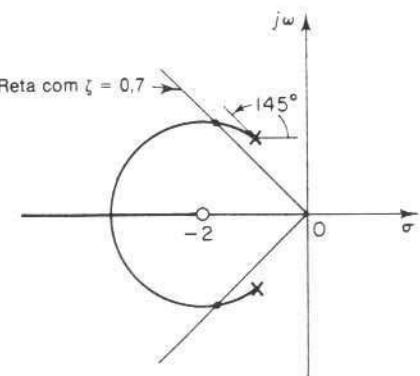


Fig. 8.16 Gráfico do lugar das raízes.

ou

$$-\left| \frac{1}{\sigma - z} \right| + \left| \frac{2b}{a^2 + b^2} \right| = 0$$

Substituindo os valores de  $a$ ,  $b$  e  $z$  nesta última equação, obtemos

$$-\frac{1}{\sigma - 2} - \frac{2(\sigma - 1)}{2 + (\sigma - 1)^2} = 0$$

O valor de  $\sigma$  deve ser maior que dois porque o ponto de separação de chegada deve estar localizado entre  $-2$  e  $-\infty$ . Resolvendo esta última equação, obtemos

$$\sigma = 3,73$$

Portanto, o ponto de separação de chegada dos lugares das raízes no eixo real é  $(-3,73, 0)$ .

4. Baseado na informação obtida dos passos anteriores, esboço um gráfico do lugar das raízes. A fim de determinar precisamente os lugares das raízes, vários pontos devem ser determinados por tentativa-e-erro entre o ponto de separação e os pólos complexos de malha-aberta. (De modo a facilitar o esboço do gráfico do lugar das raízes, devemos verificar a direção na qual o ponto de teste deve ser movido para, mentalmente, somar as variações dos ângulos devidos aos pólos e zeros.) A Fig. 8.16 mostra um gráfico completo do lugar das raízes para o sistema considerado.

O valor do ganho  $K$  em qualquer ponto do lugar das raízes pode ser determinado aplicando-se a condição do módulo. Por exemplo, o valor de  $K$  para o qual os pólos complexos conjugados de malha-fechada resultam em uma relação de amortecimento  $\zeta = 0,7$  pode ser determinado pela localização das raízes, como indicado na Fig. 8.16, e calculado o valor  $K$  como segue:

$$K = \left| \frac{(s - 1 - j\sqrt{2})(s + 1 + j\sqrt{2})}{s + 2} \right|_{s = -1,67 - j1,70} = 1,33$$

Dos exemplos anteriores, pode-se verificar claramente que é possível esboçar um gráfico do lugar das raízes razoavelmente preciso, para um dado sistema, por meio de regras simples. Em etapas preliminares de um projeto, pode-se não necessitar das posições precisas dos pólos de malha-fechada. Muitas vezes são necessárias apenas suas localizações aproximadas para se fazer uma estimativa do desempenho do sistema.

#### 8.4 SUMÁRIO DAS REGRAS GERAIS PARA CONSTRUÇÕES DOS LUGARES DAS RAÍZES

Para um sistema complicado com muitos pólos e zeros de malha-aberta, a construção do gráfico do lugar das raízes pode parecer complicada, porém, na realidade, não é difícil se forem aplicadas as regras para construção dos lugares das raízes. Pela localização de pontos particulares e assintotas, e pelo cálculo de ângulos de partida de pólos complexos e ângulos de chegada em zeros complexos, podemos construir a forma geral dos lugares das raízes sem dificuldade. De fato, a vantagem completa do método do lugar das raízes é poder ser realizado nos casos de sistemas de ordem superior para os quais outros métodos de determinação dos pólos em malha-fechada são extremamente trabalhosos.

Algumas das regras para construção dos lugares das raízes foram dadas na

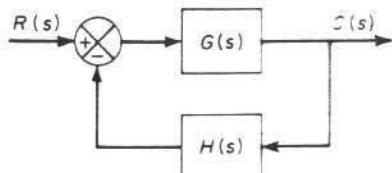


Fig. 8.17 Sistema de controle.

Seção 8.3. A finalidade desta seção é sumarizar as regras gerais para construção dos lugares das raízes do sistema indicado na Fig. 8.17. Embora o método do lugar das raízes seja baseado essencialmente em uma técnica de tentativa-e-erro, o número de tentativas necessárias pode ser reduzido significativamente se usarmos estas regras.

Antes de sumarizar as regras gerais, recordemos que os ângulos dos números complexos originários dos pólos de malha-aberta e dos zeros de malha-aberta até o ponto de teste  $s$  são medidos no sentido anti-horário. Por exemplo, para o sistema

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)(s - p_2)(s + p_3)(s + p_4)}$$

onde  $-p_2$  e  $-p_3$  são pólos complexos conjugados, o ângulo de  $G(s)H(s)$  é

$$\angle[G(s)H(s)] = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4$$

onde  $\phi_1, \theta_1, \theta_2, \theta_3$  e  $\theta_4$  são medidos no sentido anti-horário conforme indicado nas Figs. 8.18(a) e (b). O módulo de  $G(s)H(s)$  para este sistema é

$$|G(s)H(s)| = \frac{KB_1}{A_1 A_2 A_3 A_4}$$

onde  $A_1, A_2, A_3, A_4$  e  $B_1$  são os módulos dos números complexos  $s + p_1, s + p_2, s + p_3, s + p_4$  e  $s + z_1$ , respectivamente, como indicado na Fig. 8.18(a).

Note que em virtude de os pólos complexos conjugados de malha-aberta e zeros complexos conjugados de malha-aberta, se houver, sempre estarem localizados simetricamente em relação ao eixo real, os lugares das raízes são sempre simétricos em relação a este eixo. Conseqüentemente, necessitamos apenas construir a metade superior dos lugares das raízes e desenhar a imagem da metade inferior, na metade inferior do plano  $s$ , como se fosse a imagem de um espelho plano posicionado sobre o eixo horizontal.

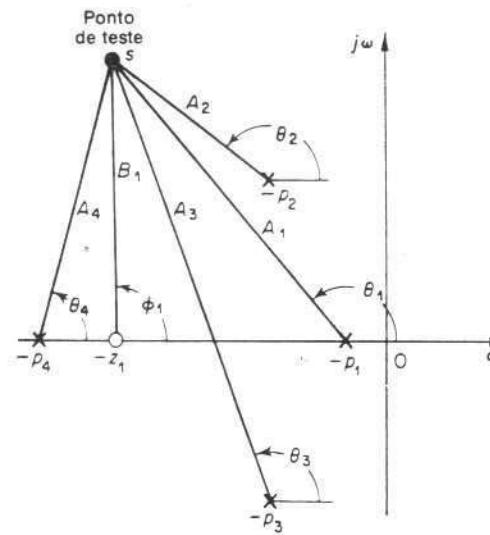
**Regras gerais para construção dos lugares das raízes.** Forneceremos agora um sumário das regras e procedimentos gerais para construção dos lugares das raízes do sistema mostrado na Fig. 8.17.

1. Obtenha inicialmente a equação característica

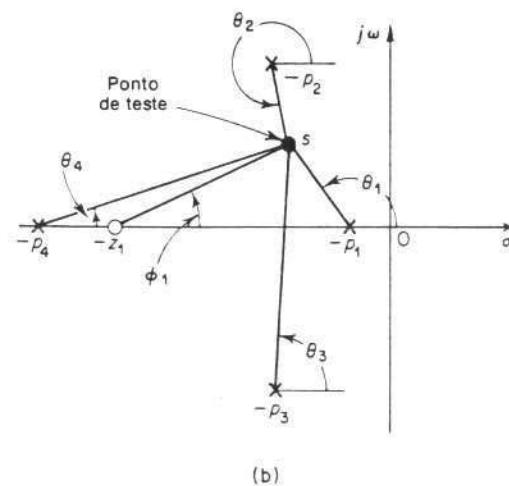
$$1 + G(s)H(s) = 0$$

e rearranje esta equação de modo que o parâmetro de interesse apareça como um fator multiplicativo na forma

$$1 + \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s - p_2) \cdots (s + p_n)} = 0$$



(a)



(b)

Fig. 8.18 Construção do lugar das raízes.

Nas discussões presentes, suporemos que o parâmetro de interesse é o ganho  $K$ , onde  $K > 0$ . (Se  $K < 0$ , que corresponde ao caso de realimentação positiva, a condição de ângulo deve ser modificada. Vide Problema A.8.6.) Note, entretanto, que o método ainda é aplicável a sistemas com parâmetros de interesse diferentes do ganho.

A partir da forma fatorada da função de transferência em malha-aberta, localize os pólos e zeros de malha-aberta no plano  $s$ . [Note que os zeros de malha-aberta

são os zeros de  $G(s)H(s)$ , enquanto os zeros de malha-fechada consistem nos zeros de  $G(s)$  e nos pólos de  $H(s)$ .]

2. Determine os pontos de partida e os pontos de chegada dos lugares das raízes e também o número de lugares das raízes separados. Os pontos dos lugares das raízes correspondentes a  $K = 0$  são os pólos de malha-aberta. Este fato pode ser verificado a partir da condição de módulo fazendo-se  $K$  tender a zero, ou

$$\lim_{K \rightarrow 0} \left| \frac{(s+z_1)(s+z_2) \cdots (s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2) \cdots (s+p_n)} \right| = \lim_{K \rightarrow 0} \frac{1}{K} = \infty$$

Esta última equação implica que o valor de  $s$  deve se aproximar de um dos pólos de malha-aberta. Cada lugar das raízes, portanto, origina-se em um polo da função de transferência de malha-aberta  $G(s)H(s)$ . Conforme  $K$  é aumentado para infinito, cada lugar das raízes se aproxima ou de um zero da função de transferência de malha-aberta ou de um infinito no plano complexo. Isto pode ser visto como segue: Se fizermos  $K$  tender a infinito na condição do módulo, então

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \left| \frac{(s+z_1)(s+z_2) \cdots (s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2) \cdots (s+p_n)} \right| = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} = 0$$

Então, o valor de  $s$  deve aproximar-se de um dos zeros de malha-aberta ou de um zero de malha-aberta no infinito. (Se os zeros no infinito forem incluídos na contagem,  $G(s)H(s)$  possui o mesmo número de pólos e zeros.)

Um gráfico do lugar das raízes possuirá tantos ramos quantas forem as raízes da equação característica. Desde que o número de pólos em malha-aberta geralmente excede o número de zeros, o número de ramos é igual ao dos pólos. Se o número de pólos em malha-fechada é o mesmo do número de pólos de malha-aberta, então o número de ramos individuais do lugar das raízes terminando em um zero finito de malha-aberta é igual ao número  $m$  de zeros de malha-aberta. Os restantes  $n - m$  ramos terminam no infinito ( $n - m$  zeros implícitos no infinito) ao longo das assintotas.

É importante notar, entretanto, que se considerarmos um problema puramente matemático, então, pode-se fazer com que o número de pólos de malha-fechada se iguale ao número de zeros de malha-aberta ao invés do número de pólos de malha-aberta. Neste caso, o número de ramos do lugar das raízes é igual ao número de zeros de malha-aberta. Por exemplo, considere a seguinte equação polinomial:

$$s^2 + s + 1 = 0$$

Esta equação pode ser reescrita

$$1 + \frac{s^2}{s+1} = 0$$

Então a função de transferência  $s^2/(s+1)$  pode ser considerada a função de transferência de malha-aberta. Ela possui dois zeros e um polo. Portanto, o número de zeros finitos é maior do que o número de pólos finitos. O número de ramos do lugar das raízes é igual àquele dos zeros de malha-aberta.

Se incluirmos os pólos e zeros no infinito, o número de pólos de malha-aberta é igual ao número de zeros de malha-aberta. Conseqüentemente, podemos sempre estabelecer que os lugares das raízes iniciam-se nos pólos de  $G(s)H(s)$  e terminam nos zeros de  $G(s)H(s)$ , conforme  $K$  aumenta de zero a infinito, onde os pólos e zeros incluem tanto aqueles no plano  $s$  finito como aqueles no infinito.

3. Determine os lugares das raízes sobre o eixo real. Os lugares das raízes no eixo real são determinados pelos pólos e zeros de malha-aberta nele contidos. Os pólos e zeros complexos conjugados da função de transferência de malha-aberta não afetam a localização dos lugares das raízes sobre o eixo real porque a contribuição angular de um par de pólos ou zeros complexos conjugados é  $360^\circ$  no eixo real. Cada parte do lugar das raízes sobre o eixo real estende-se em um intervalo desde um polo ou zero até um outro polo ou zero. Na construção dos lugares das raízes sobre o eixo real, escolhemos um ponto de teste sobre o mesmo eixo. Se o número total de pólos reais e zeros reais à direita deste ponto de teste for ímpar, então este ponto pertence a um lugar das raízes. O lugar das raízes e sua forma complementar alternam segmentos ao longo do eixo real.

4. Determine as assintotas dos lugares das raízes. Se o ponto de teste  $s$  for localizado distante da origem, então o ângulo de cada número complexo pode ser considerado o mesmo. Um zero de malha-aberta e um polo de malha-aberta cancelam os efeitos um do outro. Portanto, os lugares das raízes para valores muito grandes de  $s$  devem ser assintóticos com retas cujos ângulos (inclinações) são dados por

$$\text{Ângulo da assintota} = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{n-m} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

onde

$n$  = número de pólos finitos de  $G(s)H(s)$

$m$  = número de zeros finitos de  $G(s)H(s)$

Neste caso,  $k = 0$  corresponde a assintotas com os menores ângulos em relação ao eixo real. Embora  $k$  possua um número infinito de valores, conforme  $k$  aumenta o ângulo se repete e o número de assintotas distintas é  $n - m$ .

Todas as assintotas se interceptam entre si sobre o eixo real. O ponto no qual elas se interceptam é obtido como segue: Se tanto o numerador como o denominador da função de transferência de malha-aberta forem expandidos, o resultado é

$$G(s)H(s) = \frac{K[s^m + (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)s^{m-1} + \cdots + z_1z_2 \cdots z_m]}{s^n + (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)s^{n-1} + \cdots + p_1p_2 \cdots p_n}$$

Se um ponto de teste está localizado muito distante da origem, então  $G(s)H(s)$  pode ser escrita

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^{n-m} + [(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)]s^{n-m-1} + \cdots}$$

Desde que a equação característica é

$$G(s)H(s) = -1$$

ela pode ser escrita

$$s^{n-m} + [(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)]s^{n-m-1} + \cdots = -K \quad (8.12)$$

Para um valor grande de  $s$ , a Eq. (8.12) pode ser aproximada por

$$\left[ s + \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)}{n-m} \right]^{n-m} = 0$$

Se a abscissa da intersecção das assíntotas e o eixo real for indicada por  $-\sigma_a$ , então

$$-\sigma_a = -\frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)}{n-m} \quad (8.13)$$

Como todos os pólos e zeros complexos ocorrem em pares conjugados,  $-\sigma_a$  é sempre um número real. Note que  $-\sigma_a$  é o centroíde dos pólos e zeros de  $G(s)H(s)$ , onde o centroíde é calculado considerando-se que todos os pólos possuem massa +1 e todos os zeros possuem massa -1. Uma vez determinada a intersecção das assíntotas e o eixo real, elas podem ser realmente desenhadas no plano complexo.

5. Determine os pontos de separação de partida e chegada em relação ao eixo real. Devido à simetria conjugada dos lugares das raízes, os pontos de separação de partida e de chegada ou permanecem no eixo real, ou ocorrem em pares complexos conjugados.

Se um lugar das raízes estiver entre dois pólos de malha-aberta adjacentes sobre o eixo real, então existe pelo menos um ponto de separação de partida entre os dois pólos. Analogamente, se existir um lugar das raízes entre dois zeros adjacentes (um zero pode estar localizado em  $-\infty$ ) sobre o eixo real, então sempre existirá pelo menos um ponto de separação de chegada entre os dois zeros. Se existir um lugar das raízes entre um polo e um zero (finito ou infinito) de malha-aberta sobre o eixo real, então não podem existir pontos de separação de partida ou de chegada, ou então, lá existirá tanto pontos de separação de partida como de chegada.

Se a equação característica é dada por

$$A(s) - KB(s) = 0$$

os pontos de separação de partida e de chegada podem ser determinados das raízes de

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{A'(s)B(s) - A(s)B'(s)}{B^2(s)} = 0$$

onde o apóstrofo indica diferenciação em relação a  $s$ . Se o valor de  $K$  correspondente a uma raiz  $s = s_1$  de  $dK/ds = 0$  é positivo, o ponto  $s = s_1$  é um ponto de separação de partida ou chegada real. (Desde que se supõe que o valor de  $K$  é não-negativo, se o valor de  $K$  é obtido negativo, então o ponto  $s = s_1$  não é um ponto de separação de chegada ou partida.) Note que esta abordagem pode, obviamente, ser utilizada quando houver pólos e/ou zeros complexos.

6. Determine os ângulos de partida (ou ângulos de chegada) dos lugares das raízes dos pólos complexos (ou de zeros complexos). De modo a esboçar os lugares das raízes com razoável precisão, devemos determinar as direções dos lugares das raízes próximas aos pólos e zeros complexos. Se for escolhido um ponto de teste e este for movido em uma vizinhança muito próxima de um polo complexo (ou zero complexo), pode-se considerar que a soma das contribuições angulares de todos os outros pólos e zeros permanece a mesma. Portanto, o ângulo de partida (ou o ângulo de chegada) do lugar das raízes de um polo complexo (ou de um zero complexo) pode ser determinado subtraendo-se de  $180^\circ$  a soma de todos os ângulos dos

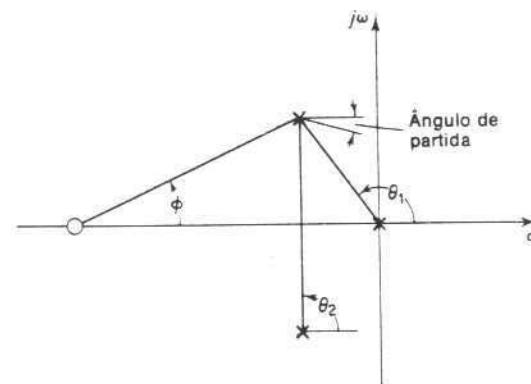


Fig. 8.19 Construção do lugar das raízes. [Ângulo de partida =  $180^\circ - (\theta_1 + \theta_2 - \phi)$ ]

números complexos desde os outros pólos e zeros até o polo complexo (ou zero complexo) em questão, incluindo-se os sinais apropriados. O ângulo de partida é indicado na Fig. 8.19.

7. Determine os pontos onde os lugares das raízes cruzam o eixo imaginário. Os pontos onde os lugares das raízes interceptam o eixo  $j\omega$  podem ser facilmente determinados pelo uso do critério de estabilidade de Routh através de uma abordagem de tentativa-e-erro ou pela substituição de  $s = j\omega$  na equação característica, igualando-a a zero tanto a parte real quanto a parte imaginária e resolvendo para obter-se  $\omega$  e  $K$ . O valor de  $\omega$  assim determinado fornece a freqüência na qual o lugar das raízes cruza o eixo imaginário, e o valor de  $K$  corresponde a um ganho crítico para estabilidade.

8. A equação característica do sistema cuja função de transferência de malha-aberta é

$$G(s)H(s) = \frac{K(s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m)}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (n \geq m)$$

é uma equação algébrica em  $s$  de grau  $n$ . Se a ordem do numerador de  $G(s)H(s)$  é inferior àquela do denominador por dois ou mais (o que significa que há dois ou mais zeros no infinito), então o coeficiente  $a_1$  é a soma negativa das raízes da equação e é independente de  $K$ . Neste caso, se alguma das raízes move-se para a esquerda sobre o lugar das raízes conforme  $K$  é aumentado, então as outras raízes devem mover-se para a direita, conforme  $K$  é aumentado. Esta informação é útil na determinação da forma geral dos lugares das raízes.

9. Determine os lugares das raízes na vizinhança do eixo  $j\omega$  e da origem. A parte mais importante dos lugares das raízes não está nem sobre o eixo real nem nas assíntotas mas na parte da vizinhança do eixo  $j\omega$  e da origem. A forma dos lugares das raízes nesta importante região do plano  $s$  deve ser obtida com precisão suficiente.

Na construção de um gráfico do lugar das raízes, necessitamos apenas de um transferidor e uma régua. Um dispositivo denominado Espírola, consistindo em um transferidor e uma régua girante a ele acoplada, é particularmente conveniente para verificação da condição de ângulo em pontos de teste. (Uma escala logarítmica espiral impressa na Espírola pode ser utilizada na determinação do ganho  $K$  a partir da condição do módulo.)

**Alguns poucos comentários sobre os gráficos do lugar das raízes.** Qualquer ponto sobre os lugares das raízes é um pôlo de malha-aberta possível. Um ponto particular será um pôlo de malha-fechada quando o valor do  $K$  satisfizer a condição do módulo. Portanto, a condição do módulo nos possibilita determinar o valor do ganho  $K$  para qualquer localização específica de uma raiz sobre o lugar das raízes. (Se necessário, os lugares das raízes podem ser graduados em termos de  $K$ . Os lugares das raízes são contínuos com  $K$ .)

Se o ganho  $K$  da função de transferência de malha-aberta é dado no problema, então, aplicando-se a condição de módulo podem-se determinar as posições corretas dos pólos de malha-fechada, para o  $K$  especificado, sobre cada ramo do lugar das raízes através de uma abordagem de tentativa-e-erro.

Uma vez determinados os pólos de malha-fechada dominantes (ou os pólos de malha-fechada mais próximos do eixo  $j\omega$ ) pelo método do lugar das raízes, então os pólos de malha-fechada restantes podem ser obtidos dividindo-se a equação característica pelos fatores correspondentes aos pólos de malha-fechada dominantes. O resto corresponde aos pólos de malha-fechada restantes. Muitas vezes esta divisão pode não ser efetuada exatamente. Isto é inevitável devido às imprecisões introduzidas pela análise gráfica.

Como um comentário final, note que uma pequena variação na configuração de pólos e zeros pode acarretar variações significativas na configuração do lugar das raízes. A Fig. 8.20 demonstra o fato de que uma pequena modificação na posição do zero resultará em uma configuração do lugar das raízes bastante diferente.

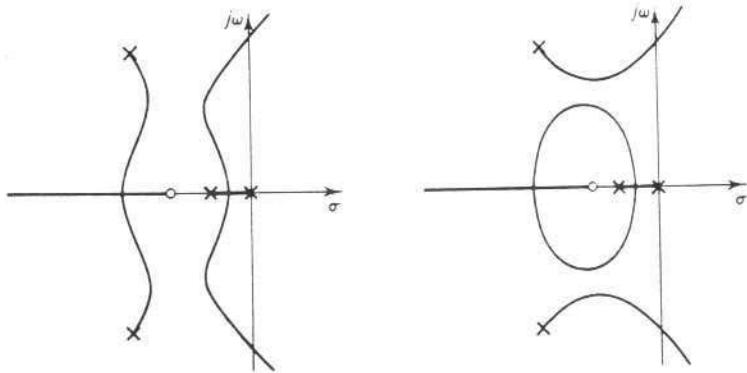
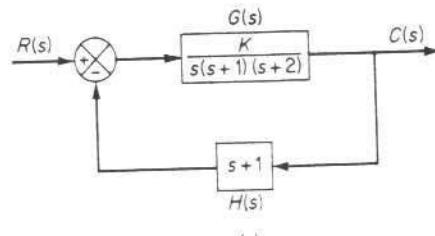


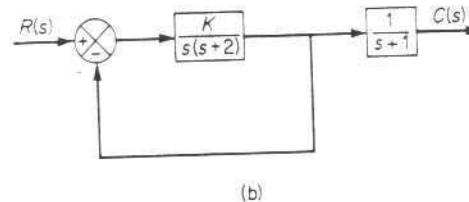
Fig. 8.20 Gráficos do lugar das raízes.

**Cancelamento de pólos de  $G(s)$  com zeros de  $H(s)$ .** É importante notar que se o denominador de  $G(s)$  e o numerador de  $H(s)$  envolvem fatores comuns, então os pólos e zeros de malha-aberta correspondentes se cancelarão entre si, reduzindo o grau da equação característica de um ou mais. Por exemplo, considere o sistema mostrado na Fig. 8.21(a). (Este sistema possui realimentação de velocidade.) A função de transferência de malha-fechada  $C(s)/R(s)$  é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s+1)(s+2) + K(s+1)}$$



(a)



(b)

Fig. 8.21 Sistemas de controle.

A equação característica é

$$[s(s+2) + K](s+1) = 0$$

Devido ao cancelamento dos termos  $(s+1)$  que aparecem em  $G(s)$  e  $H(s)$ , entretanto, temos

$$\begin{aligned} 1 + G(s)H(s) &= 1 + \frac{K(s+1)}{s(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{s(s+2) + K}{s(s+2)} \end{aligned}$$

A equação característica reduzida é

$$s(s+2) + K = 0$$

O gráfico do lugar das raízes de  $G(s)H(s)$  não mostra todas as raízes da equação característica, apenas as raízes da equação reduzida.

Para obter o conjunto completo de pólos de malha-fechada, devemos adicionar os pólos cancelados de  $G(s)H(s)$  aos pólos de malha-fechada obtidos do gráfico do lugar das raízes de  $G(s)H(s)$ . O fato importante a lembrar é que o pôlo cancelado de  $G(s)H(s)$  é um pôlo de malha-fechada do sistema, conforme visto na Fig. 8.21(b).

## 8.5 ANÁLISE DE SISTEMAS DE CONTROLE PELO MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

Nesta seção, examinaremos inicialmente os efeitos de um zero na configuração dos lugares das raízes de um sistema de segunda-ordem. Posteriormente, compararemos os efeitos do controle derivativo e realimentação de velocidade no desempenho de um servomecanismo de posição. A seguir apresentaremos uma análise de um sistema condicionalmente estável e sistemas de fase não mínima.

Finalmente, voltaremos nossa atenção à análise das variações de dois parâmetros do sistema.

**Efeitos de um zero nos lugares das raízes de sistemas de segunda ordem.** Considere o sistema indicado na Fig. 8.22(a). A função de transferência de malha-aberta  $G(s)H(s)$  é

$$G(s)H(s) = \frac{K(s-z)}{(s+p_1)(s-p_2)} \quad (K \geq 0, p_1 > p_2 > 0, z > 0)$$

Examinaremos os lugares das raízes deste sistema para os três casos seguintes:

Caso 1:  $z > p_1 > p_2$

Caso 2:  $p_1 > p_2 > z$

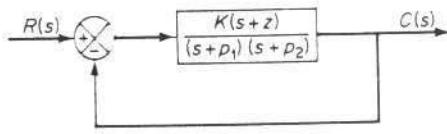
Caso 3:  $p_1 > z > p_2$

Para o Caso 1, os pontos de separação podem ser obtidos como segue: Desde que a equação característica para este sistema é

$$(s+p_1)(s+p_2) + K(s-z) = 0$$

ou

$$K = -\frac{(s+p_1)(s-p_2)}{s+z}$$



(a)

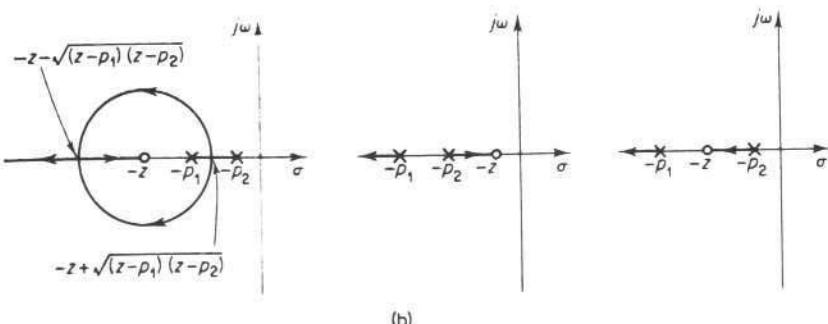


Fig. 8.22 (a) Sistema de controle; (b) gráficos do lugar das raízes.

as raízes de  $dK/ds = 0$  podem ser obtidas de

$$(s+p_1)(s+p_2) - (2s + p_1 + p_2)(s+z) = 0$$

como segue:

$$s = -z \pm \sqrt{(z-p_1)(z-p_2)} \quad (8.14)$$

Desde que  $z > p_1 > p_2$ , a quantidade dentro da raiz quadrada é positiva. O valor de  $K$  correspondente a  $s = -z + \sqrt{(z-p_1)(z-p_2)}$  é

$$K = (\sqrt{z-p_1} - \sqrt{z-p_2})^2 > 0$$

Analogamente, o valor de  $K$  correspondente a  $s = -z - \sqrt{(z-p_1)(z-p_2)}$  é

$$K = (\sqrt{z-p_1} + \sqrt{z-p_2})^2 > 0$$

Consequentemente, tanto  $s = -z + \sqrt{(z-p_1)(z-p_2)}$  como  $s = -z - \sqrt{(z-p_1)(z-p_2)}$  são pontos de separação.

Para o Caso 2, embora o argumento da raiz quadrada da Eq. (8.14) seja positivo, e portanto os valores de  $s$  dados pela Eq. (8.14) sejam reais, os valores correspondentes de  $K$  tornam-se negativos desde que

$$K = -(\sqrt{p_1-z} \pm \sqrt{p_2-z})^2 < 0$$

Isto significa que para o Caso 2 os pontos dados pela Eq. (8.14) não são pontos de separação, e, portanto, não existem pontos de separação.

Para o Caso 3, o argumento da raiz quadrada da Eq. (8.14) torna-se negativo, significando que os pontos dados pela Eq. (8.14) são complexos conjugados. Desde que os pontos de separação de chegada e de partida, se existirem, devem estar sobre o eixo real no presente exemplo, os pontos dados pela Eq. (8.14) não correspondem a pontos de separação. Portanto, não existem pontos de separação no Caso 3, e os lugares das raízes são simplesmente dois segmentos do eixo real negativo.

A Fig. 8.22(b) mostra os gráficos do lugar das raízes correspondentes aos três casos considerados.

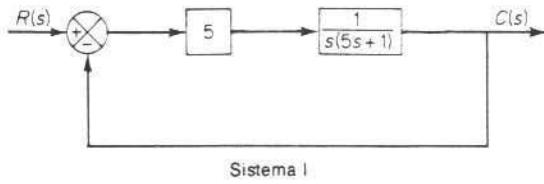
**Comparação dos efeitos do controle derivativo e realimentação de velocidade (realimentação tacométrica) no desempenho de servomecanismos de posição.** O Sistema I mostrado na Fig. 8.23 é um servomecanismo de posição. (A saída é posição.) O Sistema II mostrado na Fig. 8.23 é um servomecanismo de posição utilizando ação de controle proporcional-mais-derivativo. O Sistema III mostrado na Fig. 8.23 é um servomecanismo de posição utilizando realimentação em velocidade ou realimentação tacométrica. Vamos comparar os méritos relativos do controle derivativo e da realimentação de velocidade.

O gráfico do lugar das raízes para o Sistema I é mostrado na Fig. 8.24(a). Os pólos de malha-fechada estão localizados em  $s = -0,1 \pm j0,995$ .

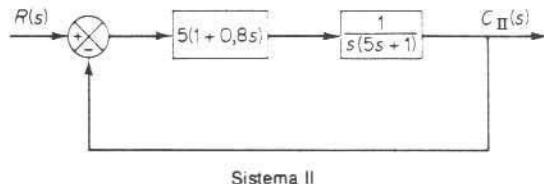
A função de transferência de malha-aberta do Sistema II é

$$G_{II}(s)H_{II}(s) = \frac{5(1+0,8s)}{s(5s+1)}$$

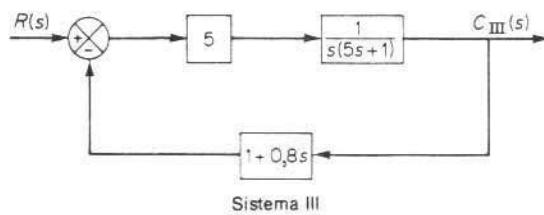
A função de transferência de malha-aberta do Sistema III é



Sistema I



Sistema II



Sistema III

Fig. 8.23 Servomecanismos de posição.

$$G_{II}(s)H_{II}(s) = \frac{5(1 + 0.8s)}{s(5s + 1)}$$

Portanto os Sistemas II e III possuem funções de transferência de malha-aberta idênticas. (Ambos os sistemas têm os mesmos pólos e zeros de malha-aberta.) Os gráficos do lugar das raízes dos Sistemas II e III são portanto idênticos e são fornecidos nas Figs. 8.24 (b) e (c), respectivamente.

Note, entretanto, que a função de transferência de malha-fechada do Sistema II é evidentemente diferente daquela do Sistema III. O Sistema II possui dois pólos de malha-fechada e um zero de malha-fechada finito, enquanto o Sistema III possui dois pólos de malha-fechada e não possui zero de malha-fechada finito. (A realimentação de velocidade, ou realimentação tacômetrica, possui um zero de malha-aberta mas nenhum zero de malha-fechada.) Os pólos de malha-fechada dos Sistemas II e III são  $s = -0.5 \pm j0.866$ .

A função de transferência de malha-fechada do Sistema II é

$$\frac{C_{II}(s)}{R(s)} = \frac{1 + 0.8s}{(s + 0.5 + j0.866)(s + 0.5 - j0.866)}$$

Para uma entrada impulsiva-unitária,

$$C_{II}(s) = \frac{0.4 + j0.346}{s + 0.5 + j0.866} + \frac{0.4 - j0.346}{s + 0.5 - j0.866}$$

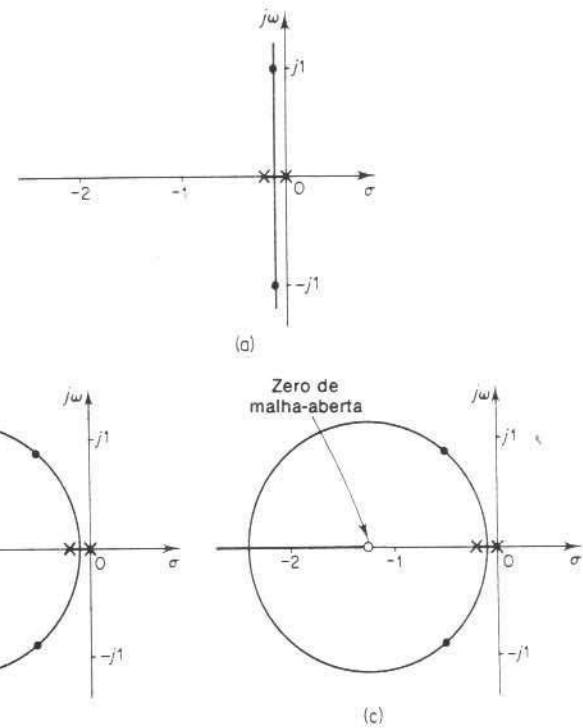


Fig. 8.24 Gráficos do lugar das raízes dos sistemas indicados na Fig. 8.23.

O resíduo do pôlo de malha-fechada  $s = -0.5 - j0.866$  é  $0.4 + j0.346$ , e aquele do pôlo de malha-fechada  $s = -0.5 + j0.866$  é  $0.4 - j0.346$ . A transformada inversa de Laplace de  $C_{II}(s)$  resulta

$$c_{II}(t)_{\text{impulso}} = e^{-0.5t}(0.8 \cos 0.866t + 0.693 \sin 0.866t) \quad (t \geq 0)$$

A função de transferência de malha-fechada do Sistema III é

$$\frac{C_{III}(s)}{R(s)} = \frac{1}{(s + 0.5 + j0.866)(s + 0.5 - j0.866)}$$

Para uma entrada impulsiva-unitária,

$$C_{III}(s) = \frac{j0.577}{s + 0.5 + j0.866} + \frac{-j0.577}{s + 0.5 - j0.866}$$

O resíduo no pôlo de malha-fechada  $s = -0.5 - j0.866$  é  $j0.577$ , e aquele no pôlo de malha-fechada  $s = -0.5 + j0.866$  é  $-j0.577$ . A transformada inversa de  $C_{III}(s)$  resulta

$$c_{III}(t)_{\text{impulso}} = 1.155e^{-0.5t} \sin 0.866t \quad (t \geq 0)$$

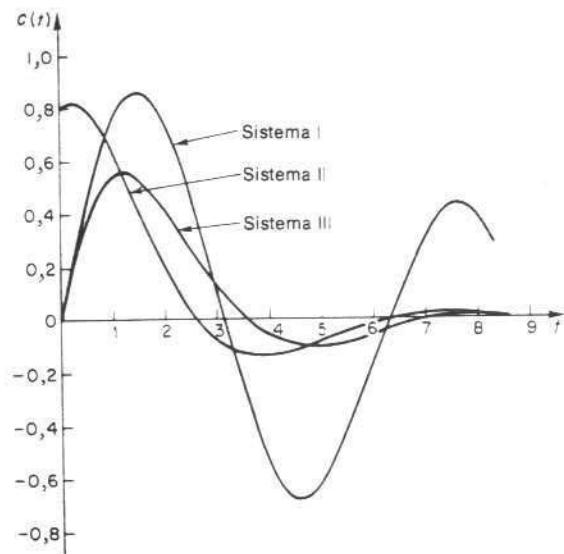


Fig. 8.25 Curvas de resposta ao impulso unitário para os Sistemas I, II e III indicados na Fig. 8.23.

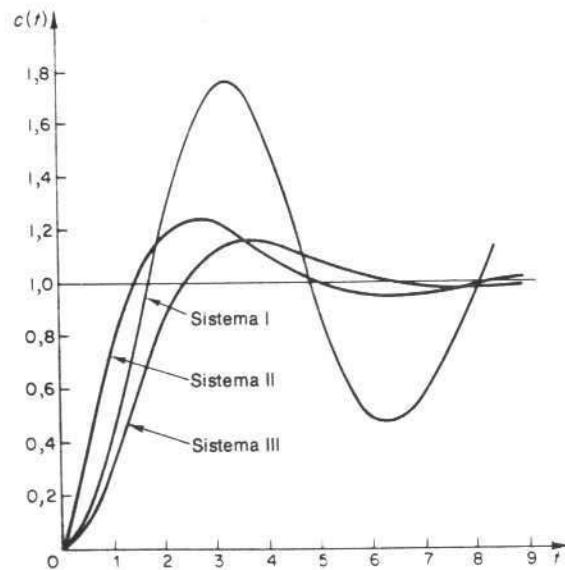


Fig. 8.26 Curvas de resposta ao degrau unitário para os Sistemas I, II e III indicados na Fig. 8.23.

As respostas ao impulso-unitário dos Sistemas II e III são evidentemente diferentes porque os resíduos no mesmo pólo são diferentes para os dois sistemas. (Lembre-se que os resíduos dependem tanto dos pólos como dos zeros de malha fechada.) A Fig. 8.25 mostra as curvas de resposta ao impulso-unitário para os três sistemas.

Note que a resposta ao degrau unitário pode ser obtida, ou diretamente, ou pela integração da resposta ao impulso unitário. Por exemplo, para o Sistema III, a resposta do degrau unitário é obtida como segue:

$$\begin{aligned}c_{III}(t)_{\text{degrau}} &= \int_0^t c_{III}(t)_{\text{impulso}} dt \\&= \int_0^t 1,155e^{-0,5t} \sin 0,866t dt \\&= 1 - e^{-0,5t}(\cos 0,866t + 0,577 \sin 0,866t)\end{aligned}$$

A Fig. 8.26 mostra as curvas de resposta ao degrau unitário para os três sistemas. O sistema utilizando ação de controle proporcional-mais-derivativa apresenta o menor tempo de subida. O sistema com realimentação de velocidade possui a mínima sobrelevação, ou a melhor estabilidade relativa dos três sistemas.

A Fig. 8.27 mostra as curvas de resposta à rampa-unitária para os Sistemas II e III. O Sistema II possui a vantagem da resposta mais rápida e menor erro em regime permanente para a entrada em rampa.

A principal razão de o sistema que utiliza ação de controle proporcional-mais-derivativa possuir características de resposta superiores é que o controle derivativo responde à taxa de variação do sinal de erro e pode produzir ação corretiva antes de a amplitude do erro tornar-se grande.

Note que a saída do Sistema III é a saída do Sistema II atrasada por um termo atrasador de primeira ordem  $1/(1+0,8s)$ . A Fig. 8.28 mostra a relação entre a saída do Sistema II e a saída do Sistema III.

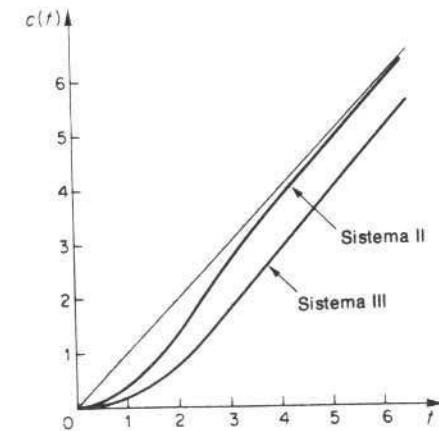


Fig. 8.27 Curvas de resposta à rampa unitária para os Sistemas II e III indicados na Fig. 8.23.

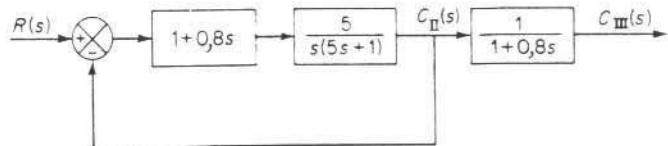


Fig. 8.28 Diagrama de blocos indicando a relação entre as saídas dos Sistemas II e III, indicados na Fig. 8.23.

**Sistemas condicionalmente estáveis.** Considere o sistema indicado na Fig. 8.29(a). Os lugares das raízes para este sistema podem ser construídos aplicando-se as regras e procedimentos gerais para construção dos lugares das raízes. Um gráfico do lugar das raízes para este sistema é fornecido na Fig. 8.29(b). Pode ser visto que este sistema é estável apenas em intervalos limitados do valor de  $K$ ; isto é,  $14 > K > 0$  e  $195 > K > 64$ . O sistema torna-se instável para  $64 > K > 14$  e  $K > 195$ . Se  $K$  possuir um valor correspondente à operação instável, o sistema pode deixar de funcionar ou tornar-se não linear devido à existência de uma não linearidade por saturação. Um sistema deste tipo é denominado *condicionalmente estável*.

Na prática, sistemas condicionalmente estáveis não são desejáveis. A estabili-

dade condicional é perigosa, porém ocorre em alguns sistemas, em particular um sistema que possui um caminho instável no ramo direto. Este caminho pode ocorrer se o sistema possuir um pequeno laço. É aconselhável evitar esta estabilidade condicional desde que, se o ganho cair além do valor crítico por alguma razão, o sistema torna-se instável. Note que a adição de uma rede de compensação apropriada eliminará a estabilidade condicional. [Uma adição de um zero causará o deslocamento dos lugares das raízes para a esquerda. (Vide Seção 10.3.)] Portanto a estabilidade condicional pode ser eliminada pela adição de uma compensação apropriada.]

**Sistemas de fase não mínima.** Se todos os pólos e zeros de um sistema estiverem no semiplano esquerdo do plano  $s$ , então o sistema é chamado de fase mínima. Se um sistema possuir pelo menos um polo ou um zero no semiplano direito do plano  $s$ , então o sistema é denominado sistema de fase não-mínima. O termo “fase não-mínima” provém da característica de deslocamento de fase de tais sistemas quando sujeitos a entradas senoidais. (Vide Seção 9.2.)

Considere o sistema indicado na Fig. 8.30(a). Neste sistema

$$G(s) = \frac{K(1 - T_a s)}{s(Ts + 1)} \quad (T_a > 0), \quad H(s) = 1$$

Este é um sistema de fase não-mínima desde que há um zero no semiplano direito do plano  $s$ . Para este sistema, a condição de ângulo resulta

$$\begin{aligned} \angle G(s) &= \angle \left( -\frac{K(T_a s - 1)}{s(Ts + 1)} \right) = \angle \left( \frac{K(T_a s - 1)}{s(Ts + 1)} \right) + 180^\circ \\ &= \pm 180^\circ(2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

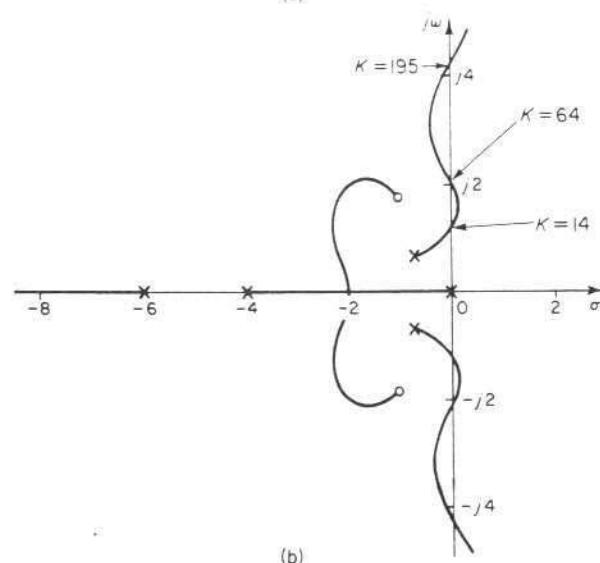
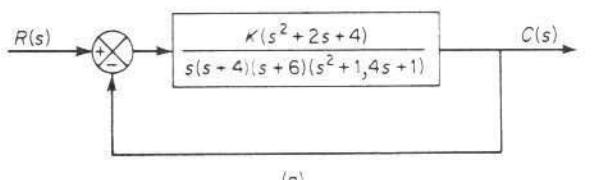


Fig. 8.29 (a) Sistema de controle; (b) gráfico do lugar das raízes.

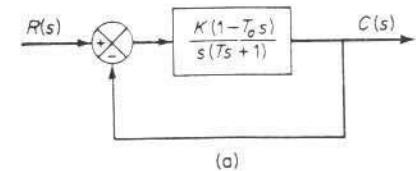
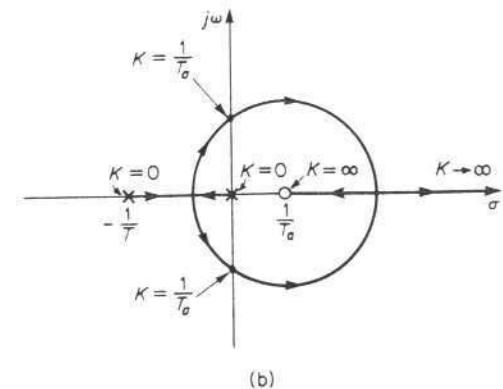


Fig. 8.30 (a) Sistema realimentado; (b) gráfico do lugar das raízes.



ou

$$\frac{K(T_a s - 1)}{s(Ts + 1)} = 0^\circ \quad (8.15)$$

Os lugares das raízes podem ser obtidos da Eq. (8.15). A Fig. 8.30(b) mostra um gráfico do lugar das raízes para este sistema. Deste gráfico, verificamos que o sistema é estável se o ganho  $K$  é menor do que  $1/T_a$ .

**Sistemas com atraso de transporte ou tempo morto.** A Fig. 8.31 mostra um sistema térmico no qual é circulado ar quente a fim de manter constante a temperatura de uma câmara. Neste sistema o elemento de medida é colocado no retorno do fluxo a uma distância  $L$  do forno, sendo a velocidade do ar  $v$  e o tempo decorrido, antes de qualquer variação na temperatura do forno ser sentida pelo termômetro, considerado  $T$ . Este atraso na medida, atraso na ação do controlador, ou atraso na operação do atuador etc. é chamado *tempo morto* ou *atraso de transporte*. O tempo morto existe na maioria dos sistemas de controle de processos.

A entrada  $x(t)$  e a saída  $y(t)$  de um elemento com tempo morto são relacionadas por

$$y(t) = x(t - T)$$

onde  $T$  é o tempo morto. A função de transferência do tempo morto é dada por

Função de transferência do tempo morto ou

$$\begin{aligned} \text{atraso de transporte} &= \frac{\mathcal{L}[x(t - T)\delta(t - T)]}{\mathcal{L}[x(t)\delta(t)]} \\ &= \frac{X(s)e^{-Ts}}{X(s)} = e^{-Ts} \end{aligned}$$

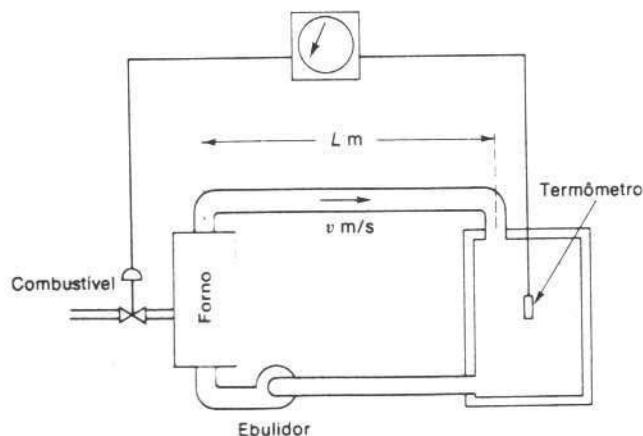


Fig. 8.31 Sistema térmico.

Suponha que a função de transferência do ramo direto deste sistema térmico possa ser aproximada por

$$G(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{s + 1}$$

conforme indicada na Fig. 8.32. Vamos construir um gráfico do lugar das raízes para este sistema. A equação característica para este sistema de malha-fechada é

$$1 + \frac{Ke^{-Ts}}{s + 1} = 0 \quad (8.16)$$

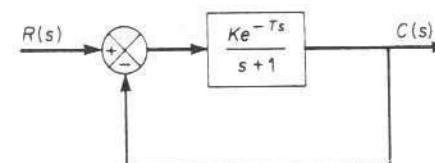


Fig. 8.32 Diagrama de blocos do sistema indicado na Fig. 8.31.

Da Eq. (8.16), obtemos

$$\frac{Ke^{-Ts}}{s + 1} = -1$$

Portanto, a condição de ângulo resulta

$$\frac{Ke^{-Ts}}{s + 1} = |e^{-Ts}| - |s + 1| = \pm 180^\circ(2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (8.17)$$

Para determinar o ângulo de  $e^{-Ts}$ , vamos escrever  $s = \sigma + j\omega$ . Obtemos então

$$e^{-Ts} = e^{-T\sigma - j\omega T}$$

Desde que  $e^{-T\sigma}$  é um número real, o ângulo de  $e^{-T\sigma}$  é zero. Portanto,

$$\begin{aligned} |e^{-Ts}| &= |e^{-j\omega T}| = |\cos \omega T - j \sin \omega T| \\ &= -\omega T \quad (\text{radianos}) \\ &= -57,3\omega T \quad (\text{graus}) \end{aligned}$$

A condição do ângulo, Eq. (8.17), torna-se

$$-57,3\omega T - |s + 1| = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

Desde que  $T$  é uma constante dada, o ângulo de  $e^{-Ts}$  é uma função apenas de  $\omega$ .

Determinemos agora a contribuição angular devido ao termo  $e^{-Ts}$ . Para  $k = 0$ , a condição de ângulo pode ser escrita

$$|s + 1| = \mp 180^\circ - 57,3^\circ \omega T \quad (8.18)$$

Desde que a contribuição angular de  $e^{-Ts}$  é zero para  $\omega = 0$ , o eixo real desde  $-1$  até  $-\infty$  constitui uma parte do lugar das raízes. Suponha agora um valor  $\omega_1$  para  $\omega$  e calcule  $57,3^\circ \omega_1 T$ . No ponto  $-1$  sobre o eixo real negativo, desenhe uma reta que faz um ângulo de  $180^\circ - 57,3^\circ \omega_1 T$  com o eixo real. Determine a intersecção desta reta com a reta horizontal  $\omega = \omega_1$ . Esta intersecção, ponto  $P$  na Fig. 8.33(a), é um ponto que satisfaz a Eq. (8.18) e portanto está sobre o lugar das raízes. Continuando o mesmo processo, obtemos o gráfico do lugar das raízes indicado na Fig. 8.33(b).

Note que conforme  $s$  tende a menos infinito, a função de transferência de malha-aberta

$$\frac{Ke^{-Ts}}{s+1}$$

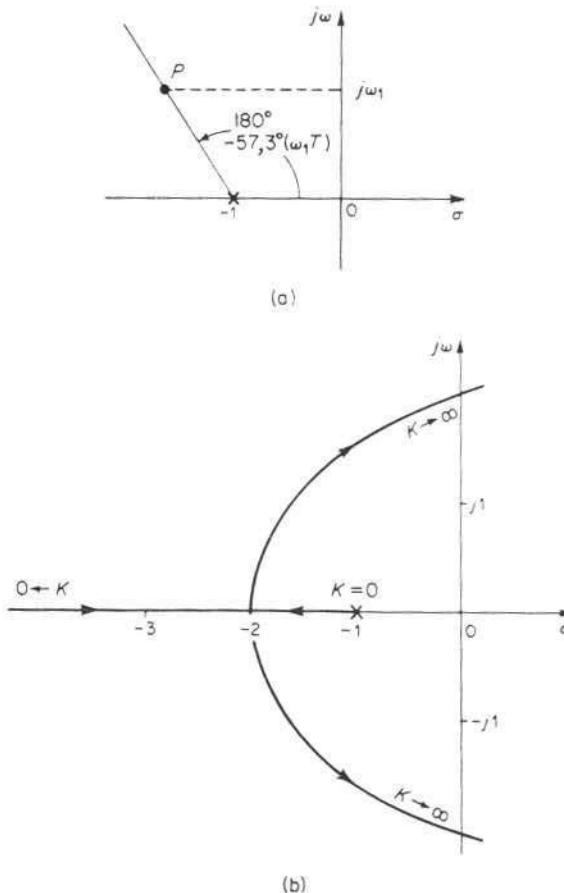


Fig. 8.33 (a) Construção do lugar das raízes; (b) gráfico do lugar das raízes.

tende a menos infinito, desde que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{Ke^{-Ts}}{s-1} &= \left. \frac{\frac{d}{ds}(Ke^{-Ts})}{\frac{d}{ds}(s-1)} \right|_{s=-\infty} \\ &= -KT e^{-Ts} \Big|_{s=-\infty} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Portanto,  $s = -\infty$  é um pólo da função de transferência de malha-aberta. Consequentemente, os lugares das raízes têm início em  $s = -1$  ou  $s = -\infty$  e terminam em  $s = \infty$ , conforme  $K$  aumenta de zero a infinito. Desde que o segundo membro da condição de ângulo dada pela Eq. (8.17) possui um número infinito de valores, há um número infinito de lugares das raízes, conforme o valor de  $k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) vai de zero a infinito. Por exemplo, se  $k = 1$ , a condição de ângulo torna-se

$$\begin{aligned} /s-1 &= \mp 540^\circ - 57,3^\circ \omega T \quad (\text{graus}) \\ &= \mp 3\pi - \omega T \quad (\text{radianos}) \end{aligned}$$

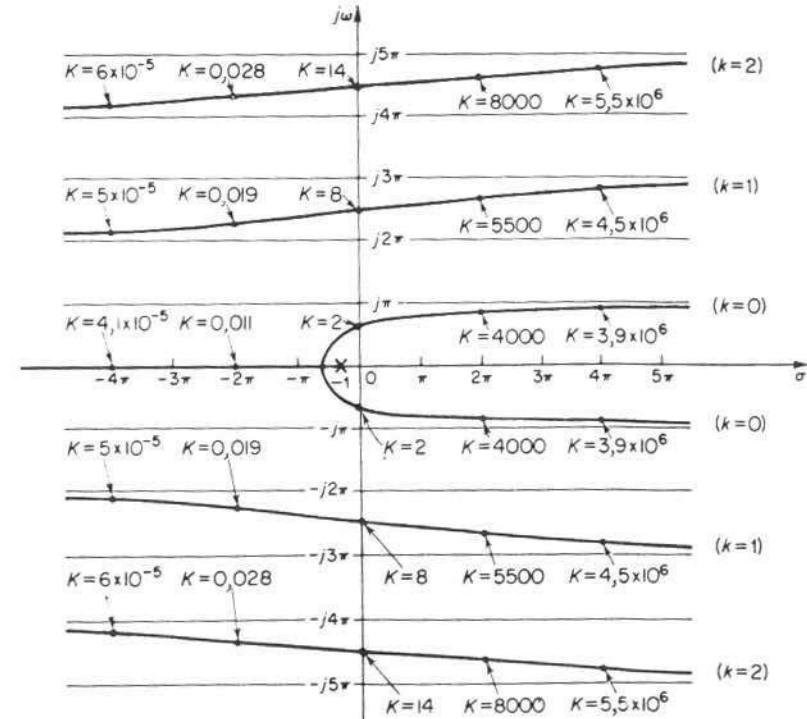


Fig. 8.34 Gráfico do lugar das raízes do sistema indicado na Fig. 8.32 ( $T = 1$ ).

A construção dos lugares das raízes para  $k = 1$  é a mesma que para  $k = 0$ . Um gráfico dos lugares das raízes para  $k = 0, 1$  e  $2$  quando  $T = 1$  é indicado na Fig. 8.34.

A condição de módulo estabelece que

$$\left| \frac{Ke^{-Ts}}{s - 1} \right| = 1$$

Desde que o módulo de  $e^{-Ts}$  é igual àquele de  $e^{-T\sigma}$ , ou

$$|e^{-Ts}| = |e^{-T\sigma}| \cdot |e^{-j\omega T}| = e^{-T\sigma}$$

a condição de módulo resulta

$$|s - 1| = Ke^{-T\sigma}$$

Os lugares das raízes indicados na Fig. 8.34 são graduados em termos de  $K$  quando  $T = 1$ . Deste gráfico, é claro que o ramo do lugar das raízes correspondente a  $k = 0$  é o dominante; os outros ramos correspondentes a  $k = 1, 2, 3, \dots$  não são tão importantes e podem ser desprezados.

Este exemplo ilustra o fato de que o tempo morto pode causar instabilidade mesmo em sistemas de primeira-ordem porque os lugares das raízes entram no semiplano direito do plano  $s$  para valores grandes de  $K$ . Portanto, embora o ganho  $K$  do sistema de primeira-ordem possa ser ajustado em um valor alto na ausência de tempo morto, ele não pode ser ajustado muito alto se houver tempo morto. (Para o sistema aqui considerado, o valor do ganho  $K$  deve ser consideravelmente menor do que 2 para uma operação satisfatória.)

**Aproximação de atraso de transporte ou tempo morto.** Se o tempo morto  $T$  for muito pequeno, então  $e^{-Ts}$  poderá ser aproximado por

$$e^{-Ts} \approx 1 - Ts$$

ou

$$e^{-Ts} \approx \frac{1}{Ts + 1}$$

Estas aproximações são boas se o tempo morto for muito pequeno e, além disso, a função temporal da entrada  $f(t)$  para o elemento com tempo morto for uma função suave e contínua. (Isto significa que as derivadas de segunda-ordem e ordens superiores de  $f(t)$  são pequenas.)

**Efeitos de variações de parâmetros nos pólos de malha-fechada.** Em muitos problemas de projeto, os efeitos sobre os pólos de malha-fechada necessitam ser investigados quando são variados outros parâmetros do sistema além do ganho  $K$ . Os efeitos destes outros parâmetros podem ser facilmente investigados pelo método do lugar das raízes. Quando dois (ou mais) parâmetros são variados, os lugares das raízes correspondentes são muitas vezes denominados *contornos de raízes*.

Utilizaremos um exemplo para ilustrar a construção dos contornos de raízes quando dois parâmetros são variados, respectivamente, desde zero até infinito.

Considere o sistema indicado na Fig. 8.35. Desejamos investigar o efeito da variação do parâmetro  $a$  bem como do ganho  $K$ . A função de transferência de

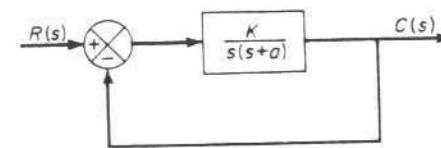


Fig. 8.35 Sistema de controle.

malha-fechada deste sistema é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + as + K}$$

A equação característica é

$$s^2 + as + K = 0 \quad (8.19)$$

que pode ser reescrita

$$1 + \frac{as}{s^2 + K} = 0$$

ou

$$\frac{as}{s^2 + K} = -1 \quad (8.20)$$

Na Eq. (8.20), o parâmetro  $a$  é escrito como um fator multiplicativo. Para um dado valor de  $K$ , o efeito de  $a$  nos pólos de malha-fechada podem ser investigados a partir da Eq. (8.20). Os contornos das raízes para este sistema podem ser construídos seguindo-se o procedimento usual para a construção dos lugares das raízes.

Construiremos agora os contornos das raízes conforme  $K$  e  $a$  variam, respectivamente, desde zero até infinito. Os contornos das raízes começam e terminam nos pólos e zeros de  $as/(s^2 + K)$ .

Construiremos inicialmente o lugar das raízes quando  $a = 0$ . Isto pode ser feito facilmente como segue: Substitua  $a = 0$  na Eq. (8.19). Então,

$$s^2 + K = 0$$

ou

$$\frac{K}{s^2} = -1 \quad (8.21)$$

Os pólos de malha-aberta, portanto, são pólos duplos na origem. O gráfico do lugar das raízes da Eq. (8.21) é indicado na Fig. 8.36(a).

Para construir os contornos das raízes, vamos inicialmente supor que  $K$  é uma constante; por exemplo,  $K = 4$ . A Eq. (8.20) então resulta

$$\frac{as}{s^2 + 4} = -1 \quad (8.22)$$

**Tabela 8.2** Configurações de pólos e zeros de malha-aberta e lugares das raízes correspondentes

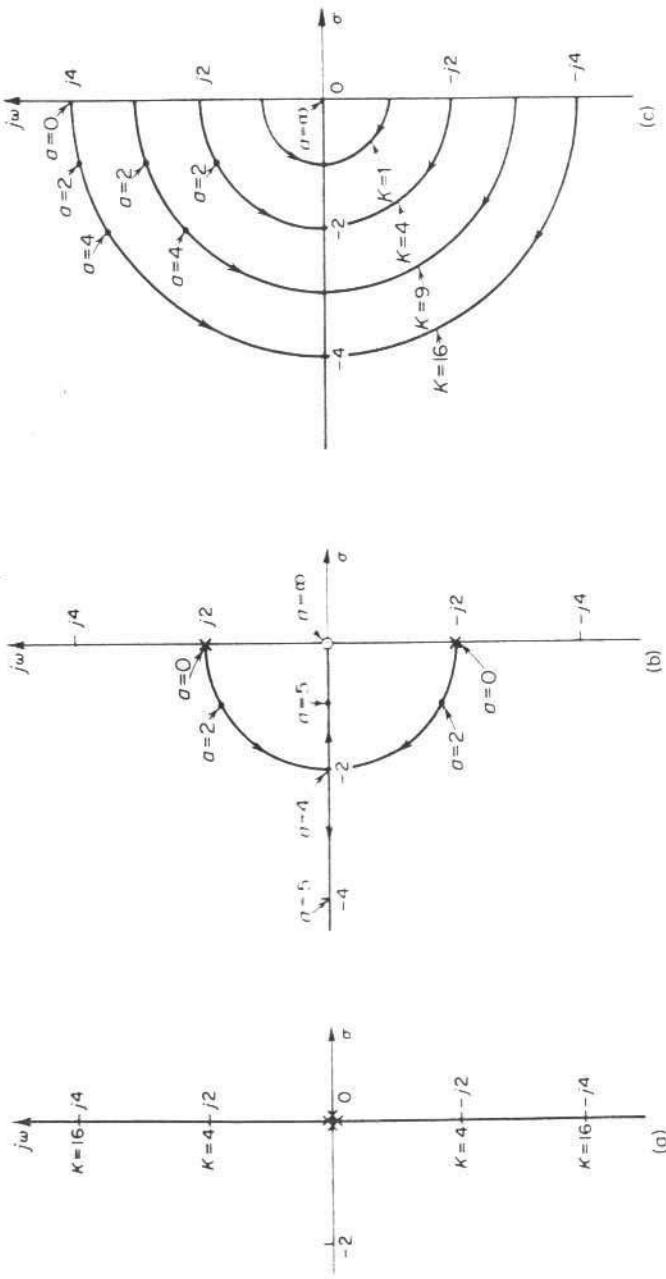
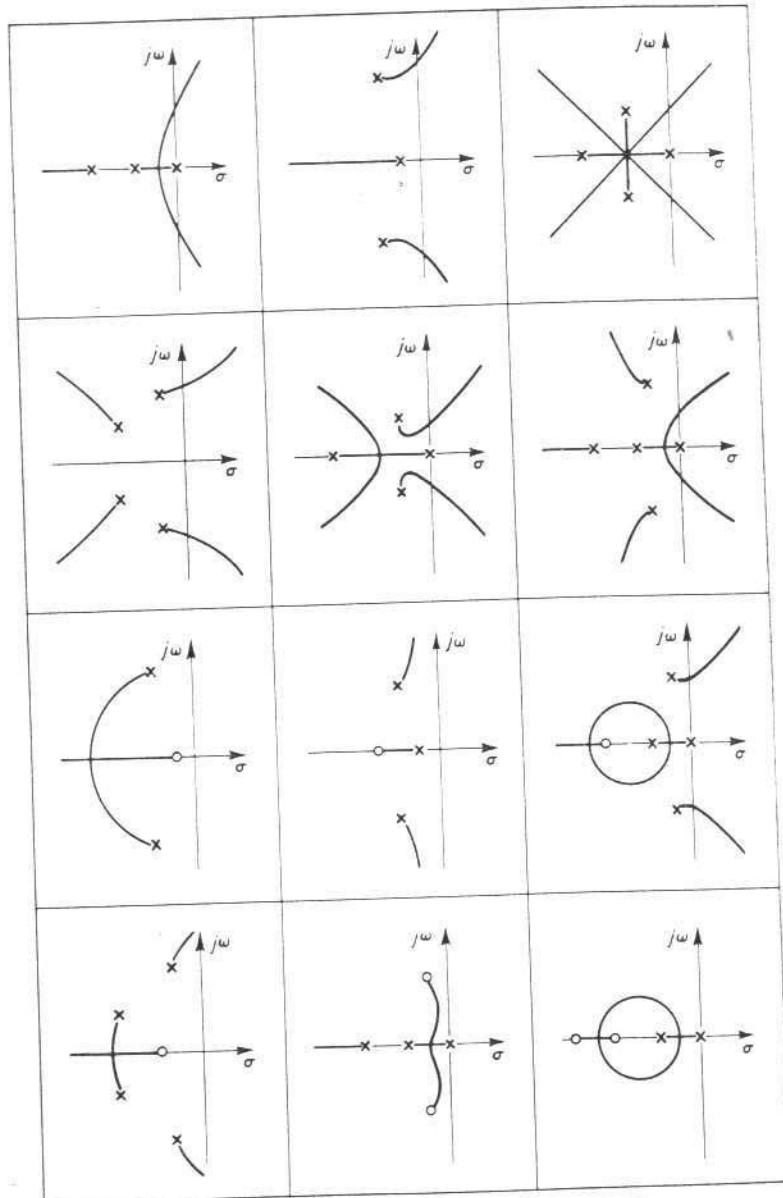


Fig. 8.36 (a) Gráfico do lugar das raízes do sistema indicado na Fig. 8.35, ( $a = 0, 0 \leq K \leq \infty$ ); (b) gráfico do lugar das raízes, ( $0 \leq a \leq \infty$ ,  $K = 4$ ); (c) gráfico do contorno das raízes.



Os pólos de malha-aberta são  $s = \pm j2$ . O zero de malha-aberta finito está na origem. O gráfico do lugar das raízes correspondente à Eq. (8.22) é indicado na Fig. 8.36(b). Para diferentes valores de  $K$ , a Eq. (8.22) fornece os lugares das raízes análogos.

O contorno das raízes, com o diagrama mostrando os lugares das raízes correspondentes a  $0 \leq K \leq \infty$ ,  $0 \leq a \leq \infty$ , pode ser esboçado como na Fig. 8.36(c). É claro que os contornos das raízes têm início nos pólos e terminam nos zeros da função de transferência  $as/(s^2 + K)$ . As setas dos contornos das raízes indicam o sentido do aumento no valor de  $a$ .

Os contornos das raízes mostram os efeitos das variações dos parâmetros do sistema nos pólos de malha-fechada. Do gráfico do contorno das raízes indicado na Fig. 8.36(c), verificamos que, para  $0 < K < \infty$ ,  $0 < a$ , os pólos de malha-fechada ficam no semiplano esquerdo do plano  $s$  e o sistema é estável.

Note que se o valor de  $K$  é fixado, digamos  $K = 4$ , então os contornos das raízes resultam simplesmente nos lugares das raízes, como mostrado na Fig. 8.36(b).

Ilustramos um método de construção dos contornos das raízes quando o ganho  $K$  e o parâmetro  $a$  são variados, respectivamente, desde zero até infinito.

**Configurações de pólos e zeros típicas e lugares das raízes correspondentes.** Concluindo esta seção, forneceremos algumas configurações de pólos e zeros de malha-aberta e seus correspondentes lugares das raízes na Tabela 8.2. A configuração dos lugares das raízes depende apenas da separação relativa dos pólos e zeros de malha-aberta. Se o número de pólos de malha-aberta excede o número de zeros finitos por três ou mais, há um valor do ganho  $K$  além do qual os lugares das raízes entram no semiplano direito do plano  $s$ , e portanto, o sistema pode tornar-se instável. Um sistema estável deve possuir todos os seus pólos de malha-fechada no semiplano esquerdo do plano  $s$ .

Note que uma vez tendo alguma experiência com o método, podemos calcular facilmente as modificações nos lugares das raízes devidas às variações no número e localização dos pólos e zeros de malha-aberta pela visualização dos gráficos do lugar das raízes resultantes de várias configurações de pólos e zeros.

## PROBLEMAS ILUSTRATIVOS E SOLUÇÕES

**Problema A.8.1** Esboce os lugares de ganho constante para o sistema com realimentação unitária, cuja função de transferência do ramo direto é

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

**Solução.** Os lugares de ganho constante deste sistema para vários valores de  $K$  são dados pela seguinte relação matemática:

$$|G(s)| = \left| \frac{K}{s(s+1)} \right| = 1$$

que pode ser reescrita

$$|s(s+1)| = K \quad (8.23)$$

Vamos substituir  $s = \sigma + j\omega$  na Eq. (8.23). Então,

$$\sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \sqrt{(\sigma + 1)^2 + \omega^2} = K$$

Coloquemos

$$\sigma + \frac{1}{2} = \sigma_1$$

Então, obtemos

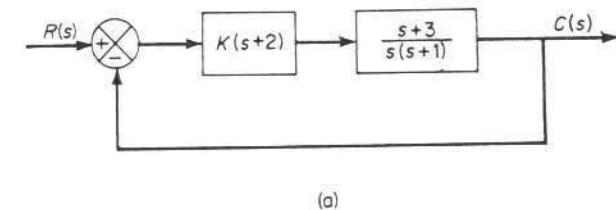
$$\begin{aligned} K^2 &= (\sigma^2 + \omega^2)[(\sigma + 1)^2 + \omega^2] = \left[ \left( \sigma_1 - \frac{1}{2} \right)^2 + \omega^2 \right] \left[ \left( \sigma_1 + \frac{1}{2} \right)^2 + \omega^2 \right] \\ &= \left( \sigma_1^2 - \frac{1}{4} \right)^2 + 2\omega^2 \left( \sigma_1^2 - \frac{1}{4} \right) + \omega^4 + \omega^2 \end{aligned}$$

ou

$$\left[ \left( \sigma_1^2 - \frac{1}{4} \right) + \omega^2 \right]^2 = K^2 - \omega^2 \quad (8.24)$$

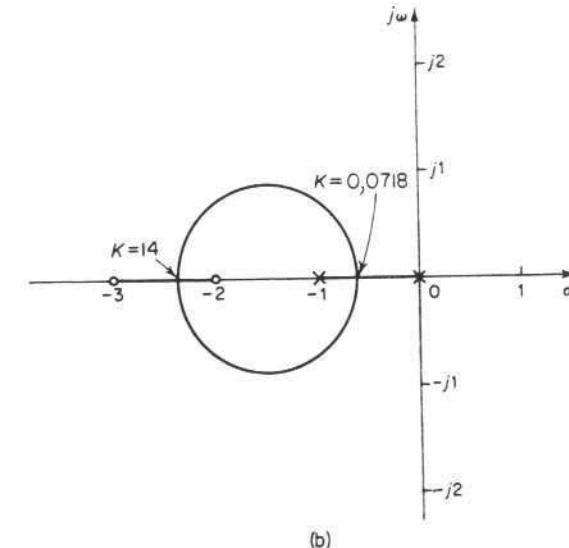
Os lugares de ganho constante podem ser desenhados pelo uso da Eq. (8.24). Para  $K = 1, 2, 5, 10$  e  $20$ , os lugares de ganho constante são indicados na Fig. 8.4.

**Problema A.8.2** Esboce o gráfico do lugar das raízes para o sistema indicado na Fig. 8.37(a). (O ganho  $K$  é suposto positivo.) Observe que para valores pequenos ou grandes de  $K$  o sistema é superamortecido, e para valores médios de  $K$  é subamortecido.



(a)

Fig. 8.37 (a) Sistema de controle, (b) gráfico do lugar das raízes.



(b)

**Solução.** O procedimento para construir o gráfico dos lugares das raízes é o seguinte:

- Coloque os pólos e zeros de malha-aberta no plano complexo. Existem lugares das raízes sobre o eixo real negativo entre 0 e -1 e entre -2 e -3.
- O número de pólos de malha-aberta e de zeros finitos é o mesmo. Isto significa que não há assintotas na região complexa do plano  $s$ .
- Determine os pontos de separação de partida e chegada. A equação característica para o sistema é

$$1 + \frac{K(s-2)(s+3)}{s(s+1)} = 0$$

ou

$$K = -\frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

Os pontos de separação de partida e de chegada são determinados de

$$\begin{aligned} \frac{dK}{ds} &= -\frac{(2s+1)(s+2)(s+3) - s(s+1)(2s+5)}{[(s+2)(s+3)]^2} \\ &= -\frac{4(s+0,634)(s+2,366)}{[(s+2)(s+3)]^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

como segue:

$$s = -0,634, \quad s = -2,366$$

No ponto  $s = -0,634$ , o valor de  $K$  é

$$K = -\frac{(-0,634)(0,366)}{(1,366)(2,366)} = 0,0718$$

Analogamente, em  $s = -2,366$ ,

$$K = -\frac{(-2,366)(-1,366)}{(-0,366)(0,634)} = 14$$

Note que os valores de  $K$  em  $s = -0,634$  e  $s = -2,366$  são positivos e estes pontos são pontos de separação de partida e de chegada verdadeiros. Como o ponto  $s = -0,634$  ( $s = -2,366$ ) está entre dois pólos (zeros), ele é um ponto de separação de partida (de chegada).

4. Determine um número suficiente de pontos que satisfazem a condição de ângulo. (Pode-se verificar que o lugar das raízes é uma circunferência com centro em -1,5 que passa pelos pontos de separação de partida e de chegada.) O gráfico do lugar das raízes para este sistema é indicado na Fig. 8.37(b).

5. Usando a condição de módulo, calibre os lugares das raízes em termos de  $K$ . Para um dado valor de  $K$ , os pólos de malha-fechada, que satisfazem as condições de ângulo e de módulo, podem ser determinados do gráfico do lugar das raízes.

Note que este sistema é estável para qualquer valor positivo de  $K$  desde que todos os lugares das raízes permanecem no semiplano esquerdo do plano  $s$ .

Pequenos valores de  $K$  ( $0 < K < 0,0718$ ) correspondem a um sistema superamortecido. Valores médios de  $K$  ( $0,0718 < K < 14$ ) correspondem a um sistema subamortecido. Final-

mente, valores grandes de  $K$  ( $14 < K$ ) correspondem a um sistema superamortecido. Com um grande valor de  $K$ , pode ser atingido o estado estacionário em um intervalo de tempo muito menor do que com um valor pequeno de  $K$ .

O valor de  $K$  deve ser ajustado de modo que o desempenho do sistema seja ótimo de acordo com um dado índice de desempenho.

**Problema A.8.3** Determine as raízes do seguinte polinômio usando o método do lugar das raízes:

$$3s^4 + 10s^3 + 21s^2 + 24s - 16 = 0 \quad (8.25)$$

**Solução.** Inicialmente rearranje o polinômio e coloque-o na forma

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = -1$$

onde  $P(s)$  e  $Q(s)$  são polinômios fatorados. Aplicam-se então as regras gerais apresentadas na Seção 8.4 para localizar as raízes do polinômio. A Eq. (8.25) pode ser rearranjada em um modo conveniente como segue:

$$3s^4 + 10s^3 + 21s^2 = -24s + 16$$

Neste caso o polinômio pode ser reescrito

$$\frac{8(s - \frac{2}{3})}{s^2(s^2 + \frac{16}{3}s + 7)} = -1 \quad (8.26)$$

Esta forma possui dois pólos na origem, dois pólos complexos e um zero no eixo real positivo. Desde que a Eq. (8.26) possui a forma  $G(s)H(s) = -1$ , o método do lugar das raízes pode ser aplicado para determinar as raízes do polinômio.

A Eq. (8.25) pode ser rearranjada em diferentes maneiras. Por exemplo, pode ser reescrita

$$3s^4 + 10s^3 = -21s^2 - 24s + 16$$

ou

$$\frac{7(s^2 + \frac{8}{7}s - \frac{16}{7})}{s^3(s + \frac{16}{3})} = -1 \quad (8.27)$$

Neste caso, entretanto, o sistema envolve três pólos na origem, um pôlo e um zero sobre o eixo real negativo, e um zero no eixo real positivo. A quantidade de trabalho gráfico necessária para esboçar o gráfico do lugar das raízes da Eq. (8.27) é quase a mesma daquele correspondente à Eq. (8.26).

Note que se dois gráficos dos lugares das raízes, um correspondente à Eq. (8.26) e outro correspondente à Eq. (8.27), são esboçados no mesmo diagrama, as intersecções dos dois fornecem as raízes dos polinômios. (Se for utilizada a condição de módulo, apenas um gráfico do lugar das raízes necessita ser esboçado.)

Neste problema, esboçaremos apenas o gráfico do lugar das raízes baseado na Eq. (8.26) e utilizaremos a condição do módulo para determinar as raízes do polinômio. A Eq. (8.26) pode ser reescrita

$$\frac{8(s - \frac{2}{3})}{s^2(s + 1,67 + j2,06)(s + 1,67 - j2,06)} = -1 \quad (8.28)$$

Para determinar os lugares das raízes, substitua a constante 8 no numerador da Eq. (8.28) por  $K$  e escreva

$$\frac{K(s - \frac{2}{3})}{s^2(s + 1,67 + j2,06)(s + 1,67 - j2,06)} = -1$$

Para esboçar o gráfico do lugar das raízes, siga este procedimento:

1. Coloque os pólos e o zero no plano complexo. Existem lugares das raízes sobre o eixo real entre  $2/3$  e  $0$  e entre  $0$  e  $-\infty$ .
2. Determine as assintotas dos lugares das raízes. Há três assintotas que fazem ângulos de

$$\frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{4-1} = 60^\circ, -60^\circ, 180^\circ$$

com o eixo real positivo. Referindo-se à Eq. (8.13) a abscissa da intersecção das assintotas é dada por

$$-\sigma_a = -\frac{(0 + 0 + \frac{5}{3} + j2,06 + \frac{5}{3} - j2,06) + \frac{2}{3}}{4-1} = -\frac{4}{3}$$

3. Usando o critério de estabilidade de Routh, determine o valor de  $K$  para o qual o lugar das raízes cruza o eixo imaginário. A equação característica é

$$s^2(s^2 + \frac{10}{3}s + 7) = -K(s - \frac{2}{3})$$

ou

$$s^4 + \frac{10}{3}s^3 + 7s^2 + Ks - \frac{2}{3}K = 0$$

O arranjo de Routh resulta

$s^4$	1	7	$-\frac{2}{3}K$
$s^3$	$\frac{10}{3}$	$K$	0
$s^2$	$7 - \frac{3}{10}K$	$-\frac{2}{3}K$	
$s^1$	$-\frac{3}{10}K^2 + \frac{83}{9}K$	0	
$s^0$	$-\frac{2}{3}K$		

Os valores de  $K$  que tornam nulo o termo  $s^1$  na primeira coluna são  $K = 30,7$  e  $K = 0$ . Os pontos de cruzamento no eixo imaginário podem ser determinados resolvendo-se a equação auxiliar obtida da linha  $s^2$ , ou

$$(7 - \frac{3}{10}K)s^2 - \frac{2}{3}K = 0$$

onde  $K = 30,7$ . O resultado é

$$s = \pm j3,04$$

Os pontos de cruzamento sobre o eixo imaginário são, portanto,  $s = \pm j3,04$ .

4. Verifique se há pontos de separação de partida ou chegada. Do Passo 3 sabemos que há dois pontos de cruzamento com o eixo  $j\omega$ . Portanto, nesta configuração

particular de pólos e zeros, não pode existir qualquer ponto de separação de partida ou chegada.

5. Determine os ângulos de partida dos lugares das raízes dos pólos complexos. No polo  $s = -1,67 + j2,06$ , o ângulo de partida  $\theta$  é determinado de

$$110^\circ - 106^\circ - 106^\circ - 90^\circ - \theta = \pm 180^\circ(2k+1)$$

como segue:

$$\theta = -12^\circ$$

(O ângulo de partida do polo  $s = -1,67 - j2,06$  é  $12^\circ$ .)

6. Na vizinhança do eixo  $j\omega$  e da origem, localize um número suficiente de pontos que satisfaça a condição do ângulo.

Baseado na informação obtida até aqui, o gráfico do lugar das raízes para este sistema pode ser esboçado conforme a Fig. 8.38.

7. Use a condição do módulo

$$K = \left| \frac{s^2(s + 1,67 + j2,06)(s + 1,67 - j2,06)}{s - \frac{2}{3}} \right|$$

para determinar os pontos sobre o lugar das raízes nos quais  $K = 8$ . Utilizando um procedimento de tentativa-e-erro, obtemos

$$s = -0,79 \pm j2,16$$

Pode ser utilizado um procedimento de tentativa-e-erro para localizar as duas raízes

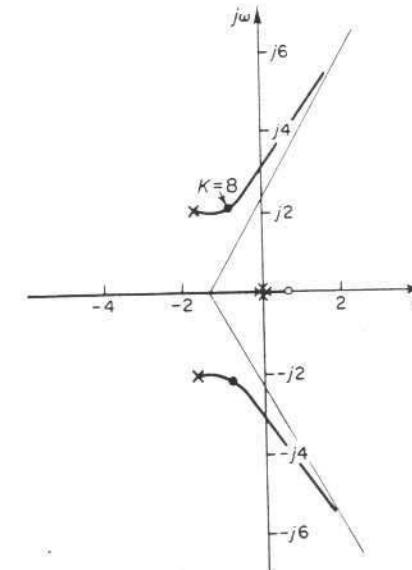


Fig. 8.38 Gráfico do lugar das raízes.

restantes. Entretanto, pode ser mais simples fatorar as raízes conhecidas do polinômio dado.

$$\begin{aligned} 3s^4 + 10s^3 + 21s^2 + 24s - 16 \\ = (s + 0,79 + j2,16)(s + 0,79 - j2,16)(3s^2 + 5,28s - 3,06) \\ = 3(s + 0,79 + j2,16)(s + 0,79 - j2,16)(s + 2,22)(s - 0,46) \end{aligned}$$

Portanto, as raízes do polinômio dado são

$$s_1 = -0,79 - j2,16, \quad s_2 = -0,79 + j2,16, \quad s_3 = -2,22, \quad s_4 = 0,46$$

**Problema A.8.4** Uma forma simplificada da função de transferência de malha-aberta de um avião com piloto automático no modo longitudinal é

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+a)}{s(s-b)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}, \quad a > 0, \quad b > 0$$

Um sistema deste tipo envolvendo um polo de malha-aberta no semiplano direito do plano  $s$  pode ser condicionalmente estável. Esboce o gráfico do lugar das raízes quando  $a = b = 1$ ,  $\zeta = 0,5$  e  $\omega_n = 4$ . Determinar o intervalo do ganho  $K$  para estabilidade.

**Solução.** A função de transferência de malha-aberta para o sistema é

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2 + 4s + 16)}$$

Esboçar o gráfico do lugar das raízes, seguindo este procedimento:

1. Indique no plano complexo os pólos e zeros de malha-aberta. Existem lugares das raízes sobre o eixo real entre 1 e 0 e entre -1 e  $-\infty$ .
2. Determine as assíntotas dos lugares das raízes. Há três assíntotas cujos ângulos podem ser determinados como

$$\text{Ângulos das assíntotas} = \frac{180^\circ(2k+1)}{4-1} = 60^\circ, -60^\circ, 180^\circ$$

A abscissa da intersecção das assíntotas com o eixo real é

$$-\sigma_a = -\frac{(0-1+2+j2\sqrt{3}+2-j2\sqrt{3})-1}{4-1} = -\frac{2}{3}$$

3. Determine os pontos de separação de partida e de chegada. Desde que a equação característica é

$$1 + \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2 + 4s + 16)} = 0$$

obtemos

$$K = -\frac{s(s-1)(s^2 + 4s + 16)}{s+1}$$

Diferenciando  $K$  em relação a  $s$ , obtemos

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{3s^4 + 10s^3 + 21s^2 + 24s - 16}{(s+1)^2}$$

No Problema A.8.3, verificamos que

$$\begin{aligned} 3s^4 + 10s^3 + 21s^2 + 24s - 16 \\ = 3(s + 0,79 + j2,16)(s + 0,79 - j2,16)(s + 2,22)(s - 0,46) \end{aligned}$$

Portanto, os pontos de separação de partida e de chegada são  $s = 0,46$  e  $s = -2,22$ , respectivamente. (Os pontos  $s = -0,79 \pm j2,16$  não satisfazem a condição do ângulo.)

4. Utilizando o critério de estabilidade de Routh, determine o valor de  $K$  para o qual os lugares das raízes cruzam o eixo imaginário. Desde que a equação característica é

$$s^4 + 3s^3 + 12s^2 + (K-16)s + K = 0$$

o arranjo de Routh resulta

$s^4$	1	12	$K$
$s^3$	3	$K-16$	0
$s^2$	$\frac{52-K}{3}$	$K$	0
$s^1$	$\frac{-K^2 + 59K - 832}{3(52-K)}$	0	
$s^0$	$K$		

Os valores de  $K$  que anulam o termo  $s^1$  na primeira coluna são  $K = 35,7$  e  $K = 23,3$ .

Os pontos de cruzamento do eixo imaginário podem ser determinados resolvendo-se a equação auxiliar obtida da linha  $s^2$ , isto é, resolvendo a seguinte equação em relação a  $s$ :

$$\frac{52-K}{3}s^2 + K = 0$$

Os resultados são

$$s = \pm j2,56 \quad \text{para } K = 35,7$$

$$s = \pm j1,56 \quad \text{para } K = 23,3$$

Os pontos de cruzamento sobre o eixo imaginário são portanto  $s = \pm j2,56$  e  $s = \pm j1,56$ .

5. Determine os ângulos de partida dos lugares das raízes dos pólos complexos. Para o polo de malha-aberta em  $s = -2 + j2\sqrt{3}$ , o ângulo de partida  $\theta$  é

$$106^\circ - 120^\circ - 130,5^\circ - 90^\circ - \theta = \pm 180^\circ(2k+1)$$

ou

$$\theta = -54,5^\circ$$

(O ângulo de partida do polo de malha-aberta em  $s = -2 - j2\sqrt{3}$  é  $54,5^\circ$ .)

6. Escolha um ponto de teste na vizinhança do eixo  $j\omega$  e da origem e aplique a condição do ângulo. Se o ponto de teste não satisfizer a condição do ângulo, selecione um outro

ponto de teste até satisfazê-la. Continue o mesmo processo e localize um número suficiente de pontos que satisfaça a condição do ângulo. A Fig. 8.39 mostra o gráfico do lugar das raízes para este sistema. Do Passo 4 o sistema é estável para  $23.3 < K < 35.7$ . Caso contrário, é instável.

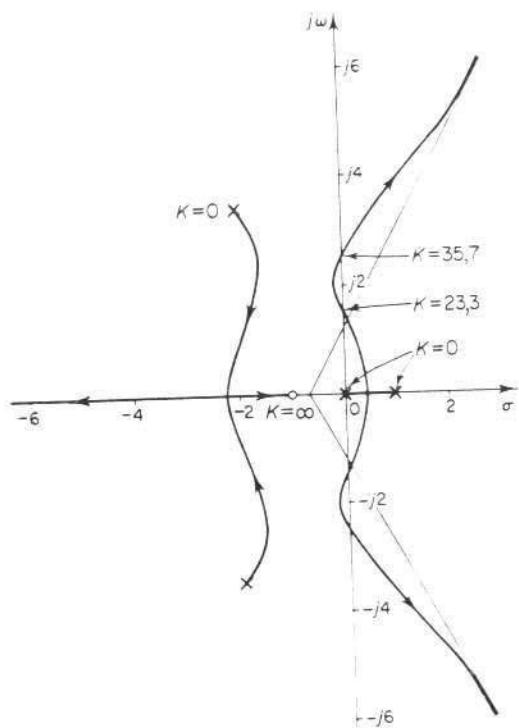


Fig. 8.39 Gráfico do lugar das raízes.

**Problema A.8.5** Considere o sistema com atraso de transporte indicado na Fig. 8.40. Esboce o gráfico do lugar das raízes e determine os dois pares de pólos de malha-fechada mais próximos do eixo  $j\omega$ .

Utilizando apenas os pólos de malha-fechada dominantes, obtenha a resposta ao degrau unitário e esboce a curva da resposta.

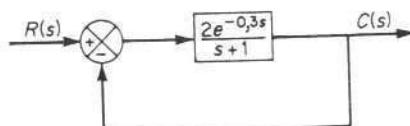


Fig. 8.40 Sistema de controle com atraso de transporte.

**Solução.** A equação característica é

$$\frac{2e^{-0,3s}}{s+1} + 1 = 0$$

que é equivalente às seguintes condições de ângulo e módulo:

$$\begin{aligned}\left| \frac{2e^{-0,3s}}{s+1} \right| &= \pm 180^\circ(2k+1) \\ \left| \frac{2e^{-0,3s}}{s+1} \right| &= 1\end{aligned}$$

A condição do ângulo se reduz a

$$\angle s+1 = \mp \pi(2k+1) - 0,3\omega \quad (\text{radianos})$$

Para  $k = 0$ ,

$$\begin{aligned}\angle s+1 &= \mp \pi - 0,3\omega \quad (\text{radianos}) \\ &= \mp 180^\circ - 17,2^\circ\omega \quad (\text{graus})\end{aligned}$$

Para  $k = 1$ ,

$$\begin{aligned}\angle s+1 &= \mp 3\pi - 0,3\omega \quad (\text{radianos}) \\ &= \mp 540^\circ - 17,2^\circ\omega \quad (\text{graus})\end{aligned}$$

O gráfico do lugar das raízes para este sistema é indicado na Fig. 8.41.

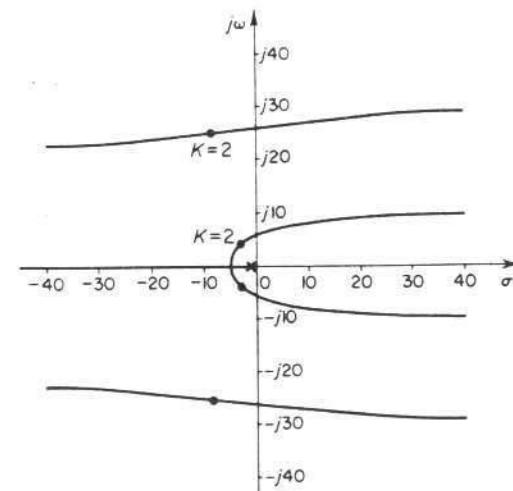


Fig. 8.41 Gráfico do lugar das raízes para o sistema indicado na Fig. 8.40.

Vamos substituir  $s = \sigma + j\omega$  na condição do módulo e substituir 2 por  $K$ . Obtemos então

$$\frac{\sqrt{(1+\sigma)^2 + \omega^2}}{e^{-0,3\sigma}} = K$$

Calculando  $K$  em diferentes pontos dos lugares das raízes podem-se determinar os pontos correspondentes a  $K = 2$ . Estes pontos são os pólos de malha-fechada. O par dominante de pólos de malha-fechada é

$$s = -2,5 \pm j3,9$$

O par de pólos de malha-fechada seguinte é

$$s = -8,6 \pm j25,1$$

Considerando apenas o par de pólos de malha-fechada dominantes, a função de transferência de malha-fechada pode ser aproximada como segue: Verifique que

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{2e^{-0,3s}}{1+s+2e^{-0,3s}} \\ &= \frac{2e^{-0,3s}}{1+s+2\left(1-0,3s+\frac{0,09s^2}{2}+\dots\right)} \\ &= \frac{2e^{-0,3s}}{3+0,4s+0,09s^2+\dots} \end{aligned}$$

$$(s+2,5+j3,9)(s+2,5-j3,9) = s^2 + 5s + 21,46$$

Podemos aproximar  $C(s)/R(s)$  por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{3}(21,46)e^{-0,3s}}{s^2 + 5s + 21,46}$$

ou

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{14,31e^{-0,3s}}{(s+2,5)^2 + 3,9^2}$$

Para uma entrada em degrau unitário.

$$C(s) = \frac{14,31e^{-0,3s}}{[(s+2,5)^2 + 3,9^2]s}$$

Note que

$$\frac{14,31}{[(s+2,5)^2 + 3,9^2]s} = \frac{\frac{2}{3}}{s} + \frac{-\frac{2}{3}s - \frac{10}{3}}{(s-2,5)^2 + 3,9^2}$$

Portanto,

$$C(s) = \left(\frac{\frac{2}{3}}{s}\right)e^{-0,3s} + \left[\frac{-\frac{2}{3}s - \frac{10}{3}}{(s+2,5)^2 + 3,9^2}\right]e^{-0,3s}$$

A transformada de Laplace inversa de  $C(s)$  resulta

$$c(t) = \frac{2}{3}[1 - e^{-2,5(t-0,3)} \cos 3,9(t-0,3) - 0,64e^{-2,5(t-0,3)} \sin 3,9(t-0,3)]1(t-0,3)$$

onde  $1(t-0,3)$  é a função degrau unitário ocorrendo em  $t = 0,3$ .

A Fig. 8.42 mostra a curva de resposta aproximada obtida, junto com a curva de resposta ao degrau unitário exata obtida por cálculo numérico. Note que neste sistema pode-se obter uma aproximação muito boa usando os pólos de malha-fechada dominantes.

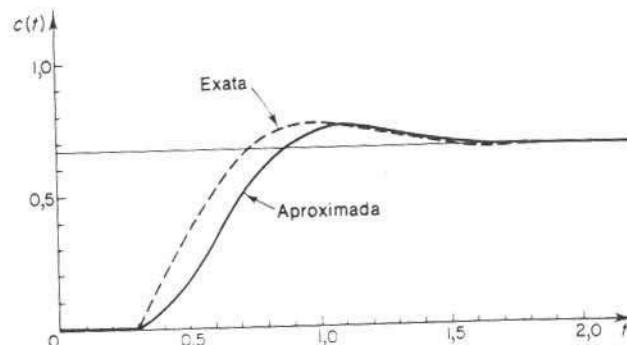


Fig. 8.42 Curvas de resposta ao degrau unitário para o sistema indicado na Fig. 8.40.

**Problema A.8.6\*** Em um sistema de controle complexo, pode haver uma realimentação positiva em um laço interno conforme indicado na Fig. 8.43. Este laço normalmente é estabilizado pelo laço mais externo.

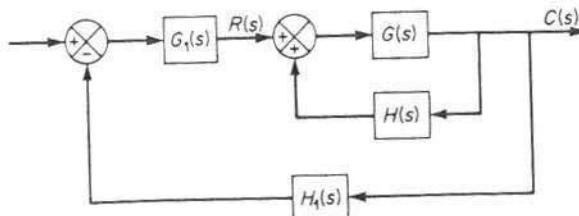


Fig. 8.43 Sistema de controle.

\*Referência W-4.

Neste problema nos preocuparemos apenas com o laço interno de realimentação positiva. A função de transferência de malha-fechada do laço interno é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)}$$

A equação característica é

$$1 - G(s)H(s) = 0 \quad (8.29)$$

Esta equação pode ser resolvida de maneira análoga ao desenvolvimento do método do lugar das raízes nas Seções 8.3 e 8.4. A condição do ângulo, entretanto, deve ser alterada.

A Eq. (8.29) pode ser reescrita:

$$G(s)H(s) = 1$$

que é equivalente às duas equações seguintes:

$$\underline{|G(s)H(s)|} = 0^\circ \pm k360^\circ \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$|G(s)H(s)| = 1$$

A soma total de todos os ângulos dos pólos e zeros de malha-aberta deve ser igual a  $0^\circ \pm k360^\circ$ . Portanto, o lugar das raízes segue um lugar de  $0^\circ$  em oposição ao lugar de  $180^\circ$  anteriormente considerado. A condição do módulo permanece inalterada.

Esbocie o gráfico do lugar das raízes para o sistema de realimentação positiva com as seguintes funções de transferência:

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)},$$

$$H(s) = 1$$

O ganho  $K$  é suposto positivo.

**Solução.** As regras gerais para construção dos lugares das raízes fornecidas na Seção 8.4 devem ser modificadas da seguinte maneira:

A regra 3 é modificada como segue: Se o número total de pólos reais e zeros reais à direita de um ponto de teste sobre o eixo real for par, então este ponto pertence ao lugar das raízes.

A regra 4 é modificada como segue:

$$\text{Ângulos dos assintotas} = \frac{\pm k360^\circ}{n-m}$$

onde

$n$  = número de pólos finitos de  $G(s)H(s)$

$m$  = número de zeros finitos de  $G(s)H(s)$

A regra 6 é modificada como segue: Quando calcular o ângulo de partida (ou o ângulo de chegada) de um pôlo complexo (ou um zero complexo) de malha-aberta, subtrair de  $0^\circ$  a soma de todos os ângulos dos números complexos obtidos de todos os outros pólos e zeros para o pôlo complexo (ou zero complexo) em questão, incluindo-se os sinais apropriados.

As outras regras para construção do gráfico do lugar das raízes permanecem inalteradas. Aplicaremos agora as regras modificadas para construir o gráfico do lugar das raízes. A

função de transferência de malha-fechada para o sistema com realimentação positiva é dada por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)} = \frac{K(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)-K(s+2)}$$

1. Indique os pólos de malha-aberta ( $s = -1+j$ ,  $s = -1-j$ ,  $s = -3$ ) e o zero de malha-aberta ( $s = -2$ ) no plano complexo. Conforme  $K$  é aumentado desde 0 até  $\infty$ , os pólos de malha-fechada iniciam-se nos pólos de malha-aberta e terminam nos zeros de malha-aberta (finitos ou infinitos), como no caso dos sistemas com realimentação negativa.

2. Determine os lugares das raízes sobre o eixo real. Existem lugares das raízes sobre o eixo real entre  $-2$  e  $+\infty$  e entre  $-3$  e  $-\infty$ .

3. Determine as assintotas dos lugares das raízes. Para o presente sistema,

$$\text{Ângulo da assintota} = \frac{\pm k360^\circ}{3-1} = \pm 180^\circ$$

Isto significa simplesmente que os ramos dos lugares das raízes estão sobre o eixo real.

4. Determine os pontos de separação de partida e de chegada. Desde que a equação característica é

$$(s+3)(s^2+2s+2)-K(s+2)=0$$

obtemos

$$K = \frac{(s+3)(s^2+2s+2)}{s+2}$$

Diferenciando  $K$  em relação a  $s$ , obtemos

$$\frac{dK}{ds} = \frac{2s^3 + 11s^2 + 20s + 10}{(s+2)^2}$$

Note que

$$\begin{aligned} 2s^3 + 11s^2 + 20s + 10 &= 2(s+0,8)(s^2+4,7s+6,24) \\ &= 2(s+0,8)(s+2,35+j0,77)(s+2,35-j0,77) \end{aligned}$$

Os pontos  $s = -2,35 \pm j0,77$  não satisfazem a condição do ângulo. No ponto  $s = -0,8$ , o valor de  $K$  resulta positivo. O ponto de separação de chegada é portanto  $s = -0,8$ .

5. Determine o ângulo de partida do lugar das raízes de um pôlo complexo. Para o pôlo complexo em  $s = -1+j$ , o ângulo de partida  $\phi$  é

$$45^\circ - 27^\circ - 90^\circ - \phi = 0^\circ$$

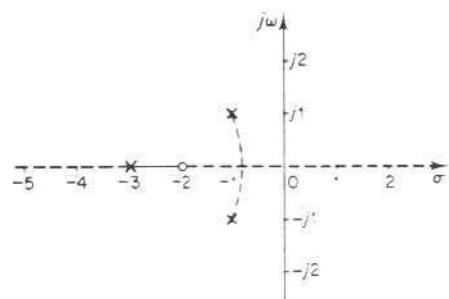
ou

$$\phi = -72^\circ$$

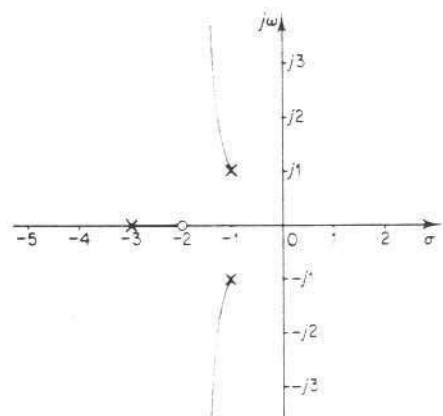
(O ângulo de partida do pôlo complexo em  $s = -1-j$  é  $72^\circ$ .)

6. Escolha um ponto de teste na vizinhança do eixo  $j\omega$  e da origem e aplique a condição do ângulo. Localize um número suficiente de pontos que satisfazem a condição do ângulo.

**Tabela 8.3** Gráficos dos lugares das raízes de sistemas com realimentação negativa e com realimentação positiva



**Fig. 8.44** Gráfico do lugar das raízes para o sistema com realimentação positiva com  $G(s) = K(s + 2)/[(s + 3)(s^2 + 2s + 2)]$ ,  $H(s) = 1$ .



**Fig. 8.45** Gráfico do lugar das raízes para o sistema com realimentação negativa com  $G(s) = K(s + 2)/[(s + 3)(s^2 + 2s + 2)]$ ,  $H(s) = 1$ .

A Fig. 8.44 mostra o gráfico do lugar das raízes para o sistema com realimentação positiva dada. Os lugares das raízes são indicados por retas e curvas tracejadas.

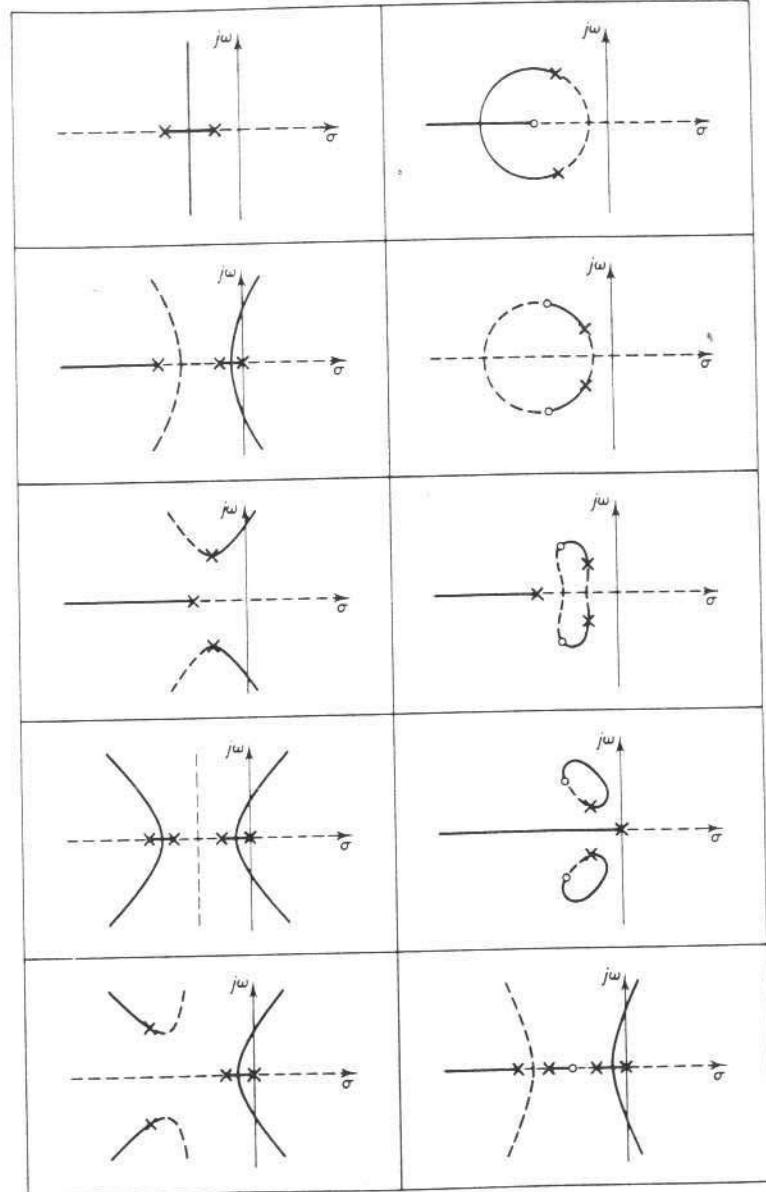
Note que, se

$$K > \frac{(s + 3)(s^2 + 2s + 2)}{s + 2} \Big|_{s=0} = 3$$

uma raiz real entra no semiplano direito do plano  $s$ . Portanto, para valores de  $K$  maiores do que 3, o sistema torna-se instável. (Para  $K > 3$ , o sistema deve ser estabilizado com um laço externo.)

Para comparar o gráfico do lugar das raízes com aquele do sistema de realimentação negativa correspondente, mostramos na Fig. 8.45 o gráfico do lugar das raízes do sistema com realimentação cuja função de transferência de malha-fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + 2)}{(s + 3)(s^2 + 2s + 2) + K(s + 2)}$$



Retas e curvas cheias correspondem a sistemas com realimentação negativa; retas e curvas tracejadas correspondem a sistemas com realimentação positiva.

A Tabela 8.3 mostra vários gráficos de lugar das raízes de sistemas com realimentação negativa e sistemas com realimentação positiva. As funções de transferência de malha-fechada são dadas por

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 + GH} \quad \text{para sistemas com realimentação negativa}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 - GH} \quad \text{para sistemas com realimentação positiva}$$

onde  $GH$  é a função de transferência de malha-aberta. Na Tabela 8.3, os lugares das raízes para sistemas com realimentação negativa são desenhados com retas e curvas cheias, e aqueles para sistemas com realimentação positiva são desenhados com retas e curvas tracejadas.

**Problema A.8.7** Considere o sistema mostrado na Fig. 8.46, que tem uma função de transferência do ramo direto instável. Esboce o gráfico do lugar das raízes e localize os pólos de malha-fechada. Mostre que embora os pólos de malha-fechada estejam sobre o eixo real negativo e o sistema não seja oscilatório, a curva de resposta ao degrau unitário possui sobrelevação.

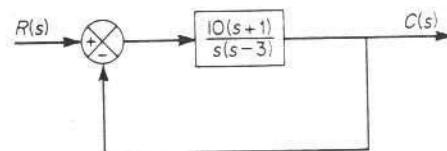


Fig. 8.46 Sistema de controle.

**Solução.** O gráfico do lugar das raízes para este sistema é indicado na Fig. 8.47. Os pólos de malha-fechada estão localizados em  $s = -2$  e  $s = -5$ .

A função de transferência de malha-fechada resulta

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10(s+1)}{s^2 + 7s + 10}$$

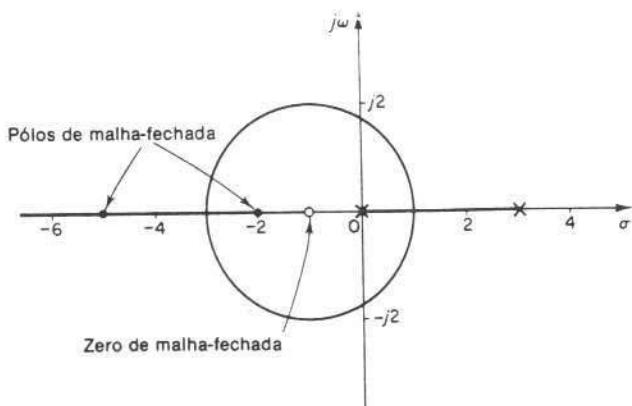


Fig. 8.47 Gráfico do lugar das raízes para o sistema indicado na Fig. 8.46.

A resposta ao degrau unitário deste sistema é

$$C(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+2)(s+5)}$$

A transformada de Laplace inversa de  $C(s)$  resulta

$$c(t) = 1 + 1,666e^{-2t} - 2,666e^{-5t} \quad (t \geq 0)$$

A curva de resposta ao degrau unitário é indicada na Fig. 8.48. Embora o sistema não seja oscilatório, a curva de resposta ao degrau unitário exibe sobrelevação. (Isto é devido à presença de um zero em  $s = -1$ .)

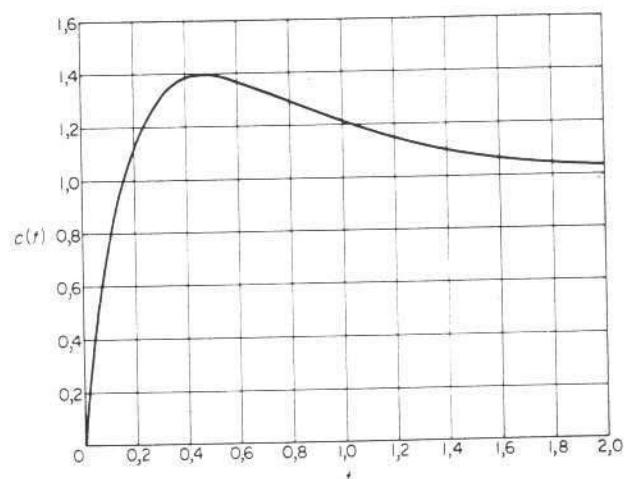


Fig. 8.48 Curva de resposta ao degrau unitário para o sistema indicado na Fig. 8.46.

**Problema A.8.8** Considere um sistema com

$$G(s) = \frac{s+3}{s(s+2)}, \quad H(s) = 1$$

Mostre que uma parte do lugar das raízes é circular.

**Solução.** Sobre o lugar das raízes, a condição do ângulo resulta

$$|G(s)| = |s+3| - |s| - |s+2| = 180^\circ$$

Se  $s = \sigma + j\omega$  é substituído nesta última equação, obtemos

$$|\sigma + j\omega + 3| - |\sigma + j\omega| - |\sigma + j\omega + 2| = 180^\circ$$

que pode ser reescrita

$$\tan^{-1} \frac{\omega}{\sigma+3} - \tan^{-1} \frac{\omega}{\sigma} = 180^\circ + \tan^{-1} \frac{\omega}{\sigma+2}$$

Considerando as tangentes de ambos os membros desta última equação e usando a relação

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \pm \tan x \tan y}$$

obtemos

$$\tan \left( \tan^{-1} \frac{\omega}{\sigma+3} - \tan^{-1} \frac{\omega}{\sigma} \right) = \frac{\frac{\omega}{\sigma+3} - \frac{\omega}{\sigma}}{1 + \frac{\omega}{\sigma+3} \cdot \frac{\omega}{\sigma}} = \frac{-3\omega}{\sigma(\sigma+3) + \omega^2}$$

$$\tan \left( 180^\circ + \tan^{-1} \frac{\omega}{\sigma+2} \right) = \frac{0 + \frac{\omega}{\sigma+2}}{1 - 0 \times \frac{\omega}{\sigma+2}} = \frac{\omega}{\sigma+2}$$

Portanto,

$$\frac{-3\omega}{\sigma(\sigma+3) + \omega^2} = \frac{\omega}{\sigma+2}$$

ou

$$(\sigma+3)^2 + \omega^2 = (\sqrt{3})^2$$

Esta última equação representa uma circunferência com centro em  $\sigma = -3$ ,  $\omega = 0$  e com raio  $\sqrt{3}$ . Note que o centro está no zero da função de transferência de malha-aberta. A Fig. 8.49 mostra o gráfico do lugar das raízes para o sistema.

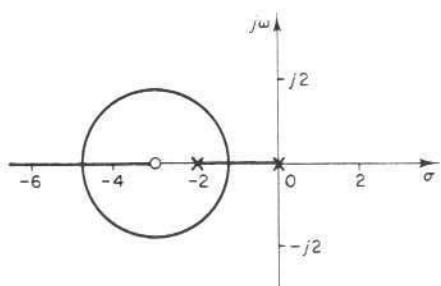


Fig. 8.49 Gráfico do lugar das raízes para o sistema com  $G(s) = (s+3)/[s(s+2)]$ ,  $H(s) = 1$ .

## PROBLEMAS

**Problema B.8.1** Esboce os gráficos dos lugares das raízes para as configurações de pólos e zeros de malha-aberta indicadas na Fig. 8.50.

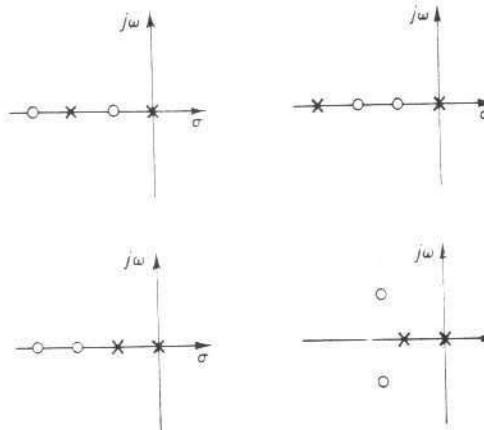


Fig. 8.50 Pólos e zeros de sistemas.

**Problema B.8.2** Esboce os gráficos dos lugares das raízes para as configurações de pólos e zeros de malha-aberta indicadas na Fig. 8.51.

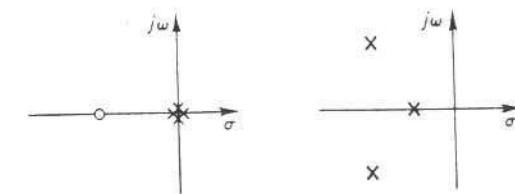
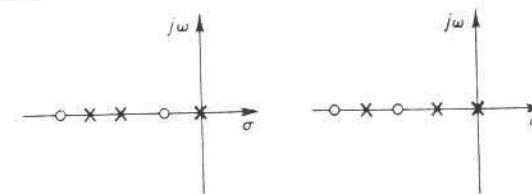


Fig. 8.51 Pólos e zeros de sistemas.



**Problema B.8.3** Considere o sistema indicado na Fig. 8.52. Investigue o efeito do aumento do valor de  $K_h$  nos lugares das raízes. Esboce as curvas típicas de resposta ao degrau unitário para os casos  $K_h = 0$ ,  $0 < K_h < 1$  e  $K_h > 1$ . Esboce então o gráfico do lugar das raízes quando  $K_h = 0,5$ . Localize os pólos de malha-fechada nos lugares das raízes quando  $K = 10$ .

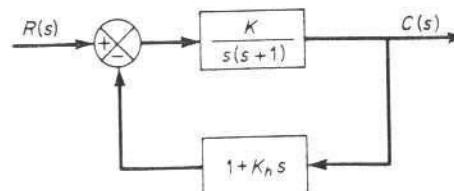


Fig. 8.52 Sistema de controle.

**Problema B.8.4** Mostre que os lugares das raízes para um sistema de controle com

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 6s + 10)}{s^2 + 2s + 10},$$

$$H(s) = 1$$

são arcos de circunferências centradas na origem e com raio igual a  $\sqrt{10}$ .

**Problema B.8.5** Um sistema de controle com

$$G(s) = \frac{K}{s^2(s+1)},$$

$$H(s) = 1$$

é instável para todos os valores positivos do ganho  $K$ .

Esboce o gráfico do lugar das raízes deste sistema. Usando este gráfico, mostre que este sistema pode ser estabilizado adicionando-se um zero sobre o eixo real negativo ou modificando-se  $G(s)$  para  $G_1(s)$ , onde

$$G_1(s) = \frac{K(s+a)}{s^2(s+1)} \quad (0 \leq a < 1)$$

**Problema B.8.6** Esboce o gráfico do lugar das raízes de um sistema com

$$G(s) = \frac{K}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)},$$

$$H(s) = 1$$

Determine os pontos exatos onde os lugares das raízes cruzam o eixo  $j\omega$ .

**Problema B.8.7** Esboce o gráfico do lugar das raízes para um sistema com

$$G(s) = \frac{K}{s(s+0,5)(s^2 + 0,6s + 10)},$$

$$H(s) = 1$$

**Problema B.8.8** Esboce o gráfico do lugar das raízes para o sistema indicado na Fig. 8.53 e demonstre que ele se torna instável para valores grandes de  $K$ .

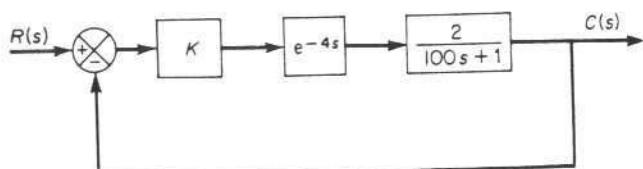


Fig. 8.53 Sistema de controle.

**Problema B.8.9** Esboce os contornos das raízes para o sistema indicado na Fig. 8.54 quando o ganho  $K$  e o parâmetro  $a$  variam, respectivamente, desde zero até infinito.

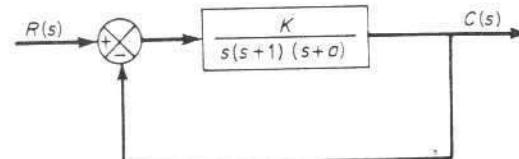


Fig. 8.54 Sistema de controle.

**Problema B.8.10** Considere o sistema indicado na Fig. 8.55. Determine os valores do ganho  $K$  e o coeficiente de realimentação de velocidade  $K_h$  de modo que os pólos de malha-fechada sejam  $s = -1 \pm j\sqrt{3}$ . Posteriormente, usando o valor de  $K_h$  determinado, esboce o gráfico do lugar das raízes.

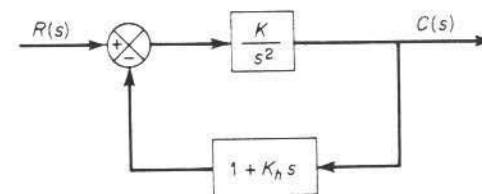


Fig. 8.55 Sistema de controle.

# Métodos de Resposta em Freqüência

## 9.1 INTRODUÇÃO

**Resposta em freqüência.** O termo “resposta em freqüência” significa a resposta em regime estacionário de um sistema com entrada senoidal. Nos métodos de resposta em freqüência, o método mais convencional disponível aos engenheiros de controle para análise e projeto de sistemas de controle, variamos a freqüência do sinal de entrada em um certo intervalo e estudamos a resposta em freqüência resultante.

O critério de estabilidade de Nyquist, a ser apresentado na Seção 9.5, possibilita investigar tanto a estabilidade absoluta como a estabilidade relativa de sistemas de malha-fechada lineares a partir do conhecimento de suas características de resposta em freqüência de malha-aberta. Usando este critério de estabilidade, não precisamos determinar as raízes da equação característica. Esta é uma vantagem da abordagem de resposta em freqüência. Uma outra vantagem desta abordagem é que os testes de resposta em freqüência são, em geral, simples e podem ser realizados precisamente pelo uso de geradores de sinal senoidal realmente disponíveis e equipamentos de medida precisos. Comumente funções de transferência de componentes complicados são determinadas experimentalmente através de testes de resposta em freqüência. Além disso a abordagem da resposta em freqüência possui as vantagens de que um sistema pode ser projetado de modo que os efeitos de ruídos indesejáveis sejam desprezíveis e a análise e projeto podem ser estendidos a alguns sistemas de controle não lineares.

Embora a resposta em freqüência de um sistema de controle apresente uma imagem qualitativa da resposta transitória, a correlação entre as respostas em freqüência e transitória é indireta, exceto no caso de sistemas de segunda-ordem. No projeto de um sistema de malha-fechada, devemos ajustar a característica de resposta em freqüência usando alguns critérios de projeto (a serem apresentados na Seção 9.7) de modo a obter características de resposta transitória aceitáveis.

Uma vez entendida a correlação indireta entre algumas medidas da resposta transitória e da resposta em freqüência, a abordagem de resposta em freqüência pode ser utilizada com vantagem. O projeto de um sistema de controle através desta

abordagem é baseado na interpretação das características dinâmicas desejadas em termos das características de resposta em freqüência. Esta análise de um sistema de controle indica graficamente quais variações ou modificações devem-se fazer na função de transferência de malha-aberta a fim de se obter as características de resposta transitória desejadas.

**Obtenção de soluções em regime estacionário para entradas senoidais.** Provaremos inicialmente o fato básico de que as características de resposta em freqüência de um sistema podem ser obtidas diretamente da função de transferência senoidal, isto é, a função de transferência na qual  $s$  é substituída por  $j\omega$ , onde  $\omega$  é a freqüência angular.

Considere o sistema linear invariante no tempo indicado na Fig. 9.1. A entrada e a saída do sistema, cuja função de transferência é  $G(s)$ , são denotadas por  $x(t)$  e  $y(t)$ , respectivamente. A entrada  $x(t)$  é senoidal e dada por

$$x(t) = X \operatorname{sen} \omega t$$

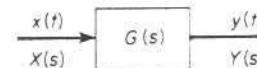


Fig. 9.1 Sistema linear invariante no tempo.

Suponha que a função de transferência  $G(s)$  pode ser escrita como uma relação de dois polinômios em  $s$ ; isto é,

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \cdots (s + s_n)}$$

A transformada de Laplace da saída  $Y(s)$  é então

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{p(s)}{q(s)} X(s) \quad (9-1)$$

onde  $X(s)$  é a transformada de Laplace da entrada  $x(t)$ .

Limitaremos nossa discussão apenas a sistemas estáveis. Para estes sistemas, as partes reais das raízes  $-s_i$  são negativas. A resposta de regime estacionário de um sistema linear, invariante no tempo e estável, para uma entrada senoidal não depende das condições iniciais. (Portanto, podemos supor condições iniciais nulas.)

Se  $Y(s)$  possuir apenas pólos distintos, então a expansão em frações parciais da Eq. (9.1) fornece

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{p(s)}{q(s)} \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + s_1} + \frac{b_2}{s + s_2} + \cdots + \frac{b_n}{s + s_n} \end{aligned} \quad (9-2)$$

onde  $a$  e  $b_i$  (onde  $i = 1, 2, \dots, n$ ) são constantes e  $\bar{a}$  é o complexo conjugado de  $a$ . A transformada de Laplace inversa da Eq. (9.2) resulta em

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1 e^{-s_1 t} + b_2 e^{-s_2 t} + \cdots + b_n e^{-s_n t} \quad (t \geq 0) \quad (9-3)$$

Para um sistema estável,  $-s_1, -s_2, \dots, -s_n$  possuem partes reais negativas. Portanto, conforme  $t$  tende a infinito, os termos  $e^{-s_1 t}, e^{-s_2 t}, \dots, e^{-s_n t}$  tendem a zero. Portanto, todos os termos do segundo membro da Eq. (9.3), exceto os dois primeiros, se anulam em regime estacionário.

Se  $Y(s)$  envolve pôlos múltiplos  $s_j$  de multiplicidade  $m_j$ , então  $y(t)$  envolverá termos do tipo  $t^k e^{-s_j t} r_{j,k} = 0, 1, 2, \dots, m_j - 1$ . Desde que as partes reais das raízes  $-s_j$  são negativas para um sistema estável, os termos  $t^k e^{-s_j t}$  tendem a zero conforme  $t$  tende a infinito.

Portanto, independentemente de o sistema possuir pôlos distintos ou não, a resposta em regime estacionário resulta em

$$y(t) = ae^{-j\omega t} - \bar{a}e^{j\omega t} \quad (9.4)$$

onde a constante  $a$  pode ser calculada a partir da Eq. (9.2) como segue:

$$a = G(s) \frac{\omega X}{s^2 - \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{XG(-j\omega)}{2j}$$

Note que

$$\bar{a} = G(s) \frac{\omega X}{s^2 - \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{XG(j\omega)}{2j}$$

Desde que  $G(j\omega)$  é uma função complexa, pode ser escrita na seguinte forma:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi}$$

onde  $|G(j\omega)|$  representa o módulo e  $\phi$  representa o ângulo de  $G(j\omega)$ ; isto é,

$$\phi = \underline{|G(j\omega)|} = \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{\text{parte imaginária de } G(j\omega)}{\text{parte real de } G(j\omega)} \right]$$

O ângulo  $\phi$  pode ser negativo, positivo ou nulo. Analogamente, para  $G(-j\omega)$  obtemos a seguinte expressão:

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)| e^{-j\phi} = |G(j\omega)| e^{-j\phi}$$

Então, a Eq. (9.4) pode ser escrita

$$\begin{aligned} y(t) &= X|G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \\ &= X|G(j\omega)| \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \\ &= Y \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (9.5)$$

onde  $Y = X|G(j\omega)|$ . Verificamos que um sistema linear, estável, invariante no tempo e sujeito a uma entrada senoidal possuirá, em regime estacionário, uma saída senoidal com a mesma frequência da entrada. Porém, a amplitude e o ângulo de fase da saída, em geral, serão diferentes daqueles da entrada. De fato, a amplitude da saída é dada pelo produto da amplitude da entrada por  $|G(j\omega)|$ , enquanto o ângulo de fase da saída difere daquele da entrada de um valor  $\phi = \underline{|G(j\omega)|}$ . Um exemplo de entrada e saída com sinais senoidais é indicado na Fig. 9.2.

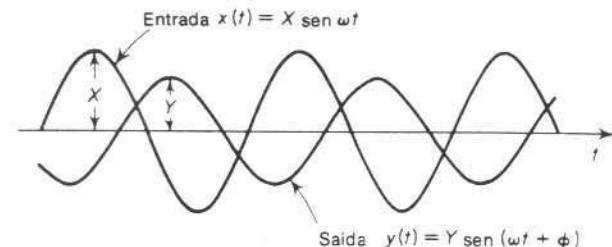


Fig. 9.2 Sinais senoidais de entrada e saída.

Com base no exposto, obtemos este importante resultado: Para entradas senoidais,

$$|G(j\omega)| = \frac{|Y(j\omega)|}{|X(j\omega)|} = \text{relação de amplitude entre a saída senoidal e a entrada senoidal}$$

$$\underline{|G(j\omega)|} = \frac{|Y(j\omega)|}{|X(j\omega)|} = \text{defasagem da saída senoidal em relação à entrada senoidal}$$

Portanto, as características de resposta de um sistema para entrada senoidal podem ser obtidas diretamente de

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = G(j\omega)$$

A função de transferência senoidal  $G(j\omega)$ , a relação entre  $Y(j\omega)$  e  $X(j\omega)$ , é uma função complexa e pode ser representada pelo módulo e ângulo de fase, tendo a frequência como variável ou parâmetro. (Um ângulo de fase negativo é denominado *atraso de fase* e um ângulo de fase positivo é denominado *avanço de fase*.) A função de transferência senoidal de qualquer sistema linear é obtida substituindo-se  $s$  por  $j\omega$  na função de transferência do sistema. Para caracterizar completamente um sistema linear no domínio de frequência, devemos especificar tanto a relação de amplitude como o ângulo de fase como funções da frequência  $\omega$ .

*Exemplo 9.1* Considere o sistema indicado na Fig. 9.3. A função de transferência  $G(s)$  é

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

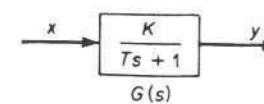


Fig. 9.3 Sistema de primeira-ordem.

Para a entrada senoidal  $x(t) = X \operatorname{sen} \omega t$ , a saída  $y(t)$  pode ser determinada como segue. Substituindo-se  $s$  por  $j\omega$  em  $G(s)$ , resulta

$$G(j\omega) = \frac{K}{jT\omega + 1}$$

A relação entre as amplitudes da saída e da entrada é

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$$

enquanto o ângulo de fase  $\phi$  é

$$\phi = \underline{|G(j\omega)|} = -\operatorname{tg}^{-1} T\omega$$

Portanto, para a entrada  $x(t) = X \operatorname{sen} \omega t$ , a saída  $y(t)$  pode ser obtida a partir da Eq. (9.5) como segue:

$$y(t) = \frac{XK}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \operatorname{tg}^{-1} T\omega) \quad (9.6)$$

Da Eq. (9.6) observa-se que para  $\omega$  pequeno, a amplitude da saída  $y(t)$  é praticamente igual a  $K$  vezes a amplitude da entrada. A defasagem da saída é pequena para valores pequenos de  $\omega$ . Para  $\omega$  grande, a amplitude da saída é pequena e praticamente inversamente proporcional a  $\omega$ . A defasagem tende a  $-90^\circ$  conforme  $\omega$  tende a infinito.

**Resposta em freqüência a partir de diagramas de pólos e zeros.** A resposta em freqüência pode ser determinada graficamente a partir do diagrama de pólos e zeros da função de transferência. Considere a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{K(s+z)}{s(s+p)}$$

onde  $p$  e  $z$  são reais. A resposta em freqüência desta função de transferência pode ser obtida de

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega+z)}{j\omega(j\omega+p)}$$

Os fatores  $j\omega + z$ ,  $j\omega$  e  $j\omega + p$  são números complexos, conforme indicado na Fig. 9.4. O módulo de  $G(j\omega)$  é

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \frac{K|j\omega+z|}{|j\omega||j\omega+p|} \\ &= \frac{K|\overline{AP}|}{|\overline{OP}| \cdot |\overline{BP}|} \end{aligned}$$

e o ângulo de fase de  $G(j\omega)$  é

$$\begin{aligned} \underline{|G(j\omega)|} &= |j\omega + z| - |j\omega| - |j\omega + p| \\ &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{z} - 90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{p} \\ &= \phi - \theta_1 - \theta_2 \end{aligned}$$

onde os ângulos  $\phi$  e  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são definidos na Fig. 9.4. Note que uma rotação no sentido anti-horário é definida como o sentido positivo para a medida de ângulo.

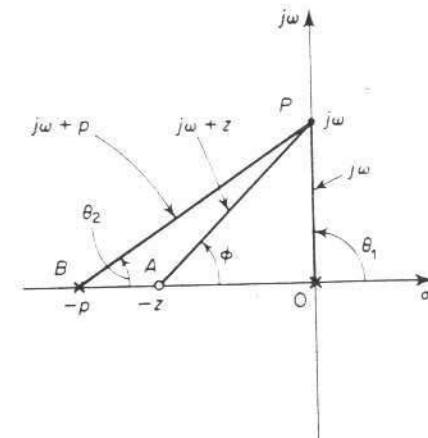


Fig. 9.4 Determinação da resposta em freqüência no plano complexo.

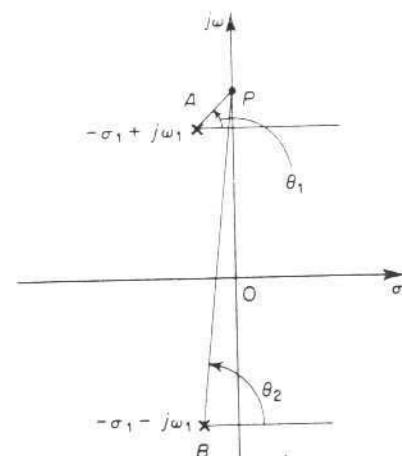


Fig. 9.5 Determinação da resposta em freqüência no plano complexo.

A partir da análise de resposta transitória de sistemas de malha-fechada, sabemos que um par de pólos complexos conjugados próximos ao eixo  $j\omega$  produzirão um tipo altamente oscilatório de resposta transitória. No caso de resposta em freqüência, este par de pólos produzirá uma resposta com um pico altamente significativo.

Considere, por exemplo, a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{K}{(s + p_1)(s + p_2)}$$

onde  $p_1$  e  $p_2$  são complexos conjugados, conforme indicação na Fig. 9.5. A resposta em freqüência desta função de transferência pode ser determinada de

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \frac{K}{|j\omega + p_1||j\omega + p_2|} \\ &= \frac{K}{|\overline{AP}||\overline{BP}|} \\ |G(j\omega)| &= -\theta_1 - \theta_2 \end{aligned}$$

onde os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são definidos na Fig. 9.5. Desde que  $|\overline{AP}||\overline{BP}|$  é muito pequeno próximo a  $\omega = \omega_1$ ,  $|G(j\omega_1)|$  é muito grande. Portanto um par de pólos complexos conjugados próximos ao eixo  $j\omega$  acarretará uma resposta em freqüência com grande valor de pico.

Inversamente, se a resposta em freqüência não apresentar um pico significativo, então a função de transferência não possui pólos complexos conjugados próximos ao eixo  $j\omega$ . Esta função de transferência também não exibirá uma resposta transitória altamente oscilatória. Desde que a resposta em freqüência indiretamente descreve a localização dos pólos e zeros da função de transferência, podemos estimar as características de resposta transitória de um sistema a partir das características de resposta em freqüência. Na Seção 9.7 apresentaremos uma discussão detalhada deste assunto.

## 9.2 GRÁFICOS LOGARÍTMICOS

Esta seção, bem como as duas seguintes são relacionadas principalmente com a apresentação das características de resposta em freqüência de sistemas de controle lineares.

A função de transferência senoidal, uma função complexa da freqüência  $\omega$ , é caracterizada pelo seu módulo e ângulo de fase, com a freqüência como parâmetro. Há três representações comumente utilizadas de funções de transferência senoidais. Elas são

1. gráfico logarítmico ou diagrama de Bode
2. gráfico polar
3. gráfico do log-módulo versus fase

Esta seção apresenta gráficos logarítmicos de funções de transferência senoidais. Gráficos polares e gráficos log-módulo versus fase são apresentados nas Seções 9.3 e 9.4, respectivamente.

**Gráficos logarítmicos ou diagramas de Bode.** Uma função de transferência senoidal pode ser representada por dois gráficos separados, um fornecendo o módulo versus freqüência e outro o ângulo de fase versus freqüência. Um gráfico

logarítmico ou diagrama de Bode consiste em dois gráficos: Um deles é um gráfico do logaritmo do módulo de uma função de transferência senoidal; o outro é um gráfico do ângulo de fase; ambos são construídos em função da freqüência, esta em uma escala logarítmica.

A representação padrão do módulo logarítmico de  $G(j\omega)$  é  $20 \log |G(j\omega)|$ , onde a base do logaritmo é 10. A unidade usada nesta representação do módulo é o decibel, usualmente abreviado db. Na representação logarítmica, as curvas são desenhadas em papel monolog, usando-se a escala log para a freqüência e a escala linear tanto para o módulo (porém em db) como para o ângulo de fase (em graus). (A faixa de freqüência de interesse determina o número de décadas logarítmicas exigidas na abscissa.)

A principal vantagem de usar gráfico logarítmico é que a multiplicação dos módulos é convertida em uma adição. Além disso, é disponível um método simples para esboçar uma curva aproximada do log-módulo. Esta é baseada em aproximações assintóticas. Estas aproximações por retas assintóticas são suficientes somente se for necessária uma informação grosseira das características de resposta em freqüência. Se forem desejadas as curvas exatas, facilmente podem ser feitas as correções nas curvas assintóticas básicas. As curvas de ângulo de fase podem ser facilmente desenhadas se for disponível um modelo para a curva do ângulo de fase de  $1 + j\omega$ .

Note que a determinação experimental de uma função de transferência pode ser realizada de modo simples se os dados de resposta em freqüência estão apresentados na forma de um gráfico logarítmico.

A representação logarítmica é útil pelo fato de que mostra tanto as características de baixa freqüência como aquelas de alta freqüência, para a função de transferência considerada, em um único diagrama. A expansão da faixa de baixa freqüência utilizando uma escala logarítmica para a freqüência é muito vantajosa desde que as características de baixa freqüência são mais importantes em sistemas práticos. (Note que devido à escala de freqüência logarítmica, é impossível construir as curvas para a direita até a freqüência zero; entretanto, isto não cria qualquer problema sério.)

**Fatores básicos de  $G(j\omega)H(j\omega)$ .** Conforme citado anteriormente, a principal vantagem em usar o gráfico logarítmico está na relativa facilidade de desenhar as curvas de resposta em freqüência. Os fatores básicos que mais freqüentemente ocorrem em uma função de transferência arbitrária  $G(j\omega)H(j\omega)$  são:

1. ganho  $K$
2. fatores integral e derivativo  $(j\omega)^{\pm 1}$
3. fatores de primeira-ordem  $(1 + j\omega T)^{\pm 1}$
4. fatores quadráticos  $[1 + 2\xi(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{\pm 1}$

Uma vez familiarizados com os gráficos logarítmicos destes fatores básicos, é possível utilizá-los na construção de gráficos logarítmicos compostos para qualquer forma geral de  $G(j\omega)H(j\omega)$  esboçando-se as curvas para cada fator e adicionando as curvas individuais graficamente, porque a adição dos logaritmos dos ganhos correspondem à multiplicação dos mesmos.

O processo de obtenção do gráfico logarítmico pode ser ainda mais simplificado pelo uso de aproximações assintóticas para as curvas de cada fator. (Se necessário, podem ser feitas correções facilmente em um gráfico aproximado para obter-se um gráfico preciso.)

**O ganho  $K$ .** Um número maior do que a unidade possui um valor positivo em decibéis, enquanto um número menor do que a unidade possui um valor negativo. A curva do log-módulo para um ganho constante  $K$  é uma horizontal de valor  $20 \log K$

db. O ângulo de fase do ganho  $K$  é nulo.\* O efeito da variação do ganho  $K$  na função de transferência é que ele desloca para cima ou para baixo a curva do log-módulo da função de transferência por uma quantidade correspondente constante, não afetando porém o ângulo de fase.

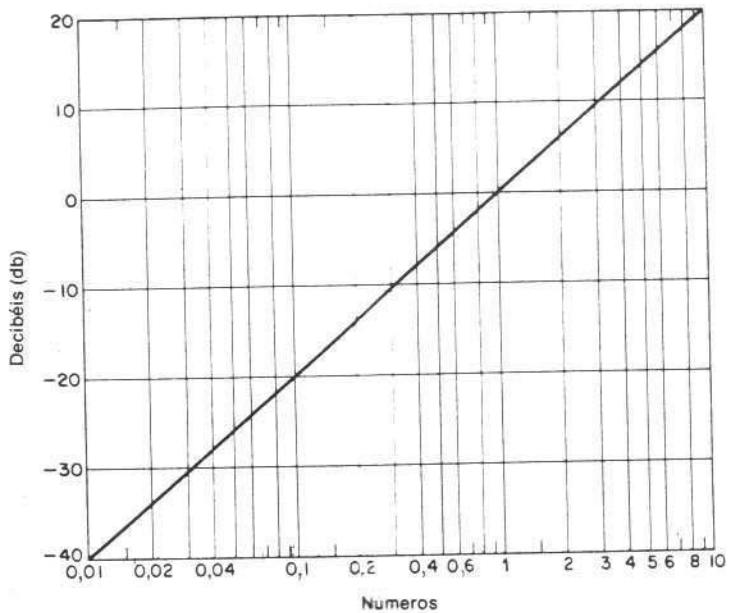


Fig. 9.6 Reta para conversão número-decibel.

Uma reta de conversão número-decibel é fornecida na Fig. 9.6. O valor em decibel de qualquer número pode ser obtido a partir desta reta. Quando um número aumenta por um fator de 10, o valor em decibel correspondente aumenta por um fator de 20. Este resultado pode ser verificado a partir do seguinte:

$$20 \log(K \times 10^n) = 20 \log K + 20n$$

Note que, quando expresso em db, o recíproco de um número difere do seu valor apenas no sinal; isto é, para um número  $K$ ,

$$20 \log K = -20 \log \frac{1}{K}$$

**Fatores integral e derivativo ( $j\omega$ )<sup>±1</sup>.** O módulo logarítmico de  $1/j\omega$  em db é

$$20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \text{ db}$$

O ângulo de fase de  $1/j\omega$  é uma constante e igual a  $-90^\circ$ .

\*N. do T. O autor está considerando  $K > 0$ .

Em gráficos logarítmicos, as relações de freqüências são expressas em termos de oitavas ou décadas. Uma oitava é um intervalo de freqüência desde  $\omega_1$  até  $2\omega_1$ , onde  $\omega_1$  é uma freqüência de qualquer valor. Uma década corresponde a um intervalo de freqüência desde  $\omega_1$  até  $10\omega_1$ , onde, novamente,  $\omega_1$  é qualquer freqüência. (Na escala logarítmica de um papel monograma qualquer relação de freqüência pode ser representada pela mesma distância horizontal. Por exemplo, a distância horizontal desde  $\omega = 1$  até  $\omega = 10$  é igual à distância desde  $\omega = 3$  até  $\omega = 30$ .)

Se o log-módulo  $-20 \log \omega$  db é colocado em um gráfico com  $\omega$  na escala logarítmica, a curva resultante é uma reta. Desde que

$$(-20 \log 10\omega) \text{ db} = (-20 \log \omega - 20) \text{ db}$$

a inclinação da reta é  $-20 \text{ db/década}$  (ou  $-6 \text{ db/oitava}$ ).

Analogamente, o log do módulo de  $j\omega$  em db é

$$20 \log |j\omega| = 20 \log \omega \text{ db}$$

O ângulo de fase de  $j\omega$  é constante e igual a  $90^\circ$ . A curva do log-módulo é uma reta com inclinação de  $20 \text{ db/década}$ . As Figs. 9.7(a) e (b) mostram as curvas de resposta em freqüência para  $1/j\omega$  e  $j\omega$ , respectivamente. Podemos verificar facilmente que as diferenças nas curvas de resposta em freqüência dos fatores  $1/j\omega$  e  $j\omega$  correspondem aos sinais das inclinações das curvas do log-módulo e aos sinais dos ângulos de fase. Ambas as curvas dos logs dos módulos tornam-se iguais a 0 db para  $\omega = 1$ .

Se a função de transferência contém o fator  $(1/j\omega)^n$  ou  $(j\omega)^n$ , o log do módulo

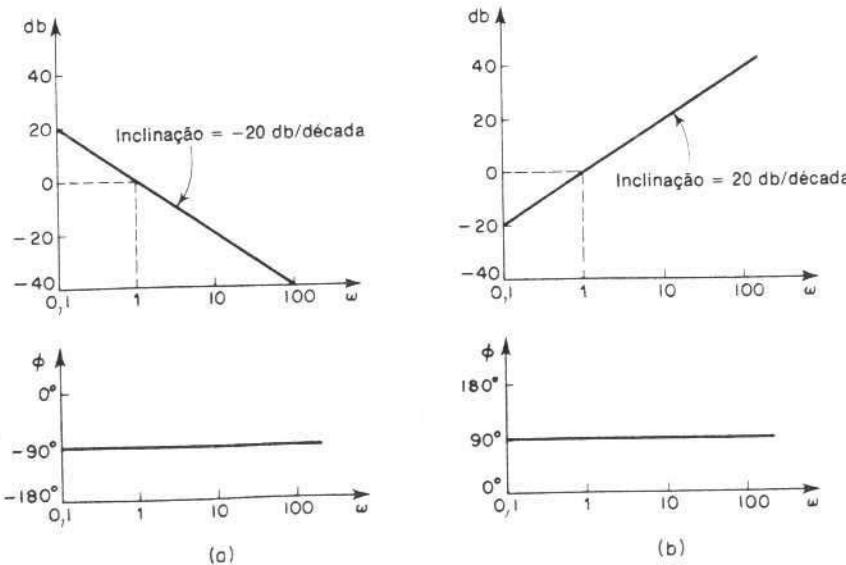


Fig. 9.7 (a) Curvas de resposta em freqüência de  $1/j\omega$ ; (b) curvas de resposta em freqüência de  $j\omega$ .

resulta, respectivamente, em

$$20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)^n} \right| = -n \times 20 \log |j\omega| = -20n \log \omega \text{ db}$$

ou

$$20 \log |(j\omega)^n| = n \times 20 \log |j\omega| = 20n \log \omega \text{ db}$$

As inclinações das curvas dos log-módulos para os fatores  $(1/j\omega)^n$  e  $(j\omega)^n$  são então  $-20n$  db/década e  $20n$  db/década, respectivamente. O ângulo de fase de  $(1/j\omega)^n$  é igual a  $-90^\circ \times n$  em toda a faixa de freqüência, enquanto que para  $(j\omega)^n$  é igual a  $90^\circ \times n$  em toda a faixa de freqüência.

**Fatores de primeira-ordem**  $(1 + j\omega T)^{-1}$ . O log do módulo do fator de primeira-ordem  $1/(1 + j\omega T)$  é

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \text{ db}$$

Para baixas freqüências, tais como  $\omega \ll 1/T$ , o log do módulo pode ser aproximado por

$$-20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \doteq -20 \log 1 = 0 \text{ db}$$

Portanto, a curva do log-módulo em baixas freqüências é a reta constante 0-db. Para altas freqüências, tais como  $\omega \gg 1/T$ ,

$$-20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \doteq -20 \log \omega T \text{ db}$$

Esta é uma expressão aproximada para a faixa de altas freqüências. Em  $\omega = 1/T$ , o log do módulo é igual a 0 db; em  $\omega = 10/T$ , o log do módulo é -20 db. Portanto, o valor de  $-20 \log \omega T$  db decresce de 20 db para cada década de  $\omega$ . Para  $\omega \gg 1/T$ , a curva do log-módulo é uma reta com inclinação de -20 db/década (ou -6 db/oitava).

A análise anterior mostra que a representação logarítmica da curva de resposta em freqüência do fator  $1/(1 + j\omega T)$  pode ser aproximada por duas retas assintóticas, uma reta em 0 db para a faixa de freqüência  $0 < \omega < 1/T$ , e uma outra reta com inclinação -20 db/década (ou -6 db/oitava) para a faixa de freqüência  $1/T < \omega < \infty$ . A curva exata do log-módulo, as assintotas, e a curva exata do ângulo de fase são mostradas na Fig. 9.8.

A freqüência na qual as duas assintotas se interceptam é denominada freqüência de canto ou freqüência de mudança de inclinação ("quebra"). Para o fator  $1/(1 + j\omega T)$ , a freqüência  $\omega = 1/T$  é a freqüência de canto desde que em  $\omega = 1/T$  as duas assintotas possuem o mesmo valor. (A expressão assintótica em baixa-freqüência em  $\omega = 1/T$  é  $20 \log 1 \text{ db} = 0 \text{ db}$  e a expressão assintótica de alta-freqüência em  $\omega = 1/T$  é também  $20 \log 1 \text{ db} = 0 \text{ db}$ .) A freqüência de canto divide a curva de resposta em freqüência em duas regiões, uma curva para a região de baixa-freqüência e uma curva para a região de alta-freqüência. A freqüência de canto é muito importante para o esboço de curvas de resposta em freqüência logarítmicas.

O ângulo de fase exato  $\phi$  do fator  $1/(1 + j\omega T)$  é

$$\phi = -\operatorname{tg}^{-1} \omega T$$

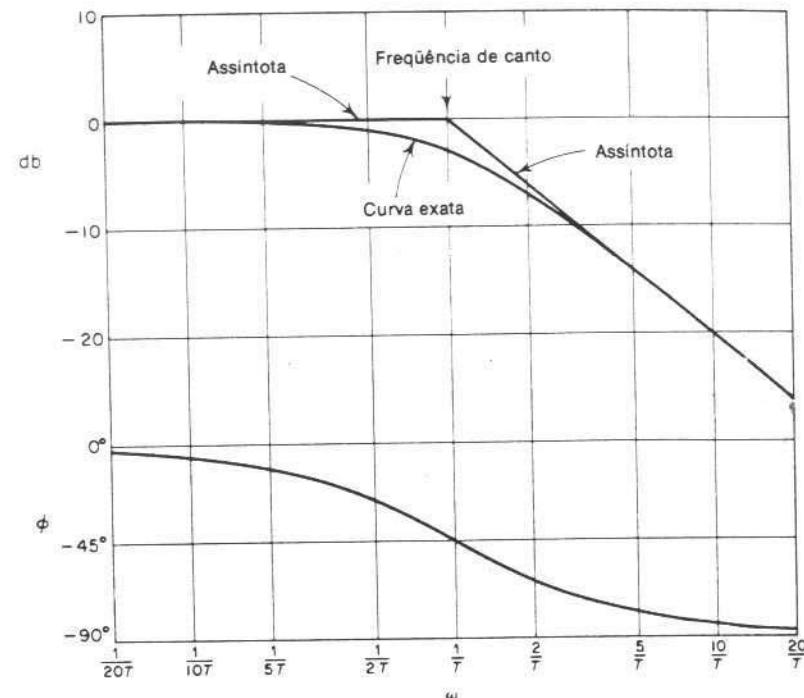


Fig. 9.8 Curva do log-módulo conjuntamente com as assintotas e curvas do ângulo de fase de  $1/(1 + j\omega T)$ .

Na freqüência zero, o ângulo de fase é  $0^\circ$ . Na freqüência de canto, o ângulo de fase é

$$\phi = -\operatorname{tg}^{-1} \frac{T}{\omega} = -\operatorname{tg}^{-1} 1 = -45^\circ$$

No infinito, o ângulo de fase torna-se  $-90^\circ$ . Desde que o ângulo de fase é dado por uma função inversa da tangente, o ângulo de fase é anti-simétrico em relação ao ponto de inflexão em  $\phi = -45^\circ$ .

O erro na curva de módulo causado pelo uso de assintotas pode ser calculado. O erro máximo ocorre na freqüência de canto e é aproximadamente igual a -3 db desde que

$$-20 \log \sqrt{1 + 1} + 20 \log 1 = -10 \log 2 = -3,03 \text{ db}$$

O erro na freqüência uma oitava abaixo da freqüência de canto, isto é, em  $\omega = 1/2T$ , é

$$-20 \log \sqrt{\frac{1}{4} + 1} + 20 \log 1 = -20 \log \frac{\sqrt{5}}{2} = -0,97 \text{ db}$$

Erro na freqüência uma oitava acima da freqüência de canto, isto é, em  $\omega = 2/T$ , é

$$-20 \log \sqrt{2^2 + 1} + 20 \log 2 = -20 \log \frac{\sqrt{5}}{2} = -0,97 \text{ db}$$

Portanto, o erro em uma oitava abaixo ou acima da freqüência de canto é aproximadamente igual a  $-1 \text{ db}$ . Analogamente, o erro em uma década abaixo ou acima da freqüência de canto é aproximadamente  $-0,04 \text{ db}$ . O erro em decibéis envolvido no uso da expressão assintótica para a curva de resposta em freqüência de  $1/(1 + j\omega T)$  é indicado na Fig. 9.9. O erro é simétrico em relação à freqüência de canto.

Desde que as assintotas são muito fáceis de desenhar e suficientemente próximas da curva exata, o uso destas aproximações nos desenhos dos diagramas de Bode é conveniente para estabelecer a natureza geral das características de resposta em freqüência rapidamente e com um mínimo de cálculo, podendo ser utilizado para muitos trabalhos de projeto preliminares. Se forem desejadas as curvas precisas de resposta em freqüência, podem ser feitas as correções facilmente, referindo-se à curva fornecida na Fig. 9.9. Na prática, uma curva precisa de resposta em freqüência pode ser desenhada localizando-se o ponto de  $-3 \text{ db}$  na freqüência de canto e os pontos de  $-1 \text{ db}$  uma oitava acima e abaixo da freqüência de canto e então ligando estes pontos por uma curva suave.

Note que uma variação na constante de tempo  $T$  desloca a freqüência de canto para a direita ou para a esquerda, porém as formas das curvas do log-módulo e do ângulo de fase permanecem as mesmas.

A função de transferência  $1/(1 + j\omega T)$  possui as características de um filtro passa-baixas. Para freqüências acima de  $\omega = 1/T$ , o log do módulo cai rapidamente para  $-\infty$ . Este resultado é devido essencialmente à presença da constante de tempo. No filtro passa-baixas, a saída pode seguir uma entrada senoidal muito precisamente em baixas freqüências. Porém, conforme a freqüência de entrada é aumentada, a saída não pode seguir a entrada porque é necessário um certo intervalo de tempo para o sistema atingir o valor necessário. Portanto, em altas freqüências, a amplitude da saída tende a zero e o ângulo de fase da saída tende a  $-90^\circ$ . Portanto, se a função de entrada contém muitas harmônicas, então as componentes de baixas freqüências são bem reproduzidas na saída, enquanto as componentes de altas freqüências são atenuadas em amplitude e defasadas. Portanto, um

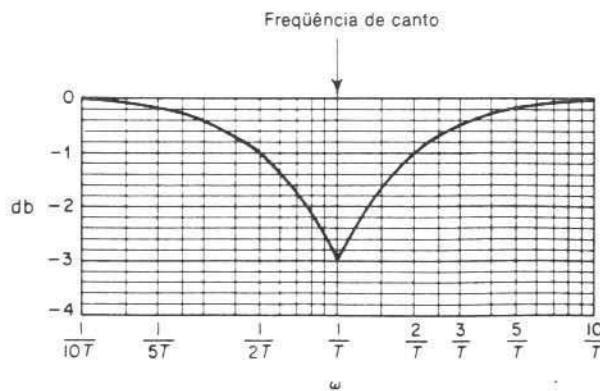


Fig. 9.9 Erro do log-módulo na expressão assintótica da curva de resposta em freqüência de  $1/(1 + j\omega T)$ .

elemento de primeira-ordem fornece uma réplica exata, ou quase exata, apenas para fenômenos constantes ou lentamente variáveis.

Uma vantagem da representação logarítmica é que para fatores reciprocos, por exemplo, o fator  $1 + j\omega T$ , as curvas do log-módulo e do ângulo de fase necessitam apenas trocar de sinal. Desde que

$$20 \log |1 + j\omega T| = -20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right|$$

$$\frac{1}{1 + j\omega T} = \operatorname{tg}^{-1} \omega T = -\frac{1}{1 + j\omega T}$$

a freqüência de canto é a mesma em ambos os casos. A inclinação da assintota de alta freqüência de  $1 + j\omega T$  é  $20 \text{ db/década}$ , e o ângulo de fase varia desde  $0^\circ$  até  $90^\circ$  conforme a freqüência  $\omega$  aumenta desde 0 até infinito. A curva do log-módulo, juntamente com as assintotas e a curva ângulo de fase para o fator  $1 + j\omega T$  são indicadas na Fig. 9.10.

Os formatos das curvas do ângulo de fase são os mesmos para qualquer fator da forma  $(1 + j\omega T)^{-1}$ . Portanto, é conveniente possuir um modelo para a curva do ângulo de fase à disposição. Este modelo deve ser usado repetidamente para construção das curvas do ângulo de fase para qualquer função da forma  $(1 + j\omega T)^{-1}$ . Se este modelo não for disponível, devemos localizar alguns pontos da curva. Os ângulos de fase de  $(1 + j\omega T)^{-1}$  são

$\mp 45^\circ$	em	$\omega = \frac{1}{T}$
$\mp 26,6^\circ$	em	$\omega = \frac{1}{2T}$
$\mp 5,7^\circ$	em	$\omega = \frac{1}{10T}$
$\mp 63,4^\circ$	em	$\omega = \frac{2}{T}$
$\mp 84,3^\circ$	em	$\omega = \frac{10}{T}$

Para o caso no qual uma dada função de transferência envolve termos do tipo  $(1 + j\omega T)^{\pm n}$ , pode ser feita uma construção assintótica similar. A freqüência de canto ainda é em  $\omega = 1/T$ , e as assintotas são retas. A assintota de baixa freqüência é uma reta horizontal em 0 dB, enquanto a assintota de alta freqüência possui a inclinação  $-20n \text{ db/década}$  ou  $20n \text{ db/década}$ . O erro envolvido nas expressões assintóticas é  $n$  vezes o correspondente a  $(1 + j\omega T)^{-1}$ . O ângulo de fase é  $n$  vezes aquele de  $(1 + j\omega T)^{-1}$  em cada freqüência.

**Fatores quadráticos**  $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$ . Sistemas de controle normalmente possuem fatores quadráticos da forma

$$\frac{1}{1 + 2\zeta \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad (9-7)$$

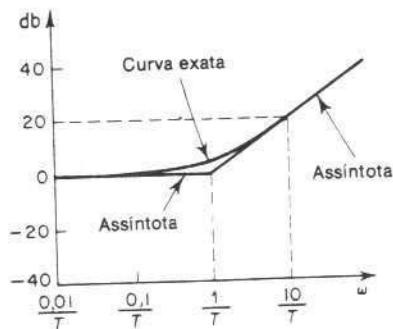


Fig. 9.10 Curva do log-módulo conjuntamente com as assintotas e curvas do ângulo de fase de  $1 + j\omega T$ .

Se  $\zeta > 1$ , este fator quadrático pode ser expresso como um produto de dois fatores de primeira-ordem com pólos reais. Se  $0 < \zeta < 1$ , este fator quadrático é o produto de dois fatores complexos conjugados. As aproximações assintóticas para as curvas de resposta em freqüência não são precisas para um fator com baixos valores de  $\zeta$ , pois tanto o módulo como o ângulo de fase do fator quadrático dependem da freqüência de canto e da relação de amortecimento  $\zeta$ .

A curva de resposta em freqüência assintótica pode ser obtida como segue:  
Desde que

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + 2\zeta \left( j\frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left( j\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right| \\ = -20 \log \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left( 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

para baixas freqüências tais que  $\omega \ll \omega_n$ , o log do módulo resulta em

$$-20 \log 1 = 0 \text{ db}$$

A assintota de baixa freqüência é portanto uma reta horizontal em 0 db. Para altas freqüências tais que  $\omega \gg \omega_n$ , o log do módulo resulta em

$$-20 \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \text{ db}$$

A equação para a assintota de alta freqüência é uma reta possuindo a inclinação  $-40 \text{ db/decada}$  desde que

$$-40 \log \frac{10\omega}{\omega_n} = -40 - 40 \log \frac{\omega}{\omega_n}$$

A assintota de alta freqüência intercepta a de baixa freqüência em  $\omega = \omega_n$  desde que nesta freqüência

$$-40 \log \frac{\omega}{\omega_n} = -40 \log 1 = 0 \text{ db}$$

Esta freqüência é a freqüência de canto do fator quadrático considerado.

As duas assintotas que acabamos de deduzir são independentes do valor de  $\zeta$ . Próximo à freqüência  $\omega = \omega_n$ , ocorre um pico de ressonância, conforme pode ser esperado a partir de (9.7). A relação de amortecimento  $\zeta$  determina a amplitude deste pico de ressonância. Portanto, existem obviamente erros na aproximação pelas assintotas. O valor do erro depende do valor de  $\zeta$ . Será grande para pequenos valores de  $\zeta$ . A Fig. 9.11 fornece as curvas exatas do log do módulo conjuntamente com as assintotas e as curvas do ângulo de fase para o fator quadrático dado em (9.7) para alguns valores de  $\zeta$ . Se forem desejadas correções nas curvas assintóticas, a correção necessária em um número suficiente de freqüências pode ser obtida a partir da Fig. 9.11.

O ângulo de fase do fator quadrático  $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$  é

$$\phi = \frac{1}{1 + 2\zeta \left( j\frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left( j\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} = - \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right] \quad (9.8)$$

O ângulo de fase é uma função tanto de  $\omega$  como de  $\zeta$ . Em  $\omega = 0$ , o ângulo de fase é igual a  $0^\circ$ . Na freqüência de canto  $\omega = \omega_n$ , o ângulo de fase é  $-90^\circ$  independentemente de  $\zeta$ , desde que

$$\phi = - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{2\zeta}{0} \right) = - \operatorname{tg}^{-1} \infty = -90^\circ$$

Em  $\omega = \infty$ , o ângulo de fase resulta  $-180^\circ$ . A curva do ângulo de fase é anti-simétrica em relação ao ponto de inflexão, o ponto onde  $\phi = -90^\circ$ .

As curvas de resposta em freqüência para o fator

$$1 + 2\zeta \left( j\frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left( j\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2$$

podem ser obtidas simplesmente invertendo-se o sinal daquelas do log do módulo e das curvas do ângulo de fase do fator

$$\frac{1}{1 + 2\zeta \left( j\frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left( j\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

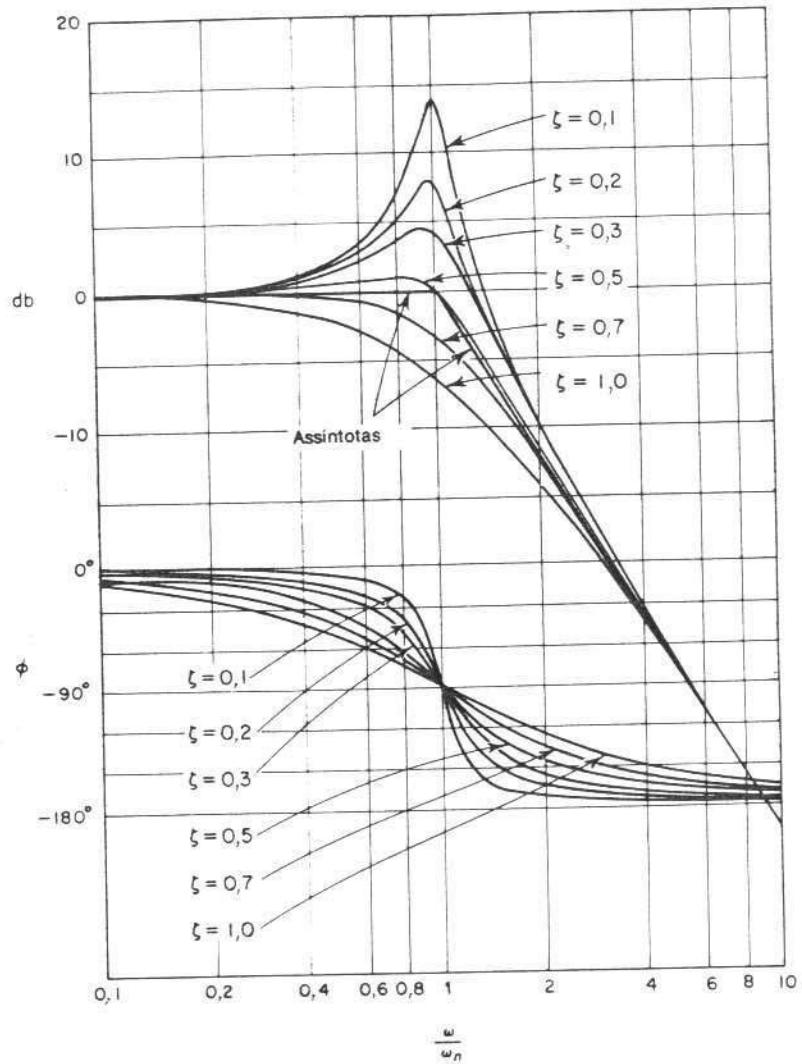


Fig. 9.11 Curvas do log-módulo conjuntamente com as assíntotas e curvas do ângulo de fase da função de transferência quadrática por (9.7).

Para obter as curvas de resposta em freqüência de uma dada função de transferência quadrática, devemos inicialmente determinar o valor da freqüência de canto  $\omega_n$  e da relação de amortecimento  $\zeta$ . Então, usando a família de curvas fornecida na Fig. 9.11, podem-se construir as curvas de resposta em freqüência.

**A freqüência de ressonância  $\omega_r$  e o valor do pico de ressonância  $M_r$ .** O módulo de

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

é

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (9-9)$$

Se  $|G(j\omega)|$  possui um valor de pico em alguma freqüência, esta freqüência é denominada a freqüência de *ressonância*. Desde que o numerador de  $|G(j\omega)|$  é constante, ocorrerá um valor de pico de  $|G(j\omega)|$  quando

$$g(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \quad (9-10)$$

é um mínimo. Desde que a Eq. (9.10) pode ser escrita

$$g(\omega) = \left[\frac{\omega^2 - \omega_n^2(1 - 2\zeta^2)}{\omega_n^2}\right]^2 + 4\zeta^2(1 - \zeta^2) \quad (9-11)$$

o valor mínimo de  $g(\omega)$  ocorre em  $\omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ . Portanto, a freqüência de ressonância  $\omega_r$  é

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (0 \leq \zeta \leq 0,707) \quad (9-12)$$

Conforme a relação de amortecimento  $\zeta$  tende a zero, a freqüência de ressonância tende a  $\omega_n$ . Para  $0 < \zeta \leq 0,707$ , a freqüência de ressonância  $\omega_r$  é menor do que a freqüência natural amortecida  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ , que é exibida na resposta transitória. Da Eq. (9.11) pode-se observar que, para  $\zeta > 0,707$ , não há pico de ressonância. Para  $\zeta > 0,707$ , o módulo  $|G(j\omega)|$  decresce monotonicamente com o aumento na freqüência  $\omega$ . Isto significa que não há pico na curva de módulo para  $\zeta > 0,707$ . (O módulo é menor do que 0 db para todos os valores de  $\omega > 0$ . Lembre-se que, para  $0,7 < \zeta < 1$ , a resposta ao degrau é oscilatória, porém as oscilações são bastante amortecidas e pouco perceptíveis.)

O valor do pico de ressonância  $M_r$  pode ser determinado substituindo-se a Eq. (9.12) na Eq. (9.9). Para  $0 \leq \zeta \leq 0,707$ ,

$$M_r = |G(j\omega)|_{\max.} = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (9-13)$$

Para  $\zeta > 0,707$ ,

$$M_r = 1 \quad (9-14)$$

Conforme  $\zeta$  tende a zero,  $M_r$  tende a infinito. Isto significa que se o sistema não amortecido for excitado em sua freqüência natural, o módulo de  $G(j\omega)$  torna-se infinito. A relação entre  $M_r$  e  $\zeta$  é indicada na Fig. 9.12.

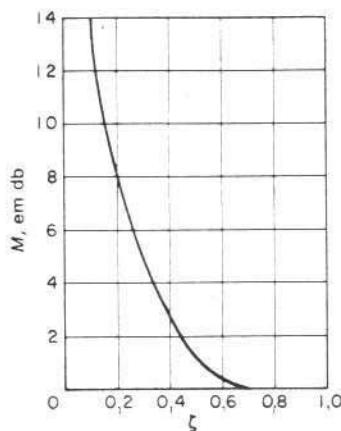


Fig. 9.12 Curva  $M$ , versus  $\zeta$  para o sistema de segunda-ordem  $1/[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]$ .

O ângulo de fase de  $G(j\omega)$  na frequência onde ocorre o pico de ressonância pode ser obtido substituindo-se a Eq. (9.12) na Eq. (9.8). Portanto, na frequência de ressonância  $\omega_r$ ,

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega_r) &= -\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{\zeta} \\ &= -90^\circ + \sin^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \end{aligned}$$

**Procedimento geral para construção das curvas logarítmicas de resposta em frequência.** Inicialmente reescreva a função de transferência senoidal  $G(j\omega) H(j\omega)$  como um produto dos fatores básicos anteriormente discutidos. Identifique então as frequências de canto associadas com estes fatores básicos. Finalmente desenhe as curvas assintóticas do log-módulo, com inclinações apropriadas entre as frequências de canto. A curva exata, situada muito próxima à curva assintótica, pode ser obtida efetuando-se as correções apropriadas.

A curva do ângulo de fase de  $G(j\omega)H(j\omega)$  pode ser desenhada adicionando-se as curvas dos ângulos de fase dos fatores individuais.

O uso dos gráficos logarítmicos empregando aproximações assintóticas necessita um tempo muito menor do que os outros métodos que podem ser utilizados para determinação da resposta em frequência de uma função de transferência. A facilidade de construção das curvas de resposta em frequência para uma dada função de transferência e a facilidade de modificação da curva de resposta em frequência, conforme é adicionada uma compensação, constituem as principais razões do uso muito comum na prática destes gráficos logarítmicos.

*Exemplo 9.2* Desenhe um diagrama de blocos para a seguinte função de transferência:

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 3)}{(j\omega)(j\omega + 2)[(j\omega)^2 + j\omega + 2]}$$

Efetue correções de modo que a curva do log-módulo seja precisa.

De modo a evitar quaisquer erros possíveis na construção da curva do log-módulo, é desejável colocar  $G(j\omega)$  na forma normalizada seguinte, onde as assintotas de baixa frequência para os fatores de primeira-ordem e para o fator de segunda-ordem correspondem à reta de 0-db.

$$G(j\omega) = \frac{7,5 \left( \frac{j\omega}{3} + 1 \right)}{\left( j\omega \left( \frac{j\omega}{2} + 1 \right) \right) \left[ \left( \frac{j\omega}{2} \right)^2 + \frac{j\omega}{2} + 1 \right]}$$

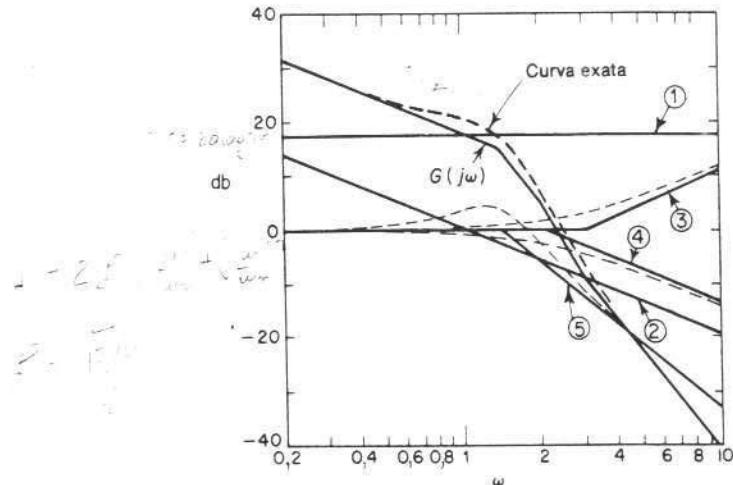


Fig. 9.13 Diagrama de Bode do sistema considerado no Exemplo 9.2.

Esta função é composta pelos seguintes fatores:

$$7,5, \quad (j\omega)^{-1}, \quad 1 + j\frac{\omega}{3}, \quad \left(1 + j\frac{\omega}{2}\right)^{-1} \quad \left[1 + j\frac{\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2}\right]^{-1}$$

As freqüências de canto do terceiro, quarto e quinto termos são  $\omega = 3$ ,  $\omega = 2$  e  $\omega = \sqrt{2}$ , respectivamente.

Para construir o diagrama de Bode, as curvas assintóticas separadas para cada um dos fatores são mostradas na Fig. 9.13. A curva composta é então obtida adicionando-se algebraicamente as curvas individuais, também mostrada na Fig. 9.13. Note que quando as curvas assintóticas individuais são adicionadas em cada freqüência, a inclinação da curva composta é acumulativa. Abaixo de  $\omega = \sqrt{2}$ , o gráfico possui a inclinação de  $-20 \text{ db/década}$ . Na primeira freqüência de canto  $\omega = \sqrt{2}$ , a inclinação muda para  $-60 \text{ db/década}$  e continua com esta inclinação até a próxima freqüência de canto em  $\omega = 2$ , onde a inclinação torna-se  $-80 \text{ db/década}$ . Na última freqüência de canto  $\omega = 3$ , a inclinação muda para  $-60 \text{ db/década}$ .

Uma vez desenhada a curva aproximada do log-módulo, pode ser obtida a curva real adicionando-se as correções em cada freqüência de canto e nas freqüências uma oitava acima e acima das freqüências de canto. Para os fatores de primeira-ordem  $(1 + j\omega T)^{-1}$ , as correções são  $\pm 3 \text{ db}$  da freqüência de canto e  $\pm 1 \text{ db}$  nas freqüências correspondentes a uma oitava acima e abaixo da freqüência de canto. As correções necessárias para o fator quadrático são obtidas da Fig. 9.11. A curva exata do log-módulo para  $G(j\omega)$  é indicada por uma linha tracejada na Fig. 9.13.

Para a construção da curva completa do ângulo de fase, devem ser esboçadas as curvas do ângulo de fase para todos os fatores. A soma algébrica das curvas do ângulo de fase resulta na curva completa do ângulo de fase, conforme indicado na Fig. 9.13.

A simplicidade da construção do diagrama de Bode deve estar agora aparente. Após adquirir prática na construção de diagramas de Bode não é necessário construir as assintotas para cada um dos fatores envolvidos na função de transferência. Podemos desenhar diretamente as curvas compostas, assintóticas, do log-módulo somando mentalmente as assintotas para cada um dos fatores.

**Sistemas de fase mínima e sistemas de fase não-mínima.** Funções de transferência que não possuem pólos ou zeros no semiplano direito do plano  $s$  são funções de transferência de mínima fase; por outro lado, as funções de transferência que possuem pólos e/ou zeros no semiplano direito são funções de transferência de fase não-mínima. Os sistemas com funções de transferência com mínima fase são denominados sistemas de mínima fase; por outro lado, aqueles com funções de transferência de fase não-mínima são denominados sistemas de fase não-mínima.

Para sistemas com as mesmas características de módulo, a faixa no ângulo de fase da função de transferência de fase mínima é mínima para todos estes sistemas, enquanto a faixa no ângulo de fase de qualquer função de transferência de fase não-mínima é maior do que aquele mínimo.

Considere, como um exemplo, os dois sistemas cujas funções de transferência senoidais são, respectivamente,

$$G_1(j\omega) = \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega T_1}, \quad G_2(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T_1} \quad (0 < T < T_1)$$

As configurações de pólos e zeros destes sistemas são indicadas na Fig. 9.14. As duas funções de transferência senoidais possuem as mesmas características de módulo, porém as características do ângulo de fase são diferentes, conforme indicado na Fig. 9.15. Estes dois sistemas diferem entre si pelo fator

$$G(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T}$$

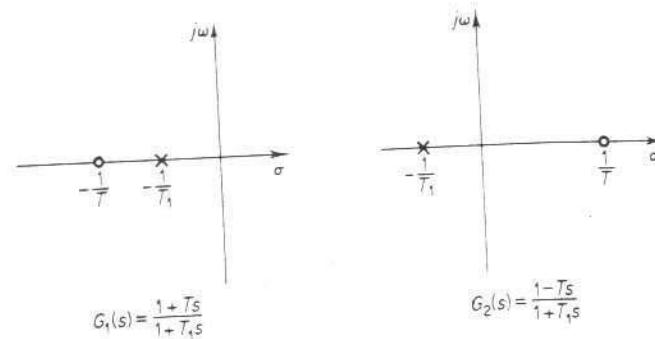


Fig. 9.14 Configurações de pôlo-zero de um sistema de fase mínima  $G_1(s)$  e um sistema de fase não-mínima  $G_2(s)$ .

O módulo do fator  $(1 - j\omega T)/(1 + j\omega T)$  é sempre unitário. Porém, o ângulo de fase é igual a  $-2 \operatorname{tg}^{-1} \omega T$  e varia desde 0 até  $-180^\circ$  conforme a freqüência varia desde zero até infinito.

Para um sistema de fase mínima, as características de módulo de ângulo e de fase são diretamente relacionadas. Isto significa que se a curva de módulo de um sistema for especificada em todas as freqüências desde zero até infinito, então a curva do ângulo de fase é unicamente determinada, e vice-versa. Isto, entretanto, não é verdade para um sistema de fase não-mínima.

As situações de fase não-mínima podem surgir através de dois modos diferentes. Um deles é simplesmente quando um sistema inclui um elemento, ou elementos, de fase não-mínima. A outra situação resulta nos casos onde um laço menor é instável.

Para um sistema de fase mínima, o ângulo de fase em  $\omega = \infty$  é igual a  $-90^\circ (q - p)$ , onde  $p$  e  $q$  são os graus dos polinômios do numerador e denominador da função de transferência, respectivamente. Para um sistema de fase não-mínima, o ângulo de fase em  $\omega = \infty$  difere de  $-90^\circ (q - p)$ . Em qualquer sistema, a inclinação da curva do log-módulo em  $\omega = \infty$  é igual a  $-20(q - p) \text{ db/década}$ . É portanto possível detectar se o sistema é ou não de mínima fase examinando-se a inclinação da assintota em alta freqüência da curva log-módulo e o ângulo de fase em  $\omega = \infty$ . Se a

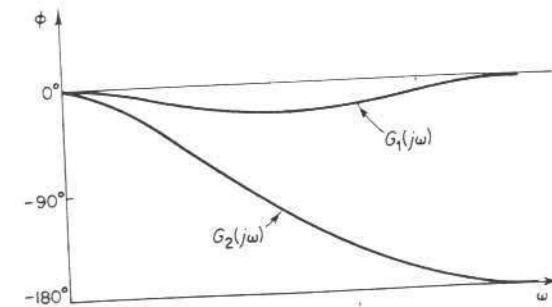


Fig. 9.15 Características do ângulo de fase dos sistemas  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$  indicados na Fig. 9.14.

inclinação da curva do log-módulo, conforme a freqüência tende a infinito, for  $-20(q - p)$  db/década e o ângulo de fase em  $\omega = \infty$  é igual a  $-90^\circ(q - p)$ , então o sistema é de mínima fase.

Sistemas de fase não-mínima são lentos em resposta em virtude de seus comportamentos defeituosos no início da resposta. Em muitos sistemas de controles práticos, devem ser cuidadosamente evitados atrasos de fase excessivos. No projeto de um sistema, se a velocidade rápida de resposta é de fundamental importância, não deveremos usar componentes de fase não-mínima. (Um exemplo comum de elementos de fase não-mínima que podem estar presentes em sistemas de controle é o atraso de transporte.)

Deve-se notar que as técnicas de análise e projeto de resposta em freqüência a serem apresentadas neste e no próximo capítulo são válidas tanto para sistemas de fase mínima como para sistemas de fase não-mínima.

**Atraso de transporte.** O atraso de transporte é um comportamento de fase não-mínima e possui um atraso de fase excessivo sem atenuação em altas freqüências. Considere o atraso de transporte dado por

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T}$$

O módulo é sempre igual à unidade desde que

$$|G(j\omega)| = |\cos \omega T - j \sin \omega T| = 1$$

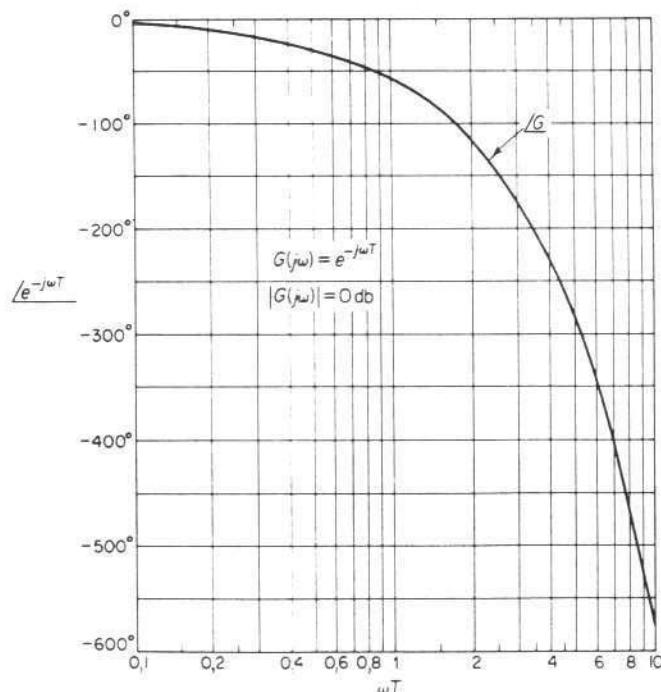


Fig. 9.16 Característica do ângulo de fase do atraso de transporte.

Portanto, o log do módulo do atraso de transporte  $e^{-j\omega T}$  é igual a 0 db. O ângulo de fase do atraso de transporte é

$$\begin{aligned}|G(j\omega)| &= -\omega T \quad (\text{radianos}) \\ &= -57,3 \omega T \quad (\text{graus})\end{aligned}$$

O ângulo de fase varia linearmente com a freqüência  $\omega$ . A característica do ângulo de fase do atraso de transporte é indicada na Fig. 9.16.

*Exemplo 9.3* Desenhe o diagrama de Bode da seguinte função de transferência:

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T}$$

O log do módulo é

$$\begin{aligned}20 \log |G(j\omega)| &= 20 \log |e^{-j\omega L}| + 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| \\ &= 0 + 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right|\end{aligned}$$

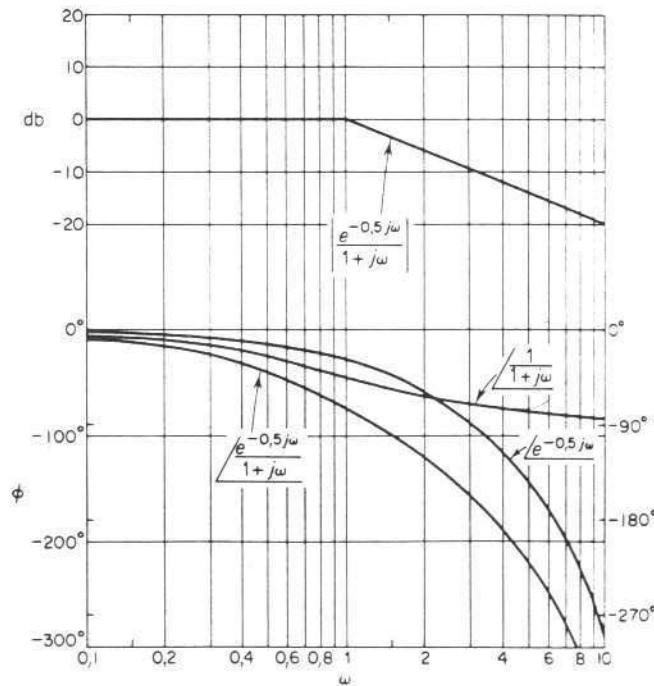


Fig. 9.17 Diagrama de Bode para o sistema  $e^{-j\omega L}/(1 + j\omega T)$  com  $L = 0.5$  e  $T = 1$ .

O ângulo de fase de  $G(j\omega)$  é

$$\begin{aligned}|G(j\omega)| &= \frac{|e^{-j\omega L}|}{|1 + j\omega T|} = \frac{1}{1 + j\omega T} \\&= -\omega L - \tan^{-1} \omega T\end{aligned}$$

As curvas do log-módulo e ângulo de fase para esta função de transferência com  $L = 0.5$  e  $T = 1$  são mostradas na Fig. 9.17.

**Relação entre o tipo do sistema e a curva do log-módulo.** Os coeficientes de erro de posição, velocidade e aceleração estáticos descrevem o comportamento em baixa-freqüência dos sistemas tipo 0, tipo 1 e tipo 2, respectivamente. Para um dado sistema, somente um dos coeficientes de erro estáticos é finito e significativo. (Quanto maior o valor do coeficiente de erro estático finito, maior será o ganho de malha conforme  $\omega$  tende a zero.)

O tipo do sistema determina a inclinação da curva do log-módulo em baixas freqüências. Portanto, a informação relativa à existência e amplitude do erro em regime estacionário de um sistema de controle, para uma dada entrada, pode ser determinada a partir da observação da região de baixa freqüência na curva do log-módulo.

**Determinação do coeficiente de erro de posição estático.** A Fig. 9.18 mostra um exemplo do gráfico do log-módulo para um sistema tipo 0. Nos sistemas deste tipo, o módulo de  $G(j\omega)H(j\omega)$  é igual a  $K_p$  em baixas freqüências, ou

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega)H(j\omega) = K_p$$

Segue-se que a assintota em baixa-freqüência é uma reta horizontal em  $20 \log K_p$  db.

**Determinação do coeficiente de erro de velocidade estático.** A Fig. 9.19 mostra um exemplo do gráfico do log-módulo de um sistema tipo 1. A intersecção do segmento inicial  $-20$ -db/década (ou seu prolongamento) com a reta  $\omega = 1$  tem a

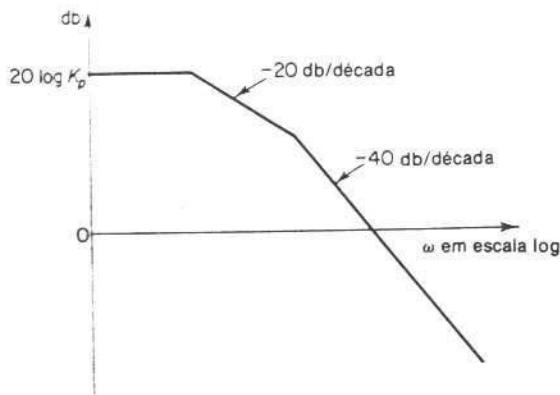


Fig. 9.18 Curva log-módulo de um sistema tipo 0.

ordenada  $20 \log K_r$ . Este resultado pode ser verificado da seguinte maneira: Em um sistema tipo 1,

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K_r}{j\omega} \quad \text{para } \omega \ll 1$$

Portanto,

$$20 \log \left| \frac{K_r}{j\omega} \right|_{\omega=1} = 20 \log K_r$$

A intersecção do segmento inicial  $-20$ -db/década (ou seu prolongamento) com a reta de 0-db possui uma freqüência numericamente igual a  $K_r$ . Para verificar este resultado, vamos definir a freqüência nesta intersecção como sendo  $\omega_1$ ; então,

$$\left| \frac{K_r}{j\omega_1} \right| = 1$$

ou

$$K_r = \omega_1$$

Por exemplo, considere o sistema tipo 1 com realimentação unitária cuja função de transferência de malha-aberta é

$$G(s) = \frac{K}{s(Js + F)}$$

Se definirmos a freqüência de canto como  $\omega_2$  e a freqüência na intersecção do segmento  $-40$ -db/década (ou seu prolongamento) com a reta de 0-db como  $\omega_3$ , então

$$\omega_2 = \frac{F}{J}, \quad \omega_3^2 = \frac{K}{J}$$

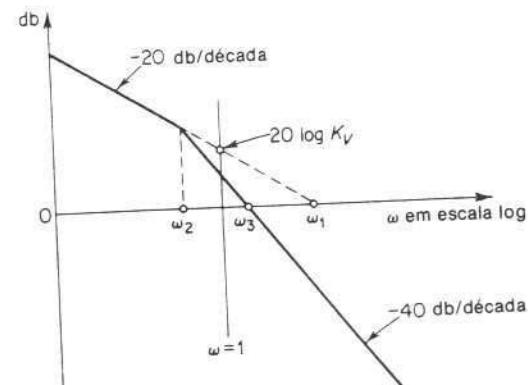


Fig. 9.19 Curva log-módulo de um sistema tipo 1.

Desde que

$$\omega_1 = K_v = \frac{K}{F}$$

segue que

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_3^2$$

ou

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\omega_3}{\omega_2}$$

No gráfico logarítmico,

$$\log \omega_1 - \log \omega_3 = \log \omega_3 - \log \omega_2$$

Portanto, o ponto  $\omega_3$  é o ponto médio entre os pontos  $\omega_2$  e  $\omega_1$ . A relação de amortecimento  $\zeta$  do sistema é, então,

$$\zeta = \frac{F}{2\sqrt{KJ}} = \frac{\omega_2}{2\omega_3}$$

**Determinação do coeficiente de erro de aceleração estático.** A Fig. 9.20 mostra um exemplo do gráfico do log-módulo para um sistema tipo 2. A intersecção do segmento inicial -40-db/década (ou seu prolongamento) com a reta  $\omega = 1$  possui a ordenada  $20 \log K_a$ . Desde que em baixas freqüências

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K_a}{(j\omega)^2}$$

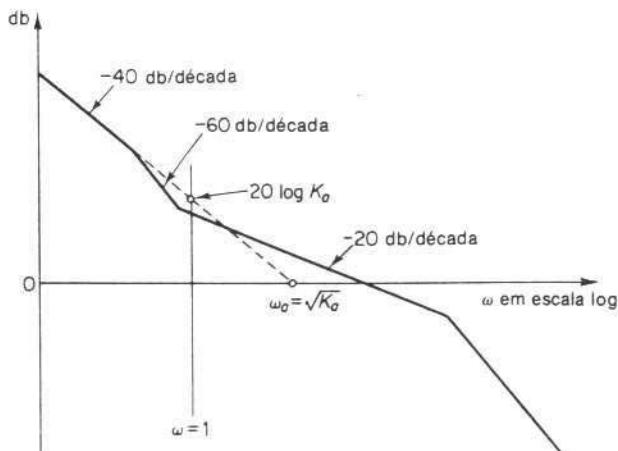


Fig. 9.20 Curva do log-módulo de um sistema tipo 2.

segue que

$$20 \log \left| \frac{K_a}{(j\omega)^2} \right|_{\omega=1} = 20 \log K_a$$

A freqüência  $\omega_a$  na intersecção do segmento inicial -40-db/década (ou seu prolongamento) com a reta de 0-db fornece a raiz quadrada de  $K_a$  numericamente. Esta afirmação pode ser verificada a partir do seguinte:

$$20 \log \left| \frac{K_a}{(j\omega_a)^2} \right| = 20 \log 1 = 0$$

que fornece

$$\omega_a = \sqrt{K_a}$$

### 9.3 GRÁFICOS POLARES

O gráfico polar de uma função de transferência senoidal  $G(j\omega)$  é um gráfico do módulo de  $G(j\omega)$  versus o ângulo de fase de  $G(j\omega)$  em coordenadas polares, conforme  $\omega$  é variado desde zero até infinito. Portanto, o gráfico polar é o lugar dos vetores  $|G(j\omega)|/G(j\omega)$  conforme  $\omega$  varia de zero a infinito. Observe que em gráficos polares, um ângulo de fase positivo (negativo) é medido no sentido anti-horário (horário) em relação ao eixo real positivo. O gráfico polar é muitas vezes denominado gráfico de Nyquist. Um exemplo deste tipo de gráfico é indicado na Fig. 9.21. Cada ponto no gráfico polar de  $G(j\omega)$  representa o ponto terminal de um vetor, para um particular valor de  $\omega$ . No gráfico polar, é importante indicar a graduação em freqüência do lugar geométrico. As projeções de  $G(j\omega)$  sobre os eixos real e imaginário correspondem às suas componentes real e imaginária. Tanto o módulo  $|G(j\omega)|$  como o ângulo de fase  $\angle G(j\omega)$  devem ser calculados diretamente para cada freqüência  $\omega$  na construção dos gráficos polares. Como o gráfico logarítmico é fácil de construir, entretanto, os dados necessários para a construção do gráfico polar

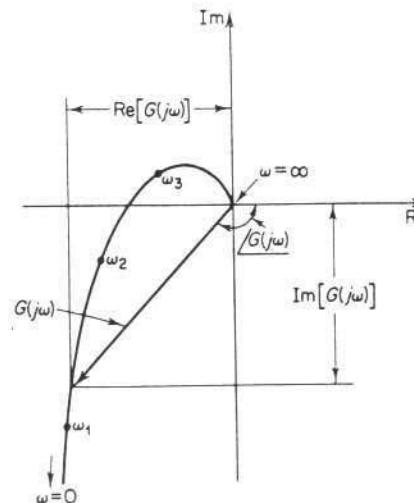


Fig. 9.21 Gráfico polar.

podem ser obtidos diretamente do gráfico logarítmico, se este último for desenhado inicialmente e os decibéis forem convertidos em módulos comuns pelo uso da Fig. 9.6.

Para dois sistemas ligados em cascata, a função de transferência global da combinação, na ausência de efeitos de carga, é o produto das duas funções de transferência individuais. Se for necessária a multiplicação de duas funções de transferência senoidais, isto pode ser realizado multiplicando-se, para cada frequência, as funções de transferências senoidais individuais por meio da multiplicação de álgebra-complexa. Isto é, se  $G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)$ , então

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega)$$

onde

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)|$$

$$\angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega)$$

O produto de  $G_1(j\omega)$  e  $G_2(j\omega)$  é indicado na Fig. 9.22.

Em geral, se for desejado um gráfico polar de  $G_1(j\omega)G_2(j\omega)$ , é conveniente desenhar primeiro um gráfico logarítmico de  $G_1(j\omega)G_2(j\omega)$  e então converter em um gráfico polar ao invés de desenhar os gráficos polares de  $G_1(j\omega)$  e  $G_2(j\omega)$  e multiplicar estes dois no plano complexo para obter um gráfico polar de  $G_1(j\omega)G_2(j\omega)$ .

Uma vantagem no uso do gráfico polar é que ele mostra as características de resposta em frequência de um sistema, em toda a faixa de frequência, em um único gráfico. Uma desvantagem é que o gráfico não indica claramente as contribuições de cada um dos fatores individuais da função de transferência de malha-aberta.

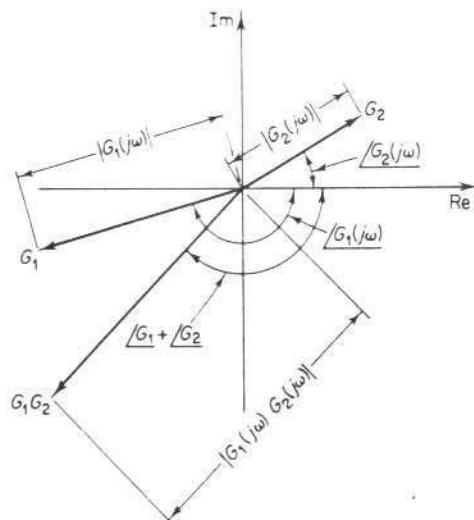


Fig. 9.22 Gráficos polares de  $G_1(j\omega)$ ,  $G_2(j\omega)$  e  $G_1(j\omega)G_2(j\omega)$ .

**Fatores integral e derivativo** ( $j\omega)^{-1}$ ). O gráfico polar de  $G(j\omega) = 1/j\omega$  é o eixo imaginário negativo desde que

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ$$

O gráfico polar de  $G(j\omega) = j\omega$  é o eixo imaginário positivo.

**Fatores de primeira-ordem** ( $1+j\omega T$ ) $^{-1}$ . Para a função de transferência senoidal

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \angle -\operatorname{tg}^{-1} \omega T$$

os valores de  $G(j\omega)$  em  $\omega = 0$  e  $\omega = 1/T$  são, respectivamente,

$$G(j0) = 1/0^\circ \quad \text{e} \quad G\left(j\frac{1}{T}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ$$

Se  $\omega$  tende a infinito, o módulo de  $G(j\omega)$  tende a zero e o ângulo de fase tende a  $-90^\circ$ . O gráfico polar desta função de transferência é uma semicircunferência\* conforme a frequência  $\omega$  varia desde zero até infinito, conforme a Fig. 9.23(a). O centro está localizado no ponto 0,5 sobre o eixo real e o raio é igual a 0,5.

Para demonstrar que o gráfico polar é uma semicircunferência, definimos

$$G(j\omega) = X + jY$$

onde

$$X = \frac{1}{1+\omega^2 T^2} = \text{parte real de } G(j\omega)$$

$$Y = \frac{-\omega T}{1+\omega^2 T^2} = \text{parte imaginária de } G(j\omega)$$

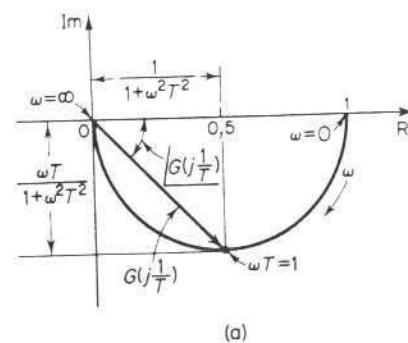
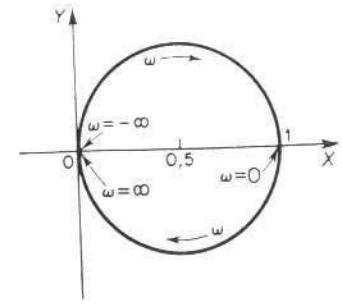


Fig. 9.23 (a) Gráfico polar de  $1/(1+j\omega T)$ ; (b) gráfico de  $G(j\omega)$  no plano  $X-Y$ .

\*N. do T.: No texto original em inglês, o autor refere-se a este lugar geométrico como um círculo em todo o texto, porém, criteriosamente, deveria considerar apenas a circunferência. Consequentemente, utilizaremos nesta tradução a designação deste lugar geométrico por circunferência.



Então, obtemos

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{1}{2} \frac{1 - \omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 + \left(\frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Portanto, no plano  $X-Y$ ,  $G(j\omega)$  é uma circunferência com centro em  $X = 1/2$ ,  $Y = 0$  e com raio  $1/2$ , conforme indicado na Fig. 9.23(b). A semicircunferência inferior com  $\omega \leq 0$  corresponde a  $0 \leq \omega \leq \infty$  e a semicircunferência superior corresponde a  $-\infty \leq \omega \leq 0$ .

O gráfico polar da função de transferência  $1 + j\omega T$  é simplesmente a metade superior da reta passando pelo ponto  $(1, 0)$  no plano complexo e paralela ao eixo imaginário conforme a Fig. 9.24.\* O gráfico polar de  $1 + j\omega T$  possui uma aparência completamente diferente daquela de  $1/(1 + j\omega T)$ .

**Fatores quadráticos**  $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$ . As partes de baixa-freqüência e alta-freqüência do gráfico polar para a seguinte função de transferência senoidal:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (\zeta > 0)$$

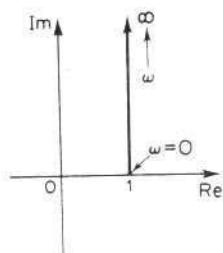


Fig. 9.24 Gráfico polar de  $1 + j\omega T$ .

são dadas, respectivamente, por

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1/0^\circ \quad \text{e} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0/-180^\circ$$

O gráfico polar desta função de transferência senoidal tem início em  $1|0^\circ$  e termina em  $0|-180^\circ$  conforme  $\omega$  aumenta desde zero até infinito. Portanto, a parte de alta-freqüência de  $G(j\omega)$  é tangente ao eixo real negativo. Os valores de  $G(j\omega)$  no intervalo de freqüência de interesse podem ser calculados diretamente ou usando-se o gráfico logarítmico.

Exemplos de gráficos polares da função de transferência considerada são indicados na Fig. 9.25. A forma exata de um gráfico polar depende do valor da relação de amortecimento  $\zeta$ , porém a forma geral do gráfico é a mesma tanto para o caso subamortecido ( $1 > \zeta > 0$ ) como para o caso superamortecido ( $\zeta > 1$ ).

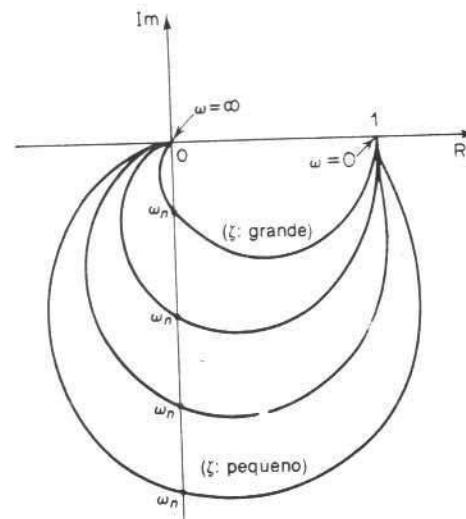


Fig. 9.25 Gráficos polares de

$$\frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}, \quad (\zeta > 0).$$

Para o caso subamortecido em  $\omega = \omega_n$ , temos que  $G(j\omega_n) = 1/(j2\zeta)$  e o ângulo de fase em  $\omega = \omega_n$  é  $-90^\circ$ . Além disso, pode ser observado que a freqüência na qual o lugar geométrico de  $G(j\omega)$  intercepta o eixo imaginário é a freqüência natural não amortecida,  $\omega_n$ . No gráfico polar, o ponto de freqüência cuja distância à origem é máxima corresponde à freqüência de ressonância  $\omega_r$ . O valor de pico de  $G(j\omega)$  é obtido pela relação entre o módulo do vetor na freqüência de ressonância  $\omega_r$  e o módulo do vetor em  $\omega = 0$ . A freqüência de ressonância  $\omega_r$  é indicada no gráfico polar mostrado na Fig. 9.26.

Para o caso superamortecido, conforme  $\zeta$  aumenta bem além da unidade, o lugar geométrico de  $G(j\omega)$  aproxima-se de uma semicircunferência. Isto pode ser observado pelo fato de que para um sistema muito amortecido as raízes características são reais e uma delas é muito menor que a outra. Desde que para  $\zeta$  suficientemente grande o efeito da raiz muito maior na resposta resulta muito pequeno, o sistema comporta-se como de primeira-ordem.

Para a função de transferência senoidal,

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= 1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right) \end{aligned}$$

a parte em baixa-freqüência da curva é

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1/0^\circ$$

e a parte em alta-freqüência é

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \infty/180^\circ$$

\*N. do T. O autor está considerando apenas  $\omega \geq 0$ .

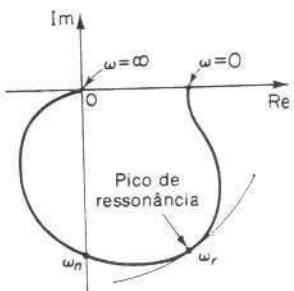


Fig. 9.26 Gráfico polar mostrando o pico de ressonância e a freqüência de ressonância  $\omega_r$ .

Desde que a parte imaginária de  $G(j\omega)$  é positiva para  $\omega > 0$  e monotonicamente crescente e a parte real de  $G(j\omega)$  é monotonicamente decrescente da unidade, a forma geral do gráfico polar de  $G(j\omega)$  é conforme indicada na Fig. 9.27. O ângulo de fase está entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ .

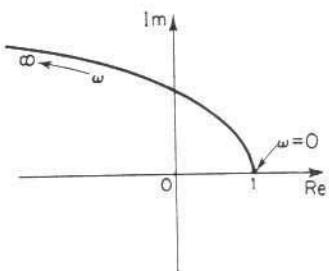


Fig. 9.27 Gráfico polar de  $1 + 2\zeta \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2$ , ( $\zeta > 0$ ).

*Exemplo 9.4* Considere a seguinte função de transferência de segunda-ordem:

$$G(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)}$$

Esboce um gráfico polar desta função de transferência.

Desde que a função de transferência senoidal pode ser escrita

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{j\omega(1+j\omega T)} \\ &= -\frac{T}{1+\omega^2T^2} - j\frac{1}{\omega(1+\omega^2T^2)} \end{aligned}$$

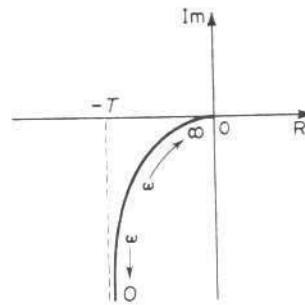


Fig. 9.28 Gráfico polar de  $1/[j\omega(1 + j\omega T)]$ .

a parte de baixa-freqüência do gráfico polar torna-se

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = -T - j\infty = \infty/-90^\circ$$

e a parte de alta-freqüência torna-se

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 - j0 = 0/-180^\circ$$

A forma geral do gráfico polar de  $G(j\omega)$  é indicada na Fig. 9.28. O gráfico de  $G(j\omega)$  é assintótico para a reta vertical passando pelo ponto  $(-T, 0)$ . Desde que esta função de transferência envolve a integração  $(1/s)$ , a forma geral do gráfico polar difere substancialmente daquelas correspondentes a funções de transferência de segunda-ordem que não possuem a integração.

**Atraso de transporte.** O atraso de transporte

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T}$$

pode ser escrito

$$G(j\omega) = 1/\cos \omega T - j \sin \omega T$$

Desde que o módulo de  $G(j\omega)$  é sempre unitário e o ângulo de fase varia linearmente com  $\omega$ , o gráfico polar do atraso de transporte é uma circunferência unitária, conforme indicada na Fig. 9.29.

Em baixas freqüências, o atraso de transporte  $e^{-j\omega T}$  e o atraso de primeira-ordem  $1/(1+j\omega T)$  se comportam similarmente, conforme é mostrado na Fig. 9.30. Os gráficos polares de  $e^{-j\omega T}$  e  $1/(1+j\omega T)$  são tangentes entre si na freqüência  $\omega = 0$ . Este resultado pode ser comprovado pelo fato de que, para  $\omega \ll 1/T$ ,

$$e^{-j\omega T} \doteq 1 - j\omega T \quad \text{e} \quad \frac{1}{1+j\omega T} \doteq 1 - j\omega T$$

Para  $\omega \gg 1/T$ , entretanto, existe uma diferença essencial entre  $e^{-j\omega T}$  e  $1/(1+j\omega T)$ , como pode ser visto na Fig. 9.30.

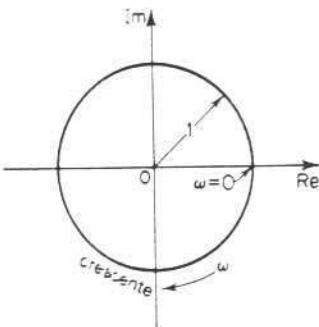
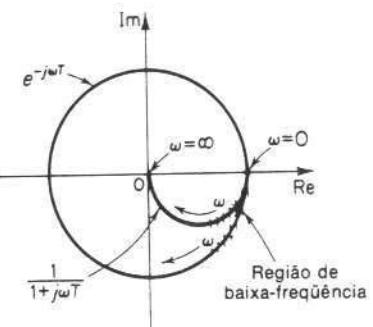


Fig. 9.29 Gráfico polar do atraso de transporte.

Fig. 9.30 Gráficos polares de  $e^{-j\omega T}$  e  $1/(1 + j\omega T)$ .



*Exemplo 9.5* Obtenha o gráfico polar da seguinte função de transferência:

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T}$$

Desde que  $G(j\omega)$  pode ser escrita

$$G(j\omega) = (e^{-j\omega L}) \left( \frac{1}{1 + j\omega T} \right)$$

o módulo e o ângulo de fase são, respectivamente,

$$|G(j\omega)| = |e^{-j\omega L}| \cdot \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

e

$$\angle G(j\omega) = \angle e^{-j\omega L} - \angle \frac{1}{1 + j\omega T} = -\omega L - \operatorname{tg}^{-1} \omega T$$

Desde que o módulo diminui monotonicamente desde a unidade e o ângulo de fase também diminui monotonicamente e indefinidamente, o gráfico polar da função de transferência em estudo é uma espiral, conforme indicado na Fig. 9.31.

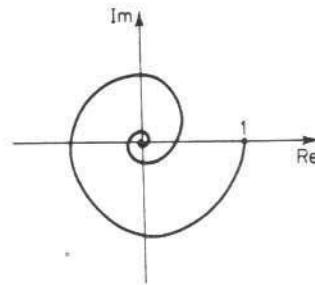


Fig. 9.31 Gráfico polar de  $e^{-j\omega L}/(1 + j\omega T)$ .

**Formas gerais de gráficos polares.** Os gráficos polares de uma função de transferência da forma

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K(1 + j\omega T_a)(1 + j\omega T_b) \cdots}{(j\omega)^k(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) \cdots} \\ &= \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \cdots}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \cdots} \end{aligned}$$

onde o grau do polinômio do denominador é maior do que o grau do polinômio do numerador, apresentarão as seguintes formas gerais:

1. *Para  $\lambda = 0$  ou sistemas tipo 0:* O ponto inicial do gráfico polar (que corresponde a  $\omega = 0$ ) é finito e está sobre o eixo real positivo. A tangente do gráfico polar em  $\omega = 0$  é perpendicular ao eixo real. O ponto final, que corresponde a  $\omega = \infty$ , corresponde à origem, e a curva é tangente a um dos eixos.

2. *Para  $\lambda = 1$  ou sistemas tipo 1:* O termo  $j\omega$  no denominador contribui com  $-90^\circ$  para o ângulo de fase total de  $G(j\omega)$  para  $0 \leq \omega \leq \infty$ . Em  $\omega = 0$ , o módulo de  $G(j\omega)$  é infinito, e o ângulo de fase resulta  $-90^\circ$ . Em baixas freqüências, o gráfico polar é assintótico a uma reta paralela ao eixo imaginário negativo. Em  $\omega = \infty$ , o módulo torna-se nulo e a curva converge para a origem e é tangente a um dos eixos.

3. *Para  $\lambda = 2$  ou sistemas do tipo 2:* O termo  $(j\omega)^2$  no denominador contribui com  $-180^\circ$  para o ângulo de fase total de  $G(j\omega)$  para  $0 \leq \omega \leq \infty$ . Em  $\omega = 0$ , o

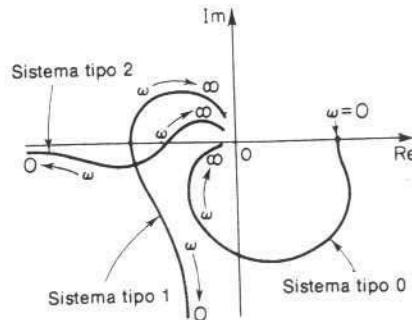


Fig. 9.32 Gráficos polares de sistemas tipo 0, tipo 1 e tipo 2.