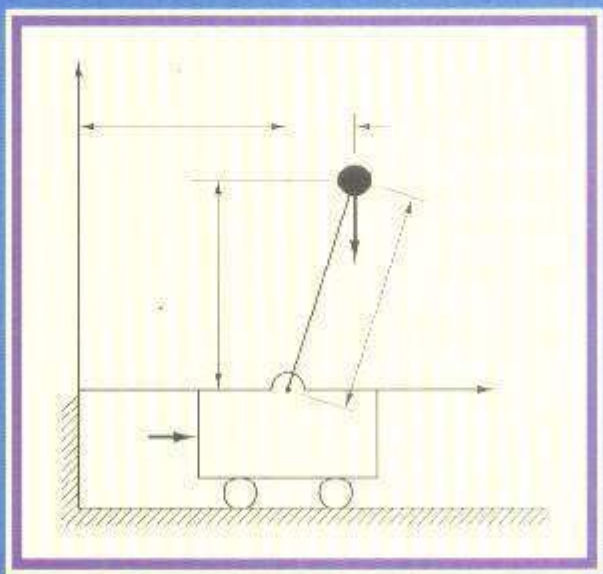


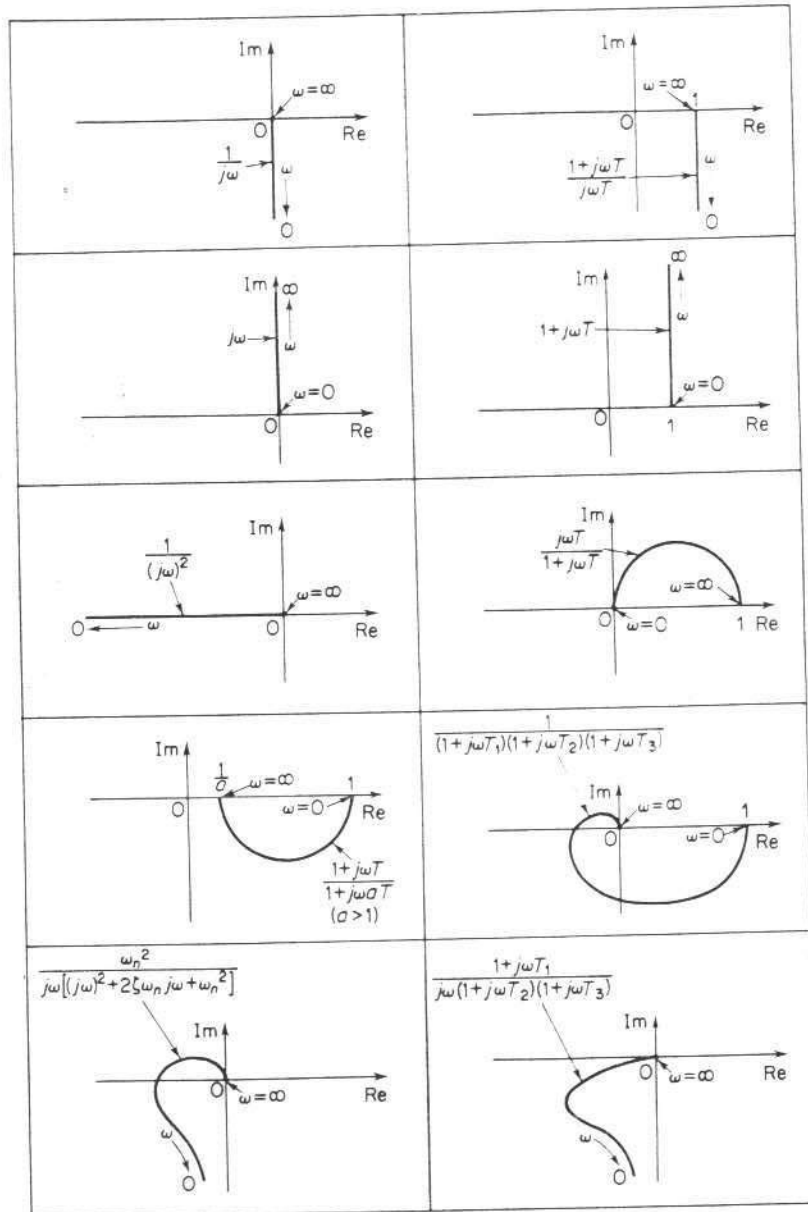
ENGENHARIA DE CONTROLE MODERNO

Parte 2



KATSUHIKO OGATA

Tabela 9.1 Gráficos polares de funções de transferência simples



módulo de $G(j\omega)$ é infinito, e o ângulo de fase é igual a -180° . Em baixas frequências, o gráfico polar é assintótico a uma reta paralela ao eixo real negativo. Em $\omega = \infty$, o módulo torna-se nulo e a curva é tangente a um dos eixos.

Os formatos gerais das partes de baixa-frequência dos gráficos polares de sistemas tipo 0, tipo 1 e tipo 2 são indicados na Fig. 9.32. Pode ser visto que, se o grau do polinômio do denominador de $G(j\omega)$ é maior do que o do numerador, então os lugares geométricos de $G(j\omega)$ convergem para a origem no sentido horário. Em $\omega = \infty$, os lugares geométricos são tangentes a um ou ao outro eixo, conforme indicado na Fig. 9.33.

Para o caso em que os graus dos polinômios do denominador e do numerador de $G(j\omega)$ são os mesmos, o gráfico polar tem início a uma distância finita sobre o eixo real e termina em um ponto finito sobre o eixo real.

Note que quaisquer formas complicadas nas curvas do gráfico polar são causadas pela dinâmica do numerador, isto é, pelas constantes de tempo no nume-

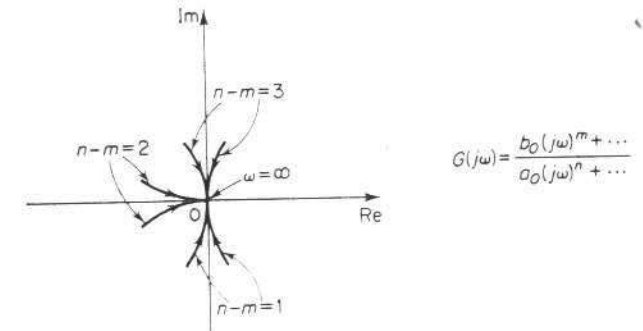


Fig. 9.33 Gráficos polares na faixa de alta-frequência.

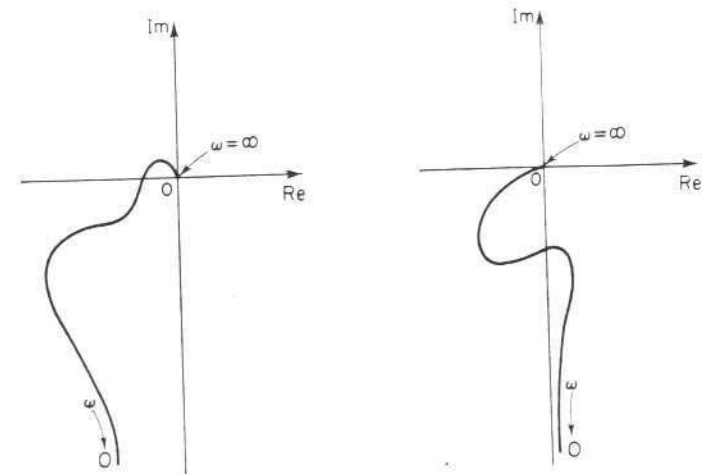


Fig. 9.34 Gráficos polares de funções de transferência com dinâmica no numerador.

rador da função de transferência. A Fig. 9.34 fornece exemplos de gráficos polares de funções de transferência com dinâmicas no numerador. Na análise de sistemas de controle, o gráfico polar de $G(j\omega)$ na faixa de frequência de interesse deve ser precisamente determinado.

A Tabela 9.1 mostra esboços de gráficos polares para algumas funções de transferência.

9.4 GRÁFICOS DO LOG-MÓDULO VERSUS FASE

Uma outra abordagem para retratar graficamente as características de resposta em frequência é usar o gráfico do log-módulo *versus* fase, que é um gráfico do logaritmo do módulo em decibéis *versus* o ângulo de fase, ou margem de fase, para uma faixa de frequência de interesse. (A margem de fase é a diferença entre o ângulo de fase real ϕ e -180° ; isto é, $\phi - (-180^\circ) = 180^\circ + \phi$.) A curva é graduada em termos da frequência ω . Estes gráficos do log-módulo *versus* fase são algumas vezes denominados gráficos de Nichols.

No diagrama de Bode, as características de resposta em frequência de $G(j\omega)$ são fornecidas em um papel monolog por meio de duas curvas separadas, a curva do log-módulo e a curva do ângulo de fase, enquanto no gráfico do log-módulo *versus* fase, as duas curvas do diagrama de Bode são combinadas em apenas uma. O gráfico do log-módulo *versus* fase pode ser facilmente construído pelos valores obtidos do logaritmo do módulo e do ângulo de fase a partir do diagrama de Bode. Note que no gráfico do log-módulo *versus* fase, uma variação na constante de ganho de $G(j\omega)$ simplesmente desloca a curva para cima (para ganhos crescentes) ou para baixo (para ganho decrescente), porém a forma da curva permanece a mesma.

As vantagens do gráfico do log-módulo *versus* fase são que a estabilidade relativa do sistema de malha-fechada pode ser determinada rapidamente e que a compensação pode ser realizada com facilidade.

Os gráficos do log-módulo *versus* fase para as funções de transferência senoidais $G(j\omega)$ e $1/G(j\omega)$ são anti-simétricos em relação à origem desde que

$$\left| \frac{1}{G(j\omega)} \right| \text{ em db} = -|G(j\omega)| \text{ em db}$$

e

$$\angle \frac{1}{G(j\omega)} = -\angle G(j\omega)$$

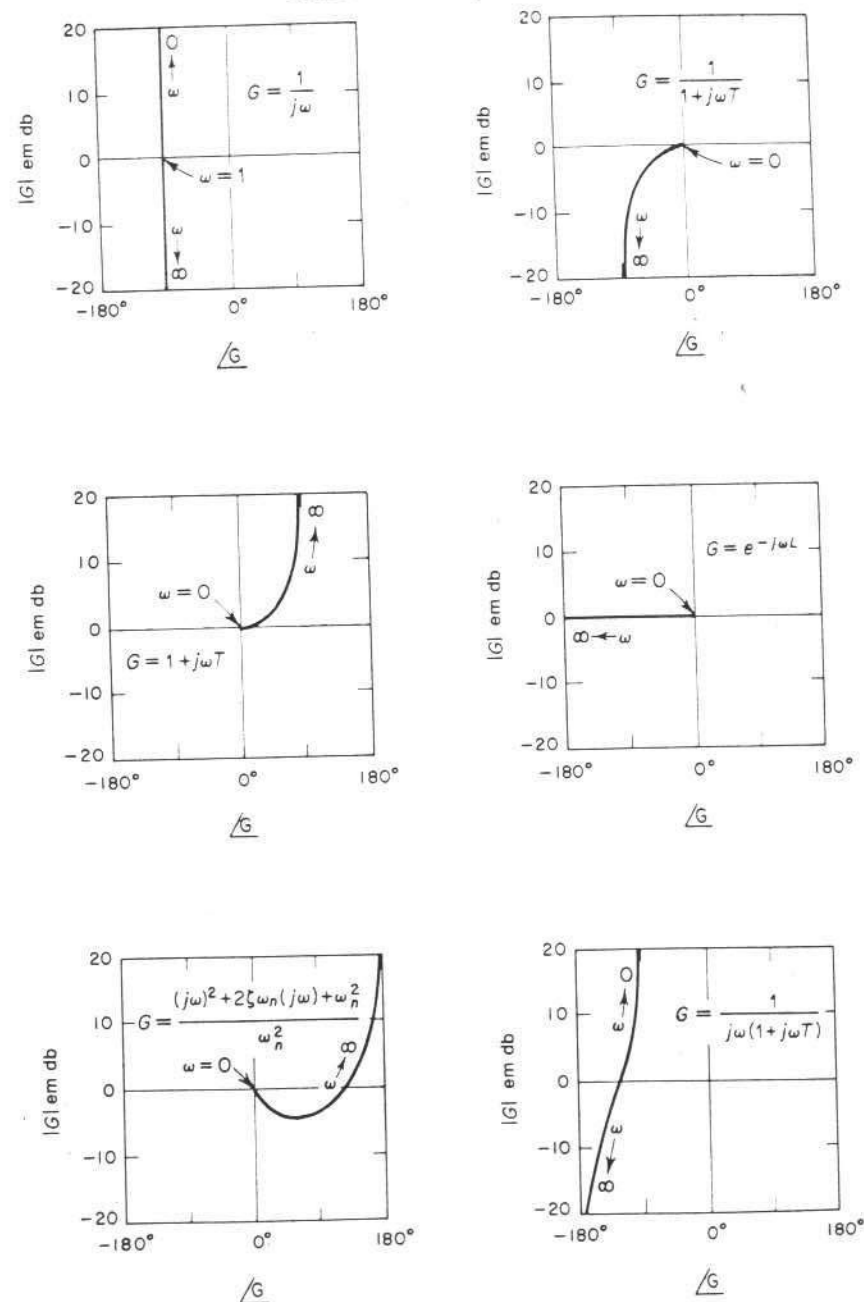
Desde que as características do log-módulo e do ângulo de fase das funções de transferência básicas foram discutidas com detalhes nas Seções 9.2 e 9.3, aqui será suficiente fornecer exemplos de alguns gráficos do log-módulo *versus* fase. A Tabela 9.2 mostra estes exemplos.

A Fig. 9.35 compara as curvas de resposta em frequência de

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

nas três representações diferentes. No gráfico log-módulo *versus* fase, a distância vertical entre os pontos correspondentes a $\omega = 0$ e $\omega = \omega_r$, onde ω_r é a frequência de ressonância, é o valor de pico de $G(j\omega)$ em decibéis.

Tabela 9.2 Gráficos log-módulo *versus* fase de funções de transferência simples



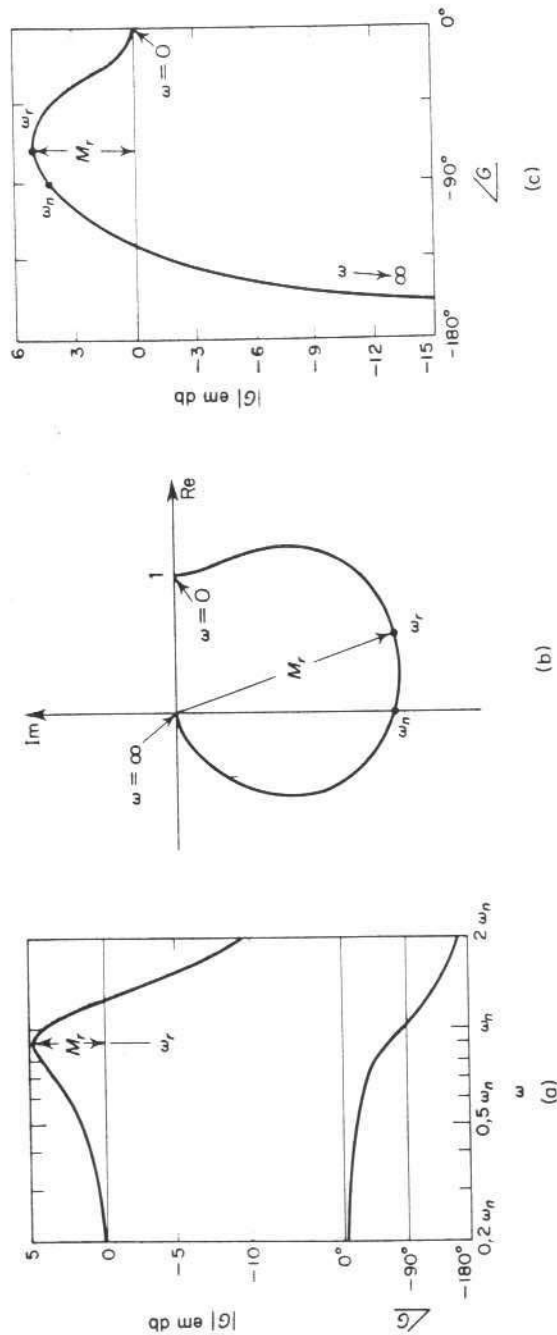


Fig. 9.35 Três representações da resposta em frequência de $\frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$, ($\zeta > 0$).

(a) Gráfico logarítmico; (b) gráfico polar; (c) gráfico log-módulo versus fase.

9.5 CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE NYQUIST

Esta seção apresenta o critério de estabilidade de Nyquist e a base matemática associada.

Considere o sistema de malha-fechada indicado na Fig. 9.36. A função de transferência de malha-fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Para estabilidade, todas as raízes da equação característica

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

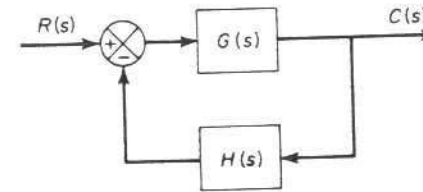


Fig. 9.36 Sistema de malha-fechada.

devem estar no semiplano esquerdo do plano s . O critério de estabilidade de Nyquist relaciona a resposta em frequência de malha-aberta $G(j\omega)H(j\omega)$ ao número de zeros e pólos de $1 + G(s)H(s)$ que estão no semiplano direito do plano s . Este critério, devido a H. Nyquist, é útil em engenharia de controle porque a estabilidade absoluta do sistema de malha-fechada pode ser determinada graficamente a partir das curvas de resposta em frequência de malha-aberta e não há necessidade para determinar realmente os pólos de malha-fechada. As curvas de resposta em frequência de malha-aberta obtidas analiticamente, bem como aquelas obtidas experimentalmente, podem ser utilizadas na análise de estabilidade. Isto é conveniente porque, no projeto de um sistema de controle, muitas vezes ocorre que as expressões matemáticas para alguns dos componentes não são conhecidas, sendo disponíveis apenas seus dados de resposta em frequência.

O critério de estabilidade de Nyquist é baseado em um teorema da teoria de variáveis complexas. Para entender o critério, discutiremos inicialmente mapeamentos de contornos no plano complexo.

Suporemos que a função de transferência de malha-aberta $G(s)H(s)$ é representável como uma relação de polinômios em s . Para um sistema fisicamente realizável, o grau do polinômio do denominador da função de transferência de malha-fechada deve ser maior ou igual àquele do polinômio do numerador. Isto significa que o limite de $G(s)H(s)$ é nulo ou constante, para s tendendo a infinito, para qualquer sistema fisicamente realizável.

Estudo preliminar. A equação característica do sistema indicado na Fig. 9.36 é

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$$

Mostraremos que para um dado caminho fechado e contínuo no plano s , que não passa através de quaisquer pontos singulares, corresponde uma curva fechada n

plano $F(s)$. O número e sentido de envolvimento da origem do plano $F(s)$ pela curva fechada representam um papel particularmente importante no que se segue, para mais tarde correlacionarmos o número e sentidos de envoltimentos à estabilidade do sistema.

Considere, por exemplo, a seguinte função de transferência de malha-aberta:

$$G(s)H(s) = \frac{6}{(s+1)(s+2)}$$

A equação característica é

$$\begin{aligned} F(s) &= 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{6}{(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{(s+1,5+j2,4)(s+1,5-j2,4)}{(s+1)(s+2)} = 0 \end{aligned}$$

A função $F(s)$ é analítica em todos os pontos do plano s , exceto em seus pontos singulares. Para cada ponto de analiticidade no plano s , corresponderá um ponto no plano $F(s)$. Por exemplo, se $s = 1 + j2$, então $F(s)$ torna-se

$$\begin{aligned} F(1+j2) &= 1 + \frac{6}{(2+j2)(3+j2)} \\ &= 1,12 - j0,58 \end{aligned}$$

Portanto, o ponto $s = 1 + j2$ no plano s mapeia no ponto $1,12 - j0,58$ no plano $F(s)$.

Portanto, conforme anteriormente estabelecido, para um dado caminho fechado contínuo no plano s , que não passa por pontos singulares, corresponderá uma curva fechada no plano $F(s)$. A Fig. 9.37(a) mostra mapeamentos conformes das retas $\omega = 0, 1, 2, 3$ e das retas $\sigma = 1, 0, -1, -2, -3, -4$ no semiplano superior do plano s , para o plano $F(s)$. Por exemplo, a reta $s = j\omega$ no semiplano superior do plano s ($\omega \geq 0$) mapeia na curva indicada por $\sigma = 0$ no plano $F(s)$. A Fig. 9.37(b) mostra mapeamentos conformes das retas $\omega = 0, -1, -2, -3$ e das retas $\sigma = 1, 0, -1, -2, -3, -4$ do semiplano inferior do plano s , no plano $F(s)$. Observe que para um dado σ , a curva para frequências negativas é simétrica em relação ao eixo real com a curva para frequências positivas. Referindo-se às Figs. 9.37(a) e (b), verificamos que para o caminho $ABCD$ no plano s percorrido no sentido horário, a curva correspondente no plano $F(s)$ é $A'B'C'D'$. As setas sobre as curvas indicam sentidos de percurso. Analogamente, o caminho $DEFA$ no plano s mapeia na curva $D'E'F'A'$, no plano $F(s)$. Devido à propriedade de mapeamento conforme, os ângulos correspondentes no plano s e no plano $F(s)$ são iguais e possuem o mesmo sentido. (Por exemplo, desde que as retas AB e BC se interceptam em ângulos retos entre si no plano s , as curvas $A'B'$ e $B'C'$ também se interceptam em ângulos retos no ponto B' do plano $F(s)$). Referindo-se à Fig. 9.37(c), verificamos que sobre o contorno fechado $ABCDEFA$ no plano s , a variável tem início no ponto A e assume valores neste caminho em um sentido horário até retornar ao ponto de partida A . A curva correspondente no plano $F(s)$ é denotada por $A'B'C'D'E'F'A'$. Se definirmos a área à direita do contorno, quando um ponto representativo s move-se no sentido horário, como correspondente ao lado de dentro do contorno e a área à esquerda como o lado de fora, então a área hachurada na Fig. 9.37(c) está envolvida pelo contorno $ABCDEFA$ e está dentro dele. Da Fig. 9.37(c) pode-se verificar que,

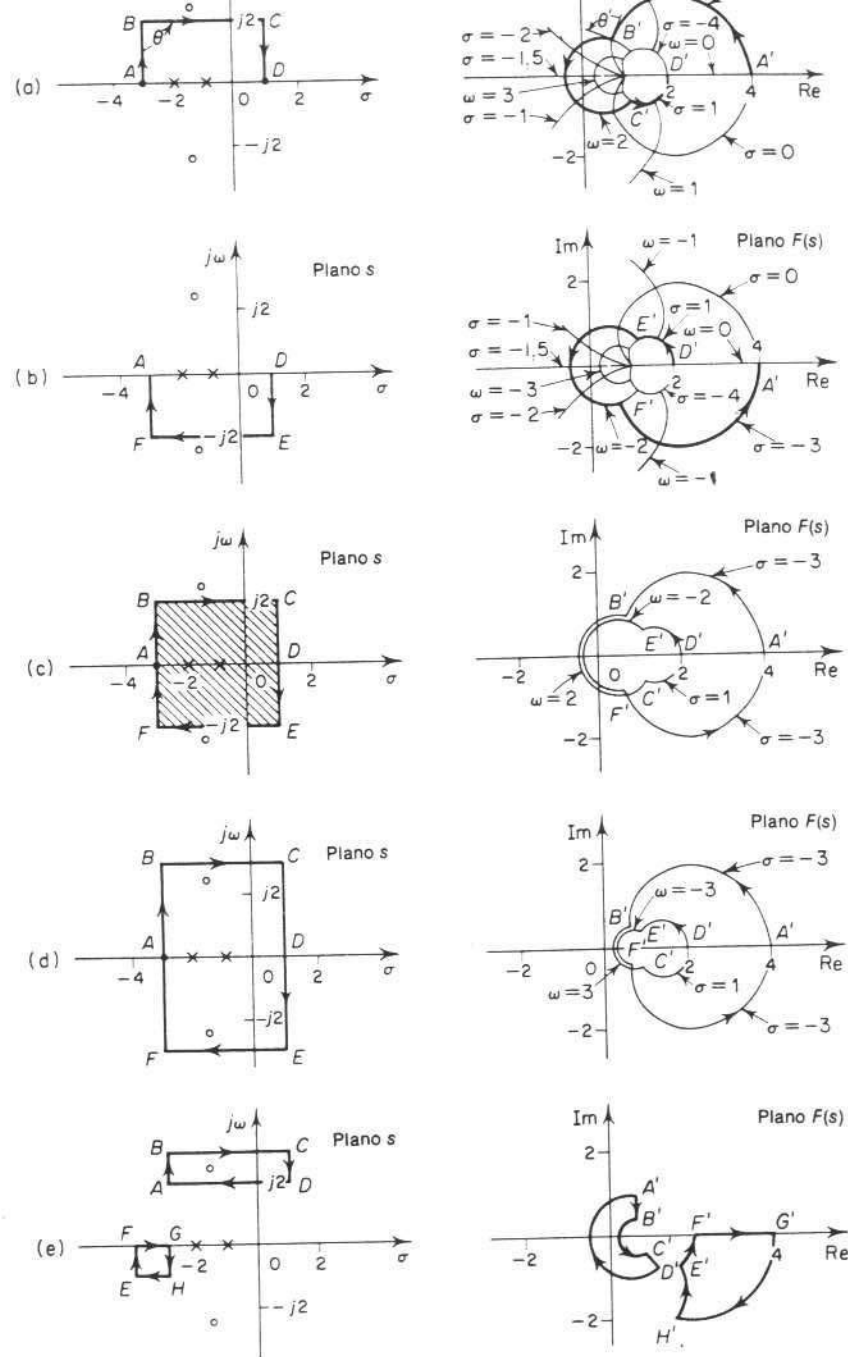


Fig. 9.37 Mapeamento conforme de grades no plano s para o plano $F(s)$.

quando o contorno no plano s envolve dois pólos de $F(s)$, o lugar geométrico de $F(s)$ envolve a origem do plano $F(s)$ duas vezes, no sentido anti-horário.

O número de envoltimentos da origem do plano $F(s)$ depende do contorno fechado no plano s . Se este contorno envolve dois zeros e dois pólos de $F(s)$, então o lugar geométrico de $F(s)$ correspondente não envolve a origem, conforme indicado na Fig. 9.37(d). Se este contorno envolve apenas um zero, o lugar geométrico correspondente de $F(s)$ envolve a origem uma vez no sentido horário. Isto é mostrado na Fig. 9.37(e). Finalmente, se o contorno fechado no plano s não envolve nem zeros nem pólos, então o lugar geométrico de $F(s)$ não envolve a origem do plano $F(s)$. Este resultado também é mostrado na Fig. 9.37(e).

Note que para cada ponto no plano s , exceto para os pontos singulares, há apenas um ponto correspondente no plano $F(s)$; isto é, o mapeamento do plano s no plano $F(s)$ é um-a-um. O mapeamento do plano $F(s)$ no plano s pode não ser um-a-um, entretanto, de modo que um dado ponto no plano $F(s)$ pode corresponder a mais do que um ponto no plano s . Por exemplo, o ponto B' no plano $F(s)$ na Fig. 9.37(d) corresponde aos dois pontos $(-3; 3)$ e $(0; -3)$ no plano s .

Da análise anterior, podemos observar que o sentido de envolvimento da origem do plano $F(s)$ depende de o contorno no plano s envolver um pólo ou um zero. Note que a localização de um pólo ou zero no plano s , ou no semiplano direito ou no semiplano esquerdo do plano s , não faz qualquer diferença, porém o envolvimento de um pólo ou de um zero faz diferença. Se o contorno no plano s envolve k zeros e k pólos ($k = 0, 1, 2, \dots$), isto é, um número igual de cada, então a curva fechada correspondente no plano $F(s)$ não envolve a origem do plano $F(s)$. A discussão anterior corresponde a uma explicação gráfica do teorema do mapeamento, que é a base para o critério de estabilidade de Nyquist.

Teorema do mapeamento. Seja $F(s)$ uma relação de dois polinômios em s . Seja P o número de pólos e Z o número de zeros de $F(s)$ que estão dentro de algum contorno fechado no plano s , levando-se em conta a multiplicidade dos pólos e zeros. Seja este contorno tal que não passe por nenhum pólo ou zero de $F(s)$. Esse contorno fechado no plano s é então mapeado no plano $F(s)$ como uma curva fechada. O número total N de envoltimentos da origem do plano $F(s)$ no sentido horário, conforme um ponto representativo s percorre todo o contorno no sentido horário, é igual a $Z - P$. (Note que por meio deste teorema do mapeamento os números de zeros e pólos não podem ser determinados, apenas sua diferença.)

Não apresentaremos aqui uma prova formal deste teorema, mas deixaremos esta prova para o Problema A.9.6. Note que o número positivo N indica um excesso de zeros em relação aos pólos da função $F(s)$ e um número negativo de N indica um excesso de pólos em relação aos zeros. Em aplicações de sistema de controle, o número P pode ser realmente determinado para $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ a partir da função $G(s)H(s)$. Portanto, se N é determinado a partir do gráfico de $F(s)$, o número de zeros no contorno fechado do plano s pode ser realmente determinado. Note que as formas exatas do contorno no plano s e o lugar geométrico de $F(s)$ não possuem importância desde que sejam considerados os envoltimentos da origem, pois os envoltimentos dependem apenas do envolvimento de pólos e/ou zeros de $F(s)$ pelo contorno no plano s .

Aplicação do teorema do mapeamento na análise de estabilidade de sistemas de malha-fechada. Para analisar a estabilidade de sistemas de controle lineares, consideraremos o contorno fechado no plano s envolvendo todo o semiplano direito do plano s . O contorno consiste em todo o eixo $j\omega$ desde $\omega = -\infty$ até $\omega = +\infty$ e um caminho semicircular de raio infinito no semiplano direito do plano s . Este contorno é denominado caminho de Nyquist. (O sentido do caminho é o horário.) O caminho

de Nyquist envolve todo o semiplano direito do plano s e todos os pólos e zeros de $1 + G(s)H(s)$ que possuam partes reais positivas. (Se não houver zeros de $1 + G(s)H(s)$ no semiplano direito do plano s , então lá também não haverá pólos de malha-fechada, e o sistema é estável.) É necessário que o contorno fechado, ou o caminho de Nyquist, não passe através de qualquer pólo e zero de $1 + G(s)H(s)$. Se $G(s)H(s)$ possui um pólo ou pólos na origem do plano s , então o mapeamento do ponto $s = 0$ resulta indeterminado. Nestes casos, a origem é evitada, considerando-se um contorno em torno dela. (Uma discussão detalhada deste caso especial será dada mais tarde.)

Se o teorema do mapeamento for aplicado ao caso especial no qual $F(s)$ é igual a $1 + G(s)H(s)$, então podemos fazer a seguinte afirmação: Se o contorno fechado no plano s envolver todo o semiplano direito do plano s , conforme indicado na Fig. 9.38, então o número de zeros da função $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ no semiplano direito é igual ao número de pólos da função $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ no semiplano direito do plano s mais o número de envoltimentos da origem do plano $1 + G(s)H(s)$ no sentido horário para a curva fechada correspondente neste último plano.

Devido à condição assumida de que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [1 + G(s)H(s)] = \text{constante}$$

a função $1 + G(s)H(s)$ permanece constante conforme s percorre a semicircunferência de raio infinito. Por esta razão, independente de o lugar geométrico de $1 + G(s)H(s)$, o envolvimento da origem do plano $1 + G(s)H(s)$ pode ser determinado considerando-se apenas uma parte do contorno fechado no plano s , isto é, o eixo $j\omega$. Os envoltimentos da origem, se houver, ocorrerão somente enquanto um ponto representativo se move desde $-j\infty$ até $+j\infty$ ao longo do eixo $j\omega$ desde que não exista nenhum zero ou pólo no eixo $j\omega$.

Note que a parte do contorno de $1 + G(s)H(s)$ desde $\omega = -\infty$ até $\omega = +\infty$ é simplesmente $1 + G(j\omega)H(j\omega)$. Desde que $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ é a soma vetorial do vetor unitário e o vetor $G(j\omega)H(j\omega)$, $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ é idêntico ao vetor desenhado desde o ponto $-1 + j0$ até o ponto terminal do vetor $G(j\omega)H(j\omega)$, conforme indicado na Fig. 9.39. O envolvimento da origem pelo gráfico de $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ é equivalente ao envolvimento do ponto $-1 + j0$ pelo lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$. Portanto, a estabilidade de um sistema de malha-fechada pode ser investigada examinando-se os envoltimentos do ponto $-1 + j0$ pelo lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$. O número de envolvimento do ponto $-1 + j0$ no sentido horário pode ser determinado desenhando-se um vetor desde o ponto $-1 + j0$ até o lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$, iniciando desde $\omega = -\infty$, passando por $\omega = 0$ e terminando em $\omega = +\infty$ e contando o número de rotações do vetor no sentido horário.

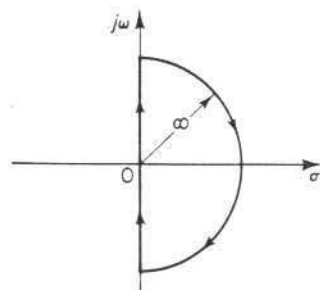


Fig. 9.38 Contorno fechado no plano s .

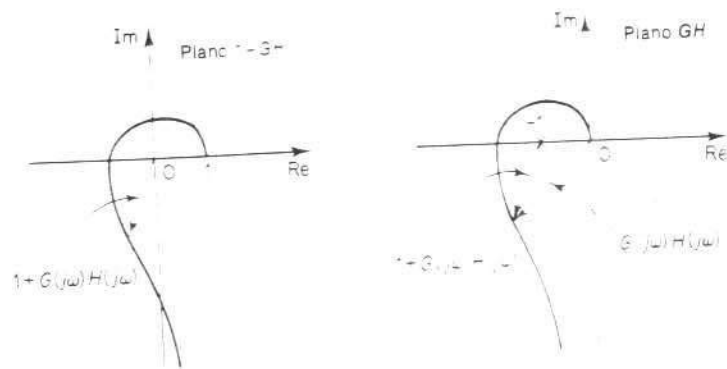


Fig. 9.39 Gráficos de $G(j\omega)H(j\omega)$ no plano $1 - GH$ e no plano GH .

A construção do gráfico de $G(j\omega)H(j\omega)$ para o caminho de Nyquist é direta. O mapa do eixo $j\omega$ negativo é a imagem especular, em relação ao eixo real, do mapa do eixo $j\omega$ positivo. Isto é, o gráfico de $G(j\omega)H(j\omega)$ e o gráfico de $G(-j\omega)H(-j\omega)$ são simétricos entre si em relação ao eixo real. A semicircunferência com raio infinito mapeia ou na origem do plano GH ou em um ponto sobre o eixo real do plano GH .

Na discussão precedente, admitiu-se que $G(s)H(s)$ é a relação de dois polinômios em s . Portanto, o atraso de transporte e^{-Ts} foi excluído da discussão. Note, entretanto, que uma discussão análoga é aplicável a sistemas com atraso de transporte, embora a prova desta asserção não seja aqui fornecida. A estabilidade de um sistema com atraso de transporte pode ser determinada a partir das curvas de resposta em frequência de malha-aberta examinando-se o número de envoltimentos do ponto $-1 - j0$, como no caso de um sistema cuja função de transferência de malha-aberta é uma relação de dois polinômios em s .

CrITÉRIO DE ESTABILIDADE DE NYQUIST. A análise anterior, utilizando o envolvimento do ponto $-1 + j0$ no lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$, é sumariada no seguinte critério de estabilidade de Nyquist:

CrITÉRIO DE ESTABILIDADE DE NYQUIST [Para um caso especial onde $G(s)H(s)$ não possui pólos ou zeros no eixo $j\omega$]: No sistema indicado na Fig. 9.36, se a função de transferência de malha aberta $G(s)H(s)$ possuir k pólos no semiplano direito do plano s e $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)H(s) = \text{constante}$, então, para a estabilidade, o lugar geométrico

de $G(j\omega)H(j\omega)$, conforme ω varia de $-\infty$ até ∞ , deve envolver o ponto $-1 + j0$ k vezes no sentido anti-horário.

Considerações sobre o critério de estabilidade de Nyquist

1. Este critério pode ser expresso como

$$Z = N + P$$

onde

Z = número de zeros de $1 + G(s)H(s)$ no semiplano direito do plano s
 N = número de envoltimentos do ponto $-1 + j0$ no sentido horário
 P = número de pólos de $G(s)H(s)$ no semiplano direito do plano s

Se P for diferente de zero, para um sistema de controle estável devemos ter $Z = 0$, ou $N = -P$, o que significa que devemos ter P envoltimentos do ponto $-1 + j0$ no sentido anti-horário.

Se $G(s)H(s)$ não possuir qualquer pólo no semiplano direito do plano s , então $Z = N$. Portanto, para estabilidade não devemos ter nenhum envolvimento do ponto $-1 + j0$ pelo lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$. Neste caso, não é necessário considerar o lugar geométrico para todo o eixo $j\omega$, porém, somente a parte de frequência positiva. A estabilidade de um sistema deste tipo pode ser determinada verificando-se se o ponto $-1 + j0$ é circundado pelo gráfico de Nyquist de $G(j\omega)H(j\omega)$. A região envolvida pelo gráfico de Nyquist é indicada na Fig. 9.40. Para estabilidade, o ponto $-1 - j0$ deve estar do lado de fora da região hachurada.

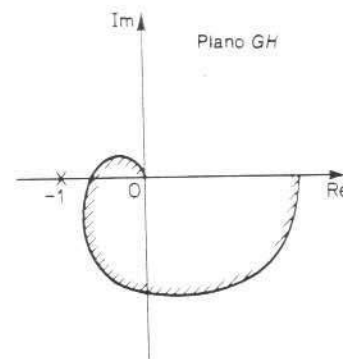


Fig. 9.40 Região envolvida por um gráfico de Nyquist.

2. Devemos tomar cuidado quando verificarmos a estabilidade de sistemas de múltiplas malhas desde que estas podem incluir pólos no semiplano direito do plano s . (Note que embora uma malha-interna possa ser instável, o sistema de malha-fechada como um todo pode ser estável, através de um projeto apropriado.) A simples inspeção dos envoltimentos do ponto $-1 + j0$ pelo lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$ não é suficiente para detectar instabilidade em sistemas de múltiplas malhas. Nestes casos, entretanto, a existência ou não de qualquer pólo de $1 + G(s)H(s)$ no semiplano direito do plano s pode ser determinada facilmente aplicando-se o critério de estabilidade de Routh para o denominador de $G(s)H(s)$.

Se funções transcendentais, tais como atraso de transporte e^{-Ts} , forem incluídas em $G(s)H(s)$, elas devem ser aproximadas, por meio de uma expansão em série, antes de ser aplicado o critério de estabilidade de Routh. Uma forma da expansão em série de e^{-Ts} é dada a seguir:

$$e^{-Ts} = \frac{1 - \frac{Ts}{2} + \frac{(Ts)^2}{8} - \frac{(Ts)^3}{48} + \dots}{1 + \frac{Ts}{2} + \frac{(Ts)^2}{8} + \frac{(Ts)^3}{48} + \dots}$$

Em primeira aproximação, podemos considerar apenas os dois primeiros termos no numerador e denominador, respectivamente, ou

$$e^{-Ts} \approx \frac{1 - \frac{Ts}{2}}{1 + \frac{Ts}{2}} = \frac{2 - Ts}{2 + Ts}$$

Isto dá uma boa aproximação para o atraso de transporte em uma faixa de frequência de $0 \leq \omega \leq (0.5/T)$. [Note que o módulo de $(2 - j\omega T)/(2 + j\omega T)$ é sempre igual a um, e o ângulo de fase de $(2 - j\omega T)/(2 + j\omega T)$ é aproximadamente igual àquele do atraso de transporte, dentro da faixa de frequência estabelecida.]

3. Se o lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$ passa pelo ponto $-1 + j0$, então os zeros da equação característica, ou os pólos de malha-fechada, estão localizados sobre o eixo $j\omega$. Isto não é desejável para sistemas de controle práticos. Para um sistema de malha-fechada bem projetado, nenhuma raiz da equação característica deve estar sobre o eixo $j\omega$.

Caso especial em que $G(s)H(s)$ contém pólos e/ou zeros sobre o eixo $j\omega$. Na discussão anterior, supusemos que a função de transferência de malha-aberta $G(s)H(s)$ não possuía pólos ou zeros na origem. Consideraremos agora o caso em que $G(s)H(s)$ contém pólos e/ou zeros sobre o eixo $j\omega$.

Desde que o caminho de Nyquist não passa por pólos ou zeros de $G(s)H(s)$, se a função $G(s)H(s)$ possui pólos ou zeros na origem (ou sobre o eixo $j\omega$ em pontos diferentes da origem), o contorno no plano s deve ser modificado. O modo usual de modificação do contorno próximo à origem é usar uma semicircunferência com um raio infinitesimal ϵ , conforme indicado na Fig. 9.41. Um ponto representativo s move-se ao longo do eixo negativo de $j\omega$ desde $-j\infty$ até $-j0_-$. De $s = j0_-$ até $s = j0_+$, o ponto se move ao longo da semicircunferência de raio ϵ (onde $\epsilon \ll 1$), e então move-se ao longo do eixo $j\omega$ positivo desde $j0_+$ até $j\infty$. De $s = j\infty$, o contorno segue uma semicircunferência com raio infinito e o ponto representativo retorna ao ponto inicial. A área que o contorno fechado modificado evita é muito pequena e tende a zero, conforme o raio ϵ tende a zero. Portanto, todos os pólos e zeros, se houver, no semiplano direito do plano s serão envolvidos por este contorno.

Considere, por exemplo, um sistema de malha-fechada cuja função de transferência de malha-aberta é dada por

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

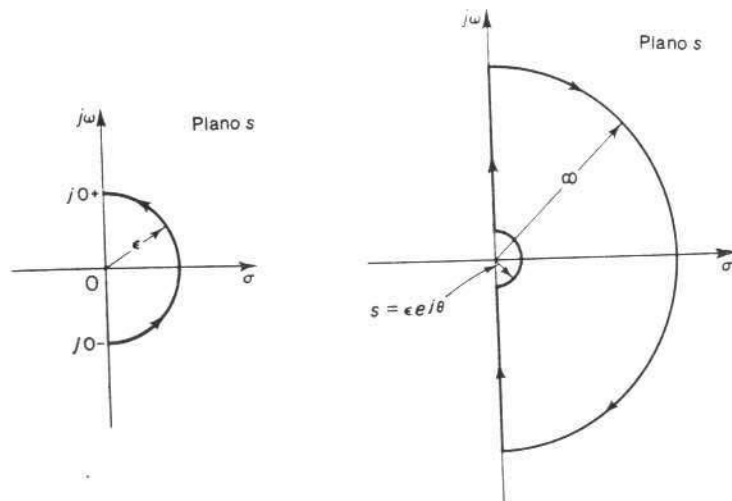


Fig. 9.41 Contornos fechados no plano s evitando pólos e zeros na origem.

Os pontos correspondentes a $s = j0_+$ e $s = j0_-$ sobre o lugar geométrico de $G(s)H(s)$ no plano $G(s)H(s)$ são $-j\infty$ e $j\infty$, respectivamente. Sobre o caminho semicircular com raio ϵ (onde $\epsilon \ll 1$), a variável complexa s pode ser escrita

$$s = \epsilon e^{j\theta}$$

onde θ varia de -90° para $+90^\circ$. Então, $G(s)H(s)$ resulta em

$$G(\epsilon e^{j\theta})H(\epsilon e^{j\theta}) = \frac{K}{\epsilon e^{j\theta}} = \frac{K}{\epsilon} e^{-j\theta}$$

O valor de K/ϵ tende a infinito conforme ϵ tende a zero, e $-\theta$ varia de 90° a -90° conforme um ponto representativo s move-se ao longo da semicircunferência. Portanto, os pontos $G(j0_-)H(j0_-) = j\infty$ e $G(j0_+)H(j0_+) = -j\infty$ são unidos por uma semicircunferência de raio infinito no semiplano direito do plano GH . A semicircunferência infinitesimal em torno da origem mapeia no plano GH em uma semicircunferência de raio infinito. A Fig. 9.42 mostra o contorno no plano s e o lugar geométrico de $G(s)H(s)$ no plano GH . Os pontos A , B e C do contorno no plano s e o lugar geométrico de $G(s)H(s)$ no plano GH mapeiam nos pontos respectivos A' , B' e C' do lugar geométrico $G(s)H(s)$. Como pode ser observado da Fig. 9.42, os pontos D , E e F na semicircunferência de raio infinito no plano s mapeiam na origem do plano GH . Desde que não há pólo no semiplano direito do plano s e o lugar geométrico de $G(s)H(s)$ não envolve o ponto $-1 + j0$, não há zeros da função $1 + G(s)H(s)$ no semiplano direito do plano s . Portanto, o sistema é estável.

Para uma função de transferência de malha-aberta $G(s)H(s)$ contendo um fator $1/s^n$ (onde $n = 2, 3, \dots$), o gráfico de $G(s)H(s)$ possui n semicircunferências de raio infinito no sentido horário em torno da origem, conforme um ponto representativo s

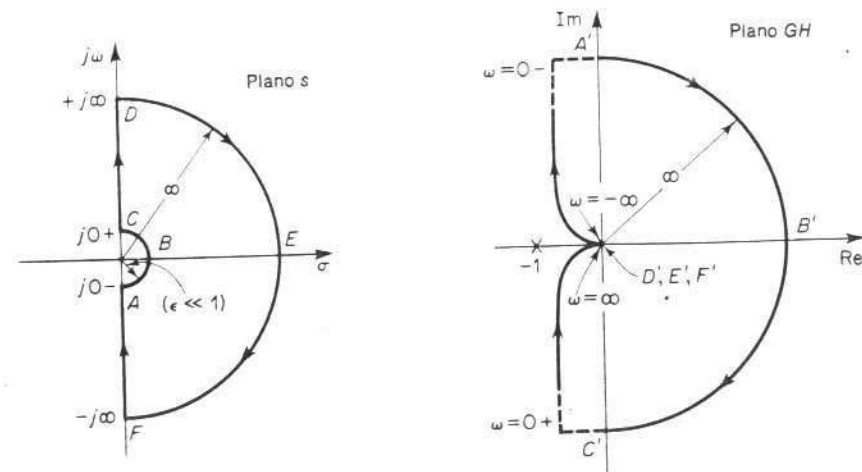


Fig. 9.42 Contorno no plano s e o lugar geométrico de $G(s)H(s)$ no plano GH onde $G(s)H(s) = K/[s(Ts + 1)]$.

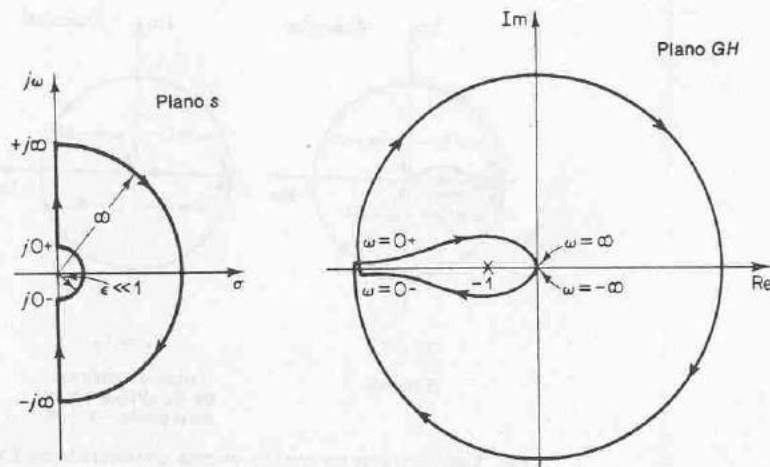


Fig. 9.43 Contorno no plano s e o lugar geométrico de $G(s)H(s)$ no plano GH onde $G(s)H(s) = K/[s^2(Ts + 1)]$.

percorre a semicircunferência de raio ϵ (onde $\epsilon \ll 1$). Por exemplo, considere a seguinte função de transferência de malha-aberta:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(Ts + 1)}$$

Então

$$\lim_{s \rightarrow \epsilon e^{j\theta}} G(s)H(s) = \frac{K}{\epsilon^2 e^{2j\theta}} = \frac{K}{\epsilon^2} e^{-2j\theta}$$

Conforme θ varia desde -90° a 90° no plano s , o ângulo de $G(s)H(s)$ varia desde 180° até -180° , conforme a Fig. 9.43. Desde que não há pólos no semiplano direito do plano s e o lugar geométrico envolve o ponto $-1 + j0$ duas vezes no sentido horário, para qualquer valor positivo de K , há dois zeros de $1 + G(s)H(s)$ no semiplano direito do plano s . Portanto, este sistema é sempre instável.

Note que uma análise equivalente pode ser realizada se $G(s)H(s)$ contiver pólos e/ou zeros sobre o eixo $j\omega$. O critério de estabilidade de Nyquist pode agora ser generalizado como segue:

Critério de estabilidade de Nyquist (Para o caso geral onde $G(s)H(s)$ contém pólos e/ou zeros no eixo $j\omega$.): No sistema indicado na Fig. 9.36, se a função de transferência de malha-aberta $G(s)H(s)$ possuir k pólos no semiplano direito do plano s , então, para estabilidade, o lugar geométrico de $G(s)H(s)$ deve envolver o ponto $-1 + j0$ k vezes no sentido anti-horário, conforme um ponto representativo s percorre o caminho modificado de Nyquist no sentido horário.

9.6 ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Nesta seção, apresentaremos alguns exemplos ilustrativos da análise de estabilidade de sistemas de controle utilizando o critério de estabilidade de Nyquist.

Se o caminho de Nyquist no plano s envolver Z zeros e P pólos de $1 + G(s)H(s)$ e não passar por nenhum pólo ou zero de $1 + G(s)H(s)$, conforme um ponto representativo s percorre o caminho de Nyquist no sentido horário, então o contorno correspondente no plano $G(s)H(s)$ envolve o ponto $-1 + j0$ $N = Z - P$ vezes no sentido horário. (Valores negativos de N implicam envoltimentos no sentido anti-horário.)

No exame da estabilidade de sistemas de controle lineares utilizando o critério de estabilidade de Nyquist, verificamos que podem ocorrer três possibilidades:

1. Não há envolvimento do ponto $-1 + j0$. Isto implica que o sistema é estável se não houver pólos de $G(s)H(s)$ no semiplano direito do plano s ; caso contrário, o sistema é instável.
2. Há um envolvimento ou envoltimentos do ponto $-1 + j0$ no sentido anti-horário. Neste caso o sistema é estável se o número de envoltimentos no sentido anti-horário for o mesmo que o número de pólos de $G(s)H(s)$ no semiplano direito do plano s ; caso contrário o sistema é instável.
3. Há um envolvimento ou envoltimentos no sentido horário do ponto $-1 + j0$. Neste caso o sistema é instável.

Nos exemplos a seguir, suporemos que os valores do ganho K e as constantes de tempo (tais como T , T_1 e T_2) sejam todos positivos.

Exemplo 9.6 Considere um sistema de malha-fechada cuja função de transferência de malha-aberta é dada por

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

Examine a estabilidade do sistema.

Um gráfico de $G(j\omega)H(j\omega)$ é indicado na Fig. 9.44. Desde que $G(s)H(s)$ não possui

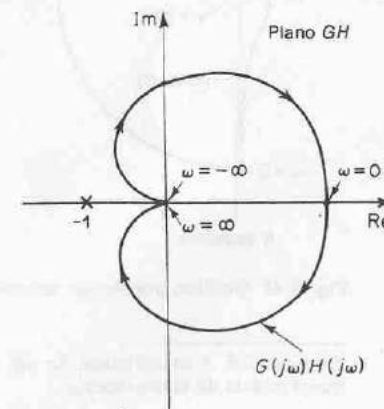


Fig. 9.44 Gráfico polar de $G(j\omega)H(j\omega)$ considerada no Exemplo 9.6.

qualquer pólo no semiplano direito do plano s e o ponto $-1 + j0$ não é envolvido pelo lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$, este sistema é estável para quaisquer valores positivos de K , T_1 e T_2 .

Exemplo 9.7 Considere o sistema com a seguinte função de transferência de malha-aberta:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

Determine a estabilidade do sistema para os dois casos, (1) o ganho K é pequeno, (2) K é grande.

Os gráficos de Nyquist da função de transferência de malha-aberta com um pequeno valor de K e com um grande valor de K são indicados na Fig. 9.45. O número de pólos de $G(s)H(s)$ no semiplano direito do plano s é zero. Portanto, para este sistema ser estável, é necessário que $N = Z = 0$ ou que o lugar geométrico de $G(s)H(s)$ não envolva o ponto $-1 + j0$.

Para pequenos valores de K , não há envolvimento do ponto $-1 + j0$. Consequentemente, o sistema é estável para pequenos valores de K . Para grandes valores de K , o lugar geométrico de $G(s)H(s)$ envolve o ponto $-1 + j0$ duas vezes no sentido horário, indicando dois pólos de malha-fechada no semiplano direito do plano s e a instabilidade do sistema. (Para boa precisão, K deve ser grande. Do ponto de vista de estabilidade, entretanto, um valor grande de K causa uma estabilidade pobre ou mesmo instabilidade. A fim de estabelecer um compromisso entre precisão e estabilidade é necessário inserir uma rede de compensação no sistema. As técnicas de compensação no domínio de frequência são discutidas no Cap. 10.)

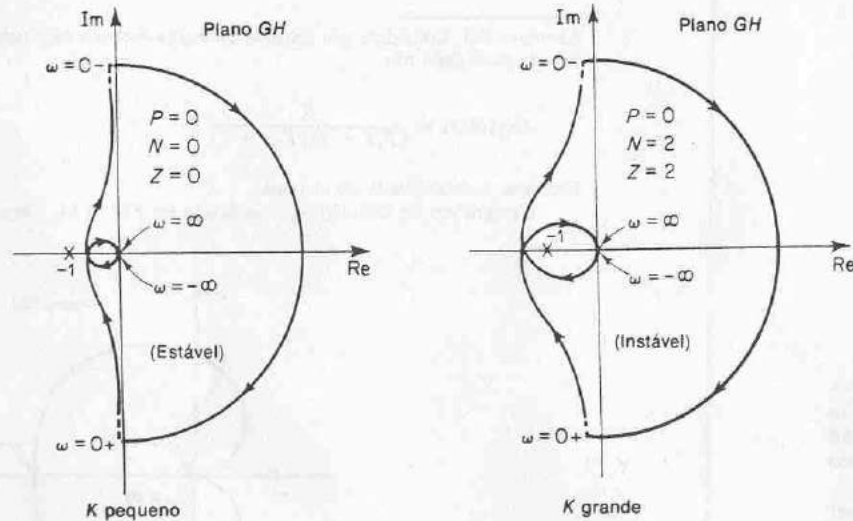


Fig. 9.45 Gráficos polares do sistema considerado no Exemplo 9.7.

Exemplo 9.8 A estabilidade de um sistema de malha-fechada com a seguinte função de transferência de malha-aberta

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_2s + 1)}{s^2(T_1s + 1)}$$

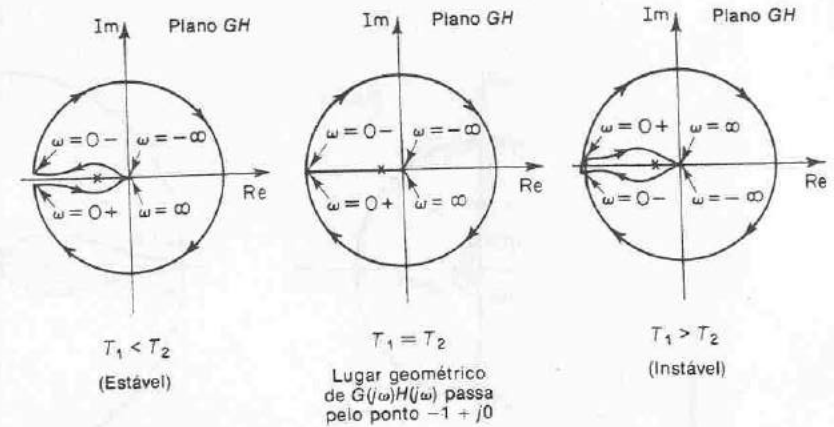


Fig. 9.46 Gráficos polares do sistema considerado no Exemplo 9.8.

depende dos valores relativos de T_1 e T_2 . Desenhe os gráficos de Nyquist e determine a estabilidade do sistema.

Os gráficos dos lugares geométricos de $G(s)H(s)$ para os três casos, $T_1 < T_2$, $T_1 = T_2$ e $T_1 > T_2$, são indicados na Fig. 9.46. Para $T_1 < T_2$, o lugar geométrico de $G(s)H(s)$ não envolve o ponto $-1 + j0$, e o sistema de malha-fechada é estável. Para $T_1 = T_2$, o lugar geométrico de $G(s)H(s)$ passa pelo ponto $-1 + j0$, o que indica que os pólos de malha-fechada estão localizados sobre o eixo $j\omega$. Para $T_1 > T_2$, o lugar geométrico de $G(s)H(s)$ envolve o ponto $-1 + j0$ duas vezes no sentido horário. Portanto, o sistema de malha-fechada possui dois pólos de malha-fechada no semiplano direito do plano s , e o sistema é instável.

Exemplo 9.9 Considere o sistema de malha-fechada com a seguinte função de transferência de malha-aberta:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts - 1)}$$

Determine a estabilidade do sistema.

A função $G(s)H(s)$ tem um pólo ($s = 1/T$) no semiplano direito do plano s . Portanto, $P = 1$. O gráfico de Nyquist mostrado na Fig. 9.47 indica que o lugar geométrico de $G(s)H(s)$ envolve o ponto $-1 + j0$ uma vez no sentido horário. Portanto, $N = 1$. Desde que $Z = N + P$, verificamos que $Z = 2$. Isto significa que o sistema de malha-fechada possui dois pólos de malha-fechada no semiplano direito do plano s e é instável.

Exemplo 9.10 Investigue a estabilidade de um sistema de malha-fechada com a seguinte função de transferência de malha-aberta:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 3)}{s(s - 1)}$$

A função de transferência de malha-aberta possui um pólo ($s = 1$) no semiplano direito do plano s , ou $P = 1$. O sistema de malha-aberta é instável. O gráfico de Nyquist mostrado na Fig. 9.48 indica que o ponto $-1 + j0$ é envolvido pelo lugar geométrico de $G(s)H(s)$ uma vez no sentido anti-horário. Portanto, $N = -1$. Consequentemente Z , determinado a partir de $Z = N + P$

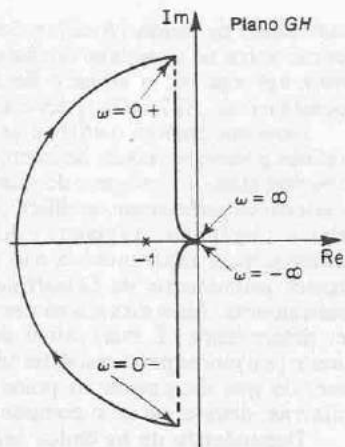


Fig. 9.47 Gráfico polar do sistema considerado no Exemplo 9.9.

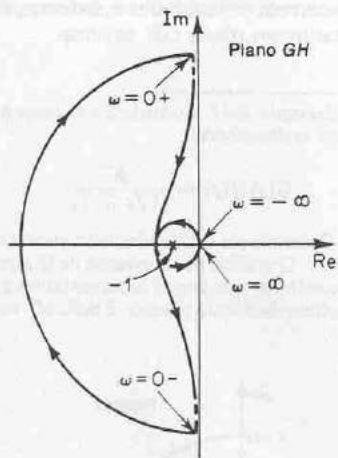


Fig. 9.48 Gráfico polar do sistema considerado no Exemplo 9.10.

P , é igual a zero, o que indica que não há nenhum zero de $1 + G(s)H(s)$ no semiplano direito do plano s , e o sistema de malha-fechada é estável. Este é um dos exemplos onde um sistema de malha-aberta instável torna-se estável quando a malha é fechada.

Sistemas condicionalmente estáveis. A Fig. 9.49 mostra um exemplo de um lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$ para o qual o sistema de malha-fechada pode ser feito instável variando-se o ganho de malha-aberta. Se o ganho de malha-aberta for aumentado suficientemente, o lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$ envolve o ponto $-1 + j0$ duas vezes, e o sistema resulta instável. Se o ganho de malha-aberta é

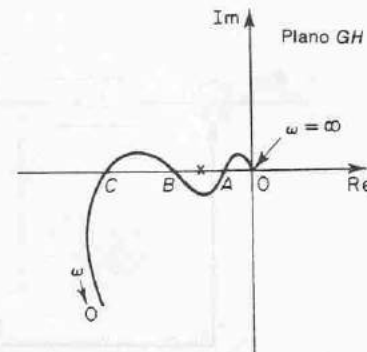


Fig. 9.49 Gráfico polar de um sistema condicionalmente estável.

diminuído suficientemente, ainda o lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$ envolve o ponto $-1 + j0$ duas vezes. O sistema é estável apenas para a faixa limitada de valores do ganho de malha-aberta para os quais o ponto $-1 + j0$ está completamente do lado de fora do lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$. Um sistema deste tipo é dito condicionalmente estável.

Um sistema condicionalmente estável é estável para os valores do ganho de malha-aberta que estão entre os valores críticos, mas é instável se o ganho de malha-aberta for aumentado ou diminuído suficientemente. Um sistema deste tipo resulta instável quando são aplicados grandes sinais na entrada já que um sinal grande pode causar saturação, o que por sua vez reduz o ganho de malha-aberta do sistema. É aconselhável evitar estas situações visto que o sistema pode tornar-se instável, se o ganho de malha-aberta cair abaixo de um valor crítico.

Para operação estável do sistema condicionalmente estável aqui considerado, o ponto crítico $-1 + j0$ deve estar localizado nas regiões entre OA e BC indicadas na Fig. 9.49.

Sistemas de múltiplas malhas. Considere o sistema indicado na Fig. 9.50. Este é um sistema de múltiplas malhas. A malha interna possui a função de transferência

$$G(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)H_2(s)}$$

Se $G(s)$ é instável, os efeitos da instabilidade são para produzir um pólo ou pólos no semiplano direito do plano s . Então a equação característica da malha interna, $1 + G_2(s)H_2(s) = 0$, possui um zero ou zeros nesta parte do plano. Se $G_2(s)$ e $H_2(s)$ possuírem nesta parte P_1 pólos, então o número Z_1 de zeros no semiplano direito de $1 + G_2(s)H_2(s)$ pode ser determinado de $Z_1 = N_1 + P_1$, onde N_1 é o número de envoltimentos do ponto $-1 + j0$, no sentido horário, pelo lugar geométrico de $G_2(s)H_2(s)$. Desde que a função de transferência de malha-aberta do sistema inteiro é dada por $G_1(s)G(s)H_1(s)$, a estabilidade deste sistema de malha-fechada pode ser determinada do gráfico de Nyquist de $G_1(s)G(s)H_1(s)$ e o conhecimento dos pólos no semiplano direito de $G_1(s)G(s)H_1(s)$.

Note que se for eliminada uma malha de realimentação por meio de reduções de diagrama de blocos, há uma possibilidade de serem introduzidos pólos instáveis;

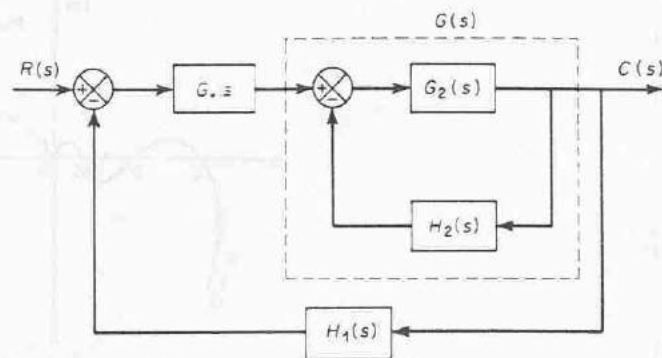


Fig. 9.50 Sistema de múltiplas malhas.

se o ramo direito for eliminado por meio de reduções de diagrama de blocos, há uma possibilidade de serem introduzidos zeros no semiplano direito. Portanto, devemos notar todos os pólos e zeros do semiplano direito conforme eles aparecem de reduções de malhas intermediárias. Este conhecimento é necessário na determinação da estabilidade de sistemas de múltiplas malhas.

Na análise de sistemas de múltiplas malhas deste tipo, a função de transferência inversa pode algumas vezes ser utilizada de modo a permitir análise gráfica; isto evita muito cálculo numérico.

CrITÉRIO de estabilidade de Nyquist aplicado a gráficos polares inversos. Na análise anterior, o critério de estabilidade de Nyquist foi aplicado aos gráficos polares da função de transferência de malha-aberta $G(s)H(s)$. O critério de estabilidade de Nyquist pode igualmente ser aplicado aos gráficos polares inversos. A dedução matemática do critério de estabilidade de Nyquist para gráficos polares inversos é idêntica à efetuada para gráficos polares diretos.

O gráfico polar inverso de $G(j\omega)H(j\omega)$ é um gráfico de $1/[G(j\omega)H(j\omega)]$ em função de ω . Por exemplo, se $G(j\omega)H(j\omega)$ é

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T}$$

então

$$\frac{1}{G(j\omega)H(j\omega)} = \frac{1}{j\omega T} - 1$$

O gráfico polar inverso para $\omega \geq 0$ é a metade inferior da reta vertical iniciando no ponto (1; 0) sobre o eixo real.

O critério de estabilidade de Nyquist aplicado aos gráficos polares inversos pode ser estabelecido como segue: Para um sistema de malha-fechada ser estável, o envolvimento, se houver, do ponto $-1 + j0$ pelo lugar geométrico de $1/[G(s)H(s)]$ (conforme s percorre o caminho de Nyquist) deve ser anti-horário, e o número destes envoltimentos deve ser igual ao número de pólos de $1/[G(s)H(s)]$ [isto é, os zeros de $G(s)H(s)$] que estão no semiplano direito do plano s . (O número de zeros de $G(s)H(s)$ no semiplano direito do plano s pode ser determinado pelo critério de

estabilidade de Routh.) Se a função de transferência de malha-aberta $G(s)H(s)$ não possuir zeros no semiplano direito do plano s , então, para um sistema de malha-fechada ser estável, o número de envoltimentos do ponto $-1 + j0$ pelo lugar geométrico de $1/[G(s)H(s)]$ deve ser zero.

Note que embora o critério de estabilidade de Nyquist possa ser aplicado aos gráficos polares inversos, se forem incorporados dados de resposta em frequência experimentais, a contagem do número de envoltimentos do lugar geométrico de $1/[G(s)H(s)]$ pode tornar-se difícil porque a defasagem correspondente ao caminho semicircular infinito no plano s é difícil de medir. Em geral, se os dados de resposta em frequência experimentais não puderem ser colocados em forma analítica, os lugares geométricos de $G(j\omega)H(j\omega)$ e de $1/[G(j\omega)H(j\omega)]$ devem ser construídos graficamente. Além disso, o número de zeros de $G(s)H(s)$ no semiplano direito deve ser determinado. É mais difícil determinar os zeros de $G(s)H(s)$ no semiplano direito (em outras palavras, determinar se um dado componente é ou não de mínima fase) do que determinar os pólos de $G(s)H(s)$ no semiplano direito (em outras palavras, determinar se o componente é ou não estável).

Dependendo de os dados serem analíticos ou gráficos e dos componentes serem ou não de mínima fase, um teste de estabilidade apropriado deve ser utilizado para sistemas de múltiplas malhas. Se os dados forem fornecidos em forma analítica, ou se as expressões matemáticas de todos os componentes forem conhecidas, a aplicação do critério de estabilidade de Nyquist para gráficos polares inversos não acarreta dificuldades e sistemas de múltiplas malhas podem ser analisados e projetados no plano GH inverso.

Exemplo 9.11 Considere o sistema de malha-fechada com a seguinte função de transferência de malha-aberta:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

Determine a estabilidade do sistema utilizando o gráfico polar inverso.

O gráfico polar inverso de $G(s)H(s)$, isto é, o gráfico do lugar geométrico de $1/[G(s)H(s)]$ conforme um ponto representativo s percorre o contorno fechado envolvendo todo o semiplano direito do plano s é indicado na Fig. 9.51, junto com o contorno no plano s . Conforme se

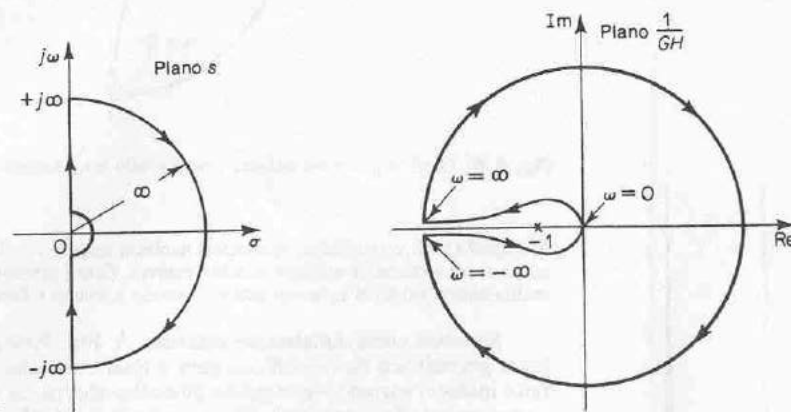


Fig. 9.51 Contorno no plano s e lugar geométrico de $G(s)H(s)$ no plano $1/GH$ onde $G(s)H(s) = K/[s(Ts + 1)]$.

percorre o contorno fechado no sentido horário, não é envolvido o ponto $-1 + j0$. Portanto, o sistema de malha-fechada é estável. Neste sistema, a origem do plano s é mapeada na origem do plano $1/GH$. A semicircunferência com raio infinito, ou $s = \infty e^{j\theta}$, onde $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, corresponde a uma circunferência de raio infinito no plano $1/GH$.

Note que, se a função de transferência de malha-fechada $G(s)H(s)$ possui atraso de transporte, por exemplo,

$$G(s)H(s) = \frac{Ke^{-j\omega L}}{s(Ts + 1)}$$

então o número de envoltimentos do ponto $-1 + j0$ pelo lugar geométrico de $1/[G(s)H(s)]$ é infinito, e o critério de estabilidade de Nyquist não pode ser aplicado para o gráfico polar inverso desta função de transferência de malha-aberta.

Análise de estabilidade relativa através dos caminhos de Nyquist modificados. O caminho de Nyquist para testes de estabilidade pode ser modificado de modo que permita a investigação da estabilidade relativa de sistemas de malha-fechada. Para a seguinte equação característica de segunda-ordem,

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (0 < \zeta < 1)$$

as raízes são complexas conjugadas com valores

$$s_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$s_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Se estas raízes forem colocadas em um gráfico no plano s , como indicado na Fig. 9.52, então verificamos que $\sin \theta = \zeta$, ou seja, o ângulo θ é indicativo da relação de amortecimento ζ . Conforme θ torna-se menor, também o será o valor de ζ .

Se modificarmos o caminho de Nyquist e utilizarmos retas radiais com ângulo θ_x ao invés do eixo $j\omega$, conforme indicado na Fig. 9.53, então pode ser dito, seguindo os mesmos motivos do caso do critério de estabilidade de Nyquist, que se o lugar geométrico de $G(s)H(s)$ correspondente ao contorno no plano s modificado não envolver o ponto $-1 + j0$ e nenhum dos pólos de $G(s)H(s)$ estiver dentro do contorno do plano s fechado, então este contorno não envolve qualquer zero de $1 + G(s)H(s)$. A equação característica, $1 + G(s)H(s) = 0$, então, não possui qualquer raiz dentro do contorno no plano s modificado. Se nenhum pólo de malha-fechada

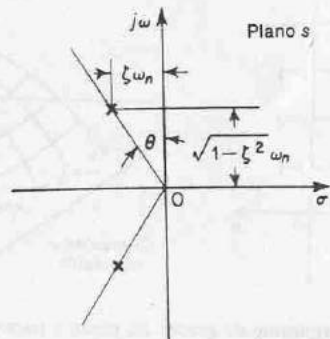


Fig. 9.52 Gráfico das raízes complexas conjugadas no plano s .

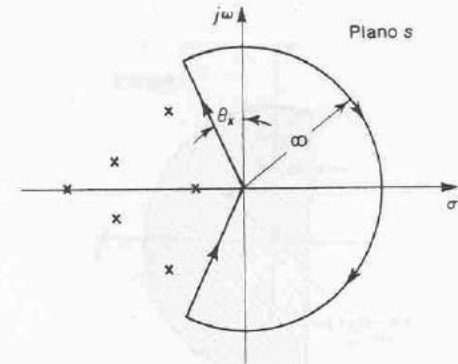


Fig. 9.53 Caminho de Nyquist modificado.

de um sistema de maior ordem for envolvido por este contorno, podemos afirmar que a relação de amortecimento de cada par de pólos complexos conjugados de malha-fechada do sistema é maior do que $\sin \theta_x$.

O lugar geométrico de $G(s)H(s)$ pode ser construído substituindo-se s por

$$-\zeta_x\omega + j\omega\sqrt{1-\zeta_x^2}$$

onde $\zeta_x = \sin \theta_x$, com ω tomando todos os valores desde $-\infty$ até ∞ , e esboçando o lugar geométrico resultante. O lugar geométrico para

$$G(-\zeta_x\omega - j\omega\sqrt{1-\zeta_x^2})H(-\zeta_x\omega - j\omega\sqrt{1-\zeta_x^2})$$

é a imagem especular em relação ao eixo real do lugar geométrico para

$$G(-\zeta_x\omega + j\omega\sqrt{1-\zeta_x^2})H(-\zeta_x\omega + j\omega\sqrt{1-\zeta_x^2})$$

Um diagrama deste tipo é denominado diagrama de Vazsonyi. O diagrama de Nyquist é um caso especial deste último.

Analogamente, se o contorno no plano s consiste em uma reta à esquerda e paralela ao eixo $j\omega$ e a uma distância $-\sigma_0$ (ou a reta $s = -\sigma_0 + j\omega$) e a semicircunferência de raio infinito envolvendo todo o semiplano direito do plano s e aquela parte do semiplano esquerdo do plano s entre as retas $s = -\sigma_0 + j\omega$ e $s = j\omega$, conforme indicado na Fig. 9.54(a), então podemos estabelecer o seguinte: Se o lugar geométrico de $G(s)H(s)$ correspondente a este contorno no plano s não envolver o ponto $-1 + j0$ e $G(s)H(s)$ não possuir pólos dentro do contorno fechado no plano s , então a equação característica não possuirá qualquer zero na região envolvida pelo contorno do plano s modificado. Todas as raízes da equação característica estarão à esquerda da reta $s = -\sigma_0 + j\omega$. Um exemplo de um lugar geométrico de $G(-\sigma_0 + j\omega)H(-\sigma_0 + j\omega)$ conjuntamente com um lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$ é indicado na Fig. 9.54(b). O valor $1/\sigma_0$ é indicativo da constante de tempo dos pólos de malha-fechada dominantes. Se todas as raízes estiverem do lado de fora do contorno no plano s , todas as constantes de tempo da função de transferência de malha-fechada serão menores do que $1/\sigma_0$. Se o contorno no plano s é escolhido conforme indicado na Fig. 9.55, então o teste dos envoltimentos do ponto $-1 + j0$

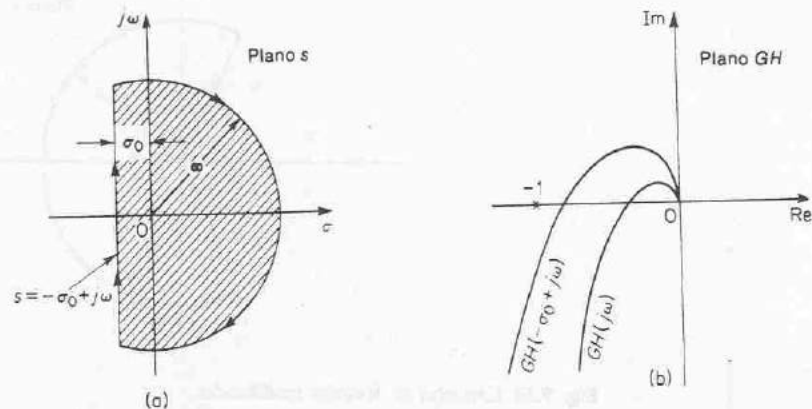


Fig. 9.54(a) Caminho de Nyquist modificado; (b) gráficos polares do lugar geométrico de $G(-\sigma_0 + j\omega)H(-\sigma_0 + j\omega)$ e do lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$ no plano GH .

revela a existência ou não das raízes da equação característica do sistema de malha-fechada dentro do contorno no plano s . Se o teste revela que nenhuma raiz está dentro do contorno no plano s , então é claro que todos os pólos de malha-fechada possuirão relações de amortecimento maiores do que ζ_x e constantes de tempo menores do que $1/\sigma_0$. Portanto, considerando um contorno apropriado no plano s , podemos investigar constantes de tempo e relações de amortecimento de pólos de malha-fechada de funções de transferência de malha-aberta conhecidas.

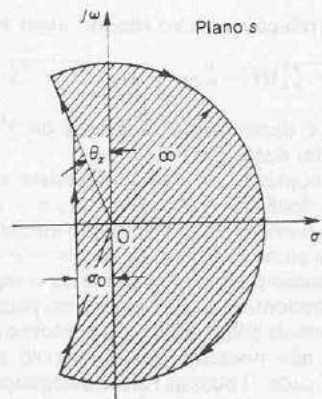


Fig. 9.55 Caminho de Nyquist modificado.

9.7 ESTABILIDADE RELATIVA

No projeto de sistema de controle, exige-se que o sistema seja estável. Além disso, é necessário que o sistema possua uma adequada estabilidade relativa.

Nesta seção, mostraremos como o gráfico de Nyquist indica não apenas se o sistema é ou não estável mas também o grau de estabilidade de um sistema estável.

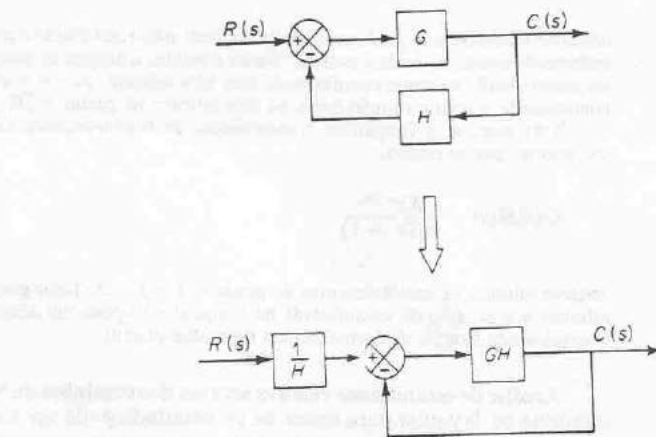


Fig. 9.56 Modificação de um sistema com elementos de realimentação para um sistema com realimentação unitária.

O gráfico de Nyquist também fornece informação de como a estabilidade pode ser melhorada, se isto for necessário. (Para detalhes, vide Cap. 10).

Na discussão a seguir, suporemos que os sistemas considerados possuem realimentação unitária. Note que é sempre possível reduzir um sistema com elementos de realimentação para um sistema com realimentação unitária, conforme indicado na Fig. 9.56. Consequentemente é possível estender-se a análise de estabilidade relativa para sistema com realimentação unitária para um outro sistema com realimentação não unitária.

Consideraremos também que, salvo menção em contrário, os sistemas sejam de mínima fase; isto é, a função de transferência de malha-aberta $G(s)$ não possui pólos ou zeros no semiplano direito do plano s .

Análise de estabilidade relativa via mapeamento conforme. Um dos importantes problemas na análise de um sistema de controle é determinar todos os pólos de

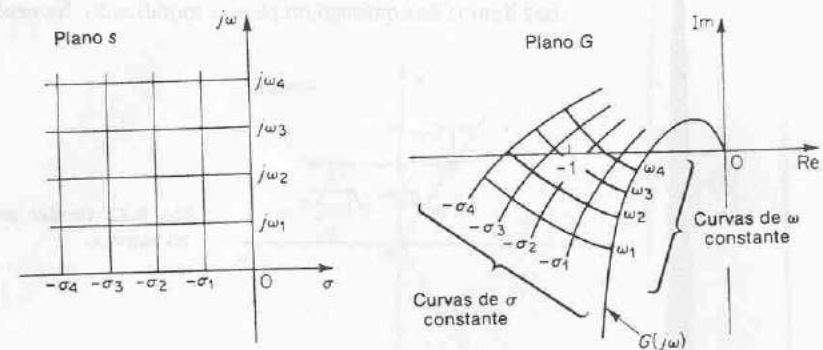


Fig. 9.57 Mapeamento conforme de grades no plano s para o plano $G(s)$.

malha-fechada ou pelo menos aqueles mais próximos do eixo $j\omega$ (ou os pólos de malha-fechada correspondentes ao par dominante.) Se as características de resposta em frequência de malha-aberta de um sistema forem conhecidas, pode ser possível estimar os pólos de malha-fechada mais próximos do eixo $j\omega$. A técnica a ser aqui apresentada é essencialmente gráfica e baseada em um mapeamento conforme do plano s no plano $G(s)$.

Considere o mapeamento conforme das retas de σ constante (retas $s = \sigma + j\omega$, onde σ é constante e ω varia) e retas de ω constante (retas $s = \sigma + j\omega$, onde ω é constante e σ varia) no plano s para o plano $G(s)$. A reta $\sigma = 0$ (isto é, o eixo $j\omega$) no plano s mapeia o gráfico de Nyquist no plano $G(s)$. As retas de σ constante no plano s mapeiam em curvas que são similares ao gráfico de Nyquist e, sob certo sentido, paralelas ao gráfico de Nyquist como indicado na Fig. 9.57. As retas de ω constante no plano s mapeiam em curvas, também indicadas na Fig. 9.57.

Embora as formas dos lugares geométricos de σ constante e ω constante no plano $G(s)$ e a proximidade da abordagem do lugar geométrico de $G(j\omega)$ para o ponto $-1 + j0$ dependam de um $G(s)$ particular, a proximidade da abordagem do lugar geométrico de $G(j\omega)$ para o ponto $-1 + j0$ é uma indicação da estabilidade relativa de um sistema estável. Em geral, podemos esperar que quanto mais próximo o lugar geométrico de $G(j\omega)$ estiver em relação ao ponto $-1 + j0$, maior será a sobrelevação máxima na resposta transitória ao degrau e mais longo será o tempo para o amortecimento.

Considere os dois sistemas indicados nas Figs. 9.58(a) e (b). (Na Fig. 9.58 as cruzes indicam pólos de malha-fechada.) O sistema (a) é obviamente mais estável do que o sistema (b) porque os pólos de malha-fechada do sistema (a) estão localizados mais à esquerda daqueles correspondentes ao sistema (b). As Figs. 9.59(a) e (b) mostram o mapeamento conforme das grades do plano s no plano $G(s)$. Quanto mais próximos os pólos de malha-fechada estiverem localizados do eixo $j\omega$, mais próximo o lugar geométrico de $G(j\omega)$ estará do ponto $-1 + j0$.

Suponha que o sistema possua pelo menos um par de pólos complexos conjugados de malha-fechada. Se o ponto $-1 + j0$ for determinado na intersecção de uma curva de σ constante e uma curva de ω constante no plano $G(s)$, então estes valores particulares de σ e ω , os quais definiremos como σ_c e ω_c , respectivamente, caracterizam o pólo de malha-fechada mais próximo do eixo $j\omega$ no semiplano superior do plano s . (Note que σ_c representa o decaimento exponencial e ω_c representa a

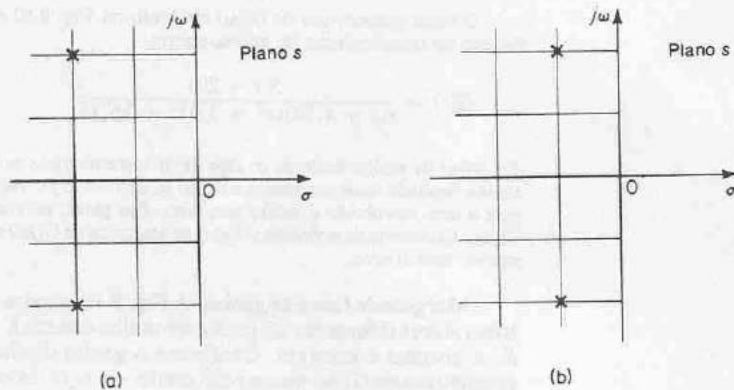


Fig. 9.58 Dois sistemas com dois pólos de malha-fechada.

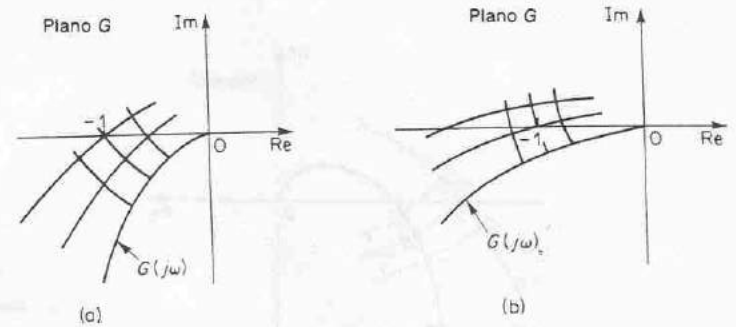


Fig. 9.59 Mapeamentos conformes de grades do plano s para os sistemas indicados na Fig. 9.58 para o plano $G(s)$.

frequência natural amortecida do termo da resposta transitória ao degrau, devido ao par de pólos de malha-fechada mais próximo do eixo $j\omega$.) Se for conhecida a forma analítica de $G(s)$, o mapeamento conforme das retas $s = j\omega_1$, $s = j\omega_2$ e $s = -\sigma_1$ no plano $G(s)$ pode ser feito sem dificuldade. Então, os valores prováveis de σ_c e ω_c podem ser estimados a partir do gráfico, conforme indicado na Fig. 9.60. Portanto, o par de pólos complexos conjugados de malha-fechada que estão mais próximos do eixo $j\omega$ pode ser determinado graficamente. Deve ser observado que todos os pólos de malha-fechada estão mapeados no ponto $-1 + j0$ do plano $G(s)$. Embora os pólos complexos conjugados de malha-fechada mais próximos ao eixo $j\omega$ possam ser determinados facilmente pela técnica acima, a determinação de outros pólos de malha-fechada, se houver, é praticamente impossível por meio desta técnica.

Se os dados de $G(j\omega)$ forem experimentais, então pode ser construído por extrapolação um quadrado curvilíneo próximo ao ponto $-1 + j0$. Referindo-se à Fig. 9.61, podemos determinar a localização dos pólos de malha-fechada dominantes no plano s , ou a relação de amortecimento ζ e a frequência natural amortecida ω_d , desenhando as retas AB que interligam o ponto $-1 + j0$ (ponto A) e o ponto B, a abordagem mais próxima do ponto $-1 + j0$, e então construindo um quadrado curvilíneo CDEF, como é indicado na Fig. 9.61. Este quadrado curvilíneo CDEF pode ser construído desenhando-se a curva PQ mais parecida (onde PQ é o mapeamento conforme de uma reta paralela ao eixo $j\omega$ no plano s) passando pelo ponto $-1 + j0$ e "paralela" ao lugar geométrico de $G(j\omega)$, e ajustando os pontos C, D, E e F tais que $\widehat{FB} = \widehat{BE}$, $\widehat{CA} = \widehat{AD}$ e $\widehat{FE} + \widehat{CD} = \widehat{FC} + \widehat{ED}$. O contorno $C'D'E'F'$

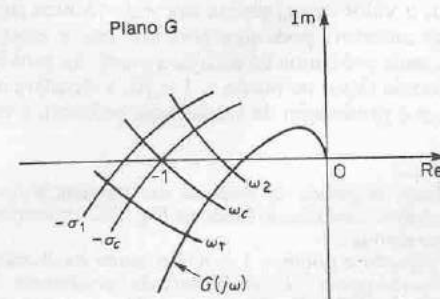


Fig. 9.60 Estimativa de σ_c e ω_c .

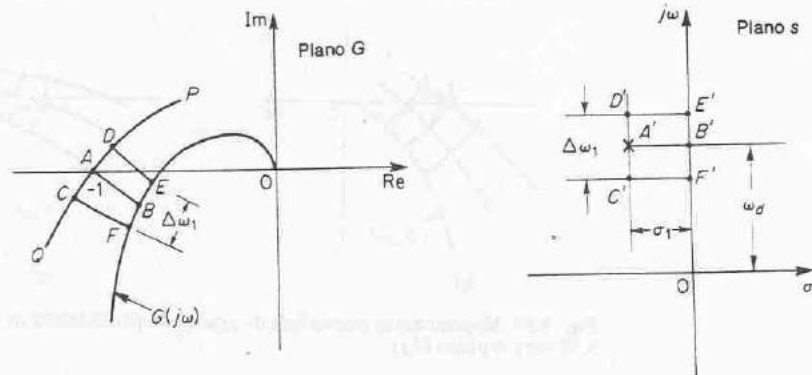


Fig. 9.61 Mapeamento conforme de um quadrado curvilíneo próximo ao ponto $-1 + j0$ no plano $G(s)$ para o plano s .

correspondente no plano s , junto com o ponto A' , o pólo de malha-fechada mais próximo do eixo $j\omega$, são indicados na Fig. 9.61. O valor do intervalo de frequência $\Delta\omega$, entre os pontos E e F é aproximadamente igual ao valor de σ_1 indicado na Fig. 9.61. A frequência no ponto B é aproximadamente igual à frequência natural amortecida ω_d . Os pólos de malha-fechada mais próximos ao eixo $j\omega$ são estimados como

$$s = -\sigma_1 \pm j\omega_d$$

Então, a relação de amortecimento ζ destes pólos de malha-fechada pode ser obtida de

$$\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\sigma_1}{\omega_d} = \frac{\Delta\omega_1}{\omega_d}$$

Deve ser notado que a frequência natural amortecida ω_d da resposta transitória ao degrau realmente está sobre o contorno de frequência que passa pelo ponto $-1 + j0$ e não é necessariamente o ponto da abordagem mais próxima ao lugar geométrico. Portanto, o valor de ω_d obtida por esta técnica possui um certo erro.

Da análise anterior, podemos concluir que é possível estimar os pólos de malha-fechada mais próximos ao eixo $j\omega$ a partir da proximidade da abordagem do lugar geométrico de $G(j\omega)$ ao ponto $-1 + j0$, a frequência no ponto da abordagem mais próxima, e a graduação de frequência próxima a este ponto.

Exemplo 9.12 Dado o gráfico de resposta em frequência de $G(j\omega)$ de um sistema com realimentação unitária, conforme indicado na Fig. 9.62, determine os pólos de malha-fechada mais próximos ao eixo $j\omega$.

A reta interligando o ponto $-1 + j0$ e o ponto da abordagem mais próxima do lugar geométrico de $G(j\omega)$ ao ponto $-1 + j0$ é desenhada inicialmente. Posteriormente, é construído o quadrado curvilíneo $ABCD$. Desde que a frequência no ponto de abordagem mais próxima é $\omega = 2,9$, a frequência natural amortecida é aproximadamente $2,9$ ou $\omega_d = 2,9$. A partir do

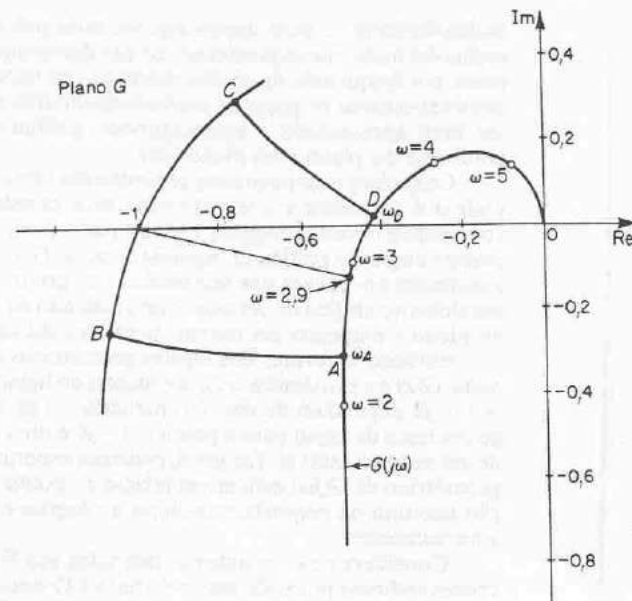


Fig. 9.62 Gráfico polar e um quadrado curvilíneo.

quadrado curvilíneo $ABCD$, verifica-se que

$$\Delta\omega = \omega_D - \omega_A = 3,4 - 2,4 = 1,0$$

Os pólos de malha-fechada mais próximos ao eixo $j\omega$ são então estimados como

$$s = -1 \pm j2,9$$

O lugar geométrico de $G(j\omega)$ indicado na Fig. 9.62 é realmente um gráfico da seguinte função de transferência de malha-aberta:

$$G(s) = \frac{5(s + 20)}{s(s + 4,59)(s^2 + 3,41s + 16,35)}$$

Os pólos de malha-fechada exatos deste sistema são $s = -1 \pm j3$ e $s = -3 \pm j1$. Os pólos de malha-fechada mais próximos ao eixo $j\omega$ são $-1 \pm j3$. Neste exemplo particular, verificamos que o erro envolvido é muito pequeno. Em geral, este erro depende da particular curva de $G(j\omega)$. Quanto mais próximo o lugar geométrico de $G(j\omega)$ estiver em relação ao ponto $-1 + j0$, menor será o erro.

Margens de fase e de ganho. A Fig. 9.63 mostra os gráficos polares de $G(j\omega)$ para três valores diferentes do ganho de malha-aberta K . Para um valor grande do ganho K , o sistema é instável. Conforme o ganho diminui para um certo valor, o lugar geométrico de $G(j\omega)$ passa pelo ponto $-1 + j0$. Isto significa que, com este valor de ganho, o sistema está no limiar de instabilidade, e exibirá oscilações mantidas. Para um valor menor do ganho K , o sistema é estável.

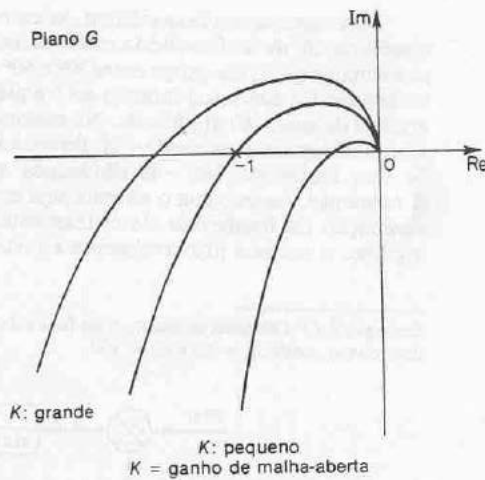


Fig. 9.63 Gráficos polares de $\frac{K(1 + j\omega T_a)(1 + j\omega T_b) \dots}{(j\omega)^k(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) \dots}$

Em geral, quanto mais próximo o lugar geométrico de $G(j\omega)$ resulta para envolver o ponto $-1 + j0$, mais oscilatória é a resposta do sistema. A proximidade do lugar geométrico de $G(j\omega)$ ao ponto $-1 + j0$ pode ser usada como uma medida da margem de estabilidade. (Isto não se aplica, entretanto, a sistemas condicionalmente estáveis.) Constitui uma prática comum representar a proximidade em termos da margem de fase e da margem de ganho.

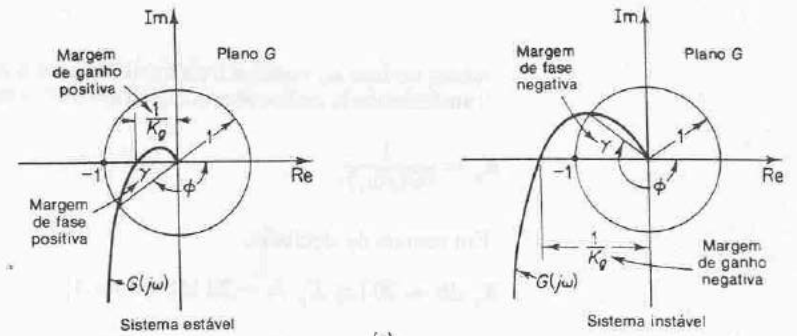
Margem de fase: A margem de fase é o atraso de fase adicional na frequência de cruzamento do ganho, necessário para levar o sistema ao limiar de instabilidade. A frequência de cruzamento do ganho é a frequência na qual $|G(j\omega)|$, o módulo da função de transferência de malha-aberta, é unitário. A margem de fase γ é 180° mais o ângulo de fase ϕ da função de transferência de malha-aberta na frequência de cruzamento do ganho, ou

$$\gamma = 180^\circ + \phi$$

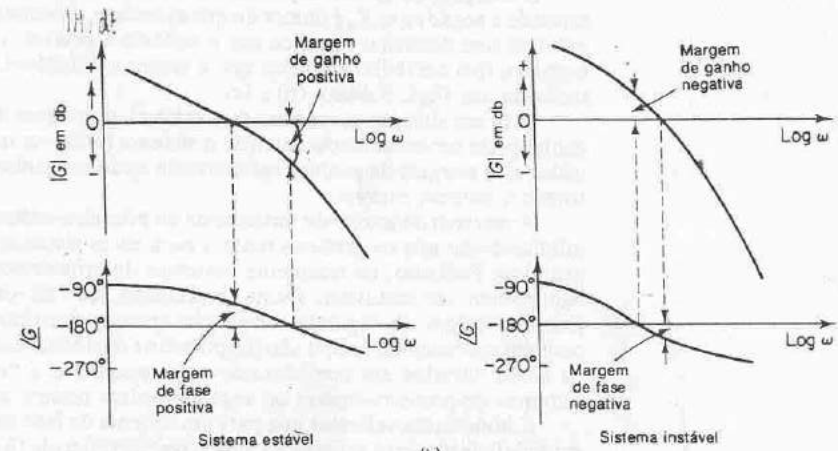
No diagrama de Nyquist, uma reta pode ser desenhada a partir da origem até o ponto no qual a circunferência de raio unitário intercepta o lugar geométrico de $G(j\omega)$. O ângulo a partir do eixo real negativo até esta reta é a margem de fase. A margem de fase é positiva para $\gamma > 0$ e negativa para $\gamma < 0$. Para um sistema de mínima fase ser estável, a margem de fase deve ser positiva.

As Figs. 9.64(a), (b) e (c) mostram as margens de fase de um sistema estável e de um sistema instável por meio de gráficos polares, gráficos logarítmicos e gráficos log-módulo versus fase.

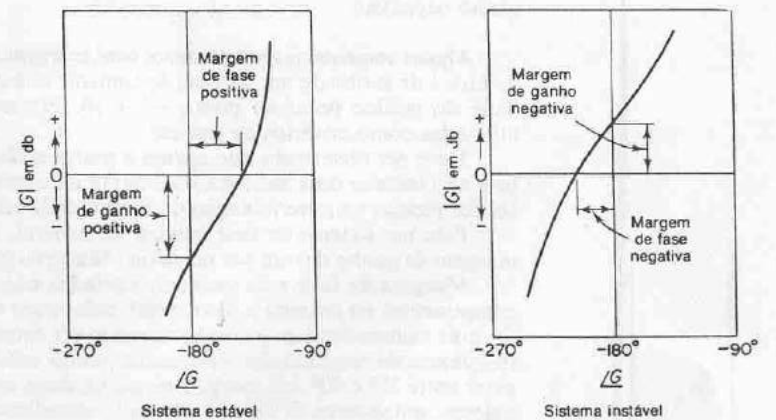
Margem de ganho: A margem de ganho é o recíproco do módulo $|G(j\omega)|$ na frequência onde o ângulo de fase é -180° . Definindo a frequência de cruza-



(a)



(b)



(c)

Fig. 9.64 Margens de ganho e de fase de sistemas estáveis e instáveis. (a) Gráficos polares; (b) gráficos logarítmicos; (c) gráficos do log-módulo versus fase.

mento de fase ω_1 como a frequência na qual o ângulo de fase da função de transferência de malha-aberta é igual a -180° , a margem de ganho K_g resulta:

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_1)|}$$

Em termos de decibéis,

$$K_g^* \text{ db} = 20 \log K_g = -20 \log |G(j\omega_1)|$$

A margem de ganho expressa em decibéis é positiva se K_g é maior do que a unidade e negativa se K_g é menor do que a unidade. Portanto, uma margem de ganho positiva (em decibéis) significa que o sistema é estável, e uma margem de ganho negativa (em decibéis) significa que o sistema é instável. A margem de ganho é indicada nas Figs. 9.64(a), (b) e (c).

Para um sistema de mínima fase estável, a margem de ganho indica quanto o ganho pode ser aumentado antes de o sistema tornar-se instável. Para um sistema instável, a margem de ganho é indicativa de quanto o ganho deve ser diminuído para tornar o sistema estável.

A margem de ganho de um sistema de primeira-ordem ou de segunda-ordem é infinita desde que os gráficos polares para estes sistemas não cruzem o eixo real negativo. Portanto, teoricamente, sistemas de primeira-ordem ou segunda-ordem não podem ser instáveis. (Note, entretanto, que os sistemas denominados de primeira-ordem ou segunda-ordem são apenas aproximações no sentido de que pequenos atrasos de tempo são desprezados na dedução das equações do sistema. Se forem levados em consideração estes pequenos atrasos, os assim chamados sistemas de primeira-ordem ou segunda-ordem podem tornar-se instáveis.)

É importante salientar que para um sistema de fase não-mínima, a condição de estabilidade não será satisfeita a menos que o gráfico de $G(j\omega)$ envolva o ponto $-1 + j0$. Portanto, um sistema de fase não-mínima estável possuirá margens de fase e de ganho negativas.

Alguns comentários relacionados com margens de fase e de ganho. As margens de fase e de ganho de um sistema de controle constituem uma medida da proximidade do gráfico polar ao ponto $-1 + j0$. Portanto, estas margens podem ser utilizadas como critérios de projeto.

Deve ser observado que apenas a margem de ganho ou apenas a margem de fase não fornece uma indicação suficiente da estabilidade relativa. Ambas devem ser fornecidas na determinação da estabilidade relativa.

Para um sistema de fase mínima ser estável, tanto a margem de fase como a margem de ganho devem ser positivas. Margens negativas indicam instabilidade.

Margens de fase e de ganho apropriadas nos previnem contra variações dos componentes no sistema e são especificadas para valores definidos de frequência. Os dois valores limitam o comportamento do sistema de malha-fechada próximo à frequência de ressonância. Para desempenho satisfatório, a margem de fase deve estar entre 30° e 60° , e a margem de ganho deve ser maior do que 6 db. Com estes valores, um sistema de fase mínima tem estabilidade garantida, mesmo se o ganho de malha-aberta e as constantes de tempo dos componentes variarem em uma grande extensão. Embora as margens de fase e de ganho forneçam apenas estimativas grosseiras da relação de amortecimento efetiva do sistema de malha-fechada, elas oferecem um meio conveniente no projeto de sistemas de controle ou no ajuste das constantes de ganho de sistemas.

Para sistemas de fase mínima, as características de módulo e fase da função de transferência de malha-aberta estão definitivamente relacionadas. A exigência de que a margem de fase esteja entre 30° e 60° significa que em um gráfico logarítmico a inclinação da curva log-módulo na frequência de cruzamento do ganho seja mais gradual do que -40 db/década . Na maioria dos casos práticos, para estabilidade, é desejável uma inclinação de -20 db/década na frequência de cruzamento do ganho. Se esta inclinação for -40 db/década o sistema pode ser estável ou instável. (Entretanto, mesmo que o sistema seja estável, a margem de fase é pequena.) Se a inclinação da frequência de cruzamento do ganho for -60 db/década ou mais íngreme, o sistema provavelmente é instável.

Exemplo 9.13 Obtenha as margens de fase e de ganho do sistema indicado na Fig. 9.65 para os dois casos, onde $K = 10$ e $K = 100$.

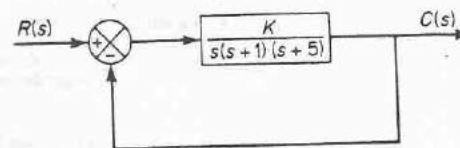


Fig. 9.65 Sistema de controle.

As margens de fase e de ganho podem ser facilmente obtidas a partir do gráfico logarítmico. Um gráfico logarítmico da função de transferência de malha-aberta com $K = 10$ é indicado na Fig. 9.66(a). As margens de fase e de ganho para $K = 10$ são

$$\begin{aligned} \text{Margem de fase} &= 21^\circ \\ \text{Margem de ganho} &= 8 \text{ db} \end{aligned}$$

Portanto, o ganho do sistema pode ser aumentado de 8 db antes de ocorrer instabilidade.

O aumento do ganho de $K = 10$ para $K = 100$ é correspondente a deslocar o eixo de 0-db para baixo por 20 db, conforme a Fig. 9.66(b). As margens de fase e de ganho são

$$\begin{aligned} \text{Margem de fase} &= -30^\circ \\ \text{Margem de ganho} &= -12 \text{ db} \end{aligned}$$

Portanto, o sistema é estável para $K = 10$ porém instável para $K = 100$.

Note que para obter um desempenho satisfatório, devemos aumentar a margem de fase para $30^\circ \sim 60^\circ$. Isto pode ser realizado diminuindo-se o ganho K . Entretanto, a diminuição de K não é desejável porque um pequeno valor de K resultará em um grande erro para a entrada em rampa. Isto sugere que pode ser necessária uma modificação na forma da curva de resposta em frequência de malha-aberta, adicionando-se compensação. Tais técnicas são discutidas em detalhe no Cap. 10.

Correlação entre a resposta transitória ao degrau e a resposta em frequência para sistemas de segunda-ordem. Para sistemas de segunda-ordem podem ser deduzidas as relações matemáticas exatas entre a resposta transitória ao degrau e a resposta em frequência. Considere o sistema indicado na Fig. 9.67. A função de transferência de malha-fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (9-15)$$

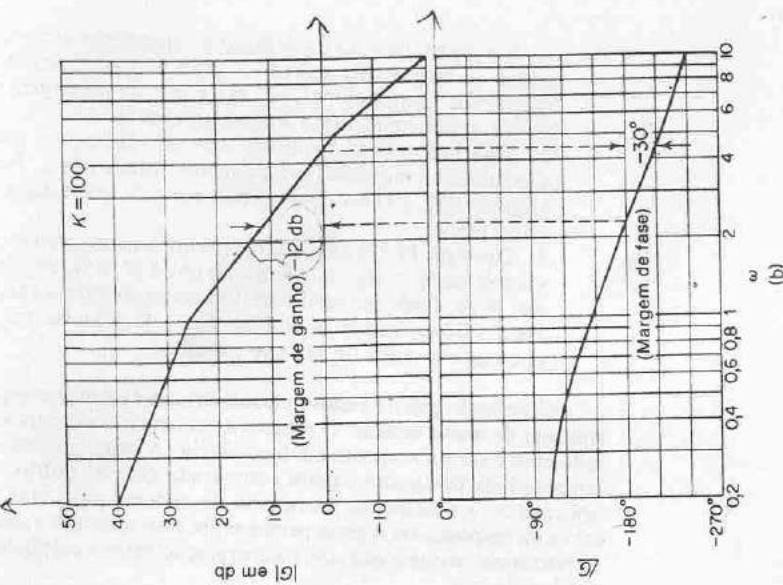


Fig. 9.66 Diagramas de Bode do sistema indicado na Fig. 9.65 com $K = 10$ e $K = 100$.

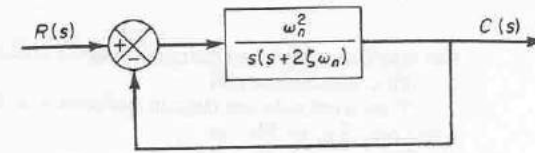
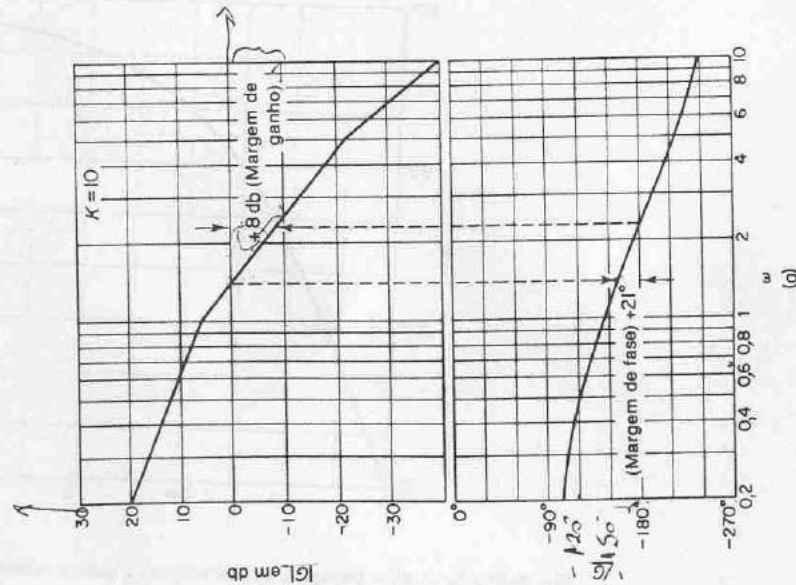


Fig. 9.67 Sistema de controle.

onde ζ e ω_n são a relação de amortecimento e a frequência natural não amortecida, respectivamente. A resposta em frequência de malha-fechada é

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}} = Me^{j\alpha}$$

onde

$$M = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}, \quad \alpha = -\tan^{-1} \frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Pela Eq. (9.12), para $0 \leq \zeta \leq 0,707$ o valor máximo de M ocorre na frequência de ressonância ω_r , onde

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} = \omega_n \sqrt{\cos 2\psi} \quad (9-16)$$

O ângulo ψ é definido na Fig. 9.68. Na frequência de ressonância o valor de M é máximo e dado pela Eq. (9.13), resultando

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{1}{\sin 2\psi} \quad (9-17)$$

Lembre-se que ω_r é real somente se $\zeta < 0,707$. Portanto, não há ressonância de malha-fechada se $\zeta > 0,707$. [O valor de M_r é unitário para $\zeta > 0,707$. Vide a Eq. (9.14).] Desde que os valores de M_r e ω_r possam ser medidos facilmente em um

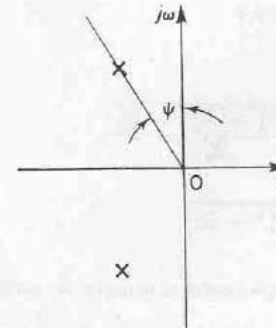


Fig. 9.68 Definição do ângulo ψ .

sistema físico, eles são bem úteis para verificação da concordância entre a análise teórica e a experimental.

Para a entrada em degrau unitário, a saída do sistema indicado na Fig. 9.67 é dada pela Eq. (6.19), ou

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_d t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \quad (t \geq 0)$$

onde

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = \omega_n \cos \psi \quad (9-18)$$

Por outro lado, a sobrelevação máxima M_p para a resposta ao degrau unitário é dada pela Eq. (6.28), ou

$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} \quad (9-19)$$

A sobrelevação máxima ocorre na resposta transitória que possui a frequência natural amortecida $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$. A máxima sobrelevação resulta excessiva para valores de $\zeta < 0.4$.

Desde que o sistema de segunda-ordem indicado na Fig. 9.67 possui a seguinte função de transferência de malha-aberta:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

para operação senoidal, o módulo de $G(j\omega)$ resulta unitário quando

$$\omega = \omega_n \sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}$$

Nesta frequência, o ângulo de fase de $G(j\omega)$ é

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \left| \frac{1}{j\omega} + \frac{1}{j\omega + 2\zeta\omega_n} \right| \\ &= -90^\circ - \tan^{-1} \frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}}{2\zeta} \end{aligned}$$

Portanto, a margem de fase γ é

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ + |G(j\omega)| \\ &= 90^\circ - \tan^{-1} \frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}}{2\zeta} \\ &= \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}} \end{aligned} \quad (9-20)$$

A Eq. (9.20) fornece a relação entre a relação de amortecimento ζ e a margem de fase γ .

A seguir, sintetizaremos a correlação entre a resposta transitória ao degrau e a resposta em frequência para o sistema de segunda-ordem dado pela Eq. (9.15):

1. A margem de fase e a relação de amortecimento são diretamente relacionadas. A Fig. 9.69 fornece um gráfico da margem de fase γ em função da relação de amortecimento ζ . Note que uma margem de fase de 60° corresponde a uma relação de amortecimento de 0.6.

2. Referindo-se às Eqs. (9.16) e (9.18) verificamos que os valores de ω_r e ω_d são quase os mesmos para pequenos valores de ζ . Portanto, para pequenos valores de ζ , o valor de ω_r é indicativo da velocidade da resposta transitória do sistema.

3. Das Eqs. (9.17) e (9.19), vemos que quanto menor o valor de ζ , maiores os valores de M_r e M_p . A correlação entre M_r e M_p em função de ζ é indicada na Fig. 9.70. Pode ser verificada uma relação íntima entre M_r e M_p para $\zeta > 0.4$. Para valores muito pequenos de ζ , M_r resulta muito grande ($M_r \gg 1$), enquanto o valor de M_p não excede 1.

Correlação entre a resposta transitória ao degrau e a resposta em frequência para sistemas de maior ordem. O projeto de sistemas de controle é muitas vezes conduzido com base na resposta em frequência. A principal razão deste fato é a relativa simplicidade desta abordagem comparada com as outras. Desde que, em muitas aplicações, é a resposta transitória do sistema para entradas não periódicas, ao invés da resposta em regime permanente com entradas senoidais, que é de principal importância, surge a questão da correlação entre a resposta transitória e a resposta em frequência.

Para o sistema de segunda-ordem indicado na Fig. 9.67 as relações matemáticas correlacionando a resposta transitória ao degrau e a resposta em frequência podem ser obtidas facilmente. A resposta temporal de um sistema de segunda-ordem pode ser prevista exatamente a partir do conhecimento de M_r e ω_r de sua resposta em frequência de malha-fechada.

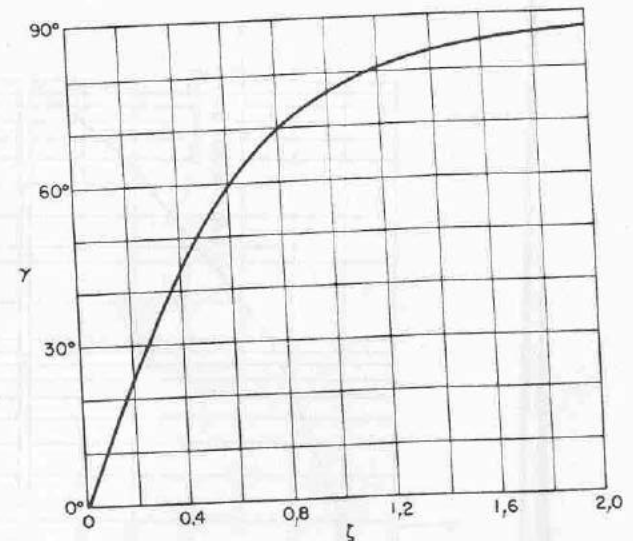


Fig. 9.69 Curva de γ (margem de fase) versus ζ para o sistema indicado na Fig. 9.67.

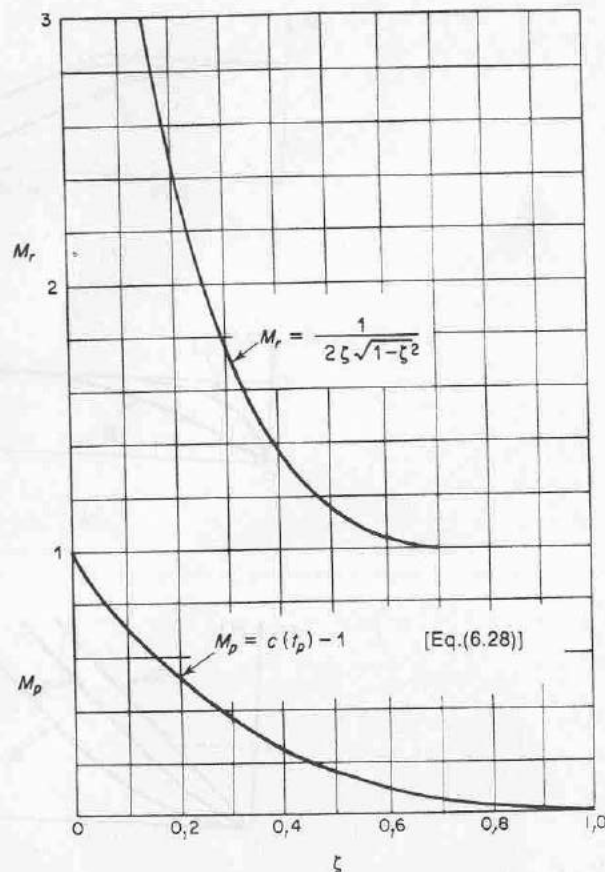


Fig. 9.70 Curvas de M_r versus ζ e M_p versus ζ para o sistema indicado na Fig. 9.67.

Para sistemas de maior ordem, a correlação é mais complexa e a resposta transitória pode não ser previsível facilmente a partir da resposta em frequência, pois os pólos adicionais podem variar a correlação entre a resposta transitória ao degrau e a resposta em frequência existente para um sistema de segunda-ordem. São disponíveis técnicas matemáticas para obtenção da correlação exata, porém são muito trabalhosas e de pequeno valor prático.

A aplicabilidade da correlação resposta-em-frequência-resposta-transitória existente para o sistema de segunda-ordem indicado na Fig. 9.67 para sistemas de maior ordem depende da presença de um par dominante de pólos complexos conjugados de malha-fechada nestes últimos sistemas. É claro que, se a resposta em frequência de um sistema de maior ordem é dominada por um par de pólos complexos conjugados de malha-fechada, a correlação resposta-em-frequência-resposta-transitória existente para o sistema de segunda-ordem pode ser estendida para um sistema de maior ordem.

Para sistemas lineares, invariantes no tempo, e de maior ordem possuindo um par dominante de pólos complexos conjugados de malha-fechada, existem geralmente as seguintes relações entre a resposta transitória ao degrau e a resposta em frequência:

1. O valor de M_r é indicativo da estabilidade relativa. Normalmente é obtido um desempenho transitório satisfatório se o valor de M_r estiver no intervalo $1,0 < M_r < 1,4$ ($0 \text{ db} < M_r < 3 \text{ db}$), que corresponde a uma relação de amortecimento efetiva de $0,4 < \zeta < 0,7$. Para valores de M_r maiores do que 1,5 a resposta transitória ao degrau pode exibir algumas sobrelevações. (Note que, em geral, um grande valor de M_r corresponde a uma grande sobrelevação na resposta transitória ao degrau. Se o sistema estiver sujeito a sinais com ruído cujas frequências forem próximas à frequência de ressonância ω_r , o ruído será amplificado na saída e causará um sério problema.)
2. O valor da frequência de ressonância ω_r é indicativo da velocidade da resposta transitória. Quanto maior o valor de ω_r , mais rápido será o tempo de resposta. Em outras palavras, o tempo de subida varia inversamente com ω_r . Em termos da resposta em frequência de malha-aberta, a frequência natural amortecida da resposta transitória está entre a frequência de cruzamento do ganho e a frequência de cruzamento da fase.
3. A frequência de ressonância ω_r e a frequência natural amortecida ω_d para a resposta transitória ao degrau são muito próximas uma da outra para sistemas pouco amortecidos.

As três relações anteriormente alistadas são úteis para correlacionar a resposta transitória ao degrau com a resposta em frequência de sistemas de maior ordem, desde que estes possam ser aproximados para um sistema de segunda-ordem ou a um par de pólos complexos conjugados de malha-fechada. Se o sistema de maior ordem satisfizer esta condição, um conjunto de especificações no domínio do tempo pode ser transferido para especificações no domínio de frequência. Isto simplifica significativamente o trabalho de projeto, ou de compensação, de sistemas de maior ordem.

Além da margem de fase, margem de ganho, pico de ressonância M_r e frequência de ressonância ω_r , há outras grandezas no domínio de frequência comumente utilizadas em especificações e desempenho. Elas são a frequência de corte, a largura de faixa e a taxa de corte. Estas grandezas serão definidas a seguir.

Frequência de corte e largura de faixa. Referindo-se à Fig. 9.71, a frequência ω_c na qual o módulo da resposta em frequência de malha-fechada é 3 db abaixo de seu valor na frequência-zero é denominada frequência de corte. Portanto,

$$\left| \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \right| < \left| \frac{C(j0)}{R(j0)} \right| - 3 \text{ db}$$

$$(\omega > \omega_c)$$

Para sistemas onde $|C(j0)/R(j0)| = 0 \text{ db}$,

$$\left| \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \right| < -3 \text{ db}$$

$$(\omega > \omega_c)$$

(Alguns autores usam o ponto de -6-db ao invés do ponto -3-db. Neste livro será utilizado o ponto -3-db para definir a frequência de corte.) O sistema de malha-

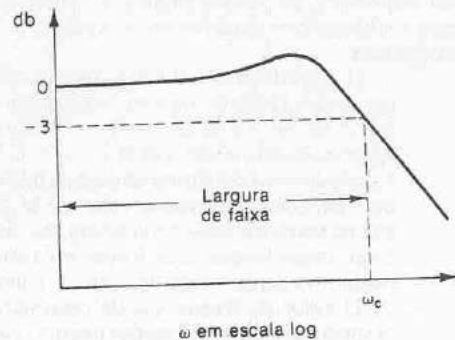


Fig. 9.71 Gráfico logarítmico indicando a frequência de corte ω_c e a largura de faixa.

fechada filtra as componentes do sinal cujas frequências são maiores do que a frequência de corte e transmite aquelas componentes do sinal com frequências menores do que a frequência de corte.

A faixa de frequência $0 \leq \omega \leq \omega_c$ na qual o módulo da malha fechada não cai -3 decibéis é denominada largura de faixa do sistema. A largura de faixa fornece uma indicação da velocidade da resposta de um sistema de controle.

A especificação da largura de faixa pode ser determinada pelos seguintes fatores:

1. A habilidade para reproduzir o sinal de entrada. (Uma largura de faixa grande corresponde a um pequeno tempo de subida, ou resposta rápida. Grosseiramente falando, podemos afirmar que a largura de faixa é proporcional à velocidade de resposta.)
2. As características de filtragem necessárias para o ruído de alta frequência.

Para que o sistema siga precisamente entradas arbitrárias, é necessário que o sistema possua uma grande largura de faixa. Do ponto de vista do ruído, entretanto, a largura de faixa não deve ser demasiadamente grande. Portanto, há requisitos conflitantes em relação à largura de faixa e normalmente é necessário adotar-se um compromisso para um bom projeto. Note que um sistema com grande largura de faixa exige componentes com alto desempenho. (O custo dos componentes normalmente aumenta com a largura de faixa.)

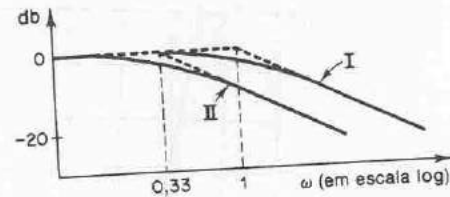
Taxa de corte. A taxa de corte é a inclinação da curva do log-módulo próxima à frequência de corte. A taxa de corte indica a habilidade de um sistema para distinguir o sinal do ruído.

Exemplo 9.14 Considere os dois sistemas seguintes:
Sistema I:

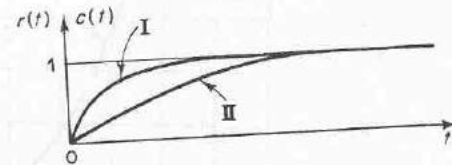
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+1}$$

Sistema II:

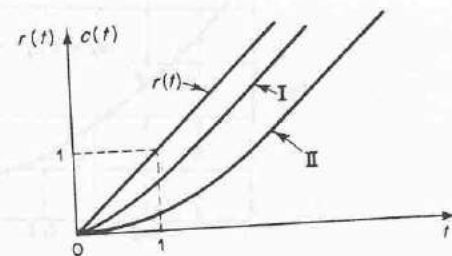
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{3s+1}$$



(a)



(b)



(c)

Fig. 9.72 Comparação das características dinâmicas dos dois sistemas considerados no Exemplo 9.14.

Compare as larguras de faixas destes dois sistemas. Mostre que o sistema com a largura de faixa maior possui uma velocidade de resposta maior e pode seguir a entrada muito melhor do que aquele com uma largura de faixa menor.

A Fig. 9.72(a) indica as curvas de resposta em frequência de malha-fechada para os dois sistemas. (Curvas assintóticas são indicadas por semi-retas tracejadas.) Verificamos que a largura de faixa do sistema I é $0 \leq \omega \leq 1$ rad/s e a do sistema II é $0 \leq \omega \leq 0,33$ rad/s. As Figs. 9.72(b) e (c) mostram, respectivamente, as curvas de resposta ao degrau e resposta à rampa para os dois sistemas. Obviamente, o sistema I, cuja largura de faixa é três vezes maior que a do sistema II, possui uma velocidade de resposta mais rápida e pode seguir melhor a entrada.

9.8 RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DE MALHA-FECHADA

Resposta em frequência de malha-fechada de sistemas com realimentação unitária. Para um sistema de malha-fechada estável, a resposta em frequência pode ser

facilmente obtida a partir da resposta em malha-aberta. Considere o sistema com realimentação unitária indicado na Fig. 9.73(a). A função de transferência de malha-fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)}$$

No gráfico de Nyquist ou polar indicado na Fig. 9.73(b), o vetor \vec{OA} representa $G(j\omega_1)$ onde ω_1 é a frequência no ponto A. O comprimento do vetor \vec{OA} é $|G(j\omega_1)|$ e o ângulo do vetor \vec{OA} é $\angle G(j\omega_1)$. O vetor \vec{PA} , o vetor do ponto $-1 + j0$ para o lugar geométrico de Nyquist, representa $1 + G(j\omega_1)$. Portanto, a relação entre \vec{OA} para \vec{PA} representa a resposta em frequência de malha-fechada, ou

$$\frac{\vec{OA}}{\vec{PA}} = \frac{G(j\omega_1)}{1 + G(j\omega_1)} = \frac{C(j\omega_1)}{R(j\omega_1)}$$

O módulo da função de transferência de malha-fechada em $\omega = \omega_1$ é a relação entre os módulos de \vec{OA} para \vec{PA} . O ângulo de fase da função de transferência de malha-fechada em $\omega = \omega_1$ é o ângulo formado pelos vetores \vec{OA} e \vec{PA} , isto é, $\phi - \theta$, indicado na Fig. 9.73(b). Medindo-se o módulo e o ângulo de fase em pontos de

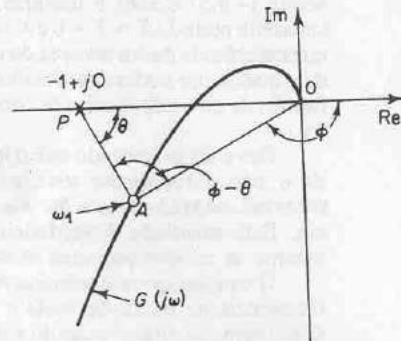
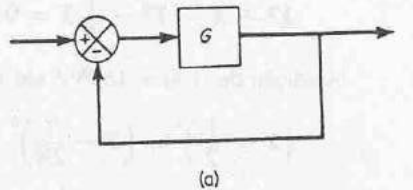


Fig. 9.73 (a) Sistema com realimentação unitária; (b) determinação da resposta em frequência de malha-fechada a partir da resposta em frequência de malha-aberta.

diferentes frequências, pode ser obtida a curva de resposta em frequência em malha-fechada.

Vamos definir o módulo da resposta em frequência de malha-fechada como M e o ângulo de fase como α , ou

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = Me^{j\alpha}$$

A seguir, determinaremos os lugares geométricos do módulo constante e os lugares geométricos de ângulo de fase constante. Tais lugares geométricos são convenientes na determinação da resposta em frequência de malha-fechada a partir do gráfico de Nyquist.

Lugares geométricos de módulo constante (circunferências M). Para obter os lugares geométricos de módulo constante, observamos inicialmente que $G(j\omega)$ é uma grandeza complexa e pode ser escrita como segue:

$$G(j\omega) = X + jY$$

onde X e Y são grandezas reais. Então M é dado por

$$M = \frac{|X + jY|}{|1 + X + jY|}$$

e M^2 é

$$M^2 = \frac{X^2 + Y^2}{(1 + X)^2 + Y^2}$$

Portanto

$$X^2(1 - M^2) - 2M^2X - M^2 + (1 - M^2)Y^2 = 0 \quad (9-21)$$

Se $M = 1$, então, da Eq. (9.21) obtemos $X = -1/2$. Esta é a equação de uma reta paralela ao eixo Y e passando pelo ponto $(-1/2; 0)$.

Se $M \neq 1$, a Eq. (9.21) pode ser escrita

$$X^2 + \frac{2M^2}{M^2 - 1}X + \frac{M^2}{M^2 - 1} + Y^2 = 0$$

Se o termo $M^2/(M^2 - 1)^2$ for adicionado aos dois membros desta última equação, obtemos

$$\left(X + \frac{M^2}{M^2 - 1}\right)^2 + Y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2} \quad (9-22)$$

A Eq. (9.22) é a equação de uma circunferência com centro em $X = -M^2/(M^2 - 1)$, $Y = 0$ e com raio $|M/(M^2 - 1)|$.

Os lugares geométricos M constante no plano $G(s)$ constituem, portanto, uma família de circunferências. O centro e o raio da circunferência para um dado valor de M podem ser calculados facilmente. Por exemplo, para $M = 1.3$, o centro está em $(-2.45; 0)$ e o raio é 1,88. Uma família de circunferências M constante é indicada na Fig. 9.74. Pode ser visto que conforme M aumenta e torna-se maior do que a

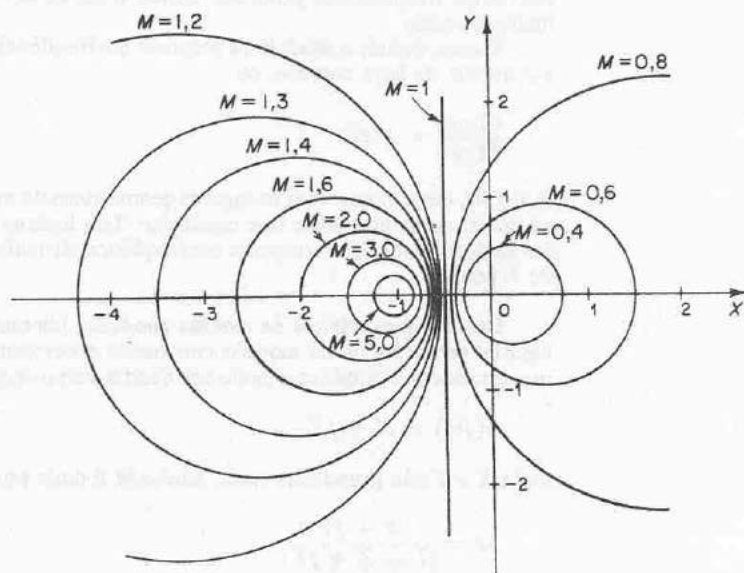


Fig. 9.74 Uma família de circunferências de M constante.

unidade, as circunferências tornam-se cada vez menores e convergem para o ponto $-1 + j0$. Para $M > 1$, os centros das circunferências M estão à esquerda do ponto $-1 + j0$. Analogamente, conforme M diminui e torna-se muito menor do que a unidade a circunferência M fica cada vez menor e converge para a origem. Para $M < 1$ os centros das circunferências M estão à direita da origem. $M = 1$ corresponde ao lugar geométrico dos pontos equidistantes da origem e do ponto $-1 + j0$. Conforme estabelecido anteriormente, este é uma reta passando pelo ponto $(-1/2, 0)$ e paralela ao eixo imaginário. (As circunferências M constante correspondentes a $M > 1$ estão à esquerda da reta $M = 1$, e aquelas correspondentes a $M < 1$ estão à direita da reta $M = 1$.) As circunferências são simétricas em relação à reta correspondente a $M = 1$ e em relação ao eixo real.

Lugares geométricos de ângulos de fase constante (circunferências N). Obteremos inicialmente o ângulo de fase α em termos de X e Y . Desde que

$$\angle e^{j\alpha} = \angle \frac{X + jY}{1 + X + jY}$$

o ângulo de fase α é

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{Y}{X} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{Y}{1 + X} \right)$$

Se definirmos

$$\operatorname{tg} \alpha = N$$

então

$$N = \operatorname{tg} \left[\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{Y}{X} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{Y}{1 + X} \right) \right]$$

Desde que

$$\operatorname{tg} (A - B) = \frac{\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B}{1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$$

obtemos

$$\begin{aligned} N &= \frac{\frac{Y}{X} - \frac{Y}{1 + X}}{1 + \frac{Y}{X} \left(\frac{Y}{1 + X} \right)} \\ &= \frac{Y}{X^2 + X + Y^2} \end{aligned}$$

ou

$$X^2 + X + Y^2 - \frac{1}{N} Y = 0$$

A adição de $(1/4) + 1/(2N)^2$ aos dois membros desta última equação resulta em

$$\left(X + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2N} \right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N} \right)^2 \quad (9-23)$$

Esta é a equação de uma circunferência com centro em $X = -1/2$, $Y = 1/(2N)$ e com raio $\sqrt{(1/4) + 1/(2N)^2}$. Por exemplo, se $\alpha = 30^\circ$, então $N = \operatorname{tg} \alpha = 0,577$, e o centro e o raio da circunferência correspondente a $\alpha = 30^\circ$ podem ser determinados como sendo $(-0,5; 0,866)$ e unitário, respectivamente. Desde que a Eq. (9.23) está satisfeita quando $X = Y = 0$ e $X = -1$, $Y = 0$ independentemente do valor de N , cada circunferência passa através da origem e do ponto $-1 + j0$. Os lugares geométricos de α constante podem ser facilmente desenhados uma vez dado o valor de N . Uma família de circunferências N constante é indicada na Fig. 9.75 com α como parâmetro.

Deve ser observado que o lugar geométrico de N constante para um dado valor de α não é realmente toda a circunferência mas apenas um arco. Em outras palavras, os arcos de $\alpha = 30^\circ$ e $\alpha = -150^\circ$ constituem partes da mesma circunferência. Este resultado é verdadeiro porque a tangente de um ângulo permanece a mesma se $\pm 180^\circ$ (ou seus múltiplos) forem adicionados ao ângulo.

O uso das circunferências M e N nos possibilita determinar toda a resposta em frequência de malha-fechada a partir da resposta em frequência de malha-aberta $G(j\omega)$ sem calcular o módulo e a fase da função de transferência de malha-fechada em cada frequência. As intersecções do lugar geométrico de $G(j\omega)$ e as circunferências M e as circunferências N fornecem os valores de M e N nos pontos de frequência sobre o lugar geométrico de $G(j\omega)$.

Desde que as circunferências N são de múltiplos valores, no sentido que a circunferência para $\alpha = \alpha_1$ é uma outra para $\alpha = \alpha_1 \pm 180^\circ n$ ($n = 1, 2, \dots$) na realidade são as mesmas, usando-se as circunferências N para a determinação do

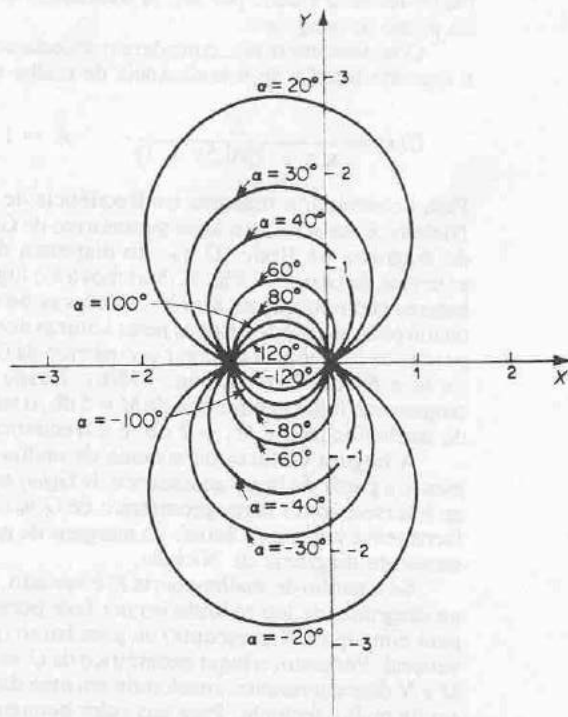


Fig. 9.75 Uma família de circunferências com N constante.

ângulo de fase de sistemas de malha-fechada, devemos interpretar o valor apropriado de α . Para evitar qualquer erro, inicia-se na frequência zero, que corresponde a $\alpha = 0^\circ$, e então efetua-se o procedimento para frequências maiores. A curva do ângulo de fase deve ser contínua.

A Fig. 9.76(a) mostra o lugar geométrico de $G(j\omega)$ sobreposto a uma família de circunferências M . A Fig. 9.76(b) mostra o lugar geométrico de $G(j\omega)$ sobreposto a uma família de circunferências N . Destes gráficos, é possível obter por inspeção a resposta em frequência de malha-fechada. Verifica-se que a circunferência $M = 1,1$ intercepta o lugar geométrico de $G(j\omega)$ no ponto de frequência $\omega = \omega_1$. Isto significa que nesta frequência o módulo da frequência de malha-fechada é 1,1. Na Fig. 9.76(a), a circunferência $M = 2$ é exatamente tangente ao lugar geométrico de $G(j\omega)$. Portanto, há apenas um ponto no lugar geométrico de $G(j\omega)$ para o qual $|C(j\omega)|R(j\omega)|$ é igual a 2. A Fig. 9.76(c) mostra a curva de resposta em frequência de malha-fechada para o sistema. A curva superior é a curva M versus frequência ω e a curva inferior é a curva ângulo de fase α versus frequência ω .

O valor de pico de ressonância é o valor de M correspondente à circunferência M de mínimo raio que é tangente ao lugar geométrico de $G(j\omega)$. Portanto, no diagrama de Nyquist, o valor do pico de ressonância M_r e a frequência de ressonância ω_r podem ser determinados a partir da circunferência M que tangencia o lugar geométrico de $G(j\omega)$. (No presente exemplo, $M_r = 2$ e $\omega_r = \omega_4$.)

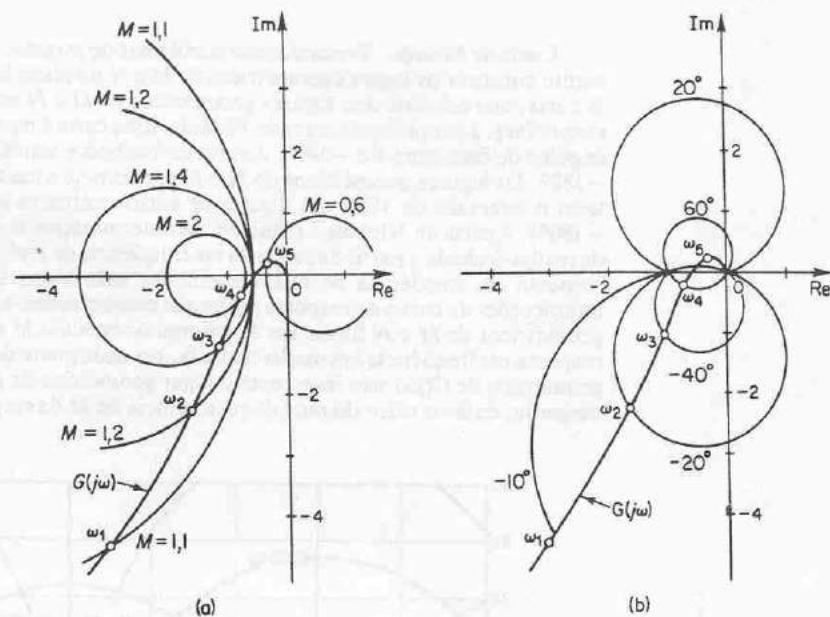


Fig. 9.76 (a) Lugar geométrico de $G(j\omega)$ sobreposto a uma família de circunferências M ; (b) lugar geométrico de $G(j\omega)$ sobreposto a uma família de circunferências N ; (c) curvas de resposta em frequência de malha-fechada.

Carta de Nichols. Tratando com problemas de projeto, verificamos ser conveniente construir os lugares geométricos de M e N no plano log-módulo *versus* fase. A carta, que consiste nos lugares geométricos de M e N no diagrama log-módulo *versus* fase, é denominada carta de Nichols. Esta carta é mostrada na Fig. 9.77 para ângulos de fase entre 0 e -240° . A carta de Nichols é simétrica em relação ao eixo -180° . Os lugares geométricos de M e N repetem-se a cada 360° e há simetria em todo o intervalo de 180° . Os lugares M estão centrados no ponto crítico (0 db; -180°). A carta de Nichols é muito útil na determinação da resposta em frequência de malha-fechada a partir da resposta em frequência de malha-aberta $G(j\omega)$ e os lugares geométricos de M e N fornecem os valores do módulo M e o ângulo de fase α da resposta em frequência em malha-fechada, em cada ponto de frequência. Se o lugar geométrico de $G(j\omega)$ não intercepta o lugar geométrico de $M = M_r$, porém é a ele tangente, então o valor do pico de ressonância de M da resposta em frequência de

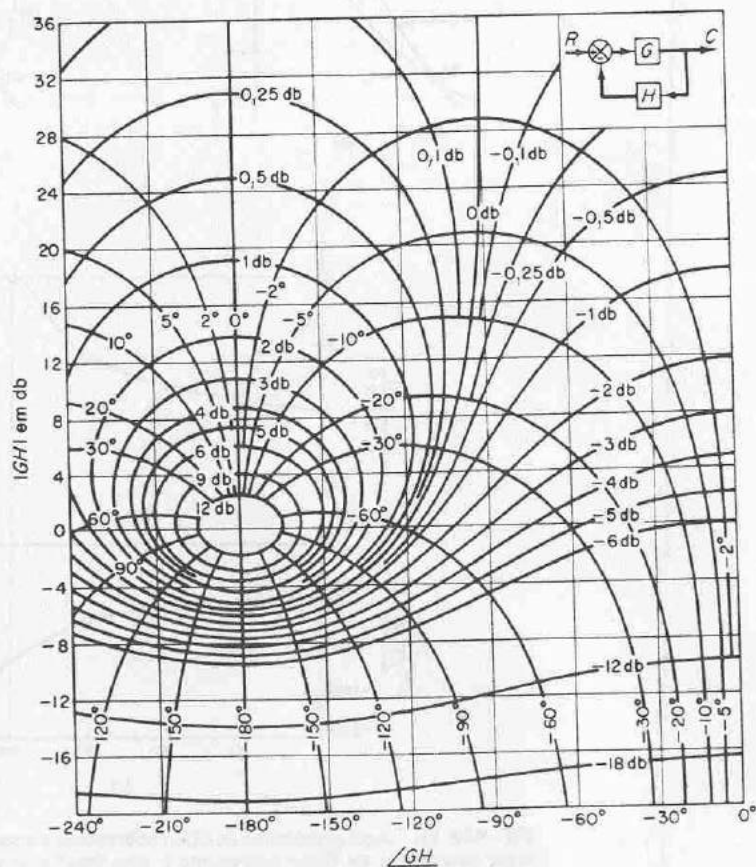


Fig. 9.77 Carta de Nichols.

malha-fechada é dado por M_r . A frequência de ressonância é dada pela frequência no ponto de tangência.

Como um exemplo, considere o sistema com realimentação unitária possuindo a seguinte função de transferência de malha-aberta:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}, \quad K = 1$$

Para determinar a resposta em frequência de malha-fechada utilizando a carta de Nichols, é construído o lugar geométrico de $G(j\omega)$ no plano log-módulo *versus* fase do diagrama de Bode. O uso do diagrama de Bode elimina cálculos numéricos extensos de $G(j\omega)$. A Fig. 9.78(a) mostra o lugar geométrico de $G(j\omega)$ junto com os lugares geométricos de M e N . As curvas de resposta em frequência de malha-fechada podem ser construídas pelas leituras dos módulos e ângulos de fase em vários pontos de frequência do lugar geométrico de $G(j\omega)$ a partir dos lugares geométricos de M e N , conforme a Fig. 9.78(b). Desde que o lugar geométrico de $G(j\omega)$ é tangente ao lugar geométrico de $M = 5$ db, o valor de pico da resposta em frequência de malha-fechada é $M_r = 5$ db, e a frequência de ressonância é 0.8 rad/s.

A largura de faixa do sistema de malha-fechada pode ser determinada facilmente a partir do lugar geométrico de $G(j\omega)$ no diagrama de Nichols. A frequência na interseção do lugar geométrico de $G(j\omega)$ e o lugar geométrico de $M = -3$ db fornecem a largura de faixa. As margens de ganho e de fase podem ser lidas diretamente do diagrama de Nichols.

Se o ganho de malha-aberta K é variado, a forma do lugar geométrico de $G(j\omega)$ no diagrama de log-módulo *versus* fase permanece a mesma, porém é deslocada para cima (para K crescente) ou para baixo (para K decrescente) ao longo do eixo vertical. Portanto, o lugar geométrico de $G(j\omega)$ intercepta os lugares geométricos de M e N diferentemente, resultando em uma diferente curva de resposta em frequência de malha-fechada. Para um valor pequeno do ganho K , o lugar geométrico de $G(j\omega)$ não será tangente a qualquer lugar geométrico M , significando que não há ressonância na resposta em frequência de malha-fechada.

Resposta em frequência de malha-fechada para sistemas com realimentação não unitária. Se o sistema de malha-fechada envolver uma função de transferência com realimentação não unitária, então a função de transferência de malha-fechada pode ser escrita

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

onde $G(s)$ é a função de transferência do ramo direto e $H(s)$ é a função de transferência do ramo de realimentação. Então, $C(j\omega)/R(j\omega)$ pode ser escrita

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{H(j\omega)} \frac{G(j\omega)H(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)}$$

O módulo e o ângulo de fase de

$$\frac{G_1(j\omega)}{1 + G_1(j\omega)}$$

onde $G_1(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega)$, podem ser facilmente obtidos construindo-se o lugar geométrico de $G_1(j\omega)$ sobre a carta de Nichols e lendo os valores de M e N em vários

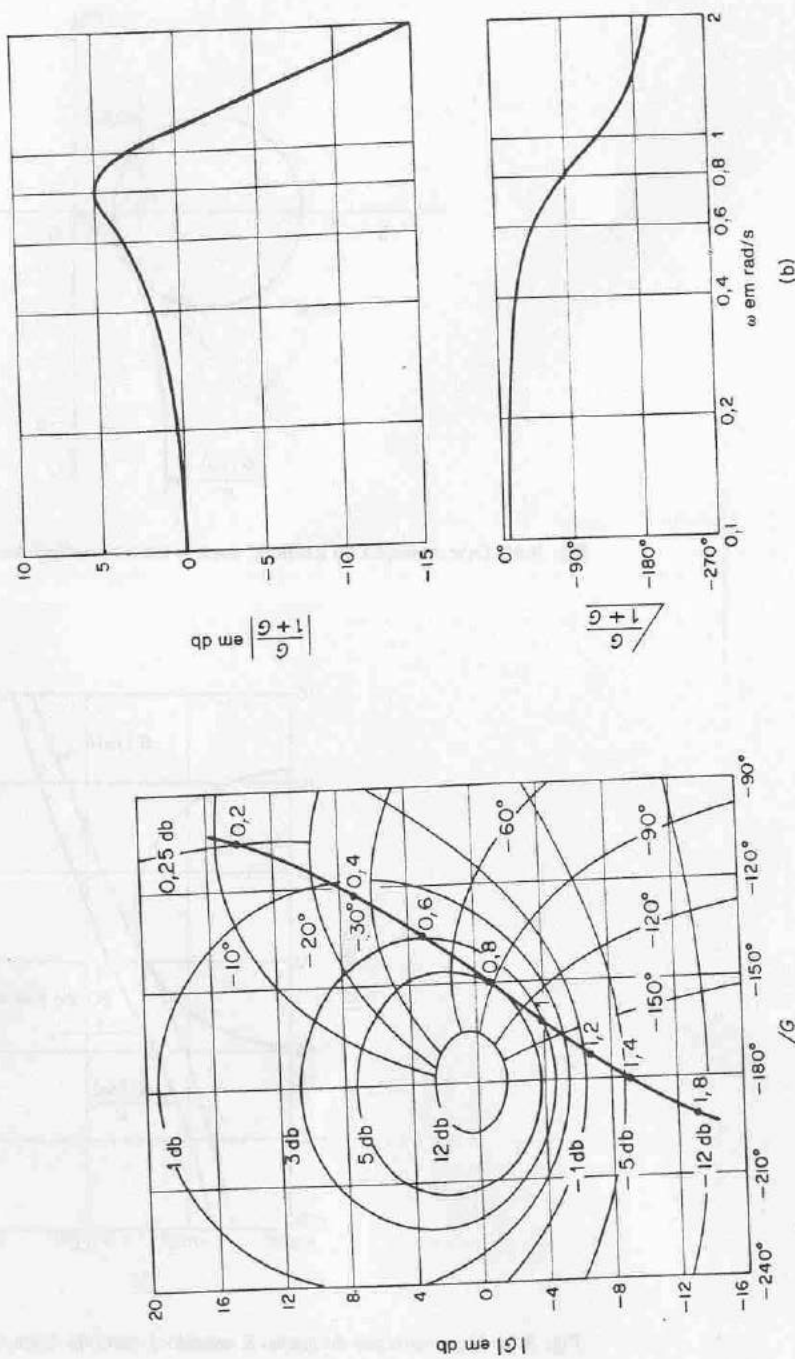


Fig. 9.78 (a) Gráfico de $G(j\omega)$ sobreposto à carta de Nichols; (b) curvas de resposta em frequência de malha-fechada.

pontos de frequência. A resposta em frequência de malha-fechada $C(j\omega)/R(j\omega)$ pode ser então obtida multiplicando-se $G_1(j\omega)/[1 + G_1(j\omega)]$ por $1/H(j\omega)$. Esta multiplicação pode ser realizada sem dificuldade se desenharmos os diagramas de Bode para $G_1(j\omega)/[1 + G_1(j\omega)]$ e $H(j\omega)$ e então subtrairmos graficamente o módulo de $H(j\omega)$ daquele de $G_1(j\omega)/[1 + G_1(j\omega)]$ e também subtrairmos graficamente o ângulo de fase de $H(j\omega)$ daquele de $G_1(j\omega)/[1 + G_1(j\omega)]$. A curva do log-módulo e a curva do ângulo de fase resultantes fornecem, então, a resposta em frequência de malha-fechada $C(j\omega)/R(j\omega)$.

Para obter valores aceitáveis de M_r , ω_r , e ω_c para $|C(j\omega)/R(j\omega)|$, pode ser necessário um processo de tentativa-e-erro. Em cada tentativa, o lugar geométrico de $G_1(j\omega)$ é variado em sua forma. São então desenhados os diagramas de Bode para $G_1(j\omega)/[1 + G_1(j\omega)]$ e $H(j\omega)$ e a resposta em frequência de malha-fechada $C(j\omega)/R(j\omega)$ é obtida. Os valores de M_r , ω_r e ω_c são verificados até obterem-se valores aceitáveis.

Ajustes de ganho. O conceito das circunferências M será agora aplicado ao projeto de sistemas de controle. Para obter-se desempenho conveniente, o ajuste do ganho normalmente é a primeira consideração. O ajuste pode ser baseado em um valor desejado para o pico de ressonância.

Em seguida, demonstraremos o método para determinação do ganho K de modo que o sistema possuirá algum valor M_r máximo, não excedido em toda a faixa de frequência.

Referindo-se à Fig. 9.79, verificamos que a reta tangente desenhada a partir da origem até a circunferência M_r desejada possui um ângulo ψ como indicado, se M_r for maior do que a unidade. O valor de $\sin \psi$ é

$$\sin \psi = \frac{\frac{M_r}{M_r^2 - 1}}{\frac{M_r^2}{M_r^2 - 1}} = \frac{1}{M_r}$$

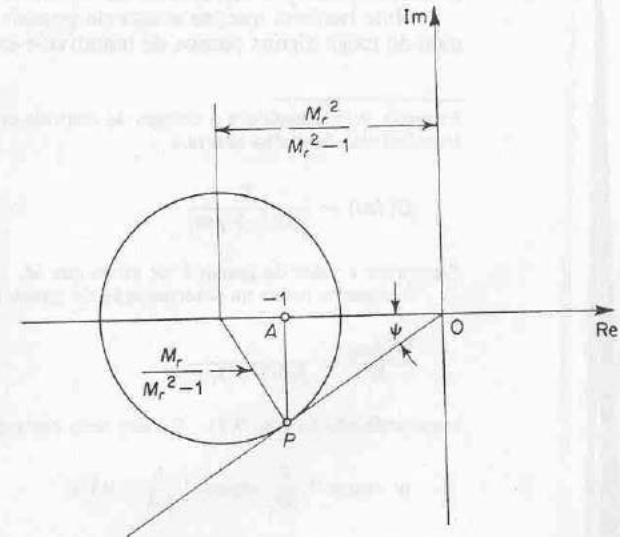


Fig. 9.79 Circunferência M .

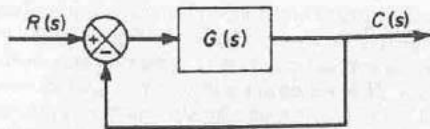


Fig. 9.80 Sistema de controle.

Pode-se provar facilmente que a reta desenhada pelo ponto P , perpendicular ao eixo real negativo, intercepta este eixo no ponto $-1 + j0$.

Considere o sistema indicado na Fig. 9.80. O procedimento para determinação do ganho K , de modo que $G(j\omega) = KG_1(j\omega)$ possuirá um valor desejado de M_r (onde $M_r > 1$), pode ser sumariado como segue:

1. Desenhar o gráfico polar da função de transferência de malha-aberta normalizada.
2. Desenhar a partir da origem a reta que faz com o eixo real negativo um ângulo de $\psi = \sin^{-1}(1/M_r)$.
3. Desenhar uma circunferência com centro sobre o eixo real negativo e tangente tanto ao lugar geométrico de $G_1(j\omega)$ como à reta PO .
4. Desenhar uma reta perpendicular ao eixo real negativo pelo ponto P , o ponto de tangência desta circunferência com a reta PO . A reta perpendicular PA intercepta o eixo real negativo no ponto A .
5. Para que a circunferência determinada corresponda à circunferência M_r desejada, o ponto A deve ser o ponto $-1 + j0$.
6. O valor desejado do ganho K é aquele valor que modifica a escala de modo que o ponto A se torne o ponto $-1 + j0$. Portanto, $K = 1/\overline{OA}$.

Note que a frequência de ressonância ω_r é a frequência do ponto no qual a circunferência é tangente ao lugar geométrico de $G_1(j\omega)$. O procedimento apresentado pode não fornecer um valor satisfatório para ω_r . Se este for o caso, o sistema deve ser compensado a fim de aumentar o valor de ω_r sem modificar o valor de M_r . (Para compensação de sistemas de controle, vide Cap. 10.)

Note também que, se o sistema possuir realimentação não unitária, então o método exige alguns passos de tentativa-e-erro.

Exemplo 9.15 Considere o sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência de malha-aberta é

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega)}$$

Determine o valor do ganho K de modo que $M_r = 1.4$.

O primeiro passo na determinação do ganho K é esboçar o gráfico polar de

$$\frac{G(j\omega)}{K} = \frac{1}{j\omega(1+j\omega)}$$

como indicado na Fig. 9.81. O valor de ψ correspondente a $M_r = 1.4$ é obtido de

$$\psi = \sin^{-1} \frac{1}{M_r} = \sin^{-1} \frac{1}{1.4} = 45,6^\circ$$

O próximo passo é desenhar a reta OP que faz um ângulo de $\psi = 45,6^\circ$ com o eixo real negativo. Desenhe, então, a circunferência tangente tanto ao lugar geométrico $G(j\omega)/K$ como

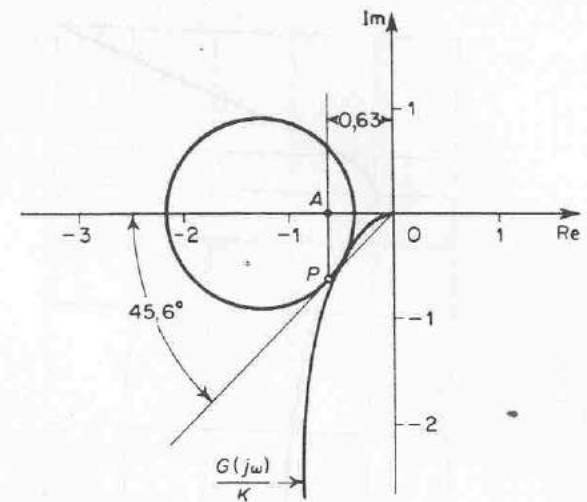


Fig. 9.81 Determinação do ganho K usando uma circunferência M .

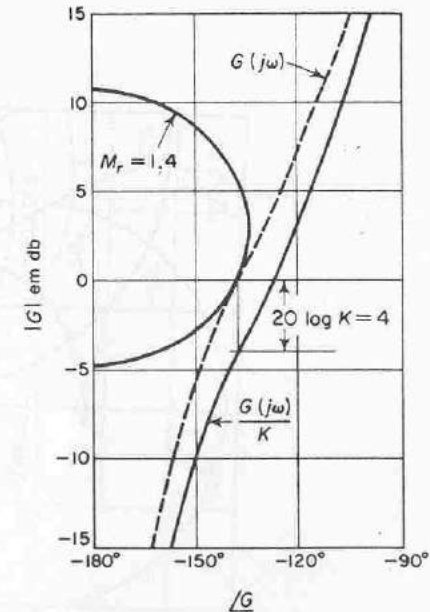


Fig. 9.82 Determinação do ganho K usando a carta de Nichols.

à reta OP . A reta perpendicular desenhada pelo ponto P intercepta o eixo real negativo em $(-0,63; 0)$. Então, o ganho K do sistema é determinado como segue:

$$K = \frac{1}{0,63} = 1,58$$

Deve ser observado que esta determinação do ganho também pode ser realizada facilmente sobre o gráfico log-módulo *versus* fase. A seguir demonstraremos como o diagrama log-módulo *versus* fase pode ser usado para determinar o ganho K de modo que o sistema apresente o valor desejado de M_r .

A Fig. 9.82 mostra o lugar geométrico de $M_r = 1,4$ e o lugar geométrico de $G(j\omega)/K$. A modificação do ganho não afeta o ângulo de fase, mas simplesmente movimenta a curva verticalmente para cima se $K > 1$ e para baixo se $K < 1$. Na Fig. 9.82, o lugar geométrico de $G(j\omega)/K$ deve ser deslocado para cima de 4 db para que seja tangente ao lugar geométrico M_r desejado e o lugar geométrico de $G(j\omega)/K$ inteiro possa estar fora do lugar geométrico $M_r = 1,4$. O deslocamento vertical, numericamente, do lugar geométrico de $G(j\omega)/K$ determina o ganho necessário para resultar no valor desejado de M_r . Portanto, resolvendo

$$20 \log K = 4$$

obtemos

$$K = 1,58$$

9.9 DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

O primeiro passo na análise e projeto de um sistema de controle é deduzir um modelo matemático do processo sob consideração. A obtenção analítica de um modelo pode ser bem difícil. Devemos então obtê-lo por meio de análise experimental. A importância dos métodos de resposta em frequência está no fato de que a função de transferência do processo, ou qualquer outro componente de um sistema, pode ser determinada através de medidas simples de resposta em frequência.

Se forem medidas as relações de amplitude e a defasagem em um número suficiente de frequências dentro da faixa de interesse, os valores podem ser utilizados para determinar o diagrama de Bode. A função de transferência pode então ser determinada através de aproximações assintóticas. Constroem-se as curvas assintóticas do log-módulo consistindo em vários segmentos e normalmente é possível, com algumas tentativas no processo de tentativa-e-erro, determinar as frequências de canto e uma curva muito próxima à real. (Note que se a frequência é indicada em ciclos por segundo e não em radianos por segundo, as frequências de canto devem ser convertidas em radianos por segundo antes de se calcular as constantes de tempo.)

Geradores de sinais senoidais. Na realização de um teste de resposta em frequência devem ser disponíveis geradores de sinais senoidais convenientes. O sinal pode estar na forma mecânica, elétrica ou pneumática. As faixas de frequência necessárias para o teste são aproximadamente 0,001-10 cps para sistemas com grandes constantes de tempo e 0,1-1.000 cps para sistemas com pequenas constantes de tempo. O sinal senoidal deve ser razoavelmente isento de harmônicas ou distorção.

Para faixas de frequência muito baixas (abaixo de 0,01 cps), um gerador de sinal mecânico (conjuntamente com um transdutor pneumático ou elétrico conve-

niente, se necessário) pode ser utilizado. Para a faixa de frequência 0,01-1.000 cps, pode ser utilizado um gerador de sinal elétrico adequado (se necessário, juntamente com um transdutor conveniente).

Determinação de funções de transferência de mínima fase a partir de diagramas de Bode. Conforme estabelecido anteriormente, a verificação se um sistema é ou não de mínima fase, pode ser determinada a partir de curvas de resposta em frequência examinando-se as características de alta frequência.

Para determinar a função de transferência, inicialmente desenhemos as assintotas à curva do log-módulo experimentalmente obtida. As assintotas devem possuir inclinações múltiplas de ± 20 db/década. Se a inclinação da curva log-módulo obtida experimentalmente variar de -20 para -40 db/década em $\omega = \omega_1$, é claro que existe um fator $1/[1 + j(\omega/\omega_1)]$ na junção de transferência. Se a inclinação varia de -40 db/década em $\omega = \omega_2$, deve existir um fator quadrático da forma

$$\frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_2}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$$

na função de transferência. A frequência natural não amortecida deste fator quadrático é igual à frequência de canto ω_2 . A relação de amortecimento ζ pode ser determinada a partir da curva do log-módulo obtida experimentalmente medindo-se o valor do pico ressonante próximo à frequência de canto ω_2 e comparando esta curva com aquela fornecida na Fig. 9.11.

Uma vez determinados os fatores da função de transferência $G(j\omega)$, o ganho pode ser determinado da parte de baixa-frequência da curva do log-módulo. Como os termos do tipo $1 + j(\omega/\omega_1)$ e $1 + 2\zeta(j\omega/\omega_2) + (j\omega/\omega_2)^2$ tornam-se unitários conforme ω tende a zero, em frequências muito baixas, a função de transferência senoidal $G(j\omega)$ pode ser escrita

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^\lambda}$$

Na maioria dos sistemas práticos, λ é igual a 0, 1 ou 2.

1. Para $\lambda = 0$, ou sistemas tipo 0,

$$G(j\omega) = K \quad \text{para } \omega \ll 1$$

ou

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K \quad \text{para } \omega \ll 1$$

A assintota de baixa frequência é uma reta horizontal em $20 \log K$ db. O valor de K pode então ser determinado a partir desta assintota horizontal.

2. Para $\lambda = 1$, ou sistemas tipo 1,

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega} \quad \text{para } \omega \ll 1$$

ou

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K - 20 \log \omega \quad \text{para } \omega \ll 1$$

o que indica que a assíntota de baixa-freqüência possui inclinação -20 db/década. A freqüência na qual a assíntota de baixa-freqüência (ou seu prolongamento) intercepta a reta 0-db é numericamente igual a K .

3. Para $\lambda = 2$, ou sistemas tipo 2.

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2} \quad \text{para } \omega \ll 1$$

ou

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K - 40 \log \omega \quad \text{para } \omega \ll 1$$

A inclinação da assíntota em baixa-freqüência é -40 db/década. A freqüência na qual esta assíntota (ou seu prolongamento) intercepta a reta 0-db é numericamente igual a \sqrt{K} .

Exemplos de curvas log-módulo para sistemas tipo 0, tipo 1 e tipo 2 são fornecidos na Fig. 9.83, junto com a freqüência para a qual o ganho K está relacionado.

A curva do ângulo de fase obtida experimentalmente possibilita um meio de verificação da função de transferência obtida da curva do log-módulo. Para um sistema de mínima fase, a curva experimental do ângulo de fase deve concordar com precisão razoável com a curva teórica do ângulo de fase obtida a partir da função de transferência determinada. Estas duas curvas de ângulo de fase devem concordar exatamente tanto na faixa de freqüências muito altas como na faixa de freqüências muito baixas. Se o ângulo de fase obtido experimentalmente, em freqüências muito altas (comparadas com as freqüências de canto), não for igual a $-90^\circ (q - p)$, onde p e q são os graus dos polinômios do numerador e do denominador da função de transferência, deve ser uma função de transferência de fase não-mínima.

Funções de transferência de fase não-mínima. Se, no extremo de alta freqüência, o ângulo de fase calculado for 180° menor do que o ângulo de fase obtido experimentalmente, então um dos zeros da função de transferência deve estar no semiplano direito do plano s , ao invés do semiplano esquerdo do plano s .

Se o ângulo de fase calculado diferir do ângulo de fase experimentalmente obtido por uma taxa de variação de fase constante, então existe um atraso de transporte, ou tempo morto, no sistema. Se supusermos que a função de transferência seja da forma

$$G(s)e^{-Ts}$$

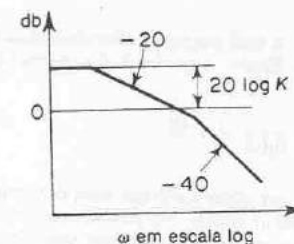
onde $G(s)$ é a relação de dois polinômios em s , então

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{d}{d\omega} |G(j\omega)e^{-j\omega T}| = -T$$

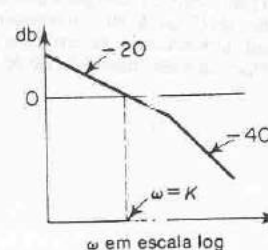
Portanto, desta última equação podemos calcular o valor do atraso de transporte T .

Algumas observações sobre a determinação experimental de funções de transferência

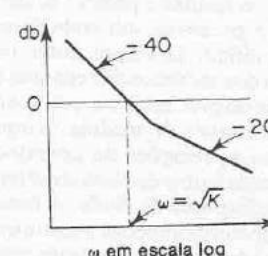
1. Normalmente é mais fácil fazer medidas precisas de amplitude do que de defasagem. Medidas de defasagem podem envolver erros causados por instrumentação ou por interpretação dos resultados experimentais.
2. A resposta em freqüência do equipamento de medida utilizado para medir



(a)



(b)



(c)

Fig. 9.83 (a) Curva log-módulo de um sistema tipo 0; (b) curvas log-módulo de sistemas tipo 1; (c) curvas log-módulo de sistemas tipo 2. (As inclinações indicadas estão em db/década.)

a saída do sistema deve possuir curvas de módulo *versus* freqüência praticamente planas. Além disso, o ângulo de fase deve ser aproximadamente proporcional à freqüência.

3. Sistemas físicos possuem alguns tipos de não linearidade. Portanto, é necessário considerar cuidadosamente a amplitude dos sinais de entrada senoidais. Se a amplitude do sinal de entrada for muito grande, o sistema saturará e o teste de resposta em freqüência apresentará resultados imprecisos. Por outro lado, um sinal pequeno causará erros devido à zona morta.

Conseqüentemente, deve ser feita uma escolha cuidadosa da amplitude do sinal de entrada senoidal. É necessário visualizar a forma de onda da saída do sistema para assegurar-se que a forma de onda é senoidal e que o sistema está operando na região linear durante todo o teste. (A forma de onda da saída do sistema não será senoidal se o sistema estiver operando em sua região não linear.)

4. Se o sistema sob consideração estiver operando continuamente por dias e semanas, então a operação normal não necessita ser interrompida para os testes de resposta em frequência. O sinal de teste senoidal deve ser sobreposto às entradas normais. Então, para sistemas lineares, a saída devida ao sinal de teste estará sobreposta à saída normal. Para a determinação da função de transferência enquanto o sistema está em operação normal, também são muito utilizados sinais estocásticos (sinais de ruído branco). Utilizando funções de correlação, pode ser determinada a função de transferência do sistema sem interrupção na operação normal.

Exemplo 9.16 Determine a função de transferência do sistema cujas curvas de resposta em frequência experimentais são indicadas na Fig. 9.84.

O primeiro passo na determinação da função de transferência é aproximar a curva do log-módulo por assíntotas com inclinações ± 20 db/década e seus múltiplos, conforme indicado na Fig. 9.84. As frequências de canto são então determinadas e a seguinte forma da função de transferência é estabelecida:

$$G(j\omega) = \frac{K(1 + 0,5j\omega)}{j\omega(1 + j\omega) \left[1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{8}\right) + \left(j\frac{\omega}{8}\right)^2 \right]}$$

O valor da relação de amortecimento ζ é determinado examinando-se o pico de ressonância próximo a $\omega = 6$ rad/s. Referindo-se à Fig. 9.11, ζ é determinada como sendo 0,5. O ganho K é numericamente igual à frequência da intersecção do prolongamento da assíntota de baixa-frequência com a reta 0-db. O valor de K é determinado em 10. Portanto, $G(j\omega)$ é determinada como uma tentativa para

$$G(j\omega) = \frac{10(1 + 0,5j\omega)}{j\omega(1 + j\omega) \left[1 + \left(j\frac{\omega}{8}\right) + \left(j\frac{\omega}{8}\right)^2 \right]}$$

ou

$$G(s) = \frac{320(s + 2)}{s(s + 1)(s^2 + 8s + 64)}$$

Esta função de transferência é uma tentativa porque não examinamos ainda a curva do ângulo de fase.

Uma vez verificadas as frequências de canto da curva do log-módulo, a curva do ângulo de fase correspondente a cada fator da função de transferência pode ser desenhada facilmente. A soma destas curvas de ângulo de fase componentes é aquela da função de transferência suposta. A curva do ângulo de fase para $G(j\omega)$ é indicada por $\angle G$ na Fig. 9.84. Desta figura notamos claramente uma discrepância entre a curva do ângulo de fase calculada e a curva do ângulo de fase obtida experimentalmente. A diferença entre as duas curvas em frequências muito altas parece possuir uma taxa de variação constante. Conseqüentemente, as discrepâncias nas curvas de ângulo de fase devem ser causadas por um atraso de transporte.

Deste modo, suponhamos uma função de transferência completa como sendo $G(s)e^{-Ts}$.

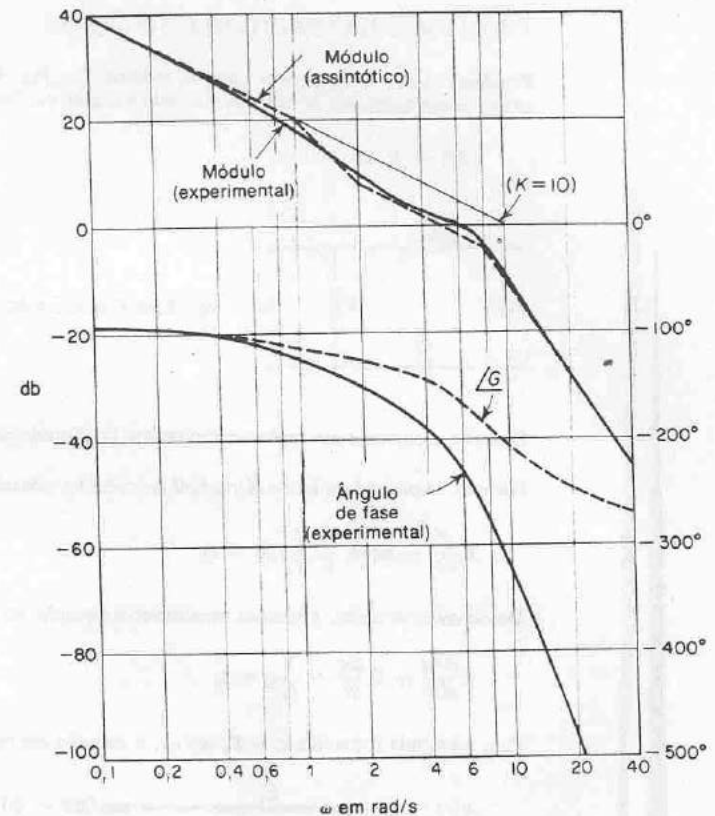


Fig. 9.84 Diagrama de Bode de um sistema. (Curvas cheias são curvas obtidas experimentalmente.)

Como a discrepância entre os ângulos de fase calculado e experimental é $-0,2 \omega$ rad para frequências muito altas, podemos determinar o valor de T como segue:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{d}{d\omega} \angle G(j\omega)e^{-j\omega T} = -T = -0,2$$

ou

$$T = 0,2 \text{ s}$$

A presença do atraso de transporte pode então ser determinada, e a função de transferência completa, determinada a partir das curvas experimentais, é

$$G(s)e^{-Ts} = \frac{320(s + 2)e^{-0,2s}}{s(s + 1)(s^2 + 8s + 64)}$$

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS E SOLUÇÕES

Problema A.9.1 Considere o circuito indicado na Fig. 9.85. Suponha que a tensão e_i é aplicada aos terminais de entrada e resulta a tensão e_o . Suponha que a entrada do sistema é

$$e_i(t) = E_i \sin \omega t$$

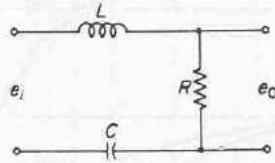


Fig. 9.85 Circuito elétrico.

Obtenha a corrente em regime estacionário $i(t)$ fluindo através da resistência R .

Solução. Aplicando a lei de Kirchhoff ao circuito, obtemos

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e_i$$

Desde que $i = dq/dt$, podemos reescrever a equação do sistema como

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = e_i$$

Para a entrada fornecida $e_i = E_i \sin \omega t$, a solução em regime estacionário é

$$q(t) = \frac{E_i}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + (R\omega)^2}} \sin(\omega t - \phi)$$

onde

$$\phi = \frac{R\omega}{\frac{1}{C} - L\omega^2}$$

Então a corrente $i(t)$ é

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{E_i \omega}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + (R\omega)^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

Problema A.9.2 Considere um sistema cuja função de transferência de malha-fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10(s+1)}{(s+2)(s+5)}$$

(Este sistema é idêntico ao considerado no Problema A.8.7.) É claro que os pólos de malha-fechada estão localizados em $s = -2$ e $s = -5$, e o sistema não é oscilatório. (A resposta

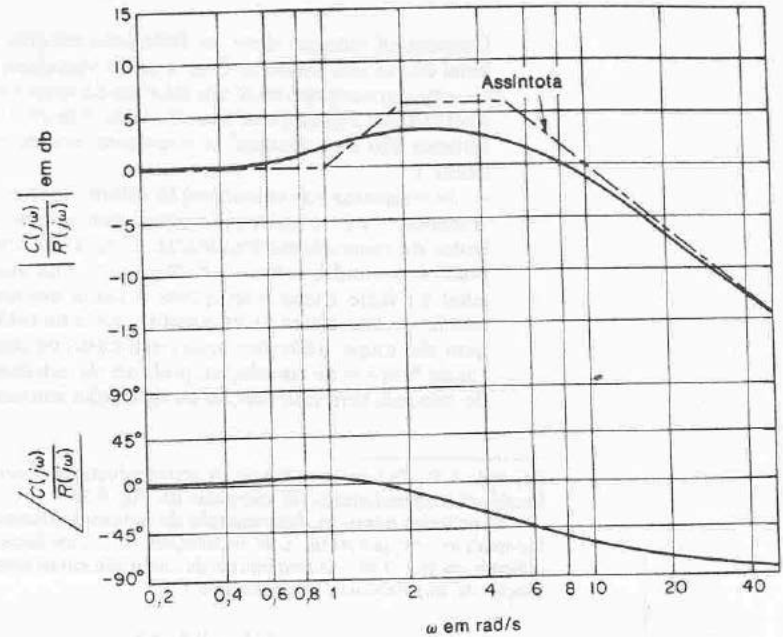


Fig. 9.86 Diagrama de Bode para $10(1+j\omega)/[(2+j\omega)(5+j\omega)]$.

ao degrau unitário, entretanto, exibirá sobrelevação devido à presença de um zero em $s = -1$. Vide Fig. 8.48.)

Mostre que a resposta em frequência de malha-fechada deste sistema exibirá um pico de ressonância, embora a relação de amortecimento dos pólos de malha-fechada seja maior do que a unidade.

Solução. A Fig. 9.86 mostra o diagrama de Bode para um sistema. O valor do pico de ressonância é aproximadamente 3,5 db. (Note que, na ausência de um zero, o sistema de segunda-ordem com $\zeta > 0,7$ não exibirá um pico de ressonância; entretanto, a presença de um zero de malha-fechada causará este pico.)

Problema A.9.3 Prove que o gráfico polar da função de transferência senoidal

$$G(j\omega) = \frac{j\omega T}{1+j\omega T} \quad (0 \leq \omega \leq \infty)$$

é uma semicircunferência. Determine o centro e o raio da circunferência.

Solução. A função de transferência senoidal dada $G(j\omega)$ pode ser escrita como segue:

$$G(j\omega) = X + jY$$

onde

$$X = \frac{\omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2}, \quad Y = \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

Então,

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{(\omega^2 T^2 - 1)^2}{4(1 + \omega^2 T^2)^2} + \frac{\omega^2 T^2}{(1 - \omega^2 T^2)^2} = \frac{1}{4}$$

Portanto verificamos que o gráfico de $G(j\omega)$ é uma circunferência com centro em $(0,5; 0)$ e raio igual a $0,5$. A semicircunferência superior corresponde a $0 \leq \omega \leq \infty$, e a semicircunferência inferior corresponde a $-\infty \leq \omega \leq 0$.

Problema A.9.4 Desenhe o diagrama de Bode do seguinte sistema de fase não-mínima:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = 1 - Ts$$

Obtenha a resposta à rampa unitária do sistema e construa o gráfico de $c(t)$ versus t .

Solução. O diagrama de Bode do sistema é indicado na Fig. 9.87.

Para uma entrada em rampa unitária, $R(s) = 1/s^2$, e

$$C(s) = \frac{1 - Ts}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s}$$

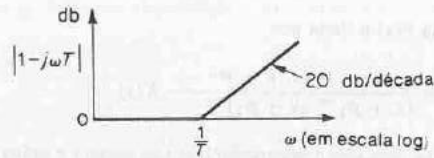
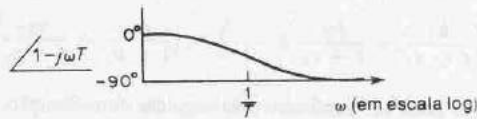


Fig. 9.87 Diagrama de Bode de $1 - j\omega T$.



A transformada de Laplace inversa de $C(s)$ fornece

$$c(t) = t - T \quad (t \geq 0)$$

A Fig. 9.88 mostra a curva de resposta $c(t)$ versus t . (Note o comportamento defeituoso no início da resposta.) Uma propriedade característica de um sistema de fase não-mínima é que a

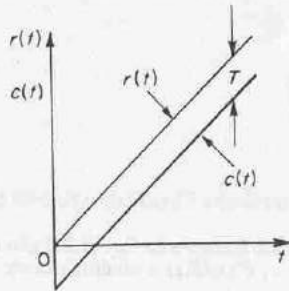


Fig. 9.88 Resposta à rampa unitária do sistema considerado no Problema A.9.4.

resposta transitória tem início no sentido oposto ao da entrada, porém, eventualmente retorna ao mesmo sentido.

Problema A.9.5 Considere a função

$$F(s) = \frac{s+1}{s-1}$$

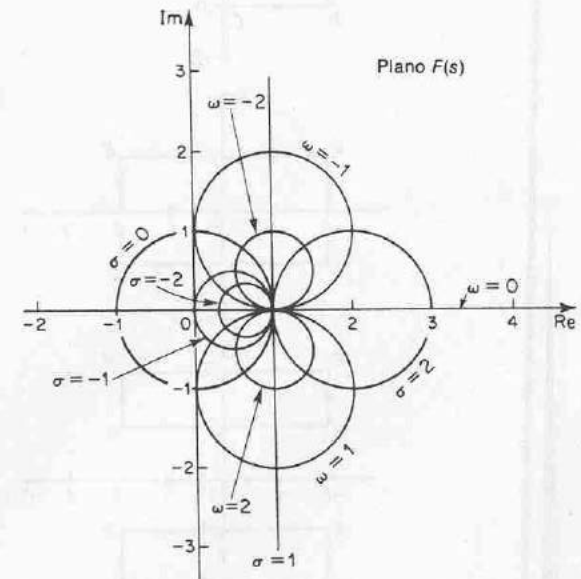
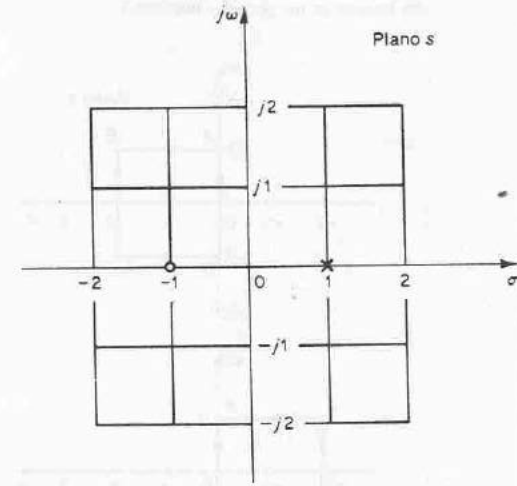


Fig. 9.89 Mapeamento conforme de grades de plano s no plano $F(s)$ onde $F(s) = (s+1)/(s-1)$.

O mapeamento conforme das retas $\omega = 0, \pm 1, \pm 2$ e das retas $\sigma = 0, \pm 1, \pm 2$ fornece circunferências no plano $F(s)$, como indicado na Fig. 9.89. Mostre que se o contorno no plano s envolve o pólo de $F(s)$, há um envolvimento da origem no plano $F(s)$ no sentido anti-horário. Se o contorno no plano s envolve o zero de $F(s)$, há um envolvimento da origem do plano $F(s)$ no sentido horário. Se o contorno no plano s envolve tanto o zero como o pólo, ou se o contorno não envolve nem o zero nem o pólo, então não há envolvimento da origem do plano $F(s)$ pelo lugar geométrico de $F(s)$. (Note que no plano s , um ponto s representativo percorre um contorno no sentido horário.)

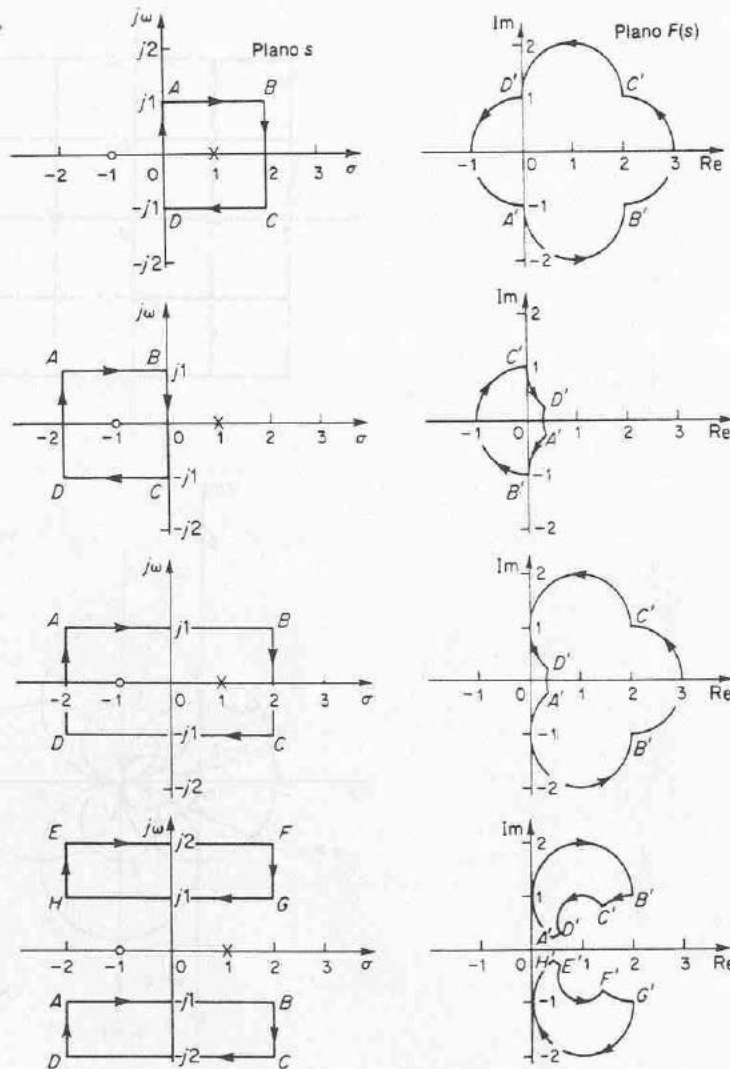


Fig. 9.90 Mapeamento conforme dos contornos no plano s para o plano $F(s)$ onde $F(s) = (s + 1)/(s - 1)$.

Solução. Uma solução gráfica é fornecida na Fig. 9.90; esta figura mostra contornos fechados no plano s e suas correspondentes curvas fechadas no plano $F(s)$.

Problema A.9.6 Prove o seguinte teorema de mapeamento: Seja $F(s)$ uma relação de polinômios em s . Seja P o número de pólos e Z o número de zeros de $F(s)$ que existem dentro de um contorno fechado no plano s , levando-se em conta a multiplicidade. Seja o contorno fechado tal que não passa através de quaisquer pólos ou zeros de $F(s)$. O contorno fechado no plano s mapeia então o plano $F(s)$ com uma curva fechada. O número N de envoltimentos no sentido horário da origem do plano $F(s)$, conforme o ponto representativo s percorre o contorno inteiro no plano s no sentido horário, é igual a $Z - P$.

Solução. Para provar este teorema, usaremos o teorema de Cauchy e o teorema do resíduo. O teorema de Cauchy estabelece que a integral de $F(s)$ ao longo de um contorno fechado no plano s é nula se $F(s)$ é analítica dentro e sobre o contorno fechado, ou

$$\oint F(s) ds = 0$$

O teorema do resíduo estabelece que a integral de $F(s)$ tomada no sentido horário sobre o contorno fechado no plano s é igual a $-2\pi j$ vezes os resíduos nos pólos simples de $F(s)$, ou

$$\oint F(s) ds = -2\pi j (\sum \text{resíduos})$$

Suponha que $F(s)$ é dada por

$$F(s) = \frac{(s + z_1)^{k_1} (s + z_2)^{k_2} \dots}{(s + p_1)^{m_1} (s + p_2)^{m_2} \dots} X(s)$$

onde $X(s)$ é analítica no contorno fechado do plano s e todos os pólos e zeros estão localizados no contorno. Então, a relação $F'(s)/F(s)$ pode ser escrita

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \left(\frac{k_1}{s + z_1} + \frac{k_2}{s + z_2} + \dots \right) - \left(\frac{m_1}{s + p_1} + \frac{m_2}{s + p_2} + \dots \right) + \frac{X'(s)}{X(s)} \quad (9-24)$$

Este resultado pode ser verificado pela seguinte consideração: Se $F(s)$ é dado por

$$F(s) = (s + z_1)^k X(s)$$

então $F(s)$ possui um zero de k -ésima ordem em $s = -z_1$. Diferenciando $F(s)$ em relação a s , resulta

$$F'(s) = k(s + z_1)^{k-1} X(s) + (s + z_1)^k X'(s)$$

Portanto,

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{k}{s + z_1} + \frac{X'(s)}{X(s)} \quad (9-25)$$

Verificamos que considerando a relação $F'(s)/F(s)$, o zero de k -ésima ordem de $F(s)$ resulta um pólo simples de $F'(s)/F(s)$.

Se o último termo do segundo membro da Eq. (9.25) não contém qualquer pólo ou zero no contorno fechado do plano s , $F'(s)/F(s)$ é analítica neste contorno exceto no zero em $s = -z_1$. Então,

$$\oint \frac{F'(s)}{F(s)} ds = \oint \frac{k}{s + z_1} + \oint \frac{X'(s)}{X(s)} = -2\pi jk$$

Referindo-se à Eq. (9.24) e notando que $X'(s)/X(s)$ é analítica no contorno e que os fatores nos parênteses são todos pólos simples localizados no contorno, obtemos a seguinte relação:

$$\oint \frac{F'(s)}{F(s)} ds = -2\pi j[(k_1 + k_2 + \dots) - (m_1 + m_2 + \dots)] = -2\pi j(Z - P)$$

onde

$Z = k_1 + k_2 + \dots$ = número total de zeros de $F(s)$ envolvidos no contorno fechado do plano s

$P = m_1 + m_2 + \dots$ = número total de pólos de $F(s)$ envolvidos no contorno fechado do plano s

(Os zeros ou pólos com multiplicidade k são considerados k zeros ou pólos localizados no mesmo ponto.) Desde que $F(s)$ é um número complexo, $F(s)$ pode ser escrito

$$F(s) = |F|e^{j\theta}$$

e

$$\ln F(s) = \ln |F| + j\theta$$

Notando que $F'(s)/F(s)$ pode ser escrita

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{d \ln F(s)}{ds}$$

obtemos

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{d \ln |F|}{ds} + j \frac{d\theta}{ds}$$

Se o contorno fechado no plano s é mapeado no contorno fechado Γ no plano $F(s)$, então

$$\oint \frac{F'(s)}{F(s)} ds = \oint_{\Gamma} d \ln |F| + j \oint_{\Gamma} d\theta = j \int d\theta = 2\pi j(P - Z)$$

A integral $\int_{\Gamma} d \ln |F|$ é nula desde que o valor de $\ln |F|$ é o mesmo no ponto inicial e no ponto final do contorno Γ . Portanto, obtemos

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} = P - Z$$

A diferença angular entre os valores final e inicial de θ é igual à variação total no ângulo de fase de $F'(s)/F(s)$ conforme um ponto representativo no plano s se move ao longo do contorno fechado. Notando que N é o número de envoltimentos da origem do plano $F(s)$ no sentido horário e $\theta_2 - \theta_1$ é nulo ou um múltiplo de 2π rad, obtemos

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} = -N$$

Portanto, temos a relação

$$N = Z - P$$

Isto prova o teorema.

Note que por meio deste teorema de mapeamento, os números exatos de zeros e de pólos não podem ser determinados, mas apenas a diferença entre eles. Note também que das Figs. 9.91(a) e (b) verificamos que se θ não varia através de 2π rad, então a origem do plano $F(s)$ não pode estar envolvida.

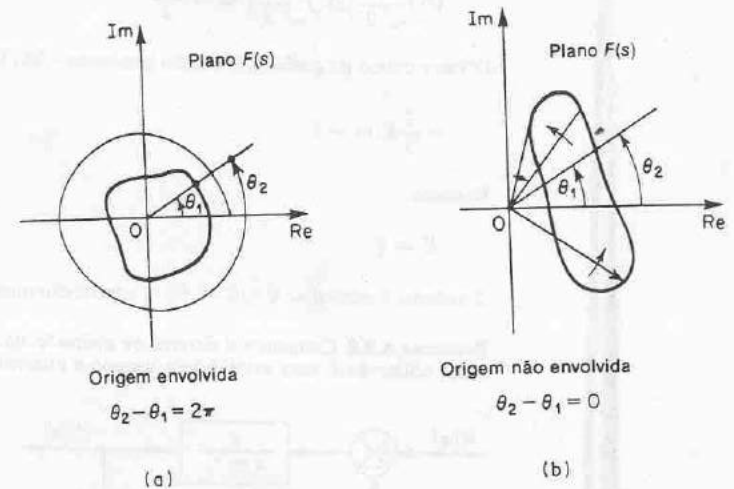


Fig. 9.91 Determinação do envolvimento da origem do plano $F(s)$.

Problema A.9.7 O sistema com a função de transferência de malha-aberta seguinte e com $K = 2$ é estável?

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(2s+1)}$$

Determine o valor crítico do ganho K para estabilidade.

Solução. A função de transferência de malha-aberta é

$$\begin{aligned} G(j\omega)H(j\omega) &= \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(2j\omega+1)} \\ &= \frac{K}{-3\omega^2 + j\omega(1-2\omega^2)} \end{aligned}$$

Esta função de transferência de malha-aberta não possui pólos no semiplano direito do plano s . Portanto, para estabilidade, o ponto $-1 + j0$ não deve estar envolvido pelo gráfico de Nyquist. Vamos determinar o ponto onde o gráfico de Nyquist cruza o eixo real negativo. Consideremos a parte imaginária de $G(j\omega)H(j\omega)$ como sendo nula, ou

$$1 - 2\omega^2 = 0$$

de onde obtemos

$$\omega = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Substituindo $\omega = 1/\sqrt{2}$ em $G(j\omega)H(j\omega)$, obtemos

$$G\left(j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)H\left(j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2K}{3}$$

O valor crítico do ganho K é obtido igualando $-2K/3$ a -1 , ou

$$-\frac{2}{3}K = -1$$

Portanto,

$$K = \frac{3}{2}$$

O sistema é estável se $0 < K < 3/2$. Consequentemente, o sistema com $K = 2$ é instável.

Problema A.9.8 Considere o sistema de malha-fechada indicado na Fig. 9.92. Determine o valor crítico de K para estabilidade usando o critério de estabilidade de Nyquist.

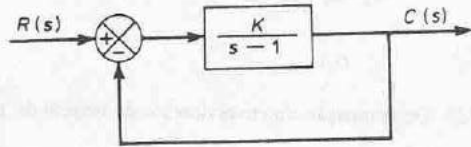


Fig. 9.92 Sistema de malha-fechada.

Solução. O gráfico polar de

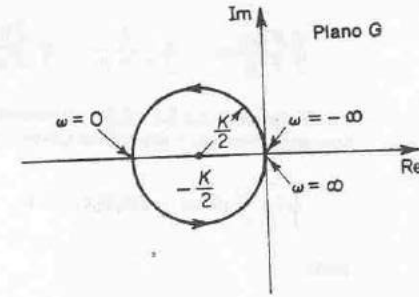
$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega - 1}$$

é uma circunferência com centro em $-K/2$ sobre o eixo real negativo e raio $K/2$, conforme indicada na Fig. 9.93(a). Conforme ω aumenta desde $-\infty$ até ∞ , o lugar geométrico de $G(j\omega)$ faz uma rotação no sentido anti-horário. Neste sistema, $P = 1$ porque há um pólo de $G(s)$ no semiplano direito do plano s . Para o sistema de malha-fechada ser estável, Z deve ser igual a zero. Portanto, $N = Z - P$ deve ser igual a -1 , ou deve haver um envolvimento no sentido anti-horário do ponto $-1 + j0$ para estabilidade. (Se não houver envolvimento do ponto $-1 + j0$, o sistema será instável.) Portanto, para estabilidade, K deve ser maior do que a unidade, e $K = 1$ fornece o limite de estabilidade. A Fig. 9.93(b) mostra os casos estável e instável dos gráficos de $G(j\omega)$.

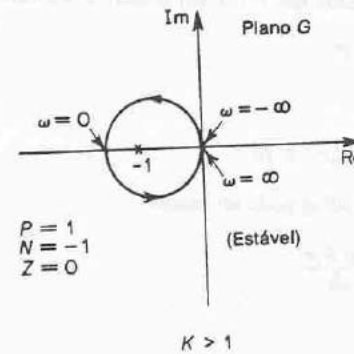
Problema A.9.9 Considere o sistema com realimentação unitária cuja função de transferência de malha-aberta é

$$G(s) = \frac{Ke^{-0,8s}}{s+1}$$

Utilizando o gráfico de Nyquist, determine o valor crítico de K para estabilidade.



(a)



(b)

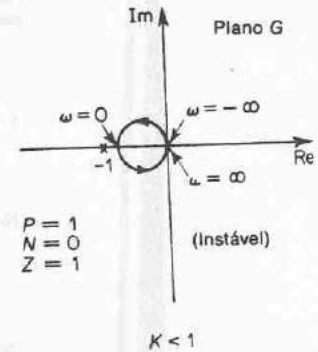


Fig. 9.93 (a) Gráfico polar de $K/(j\omega - 1)$; (b) gráficos polares de $K/(j\omega - 1)$ para os casos estável e instável.

Solução. Para este sistema,

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{Ke^{-0,8j\omega}}{j\omega + 1} \\ &= \frac{K(\cos 0,8\omega - j\sin 0,8\omega)(1 - j\omega)}{1 + \omega^2} \\ &= \frac{K}{1 + \omega^2} [(\cos 0,8\omega - \omega \sin 0,8\omega) - j(\sin 0,8\omega + \omega \cos 0,8\omega)] \end{aligned}$$

A parte imaginária de $G(j\omega)$ é igual a zero se

$$\sin 0,8\omega + \omega \cos 0,8\omega = 0$$

Portanto,

$$\omega = -\tan 0,8\omega$$

Resolvendo esta equação para o valor mínimo positivo de ω , obtemos

$$\omega = 2,45$$

Substituindo $\omega = 2,45$ em $G(j\omega)$, obtemos

$$G(j2,45) = \frac{K}{1 + 2,45^2} (\cos 1,96 - 2,45 \sin 1,96) \\ = -0,378K$$

O valor crítico de K para estabilidade é obtido impondo-se que $G(j2,45)$ seja igual a -1 . Portanto,

$$0,378K = 1$$

ou

$$K = 2,65$$

A Fig. 9.94 mostra os gráficos polares ou de Nyquist de $2,65e^{-0,8j\omega}/(1+j\omega)$ e $2,65/(1+j\omega)$. O sistema de primeira-ordem sem atraso de transporte é estável para todos os valores de K , porém o outro com atraso de transporte de $0,8$ s resulta instável para $K > 2,65$.

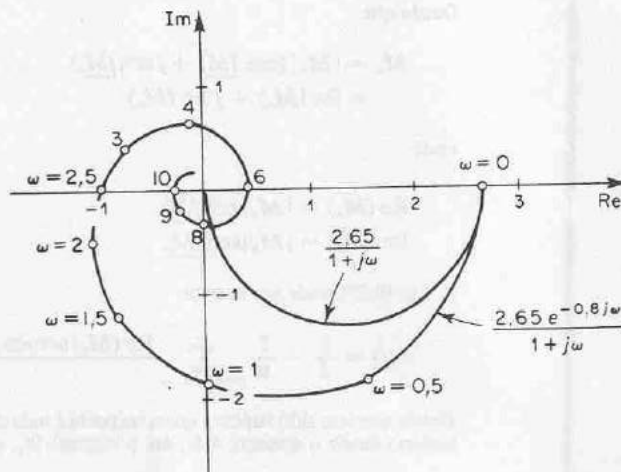


Fig. 9.94 Gráficos polares de $2,65e^{-0,8j\omega}/(1+j\omega)$ e $2,65/(1+j\omega)$.

Problema A.9.10* Consideraremos aqui um método para obtenção da resposta ao degrau diretamente dos dados de resposta em frequência de malha-fechada. Neste método, uma entrada em degrau unitário é substituída por uma entrada em onda quadrada e a saída para a entrada com onda quadrada é aproximada por meio de uma série convergente de senos. As hipóteses consideradas neste método são resumidas a seguir:

1. O sistema é oscilatório. Em outras palavras, o método aplica-se somente a sistemas oscilatórios.
 2. O instante do primeiro pico na resposta ao degrau é $t_1 = \pi/\omega_0$, onde ω_0 é a frequência na qual $|C(j\omega)/R(j\omega)| = -90^\circ$.
 3. O sistema apresenta um pequeno erro desprezível para uma entrada em degrau unitário em $t \geq 4,5t_1$.
- Para um sistema de segunda-ordem da forma

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

o erro em uma resposta ao degrau unitário é menor do que 2% para $t > 4,5t_1$ se a relação de amortecimento ζ for maior do que 0,267. Pode ser verificado que se o semiperíodo da onda quadrada for suficientemente longo, comparado com as constantes de tempo de sistema, então a substituição da entrada em degrau por uma entrada com onda quadrada não introduz restrições adicionais ao sistema. Para uma boa precisão, é muito importante uma escolha apropriada da frequência da onda quadrada. No presente método, este período é escolhido como $18t_1$. A entrada com onda quadrada e a resposta do sistema correspondente são esboçadas na Fig. 9.95. O motivo desta escolha do período da onda quadrada é o seguinte: A resposta ideal de um sistema para uma entrada em degrau unitário deve ser aquela mostrada na Fig. 9.96(a), onde t_1 é o intervalo de tempo para a resposta atingir o valor máximo pela primeira vez. A resposta ideal ao impulso unitário correspondente é indicada na Fig. 9.96(b). A transformada de Laplace da resposta impulsiva ideal é então

$$C(s) = \frac{1}{t_1 s} (1 - e^{-t_1 s})$$

Desde que a transformada de Laplace da entrada impulsiva unitária é igual a um, $R(s) = 1$, e

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{t_1 s} (1 - e^{-t_1 s})$$

do qual

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{j\omega t_1} (1 - e^{-j\omega t_1}) \\ = \frac{\sqrt{2(1 - \cos \omega t_1)}}{\omega t_1} e^{j\theta}$$

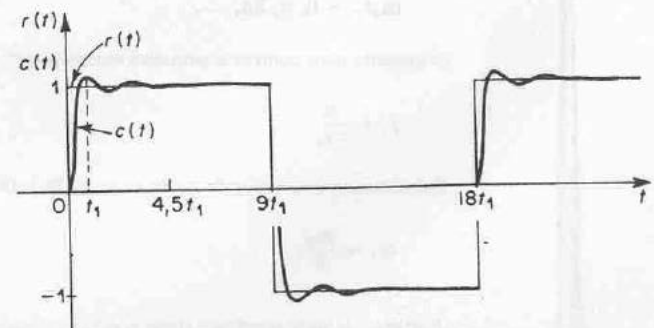


Fig. 9.95 Entrada com onda quadrada e a resposta correspondente de um sistema de segunda-ordem.

*Referência S-6.

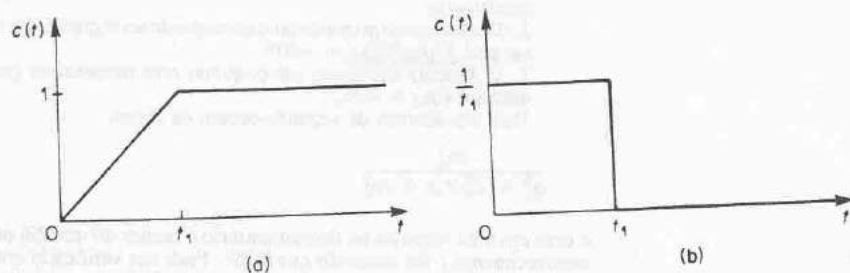


Fig. 9.96 (a) Resposta ideal ao degrau unitário; (b) resposta ideal ao impulso unitário.

onde

$$\theta = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{\operatorname{sen} \omega t_1}{1 - \cos \omega t_1}$$

Em $\omega = \omega_0$, tem-se admitido que

$$\frac{C(j\omega_0)}{R(j\omega_0)} = -\frac{\pi}{2}$$

Portanto, em $\omega = \omega_0$,

$$\theta = -\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{\operatorname{sen} \omega_0 t_1}{1 - \cos \omega_0 t_1}$$

de onde

$$\operatorname{sen} \omega_0 t_1 = 0$$

ou

$$\omega_0 t_1 = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

O instante para ocorrer o primeiro máximo tem sido admitido como

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_0}$$

Substituindo este valor de t_1 em $\omega_1 = \pi/(9t_1)$, obtemos

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{9} \quad (9-26)$$

Portanto, a onda quadrada deve possuir a frequência $\omega_0/9$ (ou o período $18t_1$), onde ω_0 é a frequência na qual a resposta em frequência de malha-fechada exibe um atraso de fase de 90° . Se a frequência da onda quadrada for muito alta, a precisão não será boa, enquanto uma frequência demasiadamente baixa resulta em uma convergência lenta da série.

A entrada com a onda quadrada $r(t)$ mostrada na Fig. 9.95 pode ser expandida na seguinte série de Fourier:

$$r(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\operatorname{sen} n\omega_1 t}{n}$$

onde

$$\omega_1 = \frac{\pi}{9t_1}$$

A resposta do sistema para esta entrada com uma onda quadrada é a soma das respostas para cada componente da série de Fourier. Se considerarmos

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = M(j\omega)$$

então,

$$c(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} |M_n| \frac{\operatorname{sen}(n\omega_1 t + \angle M_n)}{n} \quad (9-27)$$

onde

$$M_n = M(jn\omega_1)$$

Desde que

$$\begin{aligned} M_n &= |M_n| (\cos \angle M_n + j \operatorname{sen} \angle M_n) \\ &= \operatorname{Re}(M_n) + j \operatorname{Im}(M_n) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(M_n) &= |M_n| \cos \angle M_n \\ \operatorname{Im}(M_n) &= |M_n| \operatorname{sen} \angle M_n \end{aligned}$$

A Eq. (9.27) pode ser escrita

$$c(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\operatorname{Re}(M_n) \operatorname{sen} n\omega_1 t + \operatorname{Im}(M_n) \cos n\omega_1 t}{n} \quad (9-28)$$

Desde que tem sido suposto que a resposta é nula desde o instante $-4,5t_1$ até o instante zero e unitária desde o instante $4,5t_1$ até o instante $9t_1$, substituindo $-t$ na Eq. (9.28), resulta

$$c(-t) = 0 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \left[\frac{-\operatorname{Re}(M_n) \operatorname{sen} n\omega_1 t}{n} + \frac{\operatorname{Im}(M_n) \cos n\omega_1 t}{n} \right] \quad (9-29)$$

$(0 \leq t \leq 4,5t_1)$

Subtraindo a Eq. (9.29) da Eq. (9.28), resulta

$$c(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\operatorname{Re}(M_n) \operatorname{sen} n\omega_1 t}{n} \quad (0 \leq t \leq 4,5t_1) \quad (9-30)$$

Da Eq. (9.30), podemos calcular a resposta ao degrau unitário diretamente dos dados da resposta em frequência de malha-fechada.

Na prática, o processo de soma deve ser truncado. Geralmente, os primeiros sete ou oito termos da série infinita na Eq. (9.30) serão suficientes para assegurar uma precisão adequada. A convergência e a precisão podem ser testadas facilmente colocando-se $\omega_1 t$ igual a 90° e calculando a resposta como segue:

$$c\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right) = \frac{4}{\pi} \left[\text{Re}(M_1) - \frac{1}{3} \text{Re}(M_3) + \frac{1}{5} \text{Re}(M_5) - \frac{1}{7} \text{Re}(M_7) + \frac{1}{9} \text{Re}(M_9) - \frac{1}{11} \text{Re}(M_{11}) + \frac{1}{13} \text{Re}(M_{13}) - \frac{1}{15} \text{Re}(M_{15}) + \dots \right] \quad (9-31)$$

A soma desta série deve ser igual à unidade. Na Eq. (9.31) o termo correspondente à nona harmônica de frequência anula-se porque nesta frequência o ângulo de fase de $C(j\omega)/R(j\omega)$ é -90° , de modo que a parte real de $C(j\omega)/R(j\omega)$ é nula. Os termos correspondentes às frequências maiores são bastante pequenos e a série converge rapidamente.

Considere agora o lugar geométrico da resposta em frequência de malha-fechada indicada na Fig. 9.97. Obtenha a máxima sobrelevação à resposta ao degrau unitário do sistema.

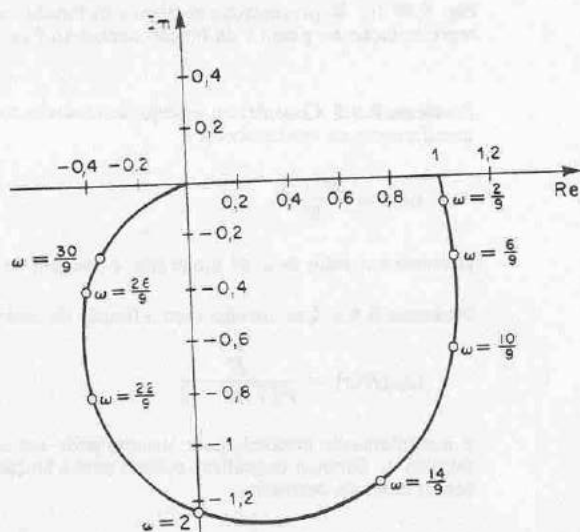


Fig. 9.97 Gráfico polar de uma resposta em frequência de malha-fechada.

Solução. Do lugar geométrico fornecido, ω_0 é determinado como sendo 2. Da Eq. (9.26), ω_1 é

$$\omega_1 = \frac{2}{9}$$

Da Eq. (9.30), pode ser calculada a resposta ao degrau unitário e é igual a

$$c(t) \div \frac{4}{\pi} \left[\text{Re}(M_1) \sin \frac{2}{9}t + \frac{\text{Re}(M_3)}{3} \sin \frac{6}{9}t + \frac{\text{Re}(M_5)}{5} \sin \frac{10}{9}t + \frac{\text{Re}(M_7)}{7} \sin \frac{14}{9}t + \frac{\text{Re}(M_{11})}{11} \sin \frac{22}{9}t + \frac{\text{Re}(M_{13})}{13} \sin \frac{26}{9}t + \frac{\text{Re}(M_{15})}{15} \sin \frac{30}{9}t \right] \quad (9-32)$$

Da Fig. 9.97, $\text{Re}(M_1)$ pode ser determinado como segue:

$$\begin{aligned} \text{Re}(M_1) &= 1,02 \\ \text{Re}(M_3) &= 1,04 \\ \text{Re}(M_5) &= 1,03 \\ \text{Re}(M_7) &= 0,72 \\ \text{Re}(M_{11}) &= -0,40 \\ \text{Re}(M_{13}) &= -0,42 \\ \text{Re}(M_{15}) &= -0,36 \end{aligned}$$

A precisão da solução pode ser verificada substituindo-se estes valores de $\text{Re}(M_i)$ e $t = (\pi/2)(9/2)$ na Eq. (9.32). A soma pode ser obtida como segue:

$$c\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{9}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \left[1,02 - \frac{1,04}{3} + \frac{1,03}{5} - \frac{0,72}{7} - \frac{(-0,40)}{11} + \frac{(-0,42)}{13} - \frac{(-0,36)}{15} \right] = 1,023$$

Este valor difere da unidade, porém esta discrepância está dentro dos erros de cálculo de acordo com as várias aproximações. A sobrelevação máxima na resposta ao degrau unitário ocorre em

$$t = \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{2}$$

Portanto,

$$c\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \left[1,02 \sin \frac{\pi}{9} + \frac{1,04}{3} \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1,03}{5} \sin \frac{5\pi}{9} + \frac{0,72}{7} \sin \frac{7\pi}{9} - \frac{0,40}{11} \sin \frac{11\pi}{9} - \frac{0,42}{13} \sin \frac{13\pi}{9} - \frac{0,36}{15} \sin \frac{15\pi}{9} \right] = 1,27$$

$$\text{Máxima sobrelevação} = 1,27 - 1 = 0,27$$

A sobrelevação máxima é determinada em 27%.

O lugar geométrico indicado na Fig. 9.97 corresponde realmente àquele do seguinte sistema:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = M(j\omega) = \frac{4}{(j\omega)^2 + 1,6(j\omega) + 4}$$

(Esta informação é aqui fornecida para verificação da precisão do resultado e não é necessária para a solução deste problema.) O valor exato da sobrelevação máxima para este sistema é 25,4%. A precisão da solução deste exemplo é normalmente adequada para fins de engenharia. Se for desejada a curva completa da resposta ao degrau unitário, ela pode ser construída a partir da Eq. (9.32).

Problema A.9.11 Um sistema de controle de malha-fechada pode incluir um elemento instável dentro da malha. Quando o critério de estabilidade de Nyquist é aplicado a um sistema deste tipo, devem ser obtidas as curvas de resposta em frequência para o elemento instável.

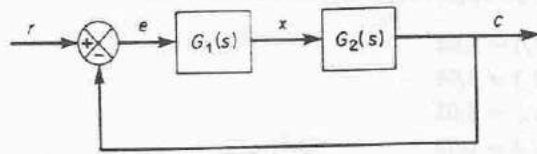


Fig. 9.98 Sistema de controle.

Como podemos obter experimentalmente as curvas de resposta em frequência de um elemento instável? Sugira uma abordagem possível para a determinação experimental da resposta em frequência de um elemento linear instável.

Solução. Uma abordagem possível é medir as características de resposta em frequência de um elemento instável usando-o como uma parte de um sistema estável.

Considere o sistema indicado na Fig. 9.98. Suponha que o elemento $G_1(s)$ é instável. O sistema completo pode ser feito estável pela escolha de um conveniente elemento linear $G_2(s)$. Aplicamos um sinal senoidal na entrada. Em regime estacionário, todos os sinais na malha serão senoidais. Medimos os sinais $e(t)$, a entrada para o elemento instável, e $x(t)$, a saída do elemento instável. Modificando a frequência [e possivelmente a amplitude para uma medida conveniente de $e(t)$ e $x(t)$] do sinal de entrada e repetindo este processo, é possível obter a resposta em frequência do elemento instável.

PROBLEMAS

Problema B.9.1 Considere o sistema com realimentação unitária e função de transferência de malha-aberta

$$G(s) = \frac{10}{s+1}$$

Obter a saída em regime estacionário do sistema quando estiver sujeito a cada uma das seguintes entradas:

1. $r(t) = \sin(t + 30^\circ)$
2. $r(t) = 2 \cos(2t - 45^\circ)$
3. $r(t) = \sin(t + 30^\circ) - 2 \cos(2t - 45^\circ)$

Problema B.9.2 Considere o sistema cuja função de transferência de malha-fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(T_2s + 1)}{T_1s + 1}$$

Obter a saída em regime estacionário do sistema quando estiver sujeito à entrada $r(t) = R \sin \omega t$.

Problema B.9.3 Esboce os diagramas de Bode para as três funções de transferência seguintes:

1. $G(s) = \frac{T_1s + 1}{T_2s + 1} \quad (T_1 > T_2 > 0)$
2. $G(s) = \frac{T_1s - 1}{T_2s + 1} \quad (T_1 > T_2 > 0)$
3. $G(s) = \frac{-T_1s + 1}{T_2s + 1} \quad (T_1 > T_2 > 0)$

Problema B.9.4 As configurações de pólos e zeros das funções complexas $F_1(s)$ e $F_2(s)$ são indicadas nas Figs. 9.99(a) e (b), respectivamente. Suponha que os contornos fechados no plano s são aqueles indicados nas Figs. 9.99(a) e (b). Esboçar qualitativamente os contornos fechados correspondentes no plano $F_1(s)$ e no plano $F_2(s)$.

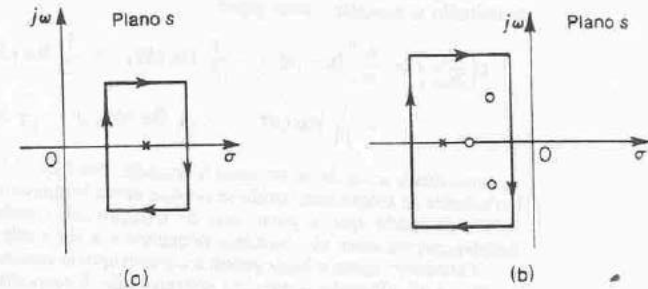


Fig. 9.99 (a) Representação no plano s da função complexa $F_1(s)$ e um contorno fechado; (b) representação no plano s da função complexa $F_2(s)$ e um contorno fechado.

Problema B.9.5 Considere o sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência de malha-aberta é

$$G(s) = \frac{as + 1}{s^2}$$

Determine o valor de a de modo que a margem de fase seja igual a 45° .

Problema B.9.6 Um sistema com a função de transferência de malha-aberta

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(T_1s + 1)}$$

é inerentemente instável. Este sistema pode ser estabilizado adicionando-se um controle derivativo. Esboçar os gráficos polares para a função de transferência de malha-aberta com e sem o controle derivativo.

Problema B.9.7 Esboçar os gráficos polares da função de transferência de malha-aberta

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_as + 1)(T_bs + 1)}{s^2(T_1s + 1)}$$

para os dois casos seguintes:

1. $T_a > T_1 > 0, \quad T_b > T_1 > 0$
2. $T_1 > T_a > 0, \quad T_1 > T_b > 0$

Problema B.9.8 Considere o sistema com

$$G(s) = \frac{10}{s(s-1)}, \quad H(s) = 1 + K_h s$$

Determinar o valor crítico de K_A para a estabilidade do sistema de malha-fechada.

Problema B.9.9 Considere o sistema de malha-fechada com a seguinte função de transferência de malha-aberta:

$$G(s)H(s) = \frac{10K(s + 0,5)}{s^2(s + 2)(s + 10)}$$

Construir os gráficos polares direto e inverso de $G(s)H(s)$ com $K = 1$ e $K = 10$. Aplicar o critério de estabilidade de Nyquist para os gráficos e determinar a estabilidade do sistema para estes valores de K .

Problema B.9.10 Considere o sistema de malha-fechada cuja função de transferência de malha-aberta é

$$G(s)H(s) = \frac{Ke^{-2s}}{s}$$

Determinar o valor máximo de K para o qual o sistema é estável.

Problema B.9.11 Considere o sistema de malha-fechada cuja função de transferência de malha-aberta é

$$G(s)H(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{s(s + 1)}$$

Determinar o valor máximo do ganho K para estabilidade em função do tempo morto T .

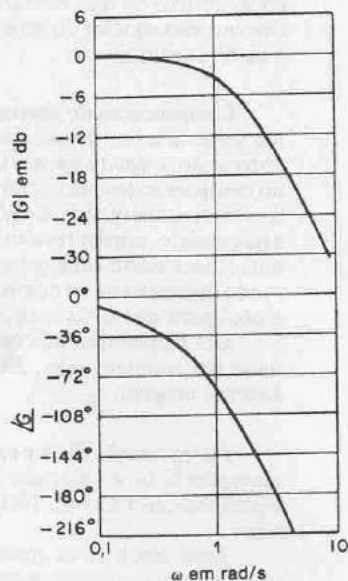


Fig. 9.100 Diagrama de Bode de um sistema determinado experimentalmente.

Problema B.9.12 Esboçar o gráfico polar de

$$G(s) = \frac{(Ts)^2 - 6(Ts) + 12}{(Ts)^2 + 6(Ts) + 12} \quad (9-33)$$

Mostrar que para a faixa de frequência $0 < \omega T < 2\sqrt{3}$, a Eq. (9.33) fornece uma boa aproximação para o atraso de transporte e^{-Ts} .

Problema B.9.13 O diagrama de Bode de um sistema $G(j\omega)$ determinado experimentalmente é indicado na Fig. 9.100. Determinar a função de transferência $G(s)$.

10

Técnicas de Projeto e Compensação

10.1 INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste capítulo é apresentar procedimentos para o projeto e compensação de sistemas de controle invariantes no tempo, lineares, com entrada-simples-saída-simples. A compensação é o ajuste de um sistema a fim de satisfazer as especificações exigidas. As abordagens para projeto e compensação de sistemas de controle utilizadas neste capítulo são a abordagem do lugar das raízes e a abordagem de resposta em frequência. (Será apresentada no Cap. 16 a teoria de controle moderna aplicada a projetos de sistemas.)

Especificações de desempenho. Os sistemas de controle são projetados para desempenhar tarefas específicas. Os requisitos impostos aos sistemas de controle normalmente são designados como especificações de desempenho. Geralmente são relativos à precisão, estabilidade relativa e velocidade de resposta.

Para problemas de projeto de rotina, as especificações de desempenho devem ser fornecidas em termos de valores numéricos precisos. Em outros casos, podem ser dadas parcialmente em termos de valores numéricos precisos e, parcialmente, em termos de hipóteses qualitativas. Neste último caso, as especificações podem ser modificadas durante o desenvolvimento do projeto, já que as especificações solicitadas podem não ser possíveis de satisfazer (devido a requisitos conflitantes) ou resultar em um sistema muito caro.

De um modo geral, as especificações de desempenho não devem ser mais restritivas do que o necessário para desempenhar uma dada tarefa. Se a precisão em operação em regime estacionário for a principal exigência de um dado sistema de controle, então não deverão ser exigidas especificações de desempenho desnecessariamente rígidas em relação à resposta transitória, desde que estas especificações exijam componentes caros. Lembre-se que a parte mais importante do projeto de um sistema de controle é estabelecer precisamente as especificações de desempenho de modo que resultem em um sistema de controle ótimo para a finalidade requerida.

Abordagem de tentativa-e-erro para projeto de sistemas. Na maioria dos casos práticos, o método de projeto a ser utilizado pode ser determinado pelas especificações de desempenho aplicáveis ao caso particular. No projeto de sistemas de controle, se as especificações de desempenho forem dadas em termos de medidas de desempenho no domínio do tempo, tais como tempo de subida, sobrelevação máxima, ou tempo de estabelecimento, ou medidas de desempenho no domínio da frequência, tais como margem de fase, margem de ganho, valor do pico de ressonância ou largura de faixa, então não temos escolha senão utilizar uma abordagem de tentativa-e-erro baseada no método do lugar das raízes e/ou nos métodos de resposta em frequência.

Os sistemas que devem ser projetados através de uma abordagem de tentativa-e-erro normalmente são limitados a sistemas invariantes no tempo, lineares, com entrada-simples-saída-simples. O projetista deve tentar satisfazer todas as especificações de desempenho por meio de uma repetição educada de tentativa-e-erro. Após ser projetado o sistema, o projetista verifica se o sistema projetado satisfaz todas as especificações de desempenho. Se não for o caso, então repete o processo de projeto por ajuste de parâmetros ajustáveis, ou modificando a configuração do sistema, até atingir as especificações dadas. Embora o projeto seja baseado em um procedimento de tentativa-e-erro, a vivência e o conhecimento do projetista desempenham um papel importante em um projeto bem-sucedido. Um projetista experiente deve estar apto a projetar um sistema aceitável sem usar muitas tentativas.

Modificação na dinâmica da planta (processo). Na construção de um sistema de controle, sabemos que modificações apropriadas na dinâmica do processo podem constituir um modo simples de atingir as especificações de desempenho. Isto, entretanto, pode não ser possível em muitas situações práticas porque o processo pode ser fixo ou não tolerar modificações. Então devemos ajustar outros parâmetros que não aqueles do processo fixado. Neste capítulo, suporemos que o processo é dado e inalterável.

Compensação de sistemas. O ajuste do ganho é o primeiro passo no ajuste de um sistema a fim de satisfazer um dado desempenho. Em muitos casos práticos, entretanto, o ajuste apenas do ganho pode não resultar em uma alteração suficiente no comportamento do sistema de modo a atingir as especificações dadas. Frequentemente, aumentando o valor do ganho melhora-se o comportamento em regime estacionário, porém resulta uma estabilidade pobre ou mesmo uma instabilidade. É então necessário reprojeter o sistema (por modificação na estrutura ou incorporando dispositivos ou componentes adicionais) de modo a alterar o comportamento global para que o sistema se comporte como desejado.

Um dispositivo adicional inserido no sistema para este propósito é denominado um *compensador*. Este dispositivo compensa o desempenho deficiente do sistema original.

Compensação série e compensação com realimentação (ou paralela). Se o compensador $G_c(s)$ é colocado em série com a função de transferência inalterável $G(s)$ como indicado na Fig. 10.1(a), então a compensação é denominada compensação série.

Uma alternativa para a compensação série é realimentar o(s) sinal(is) de algum(ns) elemento(s) e colocar um compensador no caminho de realimentação interna resultante, conforme indicado na Fig. 10.1(b). Esta compensação é denominada compensação por realimentação ou compensação paralela.

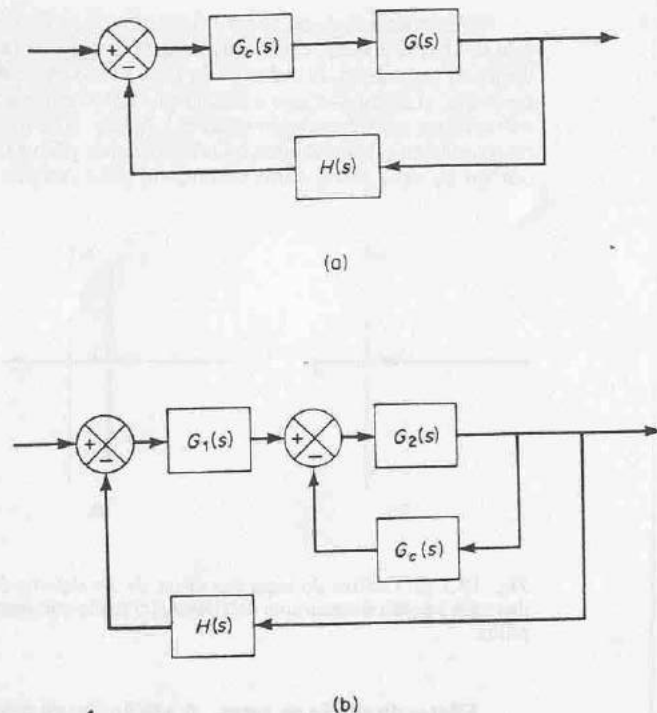


Fig. 10.1 (a) Compensação série; (b) compensação por realimentação ou paralela.

Em sistemas de controle compensados, verificamos que o problema normalmente se resume a um projeto conveniente de um compensador série ou por realimentação. A escolha entre a compensação série ou a compensação por realimentação depende da natureza dos sinais no sistema, dos níveis de potência em vários pontos, de componentes disponíveis, da experiência do projetista, de considerações econômicas etc.

Em geral, a compensação série pode ser mais simples do que a compensação por realimentação; entretanto, a compensação série normalmente exige amplificadores adicionais para aumentar o ganho e/ou propiciar isolamento. (Para evitar dissipação de potência, o compensador série é inserido no ponto de menor energia do ramo direto.) Note que, em geral, o número de componentes necessários na compensação por realimentação é menor do que o número de componentes para a compensação série, desde que seja disponível um sinal conveniente, porque a transferência de energia é de um nível de maior potência para um outro de menor potência. (Isto significa que eventualmente não são necessários amplificadores adicionais.)

Compensadores. Se for necessário um compensador para atingir as especificações de desempenho, o projetista deve implementar um dispositivo físico que possua a função de transferência prescrita do compensador.

Vários dispositivos físicos são utilizados para estes fins. De fato, muitas idéias excelentes e úteis para implementações físicas de compensadores podem ser encontradas na literatura.

Dentre os muitos compensadores, os compensadores-série mais empregados são os chamados compensadores em avanço, compensadores em atraso e compensadores avanço-atraso. Neste capítulo, limitaremos nossa discussão exclusivamente a estes três tipos. Normalmente são elétricos, mecânicos, pneumáticos, hidráulicos ou combinações entre estes e consistem em redes RC (elétrica, mecânica, pneumática ou hidráulica) e amplificadores. (Em muitos casos, uma rede RC compensadora constitui parte integral do amplificador.)

Em projeto real de um sistema de controle, a escolha do uso de um compensador elétrico, mecânico, pneumático ou hidráulico é algo que deve ser decidido parcialmente em função da natureza da planta controlada. Por exemplo, se a planta controlada envolve um fluido inflamável, então temos de escolher um compensador e atuador pneumático a fim de evitar a possibilidade de faíscas. Se, entretanto, não existe o perigo de incêndio, então são mais comumente usados os compensadores eletrônicos. (De fato, normalmente os sinais não elétricos são transformados em sinais elétricos devido à simplicidade de transmissão, aumento de precisão, aumento de confiabilidade, facilidade de compensação etc.)

Procedimentos de projeto. Na abordagem de tentativa-e-erro para projeto de um sistema, definimos um modelo matemático do sistema de controle e ajustamos os parâmetros de um compensador. A parte que mais despense tempo neste trabalho é a verificação das especificações de desempenho pela análise com cada ajuste dos parâmetros, e o projetista pode necessitar fazer uso de um computador analógico ou digital para evitar o trabalho numérico maçante para esta verificação.

Uma vez obtido um modelo matemático satisfatório, o projetista deve construir um protótipo e testar o sistema de malha-aberta. Se estiver assegurada a estabilidade absoluta, o projetista fecha a malha e verifica o desempenho do sistema na malha-fechada resultante. Devido aos efeitos de carga entre os componentes que foram desprezados, não linearidade, parâmetros distribuídos etc., que também não foram considerados no trabalho do projeto original, o desempenho real do sistema protótipo provavelmente difere das previsões teóricas. Portanto, o primeiro projeto pode não satisfazer todas as exigências de desempenho, e por tentativa-e-erro, o projetista deve efetuar modificações no protótipo até que o sistema atinja as especificações. Para fazer isto ele deve analisar cada tentativa, e os resultados da análise devem ser incorporados na próxima tentativa. O projetista deve verificar que o sistema final satisfaz as especificações de desempenho e, ao mesmo tempo, é confiável e econômico.

É importante notar que em um projeto realizado através da abordagem de tentativa-e-erro, ou em um projeto através de análise das especificações dadas, não resultará um sistema único. De fato, muitos (e possivelmente um número infinito) sistemas podem satisfazer as especificações fornecidas. Uma escolha ótima entre as muitas possibilidades pode ser feita a partir de considerações como desempenho global projetado, custo, dimensões e peso.

Projeto de sistemas complexos. As abordagens do lugar das raízes e de resposta em frequência para projetos que consistem essencialmente em ajuste do ganho e do projeto de compensadores são muito úteis porém limitadas a sistemas de controle ideais e relativamente simples, tais como sistemas invariantes no tempo, lineares, com entrada-simples-saída-simples. Estas abordagens de projeto possuem severas limitações e dificuldades quando aplicadas a projetos de sistemas variáveis no tempo e com entradas-múltiplas-saídas-múltiplas.

Enquanto o projeto de sistemas de controle através das abordagens do lugar das raízes e de resposta em frequência constitui um esforço de engenharia, o projeto de sistemas no contexto da teoria de controle moderna (a ser apresentada no Cap. 16) emprega formulações matemáticas do problema e aplica teoria matemática para projetar problemas nos quais os sistemas podem possuir múltiplas entradas e saídas e ser variáveis no tempo. Aplicando a teoria de controle moderna, o projetista está apto a iniciar de um índice de desempenho, juntamente com os vínculos impostos no sistema, e proceder a um projeto de um sistema estável através de um procedimento completamente analítico. A vantagem do projeto baseado nesta teoria de controle é que ela possibilita ao projetista produzir um sistema de controle que é ótimo em relação ao índice de desempenho considerado.

É importante ressaltar, entretanto, que esta técnica de projeto não pode ser aplicada se as especificações de desempenho forem dadas em termos de dados no domínio do tempo ou no domínio de frequência, quando então as técnicas do lugar das raízes e de resposta em frequência resultam mais úteis.

10.2 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES DE PROJETO

Os problemas de projeto considerados neste capítulo são aqueles que correspondem a uma melhora no desempenho de um sistema pela inserção de um compensador. A compensação de um sistema de controle é restrita ao projeto de um filtro cujas características tendem a compensar as características indesejáveis e inalteráveis do processo.

Nas Seções 10.3 até 10.5, consideraremos especificamente o projeto de compensadores em avanço, compensadores em atraso e compensadores avanço-atraso. Nestes problemas de projeto, colocamos um compensador em série com uma função de transferência inalterável $G(s)$ de modo a obter o comportamento desejável. O principal problema constitui então na escolha criteriosa do(s) pólo(s) e zero(s) do compensador $G_c(s)$ de modo a alterar o lugar das raízes ou a resposta em frequência a fim de que sejam satisfeitas as especificações de desempenho.

Abordagem do lugar das raízes para projetos de sistemas de controle. O método do lugar das raízes é um método gráfico para a determinação das localizações de todos os pólos de malha-fechada a partir do conhecimento das localizações dos pólos e zeros de malha-aberta conforme algum parâmetro (normalmente o ganho) é variado desde zero até infinito. O método fornece uma clara indicação dos efeitos do ajuste do parâmetro. Uma vantagem do método do lugar das raízes é que verificamos ser possível obter informação tanto da resposta transitória como da resposta em frequência a partir da configuração dos pólos e zeros do sistema no plano s .

Na prática, o gráfico do lugar das raízes de um sistema pode indicar que o desempenho desejado não pode ser conseguido somente pelo ajuste do ganho. De fato, em alguns casos, o sistema pode não ser estável para todos os valores de ganho. É necessário então modificar os lugares das raízes a fim de satisfazer as especificações de desempenho.

No projeto de um sistema de controle, se for exigido um outro ajuste além do ganho, devemos modificar os lugares das raízes originais através da inserção de um compensador conveniente. Uma vez entendidos completamente os efeitos sobre o lugar das raízes da adição de pólos e/ou zeros, podemos realmente determinar as localizações do(s) pólo(s) e do(s) zero(s) do compensador que modifique o lugar das raízes conforme desejado.

Efeitos da adição de pólos. A adição de um pólo na função de transferência de malha-aberta possui o efeito de puxar o lugar das raízes para a direita, tendendo a diminuir a estabilidade relativa do sistema e diminuindo o tempo de acomodação da resposta. (Lembre-se que a adição do controle integral adiciona um pólo na origem, tornando o sistema menos estável.) A Fig. 10.2 mostra exemplos dos lugares das raízes, ilustrando os efeitos da adição de um pólo a um sistema de pólos simples e a adição de dois pólos a um sistema de pólo simples.

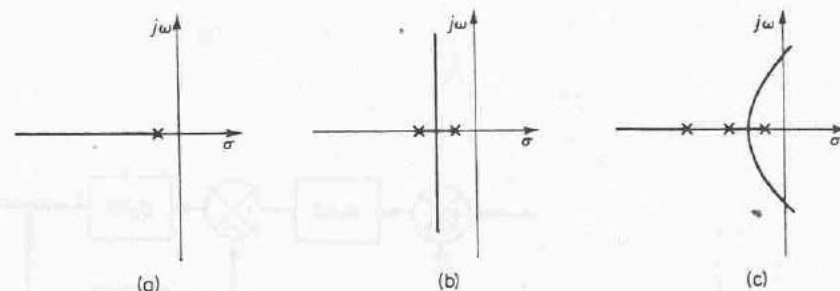


Fig. 10.2 (a) Gráfico do lugar das raízes de um sistema de pólo simples; (b) gráfico do lugar das raízes de um sistema com dois pólos; (c) gráfico do lugar das raízes de um sistema com três pólos.

Efeitos da adição de zeros. A adição de um zero na função de transferência de malha-aberta tem o efeito de puxar o lugar das raízes para a esquerda, tendendo a fazer o sistema mais estável e diminuindo o tempo de acomodação da resposta (fisicamente, a adição de um zero na função de transferência direta significa a adição de um controle derivativo ao sistema. O efeito deste controle é introduzir um grau de antecipação no sistema e aumentar a velocidade da resposta transitória). A Fig. 10.3(a) mostra os lugares das raízes para um sistema que é estável para pequenos ganhos mas instável para grandes ganhos. As Figs. 10.3(b), (c) e (d) mostram os gráficos dos lugares das raízes para o sistema quando um zero é adicionado à função de transferência de malha-aberta. Note que quando um zero é adicionado ao sistema da Fig. 10.3(a), este torna-se estável para todos os valores de ganho.

Abordagem de resposta em frequência para projeto de sistemas de controle. Considerando o problema de sistemas de controle compensados através das técnicas no domínio de frequência, asseguramos o controle do comportamento da resposta transitória em termos das especificações no domínio de frequência, tais como margem de fase, margem de ganho, valor de pico de ressonância e largura de faixa (banda). O projeto no domínio de frequência é indireto porque o sistema é projetado para satisfazer estas especificações no domínio de frequência ao invés das especificações no domínio do tempo. Após haver projetado a malha-aberta pelo método da resposta em frequência, podem ser obtidos os pólos e zeros de malha-fechada. Devem-se então verificar se as características da resposta transitória satisfazem ou não as especificações exigidas no domínio do tempo. Em caso negativo, o compensador deve ser modificado e a análise repetida até ser obtido um resultado satisfatório.

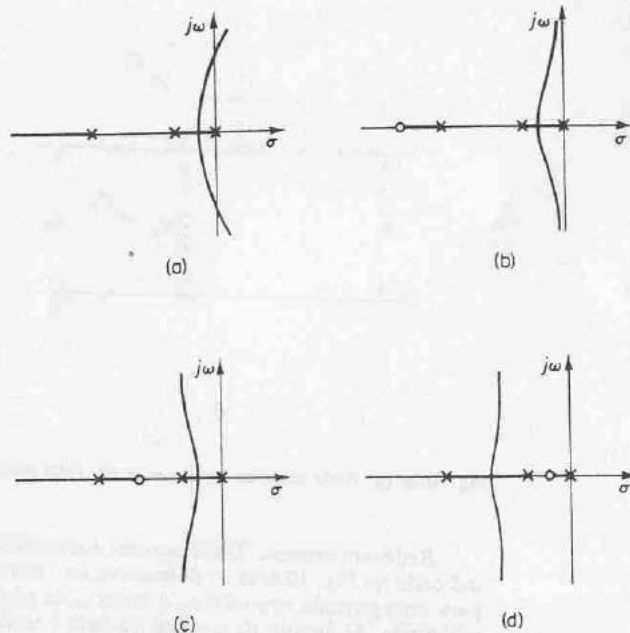


Fig. 10.3 (a) Gráfico do lugar das raízes de um sistema com três pólos; (b), (c) e (d) gráficos do lugar das raízes mostrando os efeitos da adição de um zero ao sistema com três pólos.

O projeto no domínio de frequências é simples e direto. O gráfico da resposta em frequência indica claramente a maneira pela qual o sistema deve ser modificado, embora não possa ser feita a previsão exata quantitativa das características da resposta transitória. A abordagem da resposta em frequência pode ser aplicada a sistemas ou componentes cujas características dinâmicas são fornecidas na forma de dados de resposta em frequência. Note que devido à dificuldade na obtenção das equações que governam alguns componentes, tais como componentes pneumáticos e hidráulicos, as características dinâmicas de tais componentes normalmente são determinadas experimentalmente através de testes de resposta em frequência. Os gráficos de resposta em frequência obtidos experimentalmente podem ser facilmente combinados com outros gráficos. Note também que considerando ruídos de alta frequência, verificamos que a abordagem de resposta em frequência é mais conveniente do que outras abordagens.

No projeto de sistemas de controle no domínio de frequência, se desejarmos uma certa margem de fase ou margem de ganho, notamos que os diagramas de Bode são mais convenientes do que os diagramas polares. (No uso de diagramas de Bode, exceto nos pontos próximos à frequência do cruzamento do ganho onde as curvas exatas diferem consideravelmente das assíntotas linearizadas, podemos empregar os gráficos com assíntotas para fins de projeto.) Por outro lado, se desejarmos um certo valor de M_r , os gráficos polares ou os gráficos log-módulo *versus* fase apresentam uso mais conveniente do que os diagramas de Bode.

Informação obtível da resposta em frequência de malha-aberta. A região de baixa frequência (a região abaixo da frequência de cruzamento do ganho —* eventualmente, frequência de corte) indica o comportamento em regime estacionário do sistema em malha-fechada. A região de média frequência (a região próxima ao ponto $-1 + j0$ do lugar geométrico, indica a estabilidade relativa. A região de alta frequência (a região acima da frequência de cruzamento do ganho) indica a complexidade do sistema.

Requisitos da resposta em frequência em malha-aberta. Podemos dizer que, em muitos casos práticos, a compensação é essencialmente um compromisso entre o erro em regime estacionário e a estabilidade relativa.

A fim de possuir um alto valor do coeficiente de erro de velocidade e ainda uma estabilidade relativa satisfatória, verificamos ser necessário modificar a curva de resposta em frequência de malha-aberta.

O ganho na região de baixa frequência deve ser suficientemente grande, e, também, próxima à frequência de cruzamento do ganho, a inclinação da curva do módulo no diagrama de Bode deve ser -20 db/década. Esta inclinação deve estender-se por uma faixa de frequência suficientemente larga para assegurar uma

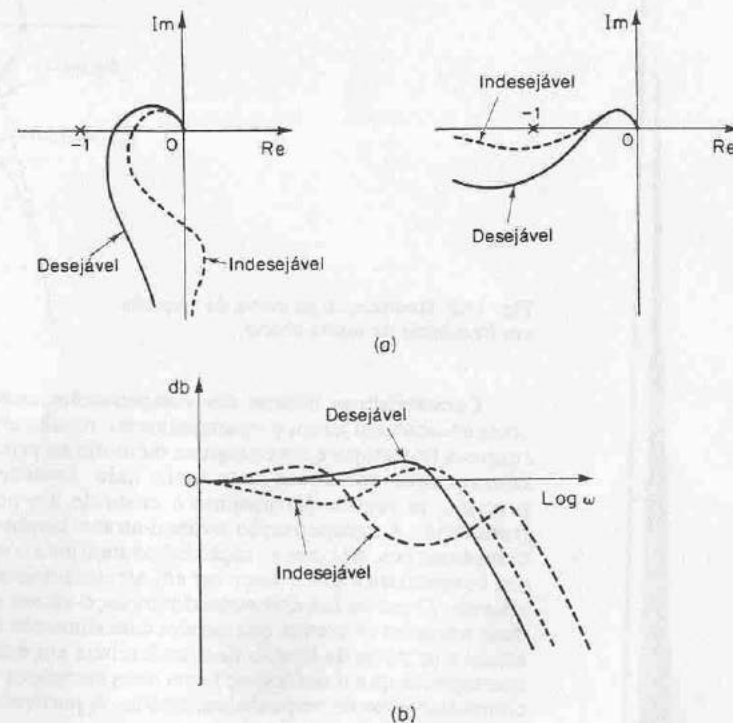


Fig. 10.4 (a) Exemplos de curvas de resposta em frequência de malha-aberta desejáveis e indesejáveis; (b) exemplos de curvas de resposta em frequência de malha-fechada desejáveis e indesejáveis.

*N. do T.

margem de fase apropriada. Para a região de alta frequência, o ganho deve ser atenuado tão rapidamente quanto possível para minimizar os efeitos do ruído.

Exemplos de curvas de resposta em frequência de malha-aberta e de malha-fechada desejáveis e indesejáveis são fornecidos na Fig. 10.4.

Em relação à Fig. 10.5 vemos que a modificação da curva de resposta em frequência de malha-aberta pode ser feita se a parte de alta frequência do lugar geométrico segue o lugar geométrico de $G_1(j\omega)$, enquanto a parte de baixa frequência do lugar geométrico segue o lugar geométrico de $G_2(j\omega)$. O lugar geométrico modificado de $G_c(j\omega)G(j\omega)$ deve apresentar margens de fase e de ganho razoáveis ou ser tangente a um círculo M apropriado, conforme indicado.

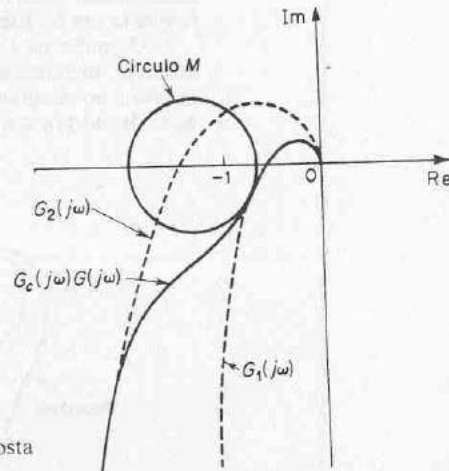


Fig. 10.5 Modificação na curva de resposta em frequência de malha-aberta.

Características básicas das compensações avanço, atraso, avanço-atraso. A compensação em avanço essencialmente resulta em uma melhoria apreciável na resposta transitória e uma pequena melhoria na precisão de regime permanente. A compensação em atraso, por outro lado, fornece uma apreciável melhoria na precisão de regime permanente à custa de um aumento no tempo de resposta transitória. A compensação avanço-atraso combina as características das duas compensações, da compensação em avanço e da compensação em atraso. O uso de um compensador em avanço ou em atraso aumenta de uma unidade a ordem do sistema. O uso de um compensador avanço-atraso aumenta a ordem do sistema de duas unidades (a menos que ocorra cancelamento entre os zeros da rede avanço-atraso e os pólos da função de transferência em malha-aberta não compensada), o que significa que o sistema se torna mais complexo e mais difícil de controlar o seu comportamento na resposta transitória. A particular situação determina o tipo da compensação a ser utilizada.

10.3 COMPENSAÇÃO EM AVANÇO

Nesta seção, deduziremos inicialmente as funções de transferência de uma rede em avanço elétrica e de uma rede mecânica em avanço: Apresentaremos, então, procedimentos para projetar compensadores em avanço baseados nas abordagens do lugar das raízes e da resposta em frequência.

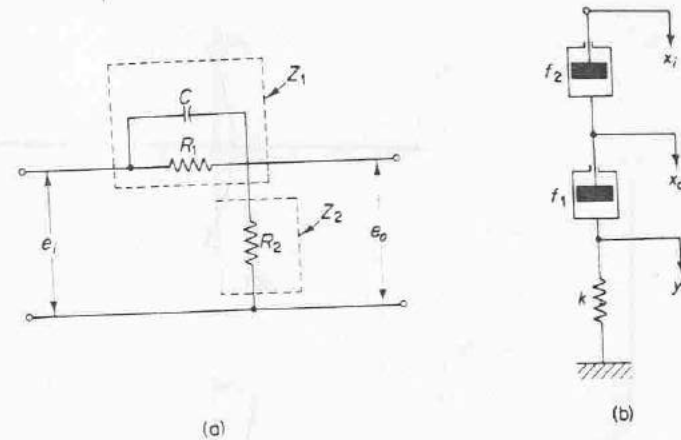


Fig. 10.6 (a) Rede elétrica em avanço; (b) rede mecânica em avanço.

Redes em avanço. Um diagrama esquemático de uma rede elétrica em avanço é indicado na Fig. 10.6(a). A denominação "rede em avanço" resulta do fato de que para uma entrada senoidal e_i , a saída e_o da rede também é senoidal com uma fase adiantada. O ângulo de avanço da fase é uma função da frequência de entrada. Vamos deduzir a função de transferência para esta rede. Conforme é usual na dedução da função de transferência de qualquer rede de quatro terminais, suporemos que a impedância da fonte vista pela rede é nula e que a impedância de carga da saída é infinita.

Usando os símbolos definidos na Fig. 10.6(a), verificamos que as impedâncias complexas Z_1 e Z_2 são

$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1 C s + 1}, \quad Z_2 = R_2$$

A função de transferência entre a saída $E_o(s)$ e a entrada $E_i(s)$ é

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{R_1 C s + 1}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C s + 1}$$

Definindo,

$$R_1 C = T, \quad \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \alpha < 1$$

Então a função de transferência resulta em

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \alpha \frac{T s + 1}{\alpha T s + 1} = \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

A Fig. 10.6(b) mostra um diagrama esquemático de uma rede mecânica de avanço. Do diagrama, obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} f_2(\dot{x}_i - \dot{x}_0) &= f_1(\dot{x}_0 - \dot{y}) \\ f_1(\dot{x}_0 - \dot{y}) &= ky \end{aligned}$$

Calculando as transformadas de Laplace destas duas equações, supondo condições iniciais nulas, e então eliminando $Y(s)$, obtemos

$$\frac{X_0(s)}{X_i(s)} = \frac{f_2}{f_1 + f_2} \frac{\frac{f_1}{k}s + 1}{\frac{f_2}{f_1 - f_2} \frac{f_1}{k}s + 1}$$

Esta é a função de transferência entre $X_0(s)$ e $X_i(s)$. Por definição,

$$\frac{f_1}{k} = T, \quad \frac{f_2}{f_1 + f_2} = \alpha < 1$$

obtemos

$$\frac{X_0(s)}{X_i(s)} = \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

Características de redes em avanço. Uma rede em avanço possui a seguinte função de transferência:

$$\alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (\alpha < 1)$$

A função de transferência possui um zero em $s = -1/T$ e um pólo em $s = -1/(\alpha T)$. Desde que $\alpha < 1$, verificamos que o zero está sempre localizado à direita do pólo no plano complexo. Note que para um valor pequeno de α , o pólo está localizado à esquerda e muito distante. O valor mínimo de α é limitado pela implementação física da rede em avanço. O valor mínimo de α normalmente é considerado aproximadamente 0,07. Se o valor de α é pequeno, é necessário colocar em cascata um amplificador a fim de compensar a atenuação da rede em avanço.

A Fig. 10.7 indica o gráfico polar de

$$\alpha \frac{j\omega T + 1}{j\omega \alpha T + 1} \quad (0 < \alpha < 1)$$

Para um dado valor de α , o ângulo entre o eixo real positivo e a reta tangente desenhada a partir da origem ao semicírculo fornece o ângulo de avanço de fase

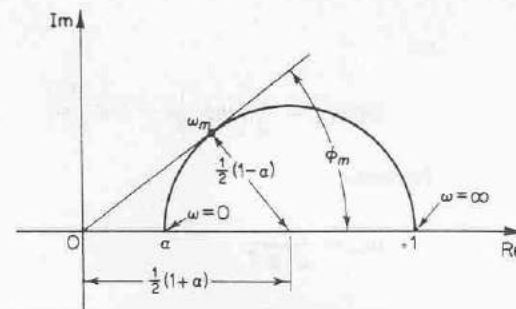


Fig. 10.7 Diagrama polar de uma rede em avanço $\alpha(j\omega T + 1)/(j\omega \alpha T + 1)$, onde $0 < \alpha < 1$.

máximo, ϕ_m . Denominaremos a frequência ω_m no ponto tangente. Da Fig. 10.7, o ângulo de fase em $\omega = \omega_m$ é

$$\sin \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad (10.1)$$

A Eq. (10.1) relaciona o ângulo de avanço de fase máximo com o valor de α .

A Fig. 10.8 mostra o diagrama de Bode de uma rede em avanço quando $\alpha = 0.1$. As frequências de canto para a rede em avanço são $\omega = 1/T$ e $\omega = 1/(\alpha T)$. Examinando a Fig. 10.8, verificamos que ω_m é a média geométrica das duas frequências de canto.

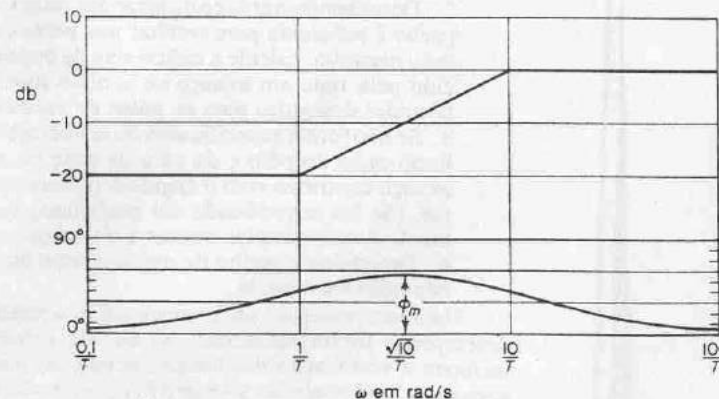


Fig. 10.8 Diagrama de Bode de uma rede em avanço.

ou

$$\log \omega_m = \frac{1}{2} \left[\log \frac{1}{T} + \log \frac{1}{\alpha T} \right]$$

Portanto,

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}} \tag{10.2}$$

Conforme pode ser visto na Fig. 10.8, a rede em avanço é basicamente um filtro passa-altas. (Passam as altas frequências porém são atenuadas as baixas frequências.) Portanto, é necessário um ganho adicional, eventualmente, para aumentar o ganho em baixas frequências.

Técnicas de compensação em avanço baseadas na abordagem do lugar das raízes. A abordagem do lugar das raízes para projetos é muito eficiente quando as especificações são fornecidas em termos de grandezas no domínio do tempo, tais como sobrelevação máxima, tempo de subida, tempo de acomodação, relação de amortecimento, e frequência natural não amortecida dos pólos de malha-fechada dominantes desejados.

Considere um problema de projeto no qual o sistema original ou é instável para todos os valores de ganho ou é estável porém possui características indesejáveis de resposta transitória. Neste caso, é necessária uma modificação no lugar das raízes na vizinhança do eixo $j\omega$ e da origem, de modo que os pólos de malha-fechada dominantes estejam nas posições desejadas do plano complexo. Este problema pode ser resolvido pela inserção de um compensador em avanço apropriado em cascata com a função de transferência do ramo direto.

Os procedimentos para projeto de um compensador em avanço pelo método do lugar das raízes podem ser estabelecidos como segue:

1. A partir das especificações de desempenho, determine as localizações desejadas para os pólos de malha-fechada dominantes.
2. Desenhando o gráfico do lugar das raízes, verifique se apenas um ajuste do ganho é suficiente para resultar nos pólos de malha-fechada desejados. Em caso negativo, calcule a deficiência de ângulo ϕ . Este ângulo deve ser fornecido pela rede em avanço se o novo lugar das raízes passar através das posições desejadas para os pólos de malha-fechada dominantes.
3. Se não forem especificados os coeficientes de erros estáticos, determine a localização do pólo e do zero da rede em avanço de modo que a rede em avanço contribua com o ângulo ϕ necessário e exija o mínimo ganho adicional. (Se for especificado um coeficiente particular de erro estático, geralmente é mais simples utilizar a abordagem da resposta em frequência.)
4. Determine o ganho de malha-aberta do sistema compensado através da condição do módulo.

Uma vez projetado um compensador, verifique se todas as especificações de desempenho foram satisfeitas. (O uso de computadores analógicos ou digitais facilitam a verificação das características da resposta transitória.) Se o sistema compensado não satisfaz as especificações de desempenho, repita o procedimento de projeto ajustando o pólo e o zero do compensador até todas as especificações serem satisfeitas. Se for exigido um coeficiente de erro estático grande, coloque em cascata uma rede em atraso ou altere o compensador em avanço para um compensador avanço-atraso.

Note que se os pólos de malha-fechada dominantes selecionados não forem realmente dominantes, será necessário modificar a localização do par de pólos de malha-fechada através de uma abordagem de tentativa-e-erro. (Os pólos de malha-fechada que não são dominantes modificam apenas a resposta obtida dos pólos de malha-fechada. A quantidade de modificação depende da posição destes pólos de malha-fechada restantes.)

Exemplo 10.1 Considere o sistema indicado na Fig. 10.9(a). A função de transferência do ramo direto é

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

O gráfico do lugar das raízes para este sistema é indicado na Fig. 10.9(b). A função de transferência de malha-fechada resulta em

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{4}{s^2 + 2s + 4} \\ &= \frac{4}{(s + 1 + j\sqrt{3})(s + 1 - j\sqrt{3})} \end{aligned}$$

Os pólos de malha-fechada estão localizados em

$$s = -1 \pm j\sqrt{3}$$

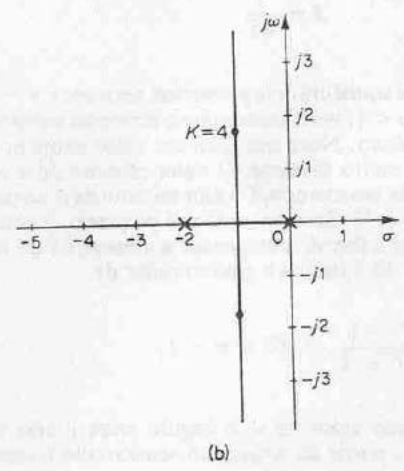
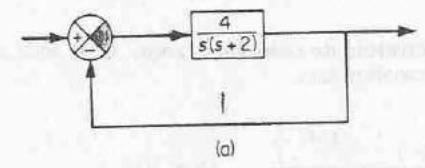


Fig. 10.9 (a) Sistema de controle; (b) gráfico do lugar das raízes.

A relação de amortecimento dos pólos de malha-fechada é 0,5. A frequência natural não amortecida dos pólos de malha-fechada é 2 rad/s. O coeficiente de erro de velocidade estático é 2 s⁻¹.

Deseja-se modificar os pólos de malha-fechada de modo que uma frequência natural não amortecida $\omega_n = 4$ rad/s seja obtida sem modificar o valor da relação de amortecimento, $\zeta = 0,5$.

Lembre-se que a relação de amortecimento ζ de um par de pólos complexos no plano complexo pode ser expressa em termos do ângulo θ que é medido a partir do eixo real negativo, conforme indicado na Fig. 10.10(a), com

$$\zeta = \cos \theta$$

Em outras palavras, retas com relação de amortecimento ζ constantes são retas radiais passando pela origem conforme a Fig. 10.10(b). Por exemplo, uma relação de amortecimento de 0,5 exige que os pólos complexos se situem sobre as retas que passam pela origem e fazem ângulos de $\pm 60^\circ$ com o eixo real negativo. (Se a parte real de um par de pólos complexos é positiva, significando que o sistema é instável, o ζ correspondente é negativo.) A relação de amortecimento determina a posição angular do pólo, enquanto a distância do pólo em relação à origem é determinada pela frequência natural não amortecida ω_n .

No presente exemplo, as posições desejadas dos pólos de malha-fechada são

$$s = -2 \pm j2\sqrt{3}$$

Em alguns casos, após haverem sido obtidos os lugares das raízes do sistema original, os pólos de malha-fechada dominantes podem ser movidos para as posições desejadas através de um simples ajuste do ganho. Este não é o caso, entretanto, para o sistema apresentado. Portanto, inserimos um compensador em avanço no ramo direto.

Um procedimento geral para determinação do compensador em avanço é o seguinte: Inicialmente, determine a soma dos ângulos na posição desejada de um dos pólos de malha-fechada dominante com os pólos e zeros de malha-aberta do sistema original e o ângulo ϕ

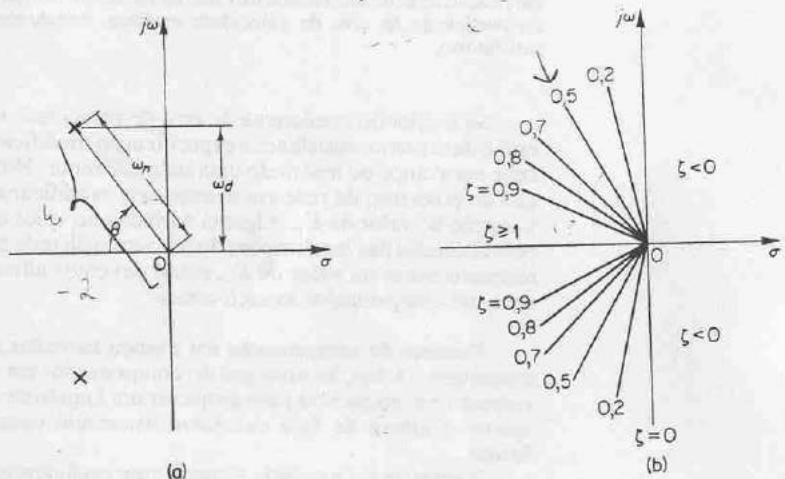


Fig. 10.10 (a) Pólos complexos; (b) retas de relação de amortecimento ζ constante.

necessário para ser adicionado de modo que a soma total dos ângulos seja igual a $\pm 180^\circ(2k + 1)$. A rede em avanço deve contribuir com este ângulo. (Se o ângulo for muito grande, então duas ou mais redes em avanço podem ser necessárias em vez de apenas uma.)

Se o sistema original possui a função de transferência de malha-aberta $G(s)$, então o sistema compensado possuirá a função de transferência de malha-aberta

$$G_1(s) = \left(\alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \right) K_c G(s)$$

onde o primeiro termo do segundo membro da equação corresponde à rede em avanço, o segundo termo K_c é o ganho do amplificador, e o último termo $G(s)$ é a função de transferência de malha-aberta original. (Note que o amplificador possibilita o casamento de impedância desejado bem como o ganho K_c desejado.) Note que há muitos valores possíveis para T que resultarão na contribuição do ângulo necessário para os pólos de malha-fechada desejados.

O próximo passo é determinar as posições do pólo e zero da rede em avanço; em outras palavras, o valor de T . Na escolha do valor de T , apresentaremos um procedimento para obter o maior valor possível para α de modo que o ganho adicional exigido do amplificador seja o menor possível. Primeiro, desenhe uma reta horizontal passando pelo ponto P , a posição desejada de um dos pólos de malha-fechada dominantes. Isto é indicado pela reta PA na Fig. 10.11. Desenhe também uma reta ligando o ponto P à origem. Bisseccione o ângulo entre as retas PA e PO , conforme indicado na Fig. 10.11. Desenhe duas retas PC e PD que fazem ângulos de $\pm \phi/2$ com a bissetriz PB . As interseções de PC e PD com o eixo real negativo fornecem as posições necessárias para o pólo e o zero da rede em avanço. O compensador assim projetado tornará o ponto P um ponto sobre o lugar das raízes do sistema compensado. O ganho de malha-aberta é determinado por meio da condição do módulo.

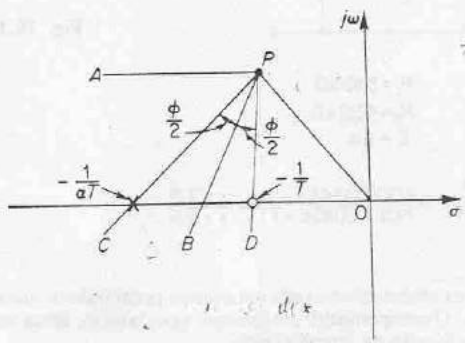


Fig. 10.11 Determinação do pólo e do zero de uma rede em avanço.

No presente sistema, o ângulo de $G(s)$ no pólo de malha-fechada desejado é

$$\left| \frac{4}{s(s+2)} \right|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = -210^\circ$$

Handwritten note: "para o lugar das raízes passar pelo ponto desejado"

Portanto, para que o lugar das raízes passe através do pólo de malha-fechada desejado, a rede em avanço deve contribuir com $\phi = 30^\circ$ neste ponto. Seguindo o procedimento de projeto anteriormente citado, determinamos o pólo e o zero da rede em avanço, conforme indicado na Fig. 10.12, obtendo

Pólo em $s = -5,4$, Zero em $s = -2,9$

Fig. 10.12 Gráfico do lugar das raízes do sistema compensado.

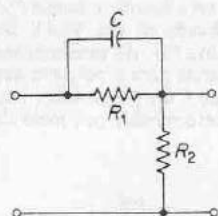
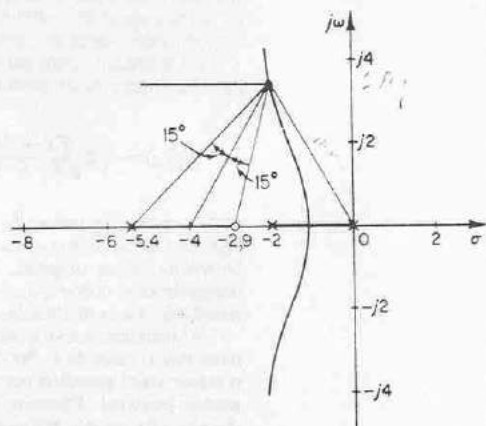


Fig. 10.13 Rede em avanço.

$$\begin{aligned} R_1 &= 345 \text{ k}\Omega \\ R_2 &= 400 \text{ k}\Omega \\ C &= 1 \mu\text{f} \end{aligned}$$

$$\text{Função de transferência} = \frac{400}{745} \frac{(0,345s + 1)}{(0,185s + 1)} = \frac{s + 2,9}{s + 5,4}$$

Destes valores obtemos uma rede em avanço possuindo os valores dos parâmetros indicados na Fig. 10.13. O compensador em avanço, que consiste nesta rede de avanço e um amplificador, possui a função de transferência

$$G_c(s) = \frac{(s + 2,9)}{(s + 5,4)} K_c$$

Portanto, a função de transferência de malha-aberta do sistema compensado resulta em

$$G_c(s)G(s) = \frac{(s + 2,9)}{(s + 5,4)} K_c \frac{4}{s(s + 2)} = \frac{K(s + 2,9)}{s(s + 2)(s + 5,4)}$$

O gráfico do lugar das raízes para o sistema compensado é mostrado na Fig. 10.12. O ganho K é calculado a partir da condição do módulo como segue:

$$\left| \frac{K(s + 2,9)}{s(s + 2)(s + 5,4)} \right|_{s = -2 + j2,9} = 1$$

ou

$$K = 18,7$$

Segue que

$$G_c(s)G(s) = \frac{18,7(s + 2,9)}{s(s + 2)(s + 5,4)}$$

A constante de ganho K_c do amplificador é

$$K_c = \frac{K}{4} = 4,68$$

O coeficiente de erro de velocidade estático K_v é obtido da expressão

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s18,7(s + 2,9)}{s(s + 2)(s + 5,4)} \\ &= 5,02 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

O terceiro pólo de malha-fechada é obtido dividindo-se a equação característica pelos fatores conhecidos como segue:

$$s(s + 2)(s + 5,4) + 18,7(s + 2,9) = (s + 2 + j2\sqrt{3})(s + 2 - j2\sqrt{3})(s + 3,4)$$

O método de compensação anteriormente apresentado possibilita colocar os pólos de malha-fechada dominantes nos pontos desejados do plano complexo. O terceiro pólo, em $s = -3,4$, está próximo do zero adicionado em $s = -2,9$. Portanto, o efeito deste pólo na resposta transitória é relativamente pequeno. Desde que não foi imposta nenhuma restrição em relação ao pólo não dominante e não foi fornecida nenhuma especificação relativa ao valor do coeficiente de erro de velocidade estático, concluímos que o projeto apresentado é satisfatório.

Se o valor do coeficiente de erro de velocidade estática K_v fosse especificado, então deveríamos satisfazer a especificação modificando a posição do pólo-zero da rede em avanço ou inserindo uma rede diferente. Note que modificando a localização do pólo-zero da rede em avanço sem modificar o ângulo ϕ , o resultado é uma variação no valor de K_v . Alguma variação no valor de K_v pode, portanto, ser feita pela alteração das localizações do pólo-zero da rede em avanço. Se for desejado um aumento maior no valor de K_v , então devemos alterar o compensador em avanço para um compensador avanço-atraso.

Técnicas de compensação em avanço baseadas na abordagem de resposta em frequência. A função principal do compensador em avanço é modificar a curva de resposta em frequência para propiciar um ângulo de avanço de fase suficiente para ajustar o atraso de fase excessivo associado com os componentes do sistema fixado.

Vamos supor um dado sistema com realimentação unitária. Desejamos satisfazer as especificações de desempenho, que são fornecidas em termos de margem de fase, margem de ganho, coeficientes de erro etc. Os procedimentos para projetar

um compensador em avanço, através da abordagem de resposta em frequência, podem ser estabelecidos como segue:

1. Determine o ganho de malha-aberta K a fim de satisfazer as exigências dos coeficientes de erro.
2. Usando o ganho K anteriormente determinado, calcule a margem de fase do sistema não compensado.
3. Determine o ângulo de avanço de fase necessário ϕ a ser adicionado ao sistema.
4. Determine o fator de atenuação α pelo uso da Eq. (10.1). Determine a frequência onde o módulo do sistema não compensado é igual a $-20 \log(1/\sqrt{\alpha})$. Selecione esta frequência como a nova frequência de cruzamento do ganho. Esta frequência corresponde a ω_m e o deslocamento de fase máximo ϕ_m ocorre nesta frequência.
5. Determine as frequências de canto da rede em avanço a partir de

$$\omega = \frac{1}{T}, \quad \omega = \frac{1}{\alpha T}$$

Finalmente, introduza um amplificador com ganho igual a $1/\alpha$, ou aumente o ganho do amplificador existente por um fator de $1/\alpha$.

Exemplo 10.2 Considere o sistema indicado na Fig. 10.14. A função de transferência de malha-aberta é

$$G(s) = \frac{4K}{s(s+2)}$$

Deseja-se determinar um compensador para o sistema de modo que o coeficiente de erro de velocidade estático K_v seja 20 s^{-1} , a margem de fase seja pelo menos 50° , e a margem de ganho pelo menos 10 db.

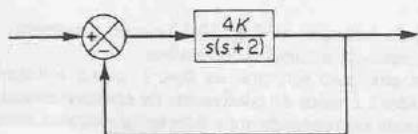


Fig. 10.14 Sistema de controle.

No presente exemplo, foram especificadas as margens de ganho e de fase; conseqüentemente, empregaremos os diagramas de Bode.

O primeiro passo no projeto é ajustar o ganho K para satisfazer a especificação de desempenho em regime estacionário, ou propiciar o coeficiente de erro de velocidade estático exigido. Desde que este coeficiente é dado como 20 s^{-1} , obtemos

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s4K}{s(s+2)} = 2K = 20$$

ou

$$K = 10$$

Com $K = 10$, o sistema da Fig. 10.14 satisfaz a exigência de regime estacionário.

Desenharemos agora o gráfico do diagrama de Bode de

$$G(j\omega) = \frac{40}{j\omega(j\omega + 2)} = \frac{20}{j\omega(0,5j\omega + 1)}$$

A Fig. 10.15 mostra as curvas de módulo e ângulo de fase de $G(j\omega)$. Destes gráficos, as margens de fase e de ganho do sistema são obtidas como 17° e $+\infty$ db, respectivamente. (Uma margem de fase de 17° implica que o sistema é quase oscilatório. Portanto, satisfazendo apenas a especificação de regime estacionário, resulta em um desempenho pobre na resposta transitória.) A especificação exigida para a margem de fase é de pelo menos 50° . Portanto, determinaremos o ângulo de avanço de fase adicional necessário para satisfazer a exigência de estabilidade relativa, que é igual a 33° . Para conseguir uma margem de fase de 50° sem diminuir o valor de K , é necessário introduzir no sistema um conveniente compensador em avanço.

Observando que a adição de um compensador em avanço modifica a curva de módulo no diagrama de Bode, verificamos que a frequência de cruzamento do ganho deverá ser deslocada para a direita. Devemos ajustar o ângulo de fase considerando um atraso de $G(j\omega)$ aumentado devido a este aumento na frequência de cruzamento do ganho, devemos supor que ϕ_m , o ângulo de fase em avanço máximo necessário, é aproximadamente 38° . (Isto significa que 5° foram adicionados para compensar o deslocamento na frequência de cruzamento do ganho.) Desde que

$$\sin \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

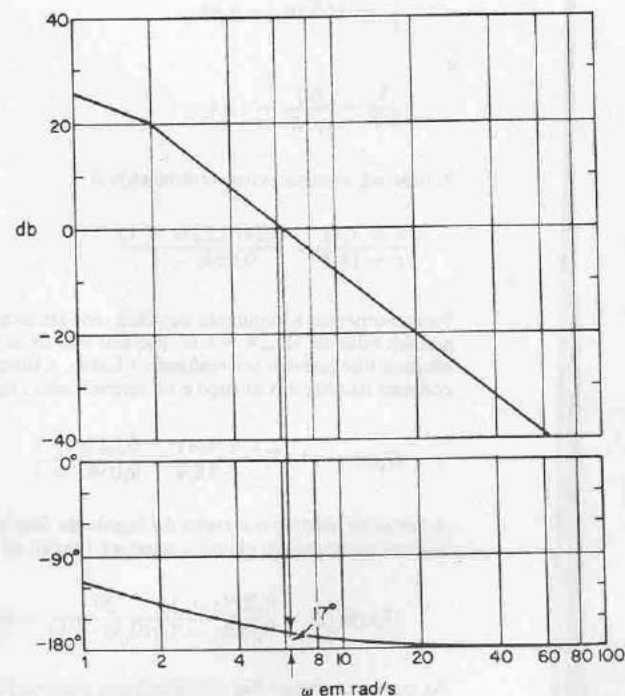


Fig. 10.15 Diagrama de Bode para $G(j\omega) = 40/[j\omega(j\omega + 2)]$.

$\phi_m = 38^\circ$ corresponde a $\alpha = 0,24$. Uma vez que o fator de atenuação α foi determinado com base no ângulo de fase em avanço exigido, o próximo passo é determinar as frequências de canto $\omega = 1/T$ e $\omega = 1/(\alpha T)$ da rede em avanço. Para assim proceder, note inicialmente que o ângulo de avanço de fase máximo ϕ_m ocorre na média geométrica das duas frequências de canto, ou $\omega = 1/(\sqrt{\alpha}T)$. [Vide Eq. (10.2).] A quantidade de modificação na curva de módulo em $\omega = 1/(\sqrt{\alpha}T)$ é

$$\left| \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega \alpha T} \right|_{\omega = 1/(\sqrt{\alpha}T)} = \left| \frac{1 + j\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{1 + j\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Note que

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{0,24}} = \frac{1}{0,49} = 6,2 \text{ db}$$

e $|G(j\omega)| = -6,2 \text{ db}$ corresponde a $\omega = 9 \text{ rad/s}$. Selecionaremos esta frequência como a nova frequência de cruzamento do ganho ω_c . Observando que esta frequência corresponde a $1/(\sqrt{\alpha}T)$, ou $\omega_c = 1/(\sqrt{\alpha}T)$, obtemos

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\alpha} \omega_c = 4,41$$

e

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\alpha}} = 18,4$$

A rede em avanço assim determinada é

$$\frac{s + 4,41}{s + 18,4} = \frac{0,24(0,227s + 1)}{0,054s + 1}$$

Para compensar a atenuação devida à rede em avanço, aumentamos o ganho do amplificador por um fator de $1/0,24 = 4,17$. (Se isto não fosse feito, o coeficiente de erro de velocidade estático não poderia ser realizado.) Então, a função de transferência do compensador, que consiste na rede em avanço e no amplificador, resulta em

$$G_c(s) = (4,17) \frac{s + 4,41}{s + 18,4} = \frac{0,227s + 1}{0,054s + 1}$$

A curva de módulo e a curva do ângulo de fase para $G_c(j\omega)$ são indicadas na Fig. 10.16. O sistema compensado possui a seguinte função de transferência de malha-aberta:

$$G_c(s)G(s) = \frac{0,227s + 1}{0,054s + 1} \frac{20}{s(0,5s + 1)} = (4,17) \frac{s + 4,41}{s + 18,4} \frac{40}{s(s + 2)}$$

As curvas cheias na Fig. 10.16 indicam a curva do módulo e a curva do ângulo de fase para o sistema compensado. O compensador em avanço acarreta um aumento na frequência de cruzamento do ganho de 6,3 para 9 rad/s. O aumento nesta frequência significa um aumento na largura de faixa. Isto implica um aumento na velocidade de resposta. As margens de ganho e de fase são obtidas como aproximadamente 50° e $+\infty \text{ db}$, respectivamente. O sistema

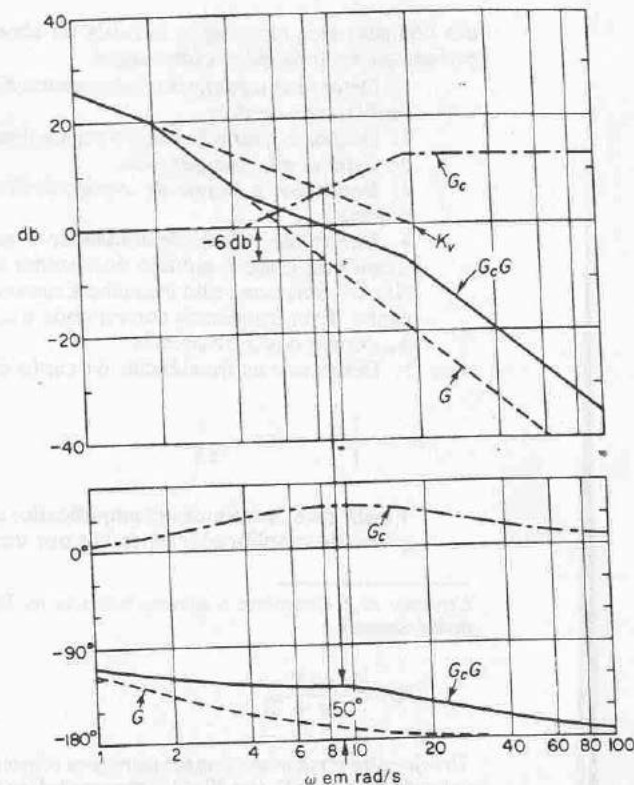


Fig. 10.16 Diagrama de Bode para o sistema compensado.

compensado indicado na Fig. 10.17 satisfaz, portanto, tanto as exigências em regime estacionário como de estabilidade relativa.

Note que para sistemas do tipo 1, como o sistema considerado (com os valores aqui considerados), o valor do coeficiente de erro de velocidade estático K_v é simplesmente o valor da frequência correspondente à intersecção da reta inicial com inclinação -20 db/década com a reta 0-db , conforme indicado na Fig. 10.16.

A Fig. 10.18 mostra os gráficos polares de $G(j\omega)$ (com $K = 10$) e de $G_c(j\omega)G(j\omega)$. Da Fig. 10.18, verificamos que a frequência de ressonância do sistema não compensado é aproximadamente 6 rad/s e que a do sistema compensado é aproximadamente 7 rad/s. (Este fato também indica que a largura de faixa foi aumentada.)

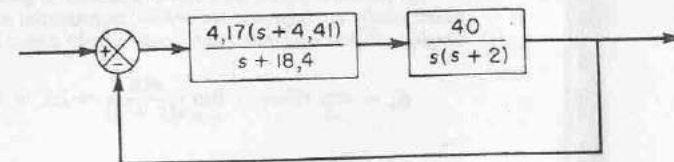


Fig. 10.17 Sistema compensado.

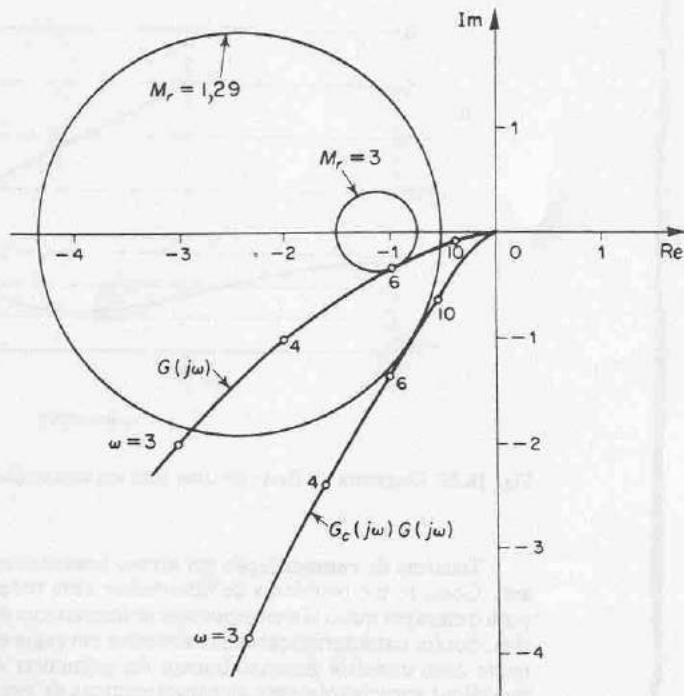


Fig. 10.18 Diagramas polares da função de transferência de malha-aberta não compensada e compensada. (G : sistema não compensado, $G_c G$: sistema compensado.)

Da Fig. 10.18, verificamos que o valor do pico de ressonância M_r para o sistema não compensado com $K = 10$ é 3. O valor de M_r para o sistema compensado é obtido em 1,29. Isto mostra claramente que o sistema compensado apresentou uma estabilidade relativa melhorada. Note que o valor de M_r pode ser facilmente obtido transferindo-se os dados do diagrama de Bode para a carta de Nichols. Veja Exemplo 10.4.)

Note que se o ângulo de fase de $G(j\omega)$ diminui rapidamente próximo à frequência de cruzamento de ganho, uma compensação em avanço resulta ineficiente devido ao deslocamento da frequência de cruzamento de ganho para a direita resultar em uma dificuldade em obter-se suficiente avanço de fase na nova frequência de cruzamento de ganho. Isto significa que, a fim de propiciar a margem de fase desejada, devemos usar um valor muito pequeno para α . O valor de α , entretanto, não deve ser menor do que 0,07 nem deve propiciar um ângulo de fase em avanço máximo ϕ_m maior do que 60° porque estes valores exigirão um ganho adicional de valor excessivo. (Se for necessário mais do que 60° , duas (ou mais) redes em avanço devem ser utilizadas em série com um amplificador de isolamento.)

10.4 COMPENSAÇÃO EM ATRASO

Redes em atraso. A Fig. 10.19(a) mostra uma rede elétrica de atraso. A denominação "rede em atraso" provém do fato que quando a tensão de entrada e_i é

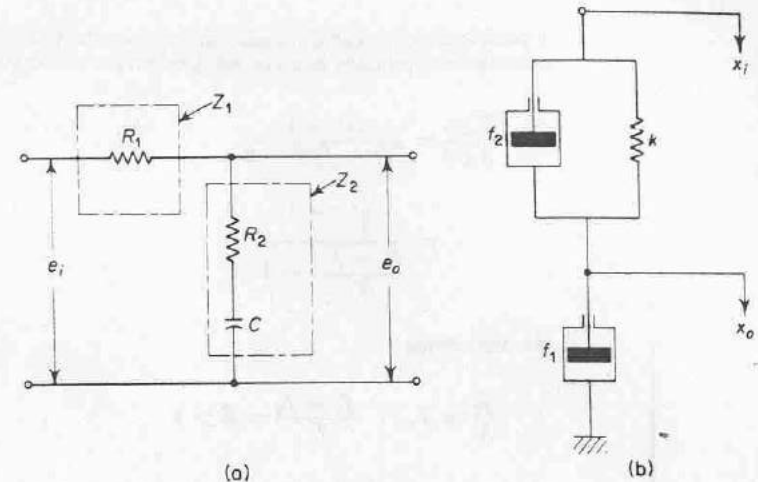


Fig. 10.19 (a) Rede elétrica de atraso; (b) rede mecânica de atraso.

senoidal, a tensão de saída e_o é senoidal porém atrasada em relação à entrada de um ângulo que é função da frequência da entrada senoidal. As impedâncias complexas Z_1 e Z_2 são

$$Z_1 = R_1, \quad Z_2 = R_2 + \frac{1}{Cs}$$

A função de transferência entre a tensão de saída $E_o(s)$ e a tensão de entrada $E_i(s)$ é dada por

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R_2Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1}$$

Definindo,

$$R_2C = T, \quad \frac{R_1 + R_2}{R_2} = \beta > 1$$

Então, a função de transferência resulta em

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \right)$$

A Fig. 10.19(b) mostra uma rede mecânica de atraso. Ela consiste em uma mola e dois amortecedores viscosos. A equação diferencial para esta rede mecânica é

$$f_1 \dot{x}_0 = k(x_i - x_0) + f_2(\dot{x}_i - \dot{x}_0)$$

Considerando as transformadas de Laplace de ambos os membros desta equação, admitindo condições iniciais nulas e, então, reescrevendo, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{X_0(s)}{X_f(s)} &= \frac{f_2 s + k}{(f_1 + f_2)s + k} \\ &= \frac{\frac{f_2}{k}s + 1}{\frac{f_1 + f_2}{k}s + 1}\end{aligned}$$

Se definirmos

$$\frac{f_2}{k} = T, \quad \frac{f_1 + f_2}{f_2} = \beta > 1$$

então, a função de transferência $X_0(s)/X_f(s)$ resulta em

$$\frac{X_0(s)}{X_f(s)} = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \right)$$

Características de rede de atraso. Uma rede de atraso possui a seguinte função de transferência:

$$\frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \right) \quad (\beta > 1)$$

No plano complexo, uma rede de atraso possui um pólo em $s = -1/(\beta T)$ e um zero em $s = -1/T$. (O pólo está localizado à direita do zero.)

A Fig. 10.20 mostra um gráfico polar típico de uma rede em atraso. A Fig. 10.21 mostra o diagrama de Bode de uma rede de atraso quando $\beta = 10$. As frequências de canto da rede de atraso são $\omega = 1/T$ e $\omega = 1/(\beta T)$. Como pode ser verificado na Fig. 10.21, a rede em atraso é essencialmente um filtro passa-baixas.

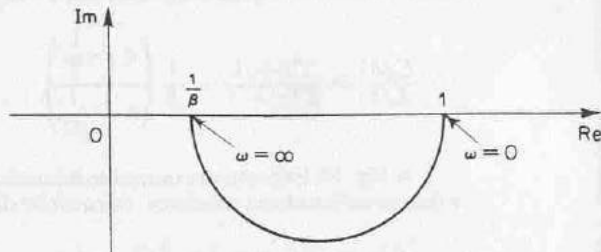


Fig. 10.20 Diagrama polar de uma rede em atraso.

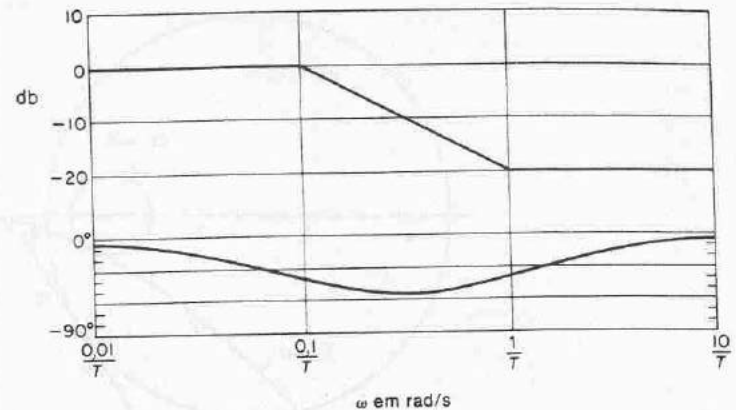


Fig. 10.21 Diagrama de Bode de uma rede em atraso $(j\omega T + 1)/(j\omega\beta T + 1)$ com $\beta = 10$.

Técnicas de compensação em atraso baseadas na abordagem do lugar das raízes. Considere o problema de determinar uma rede de compensação conveniente para o caso em que o sistema possui características de resposta transitória satisfatórias, porém características insatisfatórias em regime permanente. A compensação neste caso consiste essencialmente em aumentar o ganho em malha-aberta sem modificar apreciavelmente as características de resposta transitória. Isto significa que o lugar das raízes na vizinhança dos pólos de malha-fechada dominantes não deve ser modificado significativamente, porém o ganho de malha-aberta deve ser aumentado tanto quanto necessário. Este resultado pode ser conseguido se for colocado um compensador em atraso em cascata com a função de transferência do ramo direto fornecida.

Para evitar uma variação apreciável nos lugares das raízes, a contribuição angular da rede em atraso deve ser limitada a um pequeno valor, digamos 5° . Para assegurar esta hipótese, colocaremos o pólo e o zero da rede em atraso relativamente próximo entre si e próximos da origem do plano s . Então, os pólos de malha-fechada do sistema compensado serão deslocados apenas ligeiramente de suas posições originais. Consequentemente, as características de resposta transitória permanecerão essencialmente as mesmas.

Note que se colocarmos o pólo e o zero da rede em atraso muito próximos entre si, então $s_1 + (1/T)$ e $s_1 + (1/\beta T)$ serão quase iguais, onde s_1 é o pólo de malha-fechada. Portanto,

$$\left| \frac{1}{\beta} \left(\frac{s_1 + \frac{1}{T}}{s_1 + \frac{1}{\beta T}} \right) \right| \approx \frac{1}{\beta}$$

Isto implica que o ganho de malha-aberta pode ser aumentado aproximadamente por um fator de β sem alteração nas características de resposta transitória. Se o pólo e o zero forem colocados muito próximos à origem, o valor de β pode ser feito grande. Normalmente, $1 < \beta < 15$, e $\beta = 10$ é uma boa escolha.

Um aumento no ganho significa um aumento nos coeficientes de erro estático. Se a função de transferência de malha-aberta do sistema não compensado é $G(s)$, então o coeficiente de erro de velocidade estático K_v é

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

Se o compensador for escolhido como

$$G_c(s) = K_c \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = \frac{K_c}{\beta} \left(\frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \right) \quad (10.3)$$

então, para o sistema compensado com a função de transferência de malha-aberta $G_c(s)G(s)$, o coeficiente de erro de velocidade estático \hat{K}_v resulta em

$$\hat{K}_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)K_v = K_c K_v$$

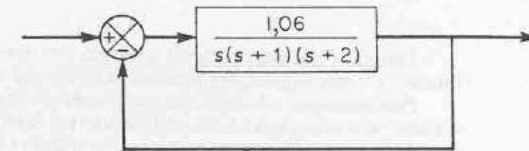
Portanto, se o compensador for dado pela Eq. (10.3), então o coeficiente de erro de velocidade estático é aumentado por um fator de K_c .

Os procedimentos para projeto de um compensador em atraso pelo método do lugar das raízes podem ser estabelecidos como segue: (Suporemos que o sistema não compensado satisfaz as especificações de resposta transitória através de um simples ajuste do ganho. Se este não for o caso, referir-se à Seção 10.5.)

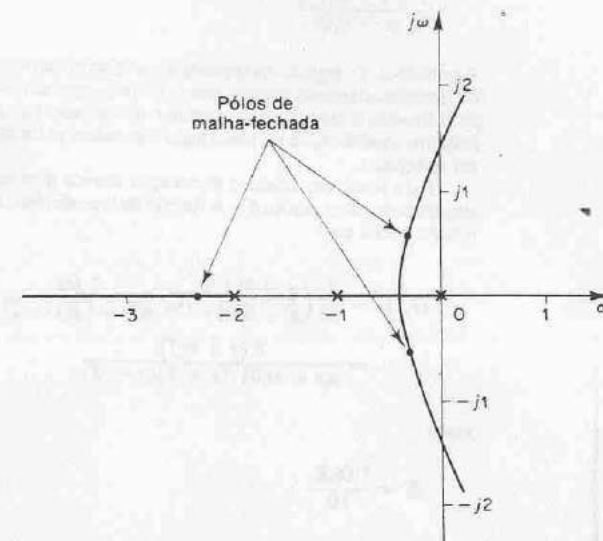
1. Desenhe o gráfico do lugar das raízes para o sistema não compensado. Com base nas especificações da resposta transitória, localize os pólos de malha-fechada dominantes sobre o lugar das raízes.
2. Determine o ganho de malha-aberta utilizando a condição do módulo.
3. Calcule o particular coeficiente de erro especificado no problema.
4. Determine a quantidade de aumento no coeficiente de erro necessária para satisfazer as especificações.
5. Determine o pólo e o zero da rede em atraso que produz o aumento necessário no coeficiente particular de erro sem alteração apreciável nos lugares das raízes originais.
6. Desenhe um novo gráfico do lugar das raízes para o sistema compensado. Localize os pólos de malha-fechada dominantes sobre o lugar das raízes. (Se a contribuição angular da rede em atraso for muito pequena, isto é, poucos graus, então os lugares das raízes original e modificado são praticamente idênticos. Haverá uma leve discrepância entre eles. Localize, então, sobre o novo lugar das raízes os pólos de malha-fechada dominantes desejados com base nas especificações de resposta transitória.)
7. Ajuste o ganho do amplificador por meio da condição do módulo para que os pólos de malha-fechada dominantes resultem nas posições desejadas.

Exemplo 10.3 Considere o sistema indicado na Fig. 10.22(a). A função de transferência do ramo direto é

$$G(s) = \frac{1,06}{s(s+1)(s+2)}$$



(a)



(b)

Fig. 10.22 (a) Sistema de controle; (b) gráfico do lugar das raízes.

O gráfico do lugar das raízes para o sistema é fornecido na Fig. 10.22(b). A função de transferência de malha-fechada resulta em

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{1,06}{s(s+1)(s+2) + 1,06} \\ &= \frac{1,06}{(s + 0,33 - j0,58)(s + 0,33 + j0,58)(s + 2,33)} \end{aligned}$$

Os pólos de malha-fechada dominantes são

$$s = -0,33 \pm j0,58$$

A relação de amortecimento dos pólos de malha-fechada dominantes é $\zeta = 0,5$. A frequência natural não amortecida dos pólos de malha-fechada dominantes é $0,67$ rad/s. O coeficiente de erro de velocidade estático é $0,53 \text{ s}^{-1}$.

Deseja-se aumentar o coeficiente de erro de velocidade estático K_v para aproximadamente 5 s^{-1} sem mudança apreciável na localização dos pólos de malha-fechada dominantes.

Para satisfazer esta especificação, vamos inserir um compensador em atraso, que consiste em uma rede em atraso e um amplificador, em cascata com a função de transferência do ramo direto fornecida. Para aumentar o coeficiente de erro de velocidade estático por um fator de aproximadamente 10, vamos colocar o pólo e o zero da rede em atraso em $s \approx -0.01$ e $s = -0.1$, respectivamente. A função de transferência da rede em atraso é então

$$\frac{1}{10} \left(\frac{s + 0.1}{s + 0.01} \right)$$

A contribuição angular desta rede em atraso próxima a um pólo de malha-fechada dominante é de aproximadamente alguns graus. (Isto é, aproximadamente o máximo que podemos permitir.) Devido à contribuição angular desta rede em atraso não ser muito pequena, há uma pequena modificação no novo lugar das raízes próximo aos pólos de malha-fechada dominantes desejados.

Para levar em conta a atenuação devida à rede em atraso, colocamos em cascata um amplificador com ganho K_c . A função de transferência do ramo direto do sistema compensado resulta então em

$$G_1(s) = \frac{1}{10} \left(\frac{s + 0.1}{s + 0.01} \right) (K_c) \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{K(s + 0.1)}{s(s + 0.01)(s + 1)(s + 2)}$$

onde

$$K = \frac{1.06 K_c}{10}$$

O diagrama de blocos do sistema compensado é indicado na Fig. 10.23(a). O gráfico do lugar das raízes para o sistema compensado próximo aos pólos de malha-fechada dominantes é indicado na Fig. 10.23(b), conjuntamente com o lugar das raízes original.

Se a relação de amortecimento dos novos pólos de malha-fechada dominantes for mantida a mesma, então os pólos são obtidos do novo gráfico do lugar das raízes como segue:

$$s_1 = -0.28 + j0.51,$$

$$s_2 = -0.28 - j0.51$$

O ganho de malha-aberta K é

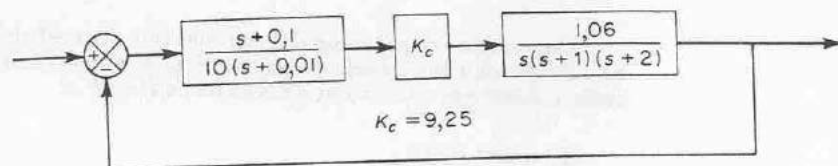
$$K = \left| \frac{s(s + 0.01)(s + 1)(s + 2)}{s + 0.1} \right|_{s = -0.28 + j0.51} = 0.98$$

Portanto, o ganho do amplificador K_c é

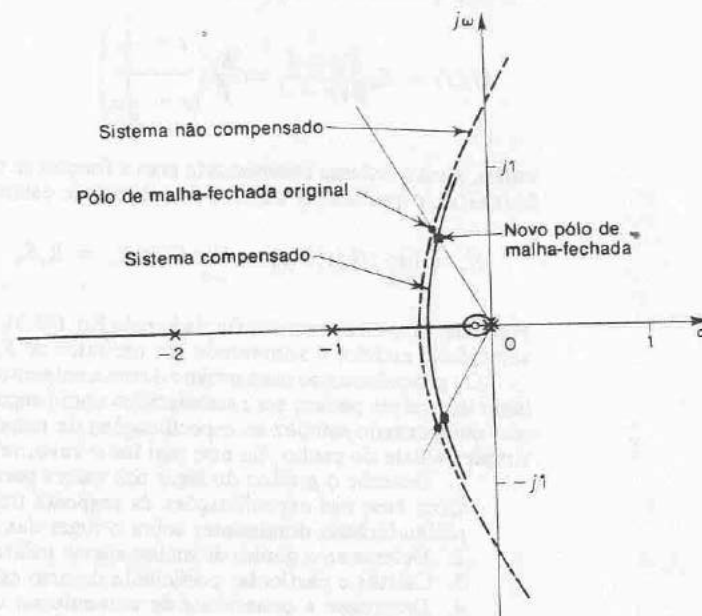
$$K_c = \frac{10}{1.06} K = 9.25$$

Então, o sistema compensado possui a seguinte função de transferência de malha-aberta:

$$G_1(s) = \frac{0.98(s + 0.1)}{s(s + 0.01)(s + 1)(s + 2)} = \frac{4.9(10s + 1)}{s(100s + 1)(s + 1)(s + 2)}$$



(a)



(b)

Fig. 10.23 (a) Sistema compensado; (b) gráficos dos lugares das raízes para o sistema compensado e para o sistema não compensado.

O coeficiente de erro de velocidade estático K_v é

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_1(s) = 4.9 \text{ s}^{-1}$$

No sistema compensado, o coeficiente de erro de velocidade estático foi aumentado para 4.9 s^{-1} , ou $4.9/0.53 = 9.25$ vezes o valor original. (O erro de regime estacionário com entradas em rampa foi diminuído de aproximadamente 11% daquele existente no sistema original.) Conseguimos essencialmente atingir o objetivo do projeto de aumentar o coeficiente de erro de velocidade estático para aproximadamente 5 s^{-1} . (Se desejarmos aumentar o coeficiente de erro de velocidade estático para exatamente 5 s^{-1} , ou podemos modificar as posições do pólo e do zero da rede em atraso ou podemos usar a rede em atraso presente e escolher $K_c = 9.44$. Neste último caso, entretanto, a relação de amortecimento dos pólos de malha-fechada dominante é menor do que 0.5. Neste problema, podemos considerar o projeto apresentado como bem aceitável.)

Os dois pólos de malha-fechada restantes do sistema compensado são determinados como segue:

$$s_3 = -2,31, \quad s_4 = -0,137$$

A inclusão da rede em atraso aumenta a ordem do sistema de três para quatro, acrescentando-se um pólo adicional próximo ao zero da rede em atraso. Como o pólo adicional em $s = -0,137$ está próximo ao zero em $s = -0,1$, o efeito deste pólo na resposta transitória é pequeno. Desde que o pólo em $s = -2,31$ está muito longe do eixo $j\omega$ comparado com os pólos de malha-fechada dominantes, o efeito deste pólo na resposta transitória também é pequeno. Podemos portanto ignorar, com pequeno erro, os pólos de malha-fechada s_3 e s_4 . Conclui-se que os dois pólos de malha-fechada s_1 e s_2 são verdadeiramente dominantes. Podemos prever uma resposta bastante precisa considerando-se apenas os pólos de malha-fechada dominantes.

A frequência natural não amortecida do sistema compensado é 0,6 rad/s. Este valor é aproximadamente 10% menor do que o valor original, 0,67 rad/s. Isto implica que a resposta transitória do sistema compensado é mais lenta do que a do sistema original. Resultará um maior tempo para acomodação. Se este fato puder ser tolerado, a compensação em atraso, conforme aqui discutida, apresenta uma solução satisfatória para o problema de projeto especificado.

Finalmente, note que os pontos de cruzamento dos lugares das raízes com o eixo $j\omega$ tanto do sistema original como do sistema compensado são aproximadamente os mesmos. Isto significa que o sistema compensado ainda é estável mesmo que o ganho de malha-aberta seja aumentado por um fator de aproximadamente 10 sobre o valor crítico original.

Técnicas de compensação em atraso baseadas na abordagem de resposta em frequência. A função principal de uma rede em atraso é fornecer atenuação na faixa de alta-frequência de modo a propiciar uma margem de fase suficiente ao sistema. A característica de atraso de fase não apresenta consequências na compensação em atraso.

Os procedimentos para projetar um compensador em atraso, através da abordagem de resposta em frequência, podem ser estabelecidos como segue: (Suporemos que o sistema possui realimentação unitária.)

1. Determine o ganho de malha-aberta tal que seja satisfeita a exigência do particular coeficiente de erro.
2. Usando o ganho determinado anteriormente, desenhe o diagrama de Bode do sistema não compensado e determine as margens de ganho e de fase deste sistema.
3. Se as especificações relativas às margens de fase e de ganho não estiverem satisfeitas, então, determine o ponto de frequência onde o ângulo de fase da função de transferência de malha-aberta é igual a -180° mais a margem de fase exigida. A margem de fase exigida é a margem de fase especificada mais 5° a 12° . (A adição de 5° a 12° compensa o atraso de fase da rede em atraso.) Escolha esta frequência como a nova frequência de cruzamento do ganho.
4. Escolha a frequência de canto $\omega = 1/T$ (correspondente ao zero da rede em atraso) uma oitava a uma década abaixo da nova frequência de cruzamento do ganho. (Se as constantes de tempo da rede em atraso não se tornarem demasiadamente grandes, a frequência de canto $\omega = 1/T$ pode ser escolhida uma década abaixo da nova frequência de cruzamento do ganho.)
5. Determine a atenuação necessária para fazer com que a curva de módulo seja tal que o módulo é 0 db para a nova frequência de cruzamento do ganho. Verificando que esta atenuação é $-20 \log \beta$, determine o valor de β . Então a outra frequência de canto (correspondente ao pólo da rede em atraso) é determinada a partir de $\omega = 1/(\beta T)$.

Exemplo 10.4 Considere o sistema indicado na Fig. 10.24. A função de transferência de malha-aberta é dada por

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0,5s+1)}$$

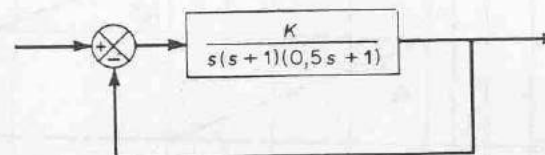


Fig. 10.24 Sistema de controle.

Deseja-se compensar o sistema de modo que o coeficiente de erro de velocidade K_v seja 5 s^{-1} , a margem de fase pelo menos ~~40~~ 10° , e a margem de ganho pelo menos 10 db.

O primeiro passo no projeto é ajustar o ganho K para satisfazer o coeficiente de erro de velocidade estático exigido. Portanto,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK}{s(s+1)(0,5s+1)} = K = 5$$

ou

$$K = 5$$

Com $K = 5$, o sistema da Fig. 10.24 satisfaz os requisitos de desempenho em regime estacionário.

Construiremos o novo gráfico do diagrama de Bode a partir de

$$G(j\omega) = \frac{5}{j\omega(j\omega+1)(0,5j\omega+1)}$$

A curva de módulo e a curva do ângulo de fase de $G(j\omega)$ são indicadas na Fig. 10.25. Deste gráfico, a margem de fase obtida é -20° , significando que o sistema é instável.

A compensação em avanço é ineficiente neste caso. Demonstraremos que o uso da compensação em atraso resultará na obtenção das especificações exigidas. Notando que a adição de uma rede em atraso modifica a curva de fase do diagrama de Bode, devemos permitir 5° a 12° para a margem de fase especificada, a fim de compensar a modificação na curva de fase. Desde que a frequência correspondente a uma margem de fase de 40° é 0,7 rad/s, a nova frequência de cruzamento do ganho (do sistema compensado) deve ser escolhida próximo a este valor. Para evitar constantes de tempo excessivas para a rede em atraso, escolheremos a frequência de canto $\omega = 1/T$ (que corresponde ao zero da rede em atraso) como 0,1 rad/s. Desde que esta frequência de canto não está muito longe abaixo da frequência de cruzamento do ganho, a modificação na curva de fase não deve ser pequena. Portanto, adicionamos aproximadamente 12° à margem de fase dada para levar em conta o ângulo de atraso introduzido pela rede em atraso. A margem de fase exigida é agora 52° . O ângulo de fase da função de transferência de malha-aberta do sistema não compensado é -128° em aproximadamente $\omega = 0,5 \text{ rad/s}$. Assim, escolhemos a nova frequência de cruzamento do ganho em 0,5 rad/s. Para que a curva de módulo passe por 0 db nesta nova frequência de cruzamento do ganho, a rede em atraso deve fornecer a atenuação necessária, que é, neste caso, -20 db .

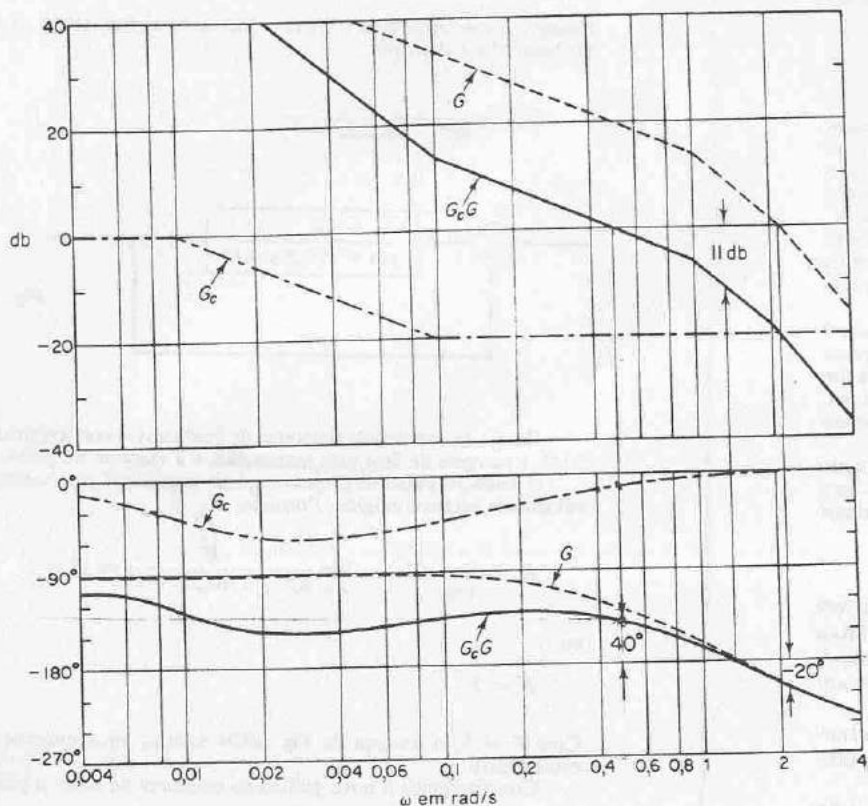


Fig. 10.25 Diagramas de Bode para o sistema não compensado, para o compensador e para o sistema compensado. (G : sistema não compensado, G_c : compensador, G_cG : sistema compensado.)

Portanto,

$$20 \log \frac{1}{\beta} = -20$$

ou

$$\beta = 10$$

A outra frequência de canto $\omega = 1(\beta T)$ (que corresponde ao pólo da rede em atraso) é então determinada como

$$\frac{1}{\beta T} = 0,01 \text{ rad/s}$$

Portanto, a função de transferência da rede em atraso necessária é dada por

$$\frac{1}{10} \frac{s + 0,1}{s + 0,01}$$

A função de transferência de malha-aberta do sistema compensado é

$$G_c(s)G(s) = \frac{5(10s + 1)}{s(100s + 1)(s + 1)(0,5s + 1)}$$

As curvas de módulo e de ângulo de fase de $G_c(j\omega)G(j\omega)$ também são indicadas na Fig. 10.25. Note que o efeito no atraso de fase da rede é desprezível em altas frequências.

A margem de fase do sistema compensado é aproximadamente 40° , que é o valor exigido. A margem de ganho é aproximadamente 11 db, que é bem aceitável. O coeficiente de erro de velocidade estático é 5 s^{-1} , conforme exigido. O sistema compensado, portanto, satisfaz as especificações tanto em relação ao regime estacionário como de estabilidade relativa.

Note que a nova frequência de cruzamento do ganho foi diminuída de 2,1 para 0,5 rad/s. Isto significa que a largura de faixa do sistema foi reduzida. Portanto, a velocidade da resposta transitória do sistema compensado será mais lenta do que aquela do sistema original.

Para mostrar os efeitos da compensação em atraso, os gráficos do log-módulo versus fase dos sistemas não compensado (com $K = 5$) e compensado são indicados na Fig. 10.26. O gráfico de $G(j\omega)$ mostra claramente que o sistema não compensado é instável. A adição da rede em atraso estabiliza o sistema. O gráfico de $G_c(j\omega)G(j\omega)$ é tangente ao lugar geométrico de $M = 3 \text{ db}$. Portanto, o valor do pico de ressonância M_r é 3 db, ou 1,4, e este pico ocorre em $\omega = 0,5 \text{ rad/s}$.

Comparando o sistema compensado aqui projetado com aquele projetado no Exemplo 10.3, notamos que são muito parecidos. Este resultado, entretanto, pode não ser necessariamente verdadeiro em outros casos. Compensadores projetados por métodos diferentes ou por

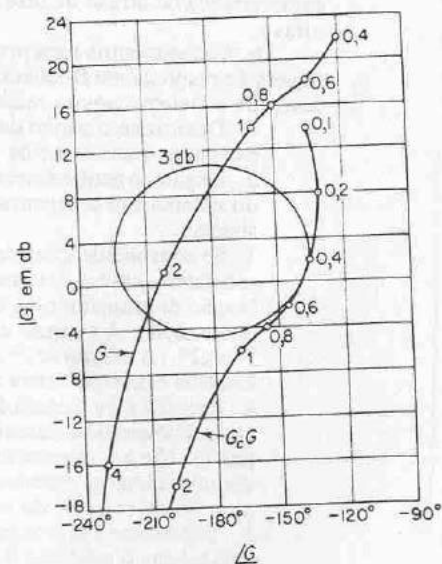


Fig. 10.26 Gráficos do log-módulo versus fase do sistema não compensado e do sistema compensado. (G : sistema não compensado, G_cG : sistema compensado.)

projetistas diferentes (ainda que utilizando a mesma abordagem) podem resultar significativamente diferentes. Qualquer sistema bem projetado, entretanto, resultará em especificações em regime estacionário e regime transitório similares. A melhor entre muitas alternativas pode ser escolhida a partir da consideração econômica de que as constantes de tempo da rede em atraso não devem ser muito grandes desde que os valores e dimensões dos resistores exigidos são relacionados diretamente com os valores das constantes de tempo.

Alguns poucos comentários sobre a compensação em atraso

1. As redes em atraso são essencialmente filtros passa-baixas. Portanto, a compensação em atraso permite um alto ganho em baixas frequências (o que melhora o erro em regime permanente) e reduz o ganho na faixa crítica de maiores frequências de modo a evitar a instabilidade do sistema. Note que na compensação em atraso, utilizamos a característica de atenuação da rede em atraso em altas frequências ao invés da característica de atraso de fase. (A característica de atraso de fase não é utilizado para fins de compensação.)
2. A atenuação devida à rede em atraso desloca a frequência de cruzamento do ganho para um ponto de frequência menor, onde a margem de fase é aceitável. Portanto, a rede em atraso reduz a largura de faixa do sistema resultando em uma resposta transitória mais lenta. [A curva do ângulo de fase de $G_c(j\omega)G(j\omega)$ é relativamente inalterada próximo e acima da nova frequência de cruzamento de ganho.]
3. Desde que um compensador em atraso tende a integrar o sinal de entrada, ele age aproximadamente como um controlador proporcional-mais-integral.

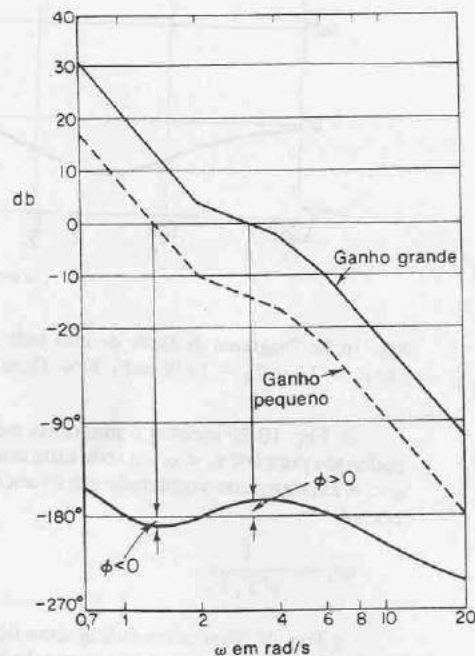


Fig. 10.27 Diagrama de Bode de um sistema condicionalmente estável.

Por esta razão, um sistema compensado em atraso tende a tornar-se menos estável. Para evitar esta característica indesejável, a constante de tempo T deve ser suficientemente maior do que a maior constante de tempo do sistema.

4. Pode ocorrer estabilidade condicional quando um sistema, possuindo saturação ou limitação, é compensado através de um compensador em atraso. Quando ocorrer a saturação ou limitação no sistema, o compensador reduz o ganho de malha efetivo. Então, o sistema torna-se menos estável, podendo resultar uma operação instável, como indicada na Fig. 10.27. Para evitar esta ocorrência, o sistema deve ser projetado de modo que o efeito da compensação em atraso se torne significativo somente quando a amplitude da entrada para o elemento saturante for pequena. (Isto pode ser feito por meio de uma compensação por laço de realimentação interna.)

10.5 COMPENSAÇÃO AVANÇO-ATRASSO

A compensação em avanço aumenta a largura de faixa, o que melhora a velocidade de resposta, e também reduz a sobrelevação. Entretanto, a melhora no desempenho de regime permanente é muito pequena. A compensação em atraso resulta em uma grande melhoria no desempenho de regime permanente porém resulta em uma resposta mais lenta, devido à largura de faixa reduzida.

Se forem desejadas melhorias tanto na resposta transitória como na resposta em regime estacionário (isto é, um aumento significativo no ganho e na largura de faixa), então devem ser utilizadas simultaneamente uma rede em avanço e uma rede em atraso. Ao invés de introduzir uma rede em avanço e uma rede em atraso como elementos separados, entretanto, é mais econômico utilizar uma única rede avanço-atraso. A rede avanço-atraso combina as vantagens das redes em avanço e em atraso.

A rede em avanço-atraso possui dois pólos e dois zeros. Portanto, esta compensação aumenta a ordem do sistema por duas unidades, a menos que ocorra cancelamento de um pólo e um zero no sistema compensado.

Redes avanço-atraso. A Fig. 10.28 mostra uma rede elétrica de avanço-atraso. Para uma entrada senoidal a saída é senoidal com uma defasagem que é função da frequência de entrada. Este ângulo de fase varia de atrasado para avançado conforme a frequência é aumentada desde zero a infinito. Note que o avanço e o atraso de fase ocorrem em diferentes faixas de frequência.

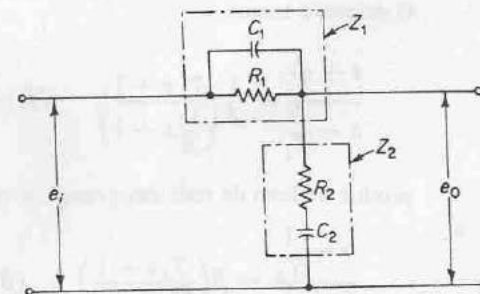


Fig. 10.28 Rede elétrica avanço-atraso.

Obteremos a seguir a função de transferência da rede avanço-atraso. As impedâncias complexas Z_1 e Z_2 são

$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1}, \quad Z_2 = R_2 + \frac{1}{C_2 s}$$

A função de transferência entre $E_o(s)$ e $E_i(s)$ é

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1) + R_1 C_2 s}$$

O denominador desta função de transferência pode ser fatorado em dois termos reais. Vamos definir

$$R_1 C_1 = T_1, \quad R_2 C_2 = T_2$$

$$R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2 = \frac{T_1}{\beta} + \beta T_2 \quad (\beta > 1)$$

Então, $E_o(s)/E_i(s)$ pode ser simplificada para

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta} s + 1\right)(\beta T_2 s + 1)} = \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

Características da rede avanço-atraso. Considere a função de transferência da rede avanço-atraso

$$\left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}}\right)\left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}}\right)$$

O primeiro termo

$$\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{T_1 s + 1}{\frac{T_1}{\beta} s + 1} \right) \quad (\beta > 1)$$

produz o efeito da rede em avanço, e o segundo termo

$$\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} = \beta \left(\frac{T_2 s + 1}{\beta T_2 s + 1} \right) \quad (\beta > 1)$$

produz o efeito da rede em atraso.

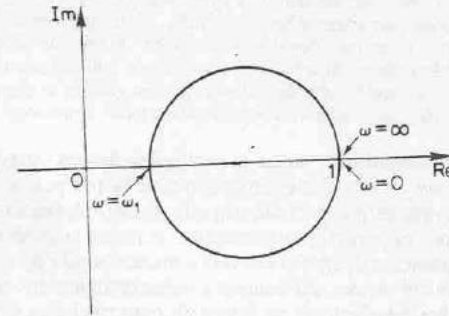


Fig. 10.29 Diagrama polar de uma rede avanço-atraso.

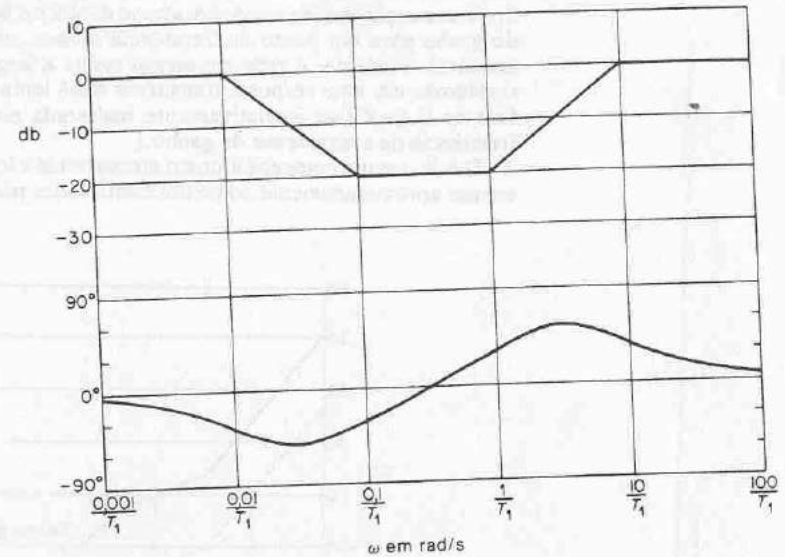


Fig. 10.30 Diagrama de Bode de uma rede avanço-atraso. $(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)/[(j\omega T_1/\beta) + 1](j\omega \beta T_2 + 1)$ com $\beta = 10$ e $T_2 = 10T_1$.

A Fig. 10.29 mostra o diagrama polar da rede avanço-atraso. Pode ser verificado que para $0 < \omega < \omega_1$, a rede atua como uma rede em atraso, enquanto para $\omega_1 < \omega < \infty$ ela atua como uma rede em avanço. A frequência ω_1 , na qual o ângulo de fase é zero é

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

A Fig. 10.30 mostra o diagrama de Bode de uma rede avanço-atraso quando $\beta = 10$ e $T_2 = 10T_1$. Note que a curva de módulo apresenta o valor 0 db nas regiões de baixa e de alta frequências, em virtude de a função de transferência da rede avanço-atraso como um todo não conter β como fator.

Técnicas de compensação de avanço-atraso baseadas na abordagem do lugar das raízes. Os procedimentos para projetar um compensador avanço-atraso podem ser estabelecidos como segue:

1. A partir das especificações de desempenho fornecidas, determine a localização desejada para os pólos de malha-fechada dominantes.
2. Para obter os pólos de malha-fechada dominantes nas posições desejadas, calcule a contribuição do ângulo ϕ necessária para a parte do avanço de fase da rede avanço-atraso.
3. Usando a seguinte função de transferência do compensador avanço-atraso:

$$G_c(s) = \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) K_c$$

determine a constante K_c a partir das exigências do coeficiente de erro particular especificado no problema de projeto.

4. Para o compensador avanço-atraso, escolha T_2 suficientemente grande de modo que

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right|$$

seja aproximadamente unitário, onde $s = s_1$ é um dos pólos de malha-fechada dominante. Determine os valores de T_1 e β das exigências que

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\beta}{T_1}} \right| |K_c G(s_1)| = 1$$

$$\left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right| = \phi$$

5. Usando o valor de β determinado anteriormente, escolha T_2 de modo que

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right| \approx 1 \quad 0 < \left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right| < 3^\circ$$

O valor de βT_2 , a maior constante de tempo da rede avanço-atraso, não deve ser demasiadamente grande para ser fisicamente realizável.

Exemplo 10.5 Considere o sistema de controle indicado na Fig. 10.31. A função de transferência do ramo direto é

$$G(s) = \frac{4}{s(s + 0,5)}$$

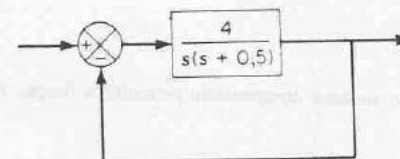


Fig. 10.31 Sistema de controle.

Este sistema possui pólos de malha-fechada em

$$s = -0,25 \pm j1,98$$

A relação de amortecimento é 0,125, a frequência natural não amortecida é 2 rad/s, e o coeficiente de erro de velocidade estático é 8 s⁻¹.

Deseja-se que a relação de amortecimento dos pólos de malha-fechada dominantes seja igual a 0,5 e também que aumente a frequência natural não amortecida para 5 rad/s e o coeficiente de erro de velocidade estático para 50 s⁻¹. Projete um compensador apropriado para satisfazer todas as especificações de desempenho.

A partir das especificações de desempenho, os pólos de malha-fechada dominantes devem ser

$$s = -2,50 \pm j4,33$$

Desde que,

$$\left| \frac{4}{s(s + 0,5)} \right|_{s = -2,50 + j4,33} = -235^\circ$$

a parte do avanço de fase da rede avanço-atraso deve contribuir com 55° de modo que o lugar das raízes passe através das posições desejadas dos pólos de malha-fechada dominantes.

O compensador avanço-atraso possui a função de transferência

$$G_c(s) = \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) K_c$$

Portanto o sistema compensado terá a função de transferência

$$G_c(s)G(s) = \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) K_c G(s)$$

Desta forma, o coeficiente de erro de velocidade estático resulta em

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s K_c G(s)$$

O requisito sobre o coeficiente de erro de velocidade estático é $K_v = 50 \text{ s}^{-1}$. Portanto,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s K_c G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s 4 K_c}{s(s + 0,5)} = 8 K_c = 50$$

Portanto, K_c resulta

$$K_c = 6,25$$

Conseqüentemente, o sistema compensado possuirá a função de transferência de malha-aberta

$$G_c(s) G(s) = \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) \frac{25}{s(s + 0,5)}$$

Desde que escolhemos T_2 suficientemente grande para

$$\left| \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right|_{s = -2,5 + j4,33} \doteq 1$$

se desejarmos que os pólos de malha-fechada estejam em $s = -2,5 \pm j4,33$, a condição do módulo resulta em

$$\left| G_c(s) G(s) \right|_{s = -2,5 + j4,33} = \left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right| \left| \frac{25}{s(s + 0,5)} \right|_{s = -2,5 + j4,33} = \left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right| \frac{5}{4,77} = 1$$

e a condição do ângulo resulta em

$$\left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right|_{s = -2,5 + j4,33} = 55^\circ$$

É relativamente fácil determinar graficamente os valores de T_1 e β que satisfazem estas condições de módulo e ângulo. Referindo-se à Fig. 10.32, podemos facilmente localizar os pontos A e B de modo que

$$\angle APB = 55^\circ, \quad \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{4,77}{5}$$

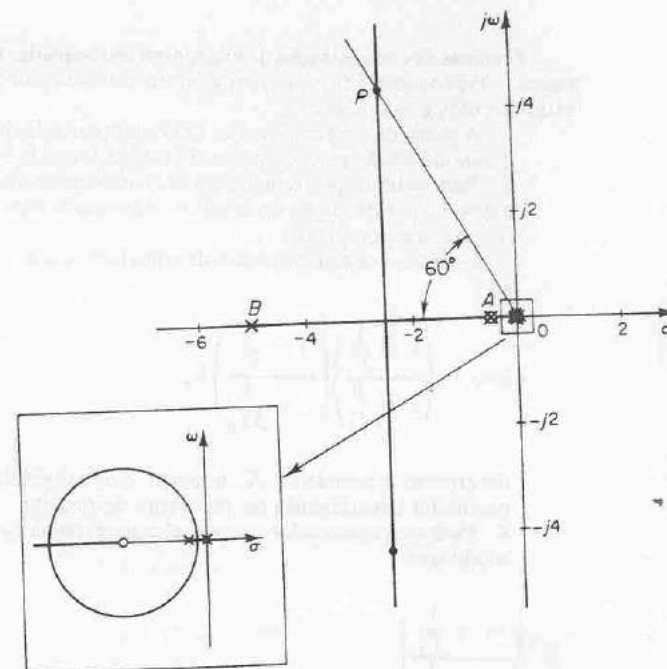


Fig. 10.32 Gráfico do lugar das raízes do sistema compensado.

Graficamente, a partir da Fig. 10.32, obtemos

$$\overline{AO} = 0,5, \quad \overline{BO} = 5$$

Então,

$$-\frac{1}{T_1} = -0,5, \quad -\frac{\beta}{T_1} = -5$$

Portanto,

$$T_1 = 2, \quad \beta = 10$$

Conseqüentemente, a parte do avanço de fase da rede avanço-atraso resulta em

$$\frac{s + 0,5}{s + 5}$$

Para a parte do atraso de fase da rede avanço-atraso, é exigido que

$$\left| \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{10T_2}} \right|_{s = -2,5 + j4,33} \doteq 1 \quad 0 < \left| \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{10T_2}} \right|_{s = -2,5 + j4,33} < 3^\circ$$

Para satisfazer estas relações e, ao mesmo tempo, assegurar que a maior constante de tempo ($10T_2$) da rede avanço-atraso não seja demasiadamente grande para ser fisicamente realizável, escolhemos

$$T_2 = 10$$

Então, a função de transferência do compensador avanço-atraso é

$$G_c(s) = \left(\frac{s+0,5}{s+5} \right) \left(\frac{s+0,1}{s+0,01} \right) \quad (6,25)$$

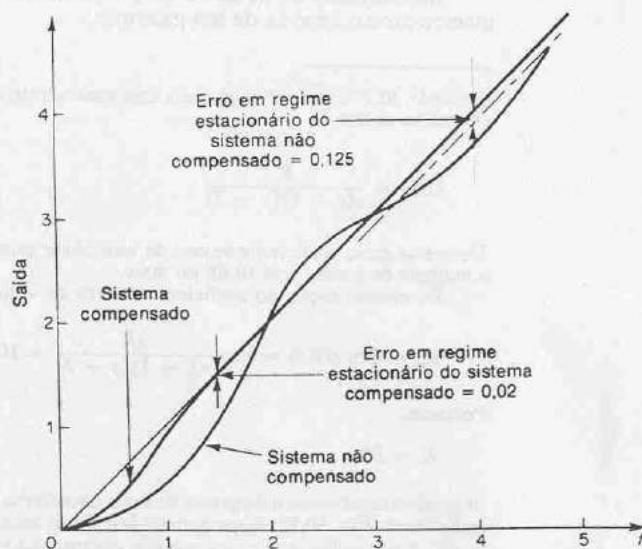


Fig. 10.33 Curvas de resposta transitória para o sistema não compensado e para o sistema compensado. (a) Curvas de resposta ao degrau unitário; (b) curvas de resposta à rampa unitária.

e o sistema compensado possuirá a função de transferência de malha-aberta

$$\begin{aligned} G_c(s)G(s) &= \frac{(s+0,5)(s+0,1)25}{(s+5)(s+0,01)s(s+0,5)} \\ &= \frac{25(s+0,1)}{s(s+5)(s+0,01)} \end{aligned}$$

Devido ao cancelamento dos termos $(s+0,5)$, o sistema compensado é um sistema de terceira-ordem. (Matematicamente este cancelamento é exato, porém, praticamente, este cancelamento não será exato em virtude de algumas aproximações estarem normalmente envolvidas na dedução do modelo matemático do sistema, e, como resultado, as constantes de tempo não são precisas.) O gráfico do lugar das raízes do sistema compensado é indicado na Fig. 10.32.

Como a contribuição angular da parte de atraso de fase da rede avanço-atraso é muito pequena, não há modificação apreciável na localização dos pólos de malha-fechada dominantes em relação à localização desejada, $s = -2,5 \pm j4,33$. Portanto, o sistema compensado satisfaz todas as especificações de desempenho exigidas. O terceiro pólo de malha-fechada do sistema compensado está localizado em $s = -0,102$. Desde que este pólo de malha-fechada está muito próximo ao zero em $s = -0,01$, o efeito deste pólo na resposta é relativamente pequeno. (Note que, em geral, se um pólo e um zero estão próximos um do outro sobre o eixo real negativo e próximos da origem, então esta combinação de pólo e zero resultará em uma duração longa e de pequena amplitude na resposta transitória.)

As curvas de resposta ao degrau unitário e as curvas de resposta à rampa unitária, antes e após a compensação, são indicadas na Fig. 10.33.

Exemplo 10.6 Considere o sistema de controle do Exemplo 10.5. Suponha que o coeficiente de erro de velocidade estático deve ser 80 s^{-1} . As outras especificações permanecem idênticas às fornecidas no Exemplo 10.5. Isto é, a relação de amortecimento e a frequência natural não amortecida dos pólos de malha-fechada dominantes são dadas como 0,5 e 5, respectivamente. Projete um compensador avanço-atraso apropriado.

O requisito em relação ao coeficiente de erro de velocidade estático é que $K_v = 80 \text{ s}^{-1}$. Este dado resulta em

$$K_c = 10$$

A constante de tempo T_1 e o valor de β são determinados a partir de

$$\left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right|_{s = -2,5 + j4,33} = \left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right|_{s = -2,5 + j4,33} \frac{5}{3} = 1$$

$$\left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right|_{s = -2,5 + j4,33} = 55^\circ$$

Referindo-se à Fig. 10.34, podemos facilmente localizar os pontos A e B de modo que

$$\angle APB = 55^\circ, \quad \frac{PA}{PB} = \frac{3}{5}$$

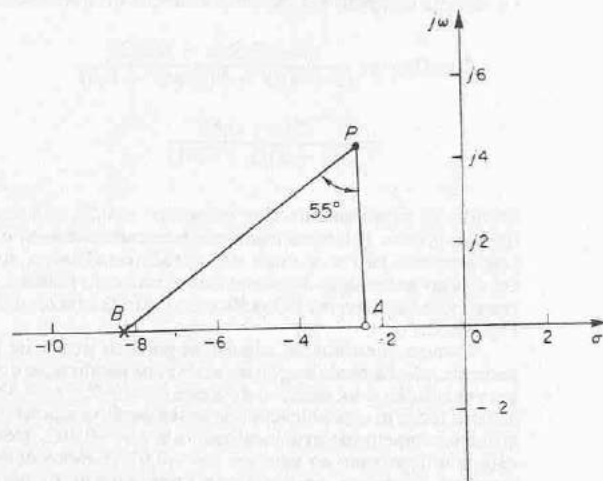


Fig. 10.34 Determinação da localização do pólo e do zero desejados.

O resultado é

$$\overline{AO} = 2,4, \quad \overline{BO} = 8,3$$

ou

$$T_1 = \frac{1}{2,4} = 0,416, \quad \beta = 8,3 T_1 = 3,45$$

A parte do avanço de fase da rede avanço-atraso resulta em

$$\frac{s + 2,4}{s + 8,3}$$

Para a parte de atraso de fase, podemos escolher

$$T_2 = 10$$

Portanto, o compensador avanço-atraso se torna

$$G_c(s) = \left(\frac{s + 2,4}{s + 8,3} \right) \left(\frac{s + 0,1}{s + 0,029} \right) (10)$$

O sistema compensado possuirá a função de transferência de malha-aberta

$$G_c(s)G(s) = \frac{(s + 2,4)(s + 0,1)40}{(s + 8,3)(s + 0,029)(s + 0,5)}$$

Neste caso não ocorre cancelamento, e o sistema compensado é de quarta-ordem. Devido à contribuição angular da parte do atraso de fase da rede avanço-atraso ser muito pequena, os

pólos de malha-fechada dominantes estão localizados muito próximos da localização desejada.

Os dois pólos de malha-fechada restantes são obtidos como

$$s = -0,09, \quad s = -3,74$$

Desde que o pólo de malha-fechada em $s = -0,09$ e o zero em $s = -0,1$ praticamente se cancelam, o efeito deste pólo de malha-fechada é muito pequeno. O pólo de malha-fechada restante ($s = -3,74$) está relativamente próximo do zero em $s = -2,4$, e o efeito deste pólo de malha-fechada na resposta transitória novamente será relativamente pequeno. Os pólos em $s = -2,5 \pm j4,33$ resultam como pólos de malha-fechada dominantes.

Compensação em avanço-atraso baseada na abordagem da resposta em frequência. O projeto de um compensador avanço-atraso pela abordagem da resposta em frequência é baseado na combinação das técnicas de projeto discutidas para a combinação em avanço e para a combinação em atraso. O valor de α para a rede em avanço deve ser igual ao inverso do valor de β para a rede em atraso. Se α é escolhido como $1/\beta$, então podemos simplesmente combinar os compensadores em avanço e em atraso projetados separadamente a fim de obtermos o compensador avanço-atraso único.

A parte do avanço de fase da rede avanço-atraso altera a curva de resposta em frequência adicionando o ângulo de fase em avanço e aumentando a margem de fase na frequência de cruzamento do ganho.

A parte do atraso de fase da rede em avanço-atraso acarreta atenuação, próximo e acima da frequência de cruzamento do ganho, e permite ainda o aumento de ganho na faixa de baixas frequências a fim de melhorar o desempenho em regime estacionário.

Ilustraremos os detalhes do procedimento projetando um compensador em avanço-atraso através de um exemplo.

Exemplo 10.7 Considere o sistema com realimentação unitária cuja função de transferência em malha-aberta é

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 2)}$$

Deseja-se que o coeficiente de erro de velocidade estático seja 10 s^{-1} , a margem de fase 50° , a margem de ganho seja 10 db ou mais.

Da especificação do coeficiente de erro de velocidade estático, obtemos

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK}{s(s + 1)(s + 2)} = 10$$

Portanto,

$$K = 20$$

A seguir desenhamos o diagrama de Bode do sistema não compensado com $K = 20$, conforme indicado na Fig. 10.35. A margem de fase do sistema não compensado é determinada, sendo -32° , o que indica que o sistema não compensado é instável.

O próximo passo no projeto de um compensador avanço-atraso é escolher uma nova frequência de cruzamento do ganho. Da curva de ângulo de fase para $G(j\omega)$, note que $\angle G(j\omega) = -180^\circ$ em $\omega = 1,5 \text{ rad/s}$. É conveniente escolher a nova frequência de cruzamento de ganho em $1,5 \text{ rad/s}$, de modo que o ângulo de avanço de fase exigido em $\omega = 1,5 \text{ rad/s}$ é aproximadamente 50° , o que é bem possível pelo uso de uma rede em avanço-atraso única.

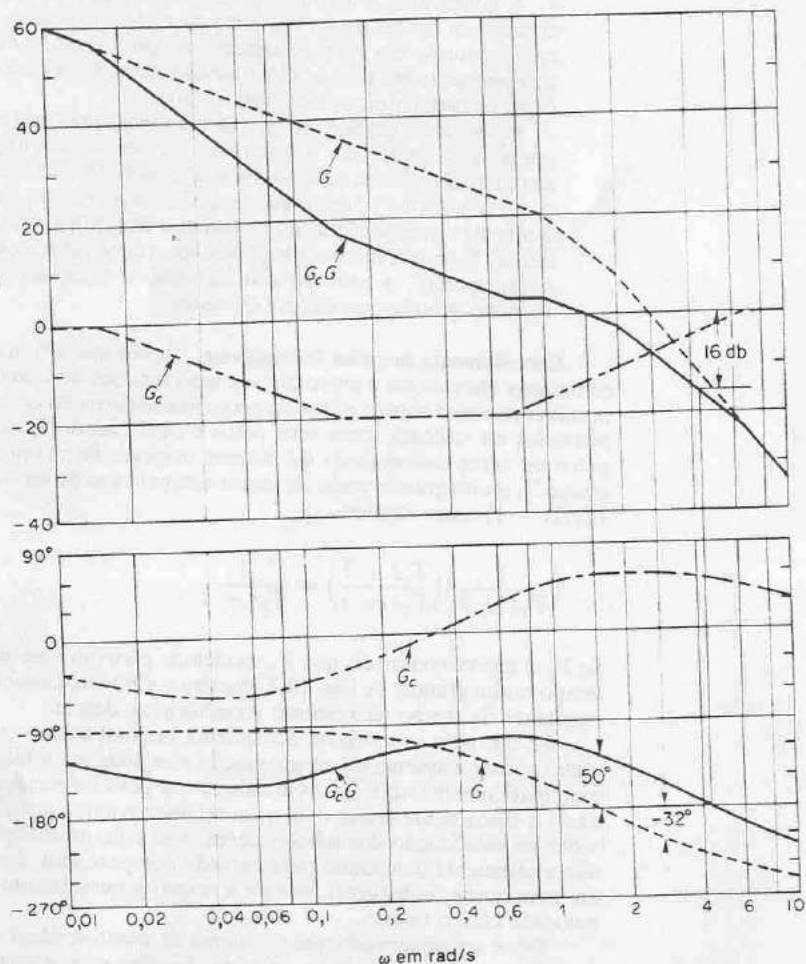


Fig. 10.35 Diagrama de Bode para o sistema não compensado, para o compensador e para o sistema compensado. (G : sistema não compensado, G_c : compensador, $G_c G$: sistema compensado.)

Uma vez escolhida a frequência de cruzamento do ganho em 1,5 rad/s, podemos determinar a frequência de canto da parte de atraso de fase da rede avanço-atraso. Vamos escolher a frequência de canto $\omega = 1/T_2$ (que corresponde ao zero da parte em atraso de fase da rede) como sendo uma década abaixo da nova frequência de cruzamento do ganho, ou em $\omega = 0,15$ rad/s. Vamos escolher ainda

$$\beta = 10$$

Então, a frequência de canto $\omega = 1/\beta T_2$ (que corresponde ao pólo da parte em atraso de fase da rede) resulta $\omega = 0,015$ rad/s. A função de transferência da parte em atraso de fase da rede

avanço-atraso, então, resulta em

$$\frac{s + 0,15}{s + 0,015} = 10 \left(\frac{6,67s + 1}{66,7s + 1} \right)$$

A parte de avanço de fase pode ser determinada como segue: Desde que a nova frequência de cruzamento do ganho está em $\omega = 1,5$ rad/s, a partir da Fig. 10.35, $G(j1,5)$ é determinado em 13 db. Portanto, se a rede avanço-atraso contribuir com -13 db em $\omega = 1,5$ rad/s, então a nova frequência de cruzamento do ganho é a desejada. Desta especificação, é possível desenhar uma reta com inclinação de 20 db/década passando pelo ponto (-13 db; 1,5 rad/s). As intersecções desta reta e as retas de 0-db e -20 db determinam as frequências de canto. Portanto, as frequências de canto para a parte em avanço são $\omega = 0,7$ rad/s e $\omega = 7$ rad/s. Consequentemente, a função de transferência da parte em avanço da rede avanço-atraso resulta em

$$\frac{s + 0,7}{s + 7} = \frac{1}{10} \left(\frac{1,43s + 1}{0,143s + 1} \right)$$

Combinando as funções de transferência das partes em atraso e em avanço da rede, obtemos a função de transferência do compensador avanço-atraso:

$$\left(\frac{s + 0,7}{s + 7} \right) \left(\frac{s + 0,15}{s + 0,015} \right) = \left(\frac{1,43s + 1}{0,143s + 1} \right) \left(\frac{6,67s + 1}{66,7s + 1} \right)$$

As curvas de módulo e ângulo de fase do compensador avanço-atraso que acabamos de projetar são indicadas na Fig. 10.35. A função de transferência em malha-aberta do sistema compensado é

$$G_c(s)G(s) = \frac{(s + 0,7)(s + 0,15)20}{(s + 7)(s + 0,015)s(s - 1)(s + 2)} = \frac{10(1,43s + 1)(6,67s + 1)}{s(0,143s + 1)(66,7s + 1)(s + 1)(0,5s + 1)} \quad (10.4)$$

As curvas de módulo e ângulo de fase do sistema da Eq. (10.4) também são mostradas na Fig. 10.35. A margem de fase do sistema compensado é 50°, a margem de ganho 16 db, e o coeficiente de erro de velocidade estático é 10 s^{-1} . Todos os requisitos foram, portanto, satisfeitos e o projeto completado.

A Fig. 10.36 mostra os gráficos polares do sistema não compensado e do sistema compensado. O lugar geométrico de $G_c(j\omega)G(j\omega)$ é tangente ao círculo $M = 1,2$ em aproximadamente $\omega = 2$ rad/s. Obviamente, isto indica que o sistema compensado possui uma estabilidade relativa satisfatória. A largura de faixa do sistema compensado é ligeiramente maior do que 2 rad/s.

10.6 SUMÁRIO DOS MÉTODOS DE COMPENSAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLE

Nas Seções 10.3 até 10.5 apresentamos os procedimentos para projeto de compensadores em avanço, em atraso e em avanço-atraso através do uso de exemplos simples. Um projeto satisfatório de um compensador para um dado sistema exigirá a aplicação criativa destes princípios de projeto básicos. (Lembre-se que há uma riqueza de informações na literatura sobre projetos de sistemas de controle complexos, e o leitor deve referir-se a ela para quaisquer problemas específicos que encontrar.)

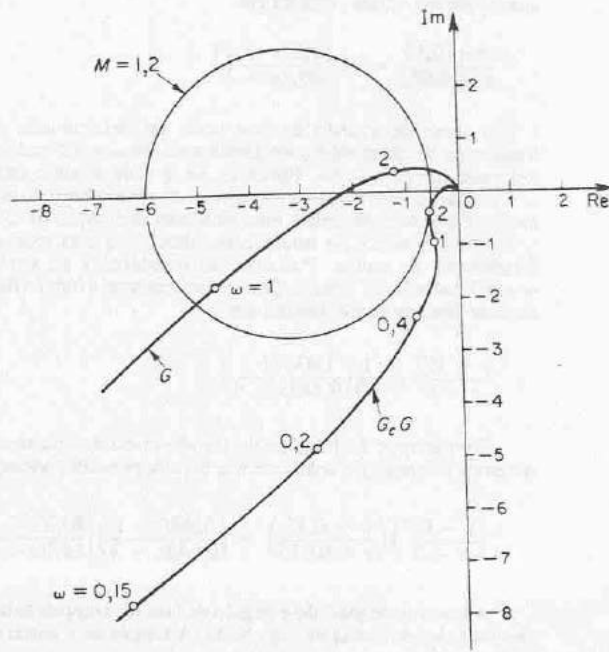


Fig. 10.36 Diagramas polares do sistema não compensado e do sistema compensado. (G : sistema não compensado, $G_c G$: sistema compensado.)

Comparação das compensações em avanço, em atraso, e em avanço-atraso

1. A compensação em avanço atinge o resultado desejado através dos méritos de sua contribuição em avanço de fase; enquanto que a compensação em atraso atinge o resultado através dos méritos da sua propriedade de atenuação em altas frequências.
2. No domínio s a compensação em avanço nos possibilita modificar o lugar das raízes e, portanto, propicia os pólos de malha-fechada desejados. No domínio de frequência, a compensação em avanço aumenta a margem de fase e a largura de faixa. Uma largura de faixa aumentada significa uma redução no tempo de acomodação. A largura de faixa de um sistema com compensação em avanço é sempre maior do que um outro com compensação em atraso. Portanto, se for desejada uma maior largura de faixa, ou resposta mais rápida, deve ser empregada a compensação em avanço. Se, entretanto, estiverem presentes sinais de ruído, então pode não ser desejável uma grande largura de faixa desde que torna o sistema mais susceptível a sinais de ruído, devido ao aumento do ganho em altas frequências. Neste caso, deve ser usada a compensação em atraso.
3. A compensação em atraso melhora a precisão em regime estacionário; entretanto, reduz a largura de faixa. Se a redução da largura de faixa for excessiva, o sistema compensado apresentará uma resposta lenta. Se forem desejadas tanto resposta rápida como boa precisão estática, deve ser empregado um compensador avanço-atraso.

4. A compensação em avanço exige um aumento adicional no ganho para compensar a atenuação inerente da rede em avanço. Isto significa que a compensação em avanço requer um ganho maior do que o exigido pela compensação em atraso. (Um ganho maior, em muitos casos, implica maior espaço, maior peso e mais alto custo.)
5. Embora um grande número de compensações práticas possam ser conseguidas com redes em avanço, em atraso, ou em avanço-atraso, para um sistema complicado uma compensação simples, através do uso destas redes, pode não fornecer resultados satisfatórios. Então, devem ser empregados diferentes compensadores possuindo diferentes configurações de pólos e zeros. Note que uma vez especificada a configuração de pólos e zeros de um compensador, a rede passiva necessária pode ser realizada pelo uso de técnicas padrões de síntese de redes.

Cancelamento de pólos indesejáveis. Desde que a função de transferência de elementos em cascata é o produto de suas funções de transferência individuais, é possível cancelar alguns pólos ou zeros indesejáveis colocando um elemento compensador em cascata, com seus pólos e zeros sendo ajustados para cancelar os pólos ou zeros indesejáveis do sistema original. Por exemplo, uma constante de tempo T_1 muito grande pode ser cancelada pelo uso de uma rede em avanço $(T_1 s + 1)/(T_2 s + 1)$ como segue:

$$\left(\frac{1}{T_1 s + 1} \right) \left(\frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} \right) = \frac{1}{T_2 s + 1}$$

Se T_2 é muito menor do que T_1 , podemos efetivamente eliminar a constante de tempo muito grande. A Fig. 10.37 mostra o efeito do cancelamento de uma grande constante de tempo na resposta transitória ao degrau.

Se um pólo indesejável do sistema original estiver no semiplano direito do plano s , este esquema de compensação não pode ser utilizado desde que, embora matematicamente seja possível cancelar o pólo indesejável com um zero adicionado, é fisicamente impossível o cancelamento exato devido às imprecisões envolvidas na localização dos pólos e zeros. Um pólo no semiplano direito do plano s , não exatamente cancelado pelo zero do compensador, eventualmente redundará em uma operação instável, porque a resposta possuirá um termo exponencial que aumenta com o tempo.

Deve ser observado que o sistema de controle ideal não é aquele que possui uma função de transferência unitária. Fisicamente, este sistema de controle não pode ser construído, já que não se pode transferir energia instantaneamente da entrada para a saída. Além disso, desde que ruído está sempre presente de uma forma ou de outra, um sistema com uma função de transferência unitária não é desejável. Um sistema de controle desejado, em muitos casos práticos, pode

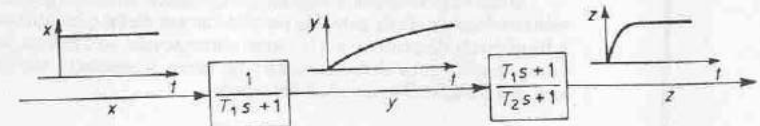


Fig. 10.37 Curvas de resposta ao degrau mostrando o efeito do cancelamento de uma constante de tempo grande.

possuir um conjunto de pólos conjugados dominantes de malha-fechada com uma relação de amortecimento e uma frequência natural não amortecida razoáveis. A determinação da parte significativa da configuração de pólos e zeros de malha-fechada, tal como a localização dos pólos de malha-fechada dominantes, é baseada nas especificações que fornecem o desempenho desejado do sistema.

Cancelamento de pólos complexos conjugados indesejáveis. Se a função de transferência de um processo contém um ou mais pares de pólos complexos conjugados, então um compensador em avanço, atraso ou avanço-atraso pode não fornecer resultados satisfatórios. Neste caso, uma rede que possui dois zeros e dois pólos pode ser útil. Se os zeros forem escolhidos de modo a cancelar os pólos complexos conjugados indesejáveis do processo, podemos, essencialmente, substituir os pólos indesejáveis por aqueles aceitáveis. Isto é, se os pólos complexos conjugados indesejáveis estiverem no semiplano esquerdo do plano s e possuírem a forma

$$\frac{1}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2}$$

então a inserção de uma rede compensadora possuindo a função de transferência

$$\frac{s^2 + 2\zeta_2\omega_2s + \omega_2^2}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2}$$

resultará em uma mudança efetiva dos pólos complexos conjugados para aqueles aceitáveis. Note que mesmo que o cancelamento não seja exato, o sistema compensado possuirá melhores características de resposta. (Conforme estabelecido anteriormente, esta abordagem não pode ser utilizada se os pólos complexos conjugados indesejáveis estiverem no semiplano direito do plano s .)

Redes familiares que consistem apenas em componentes RC cujas funções de transferência possuem dois zeros e dois pólos são as redes em ponte tipo T . Exemplos de redes em ponte tipo T , e suas funções de transferências, são fornecidos na Fig. 10.38.

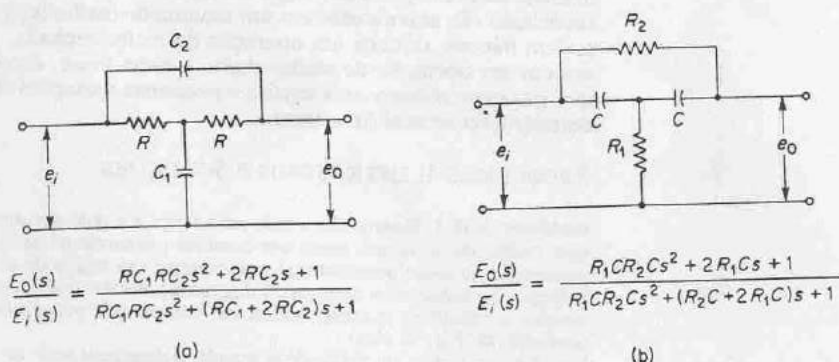


Fig. 10.38 Redes em ponte tipo T .

Compensação por realimentação. A realimentação tacométrica é muito comumente utilizada em servomecanismos de posição. Na Seção 6.4 discutimos um problema de projeto simples utilizando a realimentação tacométrica. Portanto, não o repetiremos aqui.

Um tacômetro é um dos dispositivos denominados dispositivos de realimentação por taxa. Um outro dispositivo de realimentação por taxa muito comum é a taxa de rotação. Dispositivos de taxa de rotação são comumente utilizados em sistemas de aeronaves com piloto automático.

Eliminação de efeitos indesejáveis de distúrbios por controle no ramo direto. Se os distúrbios forem mensuráveis, o controle no ramo direto é um método útil de cancelamento de seus efeitos na saída do sistema. Por controle no ramo direto, designamos o controle de efeitos indesejáveis de distúrbios mensuráveis através de compensação aproximada dos mesmos antes que eles se materializem. Isto é vantajoso porque em um sistema de controle com realimentação usual, a ação corretiva somente se inicia após a saída haver sido afetada.

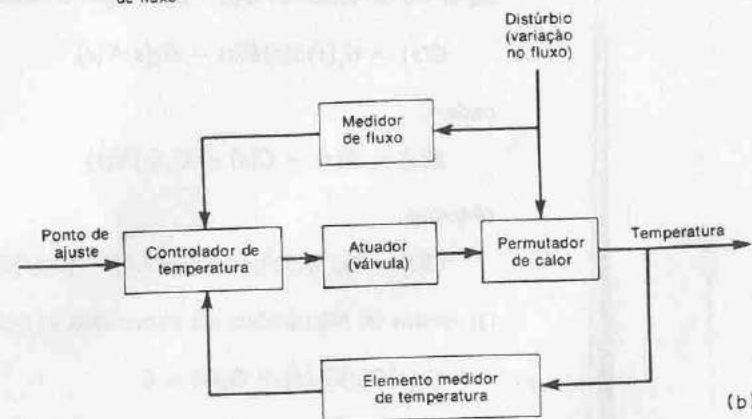
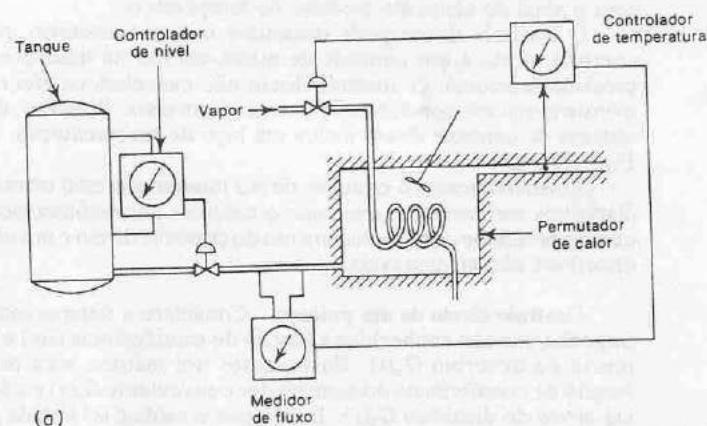


Fig. 10.39 (a) Sistema de controle de temperatura; (b) diagrama de blocos.

Como um exemplo, considere o sistema de controle de temperatura indicado na Fig. 10.39(a). Neste sistema, deseja-se manter a temperatura de saída em um valor constante. O distúrbio neste sistema é uma variação na taxa de fluxo de entrada, que depende do nível no tanque. O efeito de uma variação nesta taxa não pode ser sentido imediatamente na saída devido ao atraso de tempo envolvido no sistema.

O controlador de temperatura, que controla a entrada de calor para o permutador térmico, não atuará até perceber o erro. Se o sistema possui grandes tempos de atraso, transcorrerá um certo intervalo de tempo antes de haver qualquer ação corretiva. De fato, quando o erro for percebido após um certo atraso e a ação corretiva começar, pode ser muito tarde para manter a temperatura de saída dentro dos limites desejados.

Se for utilizado o controle direto neste sistema, então, logo que ocorrer uma variação no fluxo de entrada, haverá simultaneamente uma medida corretiva, ajustando a entrada de calor através do permutador de calor. Isto pode ser realizado alimentando-se o controlador de temperatura tanto com o sinal do fluxímetro como com o sinal do elemento medidor de temperatura.

O controle direto pode minimizar o erro transitório, porém, desde que o controle direto é um controle de malha-aberta, há limitações em relação à sua precisão funcional. O controle direto não cancelará os efeitos de distúrbios não mensuráveis sob condições de operação normais. Portanto, é necessário que um sistema de controle direto inclua um laço de realimentação, como mostrado nas Figs. 10.39(a) e (b).

Essencialmente, o controle direto minimiza o erro transitório causado pelos distúrbios mensuráveis, enquanto o controle por realimentação compensa quaisquer imperfeições no funcionamento do controle direto e possibilita correções para distúrbios não mensuráveis.

Controle direto de um processo. Considere o sistema indicado na Fig. 10.40. Suponha que são conhecidas a função de transferência $G(s)$ e a função de transferência do distúrbio $G_n(s)$. Ilustraremos um método para determinação de uma função de transferência do controlador conveniente $G_c(s)$ e a função de transferência direta do distúrbio $G_1(s)$. Desde que a saída $C(s)$ é dada por

$$C(s) = G_c(s)G(s)E(s) + G_n(s)N(s)$$

onde

$$E(s) = R(s) - C(s) + G_1(s)N(s)$$

obtemos

$$C(s) = G_c(s)G(s)[R(s) - C(s)] + [G_c(s)G(s)G_1(s) + G_n(s)]N(s)$$

Os efeitos de $N(s)$ podem ser eliminados se $G_c(s)$ é escolhida de modo que

$$G_c(s)G(s)G_1(s) + G_n(s) = 0$$

ou

$$G_1(s) = -\frac{G_n(s)}{G_c(s)G(s)} \quad (10.5)$$

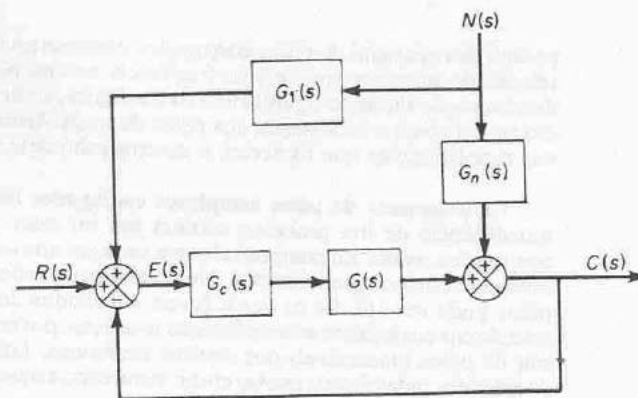


Fig. 10.40 Sistema de controle.

Projetando apropriadamente a função de transferência do controlador $G_c(s)$ (conforme discutido nas Seções 10.3 até 10.5), o sistema de controle de malha-fechada pode apresentar o desempenho desejado. Uma vez determinada $G_c(s)$, então a função de transferência direta do distúrbio $G_1(s)$ pode ser obtida da Eq. (10.5).

Comentários conclusivos. Nos exemplos de projeto apresentados neste capítulo, consideramos principalmente e apenas as funções de transferência de compensadores. Nos problemas de projeto reais, devemos determinar os componentes. Portanto, devemos satisfazer limitações de projeto adicionais tais como custo, dimensão, peso e confiabilidade.

O sistema projetado pode satisfazer as especificações sob condições de operação normais, porém pode desviar-se consideravelmente das especificações quando ocorrerem variações ambientais consideráveis. Desde que as variações ambientais afetam o ganho e as constantes de tempo do sistema, é necessário propiciar meios automáticos ou manuais para ajustar o ganho a fim de compensar estas variações ambientais, os efeitos não lineares que não foram levados em consideração no projeto, e também para compensar tolerâncias de fabricação de unidade para unidade na produção dos componentes do sistema. (Os efeitos das tolerâncias de fabricação são amenizados em um sistema de malha-fechada; portanto, os efeitos podem não ser críticos em operação de malha-fechada, porém podem tornar-se críticos em operação de malha-aberta.) Além disso, o projetista deve lembrar-se que qualquer sistema está sujeito a pequenas variações devidas principalmente à deterioração normal do sistema.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS E SOLUÇÕES

Problema A.10.1 Mostre que a rede em avanço e a rede em atraso inseridas em cascata em uma malha-aberta atuam como um controle proporcional-mais-derivativo (na região de ω pequeno) e controle proporcional-mais-integral (na região de ω grande), respectivamente. **Solução.** Na região de ω pequeno, o diagrama polar da rede em avanço é aproximadamente o mesmo do diagrama correspondente ao controlador proporcional-mais-derivativo. Isto é mostrado na Fig. 10.41(a).

Analogamente, na região de ω grande, o diagrama polar da rede em atraso se aproxima daquele do controlador proporcional-mais-integral, conforme indicado na Fig. 10.41(b).

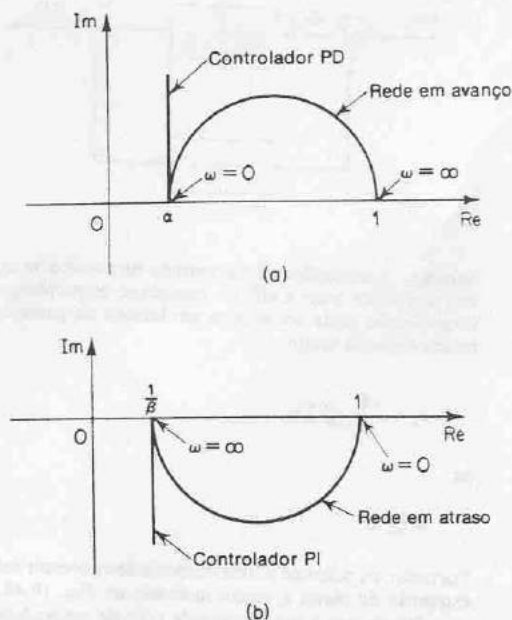


Fig. 10.41 (a) Diagramas polares de uma rede em avanço e de um controlador proporcional-mais-derivativo; (b) diagramas polares de uma rede em atraso e um controlador proporcional-mais-integral.

Problema A.10.2 Se a função de transferência de malha-aberta $G(s)$ possui pólos complexos conjugados ligeiramente amortecidos, então, mais do que um lugar geométrico M pode ser tangente ao lugar geométrico de $G(j\omega)$.

Considere o sistema com realimentação unitária cuja função de transferência de malha-aberta é

$$G(s) = \frac{9}{s(s + 0,5)(s^2 + 0,6s + 10)} \quad (10.6)$$

Desenhe os diagramas de Bode para esta função de transferência de malha-aberta. Desenhe também o gráfico log-módulo versus fase e mostre que dois lugares geométricos M são tangentes ao lugar geométrico de $G(j\omega)$. Finalmente, desenhe o gráfico dos diagramas de Bode para a função de transferência de malha-fechada.

Solução. A Fig. 10.42 mostra os diagramas de Bode de $G(j\omega)$. A Fig. 10.43 mostra o gráfico do log-módulo versus fase de $G(j\omega)$. Pode ser visto que o lugar geométrico de $G(j\omega)$ é tangente ao lugar geométrico de $M = 8$ db em $\omega = 0,97$ rad/s e tangente ao lugar geométrico de $M = -4$ db em $\omega = 2,8$ rad/s.

A Fig. 10.44 mostra o diagrama de Bode da função de transferência de malha-fechada. As curvas de resposta em frequência de malha-fechada indicam dois picos de ressonância. Note que este fato ocorre quando a função de transferência de malha-fechada envolve o produto de dois termos de segunda-ordem ligeiramente amortecidos e as duas frequências de ressonância

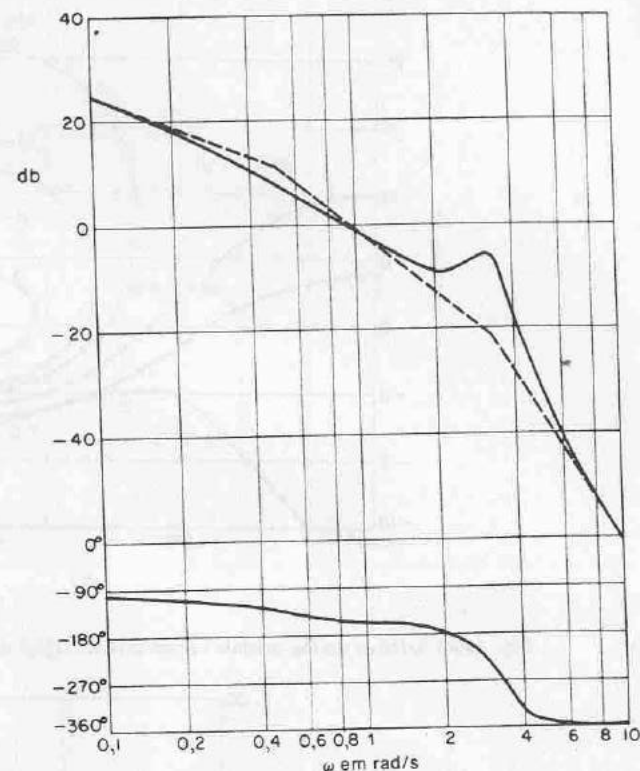


Fig. 10.42 Diagrama de Bode de $G(j\omega)$ dado pela Eq. (10.6).

correspondentes estão suficientemente separadas uma da outra. De fato, a função de transferência de malha-fechada deste sistema pode ser escrita

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1 + G(s)} \\ &= \frac{9}{(s^2 + 0,487s + 1)(s^2 + 0,613s + 9)} \end{aligned}$$

Obviamente, a função de transferência de malha-fechada é um produto de dois termos de segunda-ordem ligeiramente amortecidos (as relações de amortecimento são 0,24 e 0,1) e as duas frequências de ressonância estão suficientemente separadas.

Problema A.10.3 Considere o sistema mostrado na Fig. 10.45. Determine os valores do ganho K do amplificador e do ganho K_h da realimentação de velocidade de modo a serem satisfeitas as seguintes especificações:

1. relação de amortecimento dos pólos de malha-fechada é 0,5.
2. tempo de acomodação ≤ 2 s.
3. coeficiente de erro de velocidade $K_v \geq 50$ s⁻¹.
4. $0 < K_h < 1$.

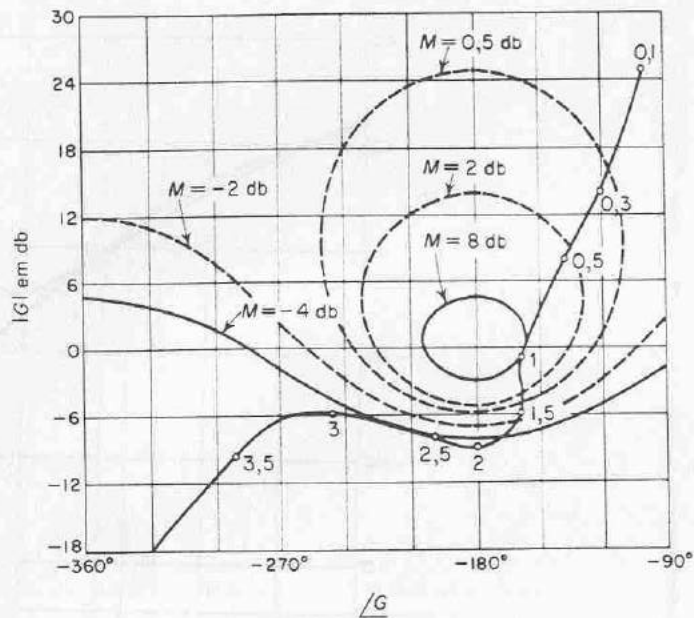


Fig. 10.43 Gráfico do log-módulo versus fase de $G(j\omega)$ dada pela Eq. (10.6).

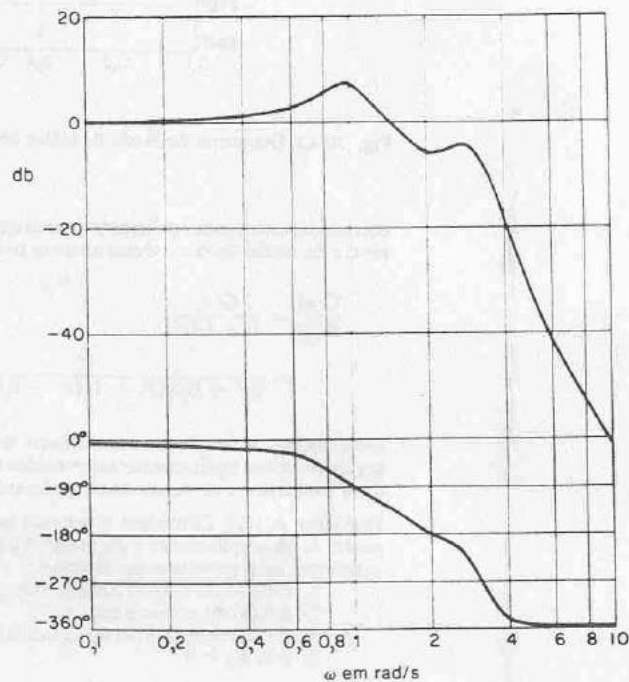


Fig. 10.44 Diagrama de Bode de $G(j\omega)/(1+G(j\omega))$ onde $G(j\omega)$ é dada pela Eq. (10.6).

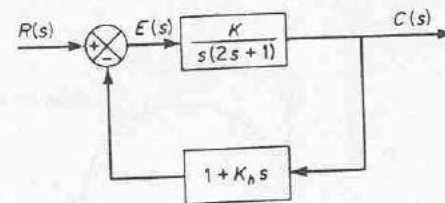


Fig. 10.45 Sistema de controle.

Solução. A especificação da relação de amortecimento exige que os pólos de malha-fechada estejam sobre retas a 60° no semiplano esquerdo do plano s . A especificação do tempo de acomodação pode ser escrita em termos da parte real dos pólos complexos conjugados de malha-fechada como

$$t_s = \frac{4}{\sigma} \leq 2 \text{ s}$$

ou

$$\sigma \geq 2$$

Portanto, os pólos de malha-fechada devem estar sobre as retas cheias AB e CD no semiplano esquerdo do plano s , como indicado na Fig. 10.46.

Desde que o coeficiente de erro de velocidade K_v é definido por

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$$

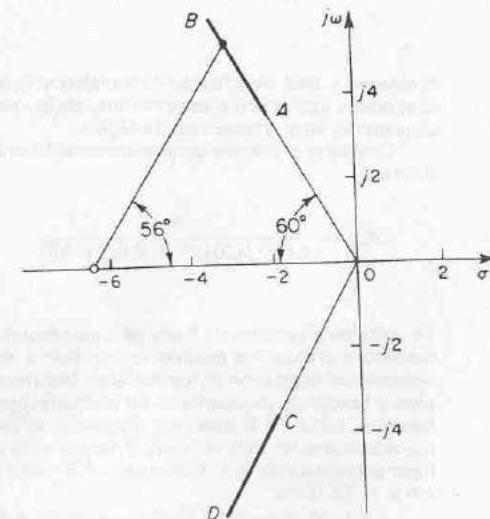


Fig. 10.46 Localizações possíveis para os pólos de malha-fechada no plano s para o sistema do Problema A.10.3.

obtemos

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(1 + K_h s)}{s(2s + 1)} = K$$

Da especificação fornecida relativa ao coeficiente de erro de velocidade, obtemos

$$K \geq 50$$

Para este sistema, os pólos de malha-aberta estão em $s = 0$ e $s = -1/2$. O zero de malha-aberta está em $s = -1/K_h$, onde K_h é uma constante indeterminada. Inicialmente, consideremos que os pólos de malha-fechada estejam em $s = -2 \pm j3,4$ (pontos A e C na Fig. 10.46). A soma dos ângulos, na localização do pólo de malha-fechada escolhido, com os pólos de malha-aberta é $120^\circ + 115^\circ = 235^\circ$. Portanto, necessitamos de uma contribuição de 55° do zero, de modo que a soma total seja -180° . Para satisfazer a condição do ângulo, escolhemos o zero em $s = -4,4$. Então K_h é

$$K_h = \frac{1}{4,4} = 0,227$$

A condição de módulo estabelece que

$$\left| \frac{K(1 + 0,227s)}{s(2s + 1)} \right|_{s = -2 + j3,4} = 1$$

Portanto,

$$K = 31$$

Desde que $K < 50$, a escolha dos pólos de malha-fechada em $-2 \pm j3,4$ não é aceitável. Como uma segunda tentativa, consideremos os pólos de malha-fechada em $-3 \pm j5,1$. A soma das contribuições angulares dos pólos de malha-aberta é 236° . Necessitamos de uma contribuição de 56° para o zero. Isto implica que o zero deve estar em $s = -6,4$.

A aplicação da condição do módulo fornece $K = 70$. Este resultado é bastante satisfatório. Desde que $K_h = 0,156$, está satisfeita a exigência em relação a K_h . Portanto, estão satisfeitas todas as especificações. Um conjunto de valores aceitáveis para K e K_h , portanto, é o seguinte:

$$K = 70,$$

$$K_h = 0,156$$

Problema A.10.4 Um sistema de malha-fechada possui a propriedade de que sua função de transferência de malha-fechada é aproximadamente igual ao inverso da função de transferência do ramo de realimentação quando o ganho de malha-aberta é muito maior do que a unidade.

A característica de malha-aberta pode ser modificada adicionando-se uma malha de realimentação interna com uma característica igual ao inverso da característica de malha-aberta descejada. Suponha que um sistema com realimentação unitária possua a seguinte função de transferência de malha-aberta:

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

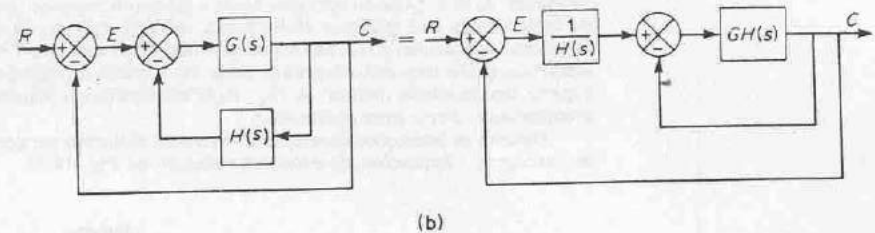
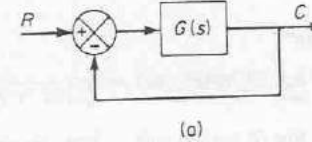


Fig. 10.47 (a) Sistema de controle; (b) adição da malha de realimentação interna para modificar a característica de malha-fechada.

Determine a função de transferência $H(s)$ do elemento na malha de realimentação interna de modo que a malha interna resulte ineficaz tanto em baixas como em altas frequências. Solução. A Fig. 10.47(a) mostra o sistema original. A Fig. 10.47(b) mostra a adição da malha de realimentação interna em volta de $G(s)$. Desde que

$$\frac{C(s)}{E(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{H(s)} \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

se o ganho ao longo da malha interna é muito maior do que a unidade, então $G(s)H(s)/[1 + G(s)H(s)]$ é aproximadamente igual à unidade e a função de transferência $C(s)/E(s)$ é aproximadamente igual a $1/H(s)$.

Por outro lado, se o ganho $G(s)H(s)$ é muito menor do que a unidade, a malha interna resulta ineficaz e $C(s)/E(s)$ é aproximadamente igual a $G(s)$.

Para tornar a malha interna ineficiente tanto na faixa de baixas como na faixa de altas frequências, necessitamos que

$$G(j\omega)H(j\omega) \ll 1 \quad \text{para } \omega \ll 1 \quad \text{e } \omega \gg 1$$

Desde que neste problema

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$$

a exigência pode ser satisfeita se $H(s)$ for escolhida como sendo

$$H(s) = ks$$

porque

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega)H(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{Kkj\omega}{(1+j\omega T_1)(1-j\omega T_2)} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega)H(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{Kkj\omega}{(1+j\omega T_1)(1-j\omega T_2)} = 0$$

Portanto, com $H(s) = ks$, o laço interno torna-se ineficiente tanto nas regiões de baixas frequências como nas regiões de altas frequências.

Problema A.10.5 Quando um distúrbio age sobre um processo, transcorre um certo intervalo de tempo antes que qualquer efeito possa ser detectado na saída. Se medirmos o próprio distúrbio (embora isto possa não ser possível ou possa ser muito difícil) ao invés da resposta ao distúrbio, então uma ação corretiva pode ser tomada rapidamente, mais cedo, e podemos esperar um resultado melhor. A Fig. 10.48 apresenta um diagrama de blocos mostrando a compensação direta para o distúrbio.

Discuta as limitações do esquema direto do distúrbio em geral. Discuta posteriormente as vantagens e limitações do esquema indicado na Fig. 10.48.

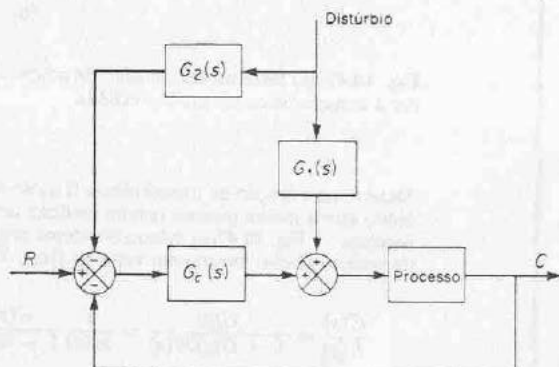


Fig. 10.48 Sistema de controle com compensação direta para o distúrbio.

Solução. Um esquema direto do distúrbio é um esquema de malha-aberta e portanto dependente da constância dos valores dos parâmetros. Qualquer deriva nestes valores resultará em uma compensação imperfeita.

No sistema aqui apresentado, os esquemas de malha-aberta e de malha-fechada estão em operação simultaneamente. Os grandes erros, devidos a fonte de distúrbios principal, podem ser muito reduzidos pela compensação em malha-aberta sem exigir um alto ganho de malha. Erros menores devidos a outras fontes de distúrbio podem ser levados em consideração pelo esquema de controle de malha-fechada. Portanto, erros devidos a todas as origens podem ser reduzidos sem exigir um alto ganho de malha. Esta é uma vantagem do ponto de vista de estabilidade.

Note que este esquema não pode ser usado a menos que o próprio distúrbio principal possa ser medido.

PROBLEMAS

Problema B.10.1 Desenhe os diagramas de Bode da rede em avanço e da rede em atraso indicadas nas Figs. 10.49(a) e (b), respectivamente.

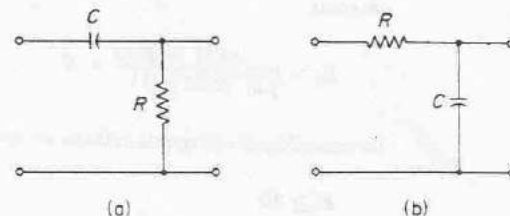


Fig. 10.49 (a) Rede em avanço; (b) rede em atraso.

Problema B.10.2 Considere um sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência do ramo direto é dada por

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Determine o valor de K de modo que os pólos de malha-fechada dominantes possuam uma relação de amortecimento $= 0.5$.

Problema B.10.3 Considere um sistema com realimentação unitária cuja função de transferência do ramo direto é dada por

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Deseja-se inserir um compensador série de modo que a curva de resposta em frequência de malha-aberta seja tangente ao círculo $M = 3$ db em $\omega = 3$ rad/s. O sistema está sujeito a ruídos de alta frequência e, portanto, deseja-se um corte agudo. Projete um compensador série apropriado.

Problema B.10.4 Determine os valores de K , T_1 e T_2 do sistema mostrado na Fig. 10.50 de modo que os pólos dominantes de malha-fechada tenham $\zeta = 0.5$ e $\omega_n = 3$ rad/s.

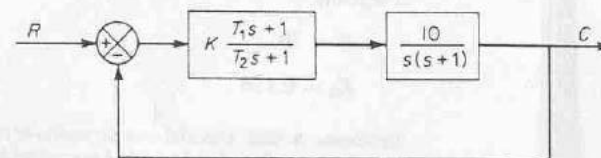


Fig. 10.50 Sistema de controle.

Problema B.10.5 Considere um sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência do ramo direto é dada por

$$G(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+8)}$$

Projete um compensador tal que o coeficiente de erro de velocidade estático K_v seja igual a 80 s^{-1} e os pólos dominantes de malha-fechada estejam localizados em $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$.

Problema B.10.6 Considere o sistema indicado na Fig. 10.51. Se o distúrbio N puder ser detectado, pode-se passá-lo através de uma função de transferência G_3 e adicioná-lo ao ramo direto entre o amplificador e o processo, conforme indicado na Fig. 10.51.

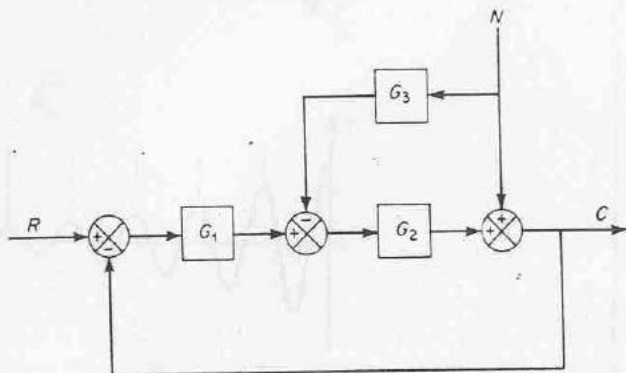


Fig. 10.51 Sistema de controle.

Para reduzir o efeito deste distúrbio N no erro de regime estacionário, determine uma função de transferência G_3 apropriada. O que limitará a presente abordagem na redução dos efeitos deste distúrbio?

Problema B.10.7 A Fig. 10.52 apresenta o diagrama de blocos de um sistema de controle de taxa de atitude. Projete um compensador $G_c(s)$ de modo que os pólos complexos conjugados (dominantes) estejam em $s = -2 \pm j2$.

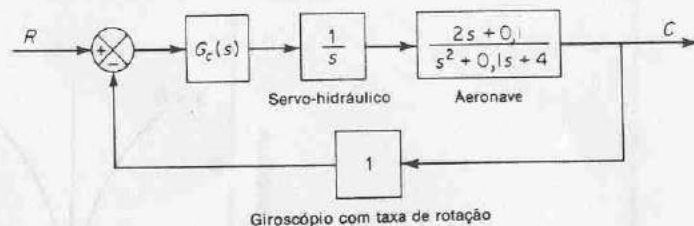


Fig. 10.52 Sistema de controle de taxa de atitude.

11

Análise de Sistemas de Controle não Lineares por Função Descritiva

11.1 INTRODUÇÃO A SISTEMAS NÃO LINEARES

Já é bem sabido que muitas relações entre quantidades físicas não são muito lineares, embora freqüentemente sejam aproximadas por equações lineares, principalmente pela simplicidade matemática. Esta simplificação pode ser satisfatória desde que as soluções resultantes estejam de acordo com os resultados experimentais. Uma das características mais importantes de sistemas não lineares é a dependência do comportamento da resposta do sistema em relação à amplitude e tipo da entrada. Por exemplo, um sistema não linear pode-se comportar de forma completamente diferente em resposta a entradas em degrau de diferentes amplitudes.

Conforme mencionamos no Cap. 4, os sistemas não lineares diferem dos sistemas lineares em que o princípio da superposição não vale para os não lineares. Os sistemas não lineares apresentam muitos fenômenos que não podem ser vistos em sistemas lineares, e ao investigar tais sistemas devemos estar familiarizados com estes fenômenos.

Nesta seção, iremos apresentar uma breve discussão de vários dos fenômenos.

Dependência frequência-amplitude. Considere a oscilação natural ou livre do sistema mecânico visto na Fig. 11.1, que consiste em uma massa, um amortecedor viscoso, e uma mola não linear. A equação diferencial que descreve a dinâmica deste sistema pode ser escrita como

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + kx + k'x^3 = 0 \quad (11.1)$$

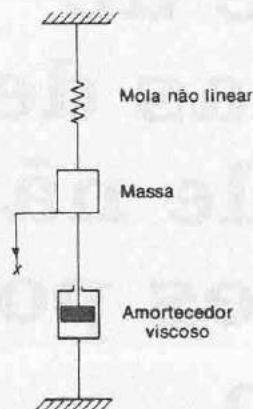


Fig. 11.1 Sistema mecânico.

onde

x = deslocamento da massa
 m = massa
 f = coeficiente de atrito viscoso do amortecedor
 $kx + k'x^3$ = força da mola não linear

Os parâmetros m , f e k são constantes positivas, enquanto que k' pode ser tanto positivo quanto negativo. Se k' é positivo, a mola é chamada uma mola dura (*hard spring*); se k' é negativo, mola macia. O grau de não linearidade do sistema é caracterizado pela magnitude de k' . Esta equação diferencial não linear, Eq. (11.1), é conhecida como a equação de Duffing e tem sido frequentemente discutida no campo da mecânica não linear. A solução da Eq. (11.1) representa uma oscilação amortecida se o sistema é sujeito a condições iniciais não nulas. Em uma investigação experimental, observa-se que quando a amplitude decresce, a frequência da oscilação natural ou decresce ou cresce, dependendo se $k' > 0$ ou $k' < 0$, respectivamente. Quando $k' = 0$, a frequência permanece inalterada quando a amplitude da oscilação natural decresce. (Isto corresponde a um sistema linear.) Estas características são vistas na Fig. 11.2, que mostra as formas de onda das oscilações naturais. A Fig. 11.3 mostra relação de amplitude-frequência para os três casos em que k' é maior, igual, ou menor que zero.

Em um estudo experimental de sistemas não lineares, a dependência amplitude-frequência pode ser facilmente detectada. A dependência amplitude-frequência é uma das características mais fundamentais de oscilações em sistemas não lineares. Um gráfico da forma visto na Fig. 11.3 revela se uma não linearidade está presente e também indica o grau de não linearidade.

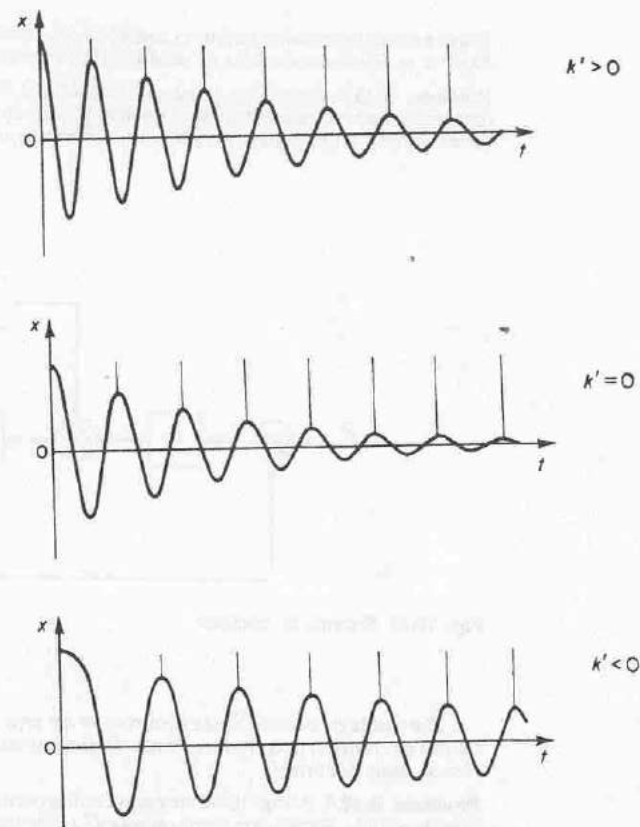


Fig. 11.2 Formas de onda de oscilações naturais do sistema descrito pela Eq. (11.1).

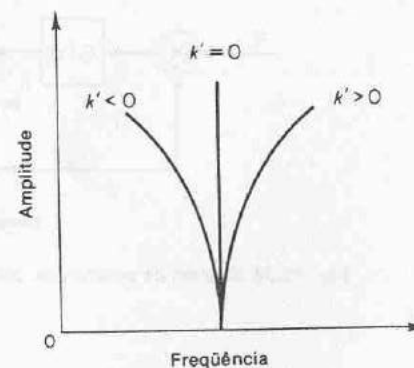


Fig. 11.3 Curvas de amplitude em função da frequência para oscilações naturais para o sistema descrito pela Eq. (11.1).

Respostas com múltiplos valores e ressonâncias com saltos. Ao se fazer experimentos com oscilações forçadas no sistema visto na Fig. 11.1, cuja equação diferencial é

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + kx + k'x^3 = P \cos \omega t$$

onde

$$P \cos \omega t = \text{função de excitação}$$

podemos observar vários fenômenos, tais como respostas com múltiplos valores, ressonâncias com saltos e uma variedade de movimentos periódicos (tais como oscilações sub-harmônicas e oscilações super-harmônicas). Estes fenômenos não ocorrem nas respostas de sistemas lineares.

Ao realizar experimentos em que a amplitude P da função de excitação é mantida constante, enquanto sua frequência é variada lentamente e a amplitude X da resposta observada, podemos obter uma curva de resposta em frequência semelhante às vistas nas Figs. 11.4(a) e (b). Suponha que $k' > 0$ e que a frequência

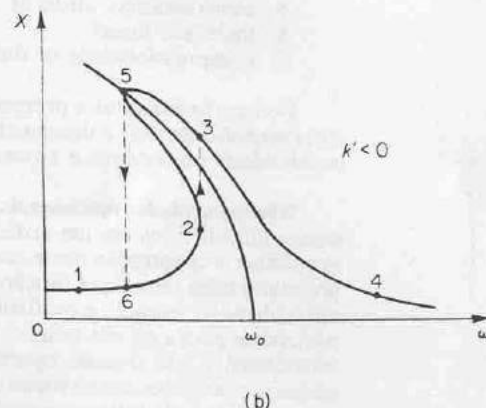
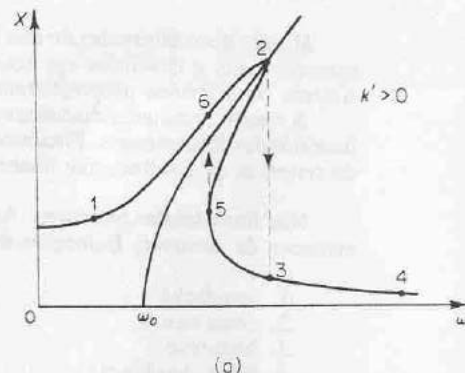


Fig. 11.4 Curvas de resposta em frequência mostrando ressonâncias com saltos. (a) Sistema mecânico com mola dura; (b) sistema mecânico com mola macia.

de entrada ω é baixa no começo no ponto 1 da curva da Fig. 11.4(a). À medida que a frequência ω é aumentada, a amplitude X aumenta até que o ponto 2 é alcançado. Um aumento adicional na frequência ω causará um salto do ponto 2 ao ponto 3, acompanhados de mudanças na amplitude e fase. Este fenômeno é a chamada ressonância com saltos. Quando a frequência ω é aumentada ainda mais, a amplitude X segue a curva do ponto 3 em direção ao ponto 4. Ao se fazer o experimento no outro sentido, isto é, começando de uma frequência alta, observamos que quando ω é diminuído, a amplitude X cresce devagar passando pelo ponto 3, até que o ponto 5 é alcançado. Um decréscimo adicional em ω causará um outro salto do ponto 5 ao ponto 6, acompanhado por mudanças de amplitude e fase. Após este salto, a amplitude X diminui com ω e segue a curva do ponto 6 em direção ao ponto 1. Portanto, as curvas de resposta são na realidade descontínuas, e um ponto representativo na curva de resposta segue caminhos diferentes para frequências crescentes e decrescentes. As oscilações de resposta correspondentes à curva entre o ponto 2 e o ponto 5 correspondem a oscilações instáveis e não podem ser observadas experimentalmente. Saltos semelhantes acontecem no caso de um sistema com uma mola macia ($k' < 0$), como visto na Fig. 11.4(b). Portanto vemos que para uma dada amplitude P da função de excitação, há uma gama de frequências em que pode ocorrer uma das duas oscilações estáveis. Deve-se notar que para a existência de ressonância com saltos é necessário que o termo de amortecimento seja pequeno e que a amplitude da função de excitação seja suficientemente grande para levar o sistema para uma região de operação consideravelmente não linear.

Oscilações sub-harmônicas. Chamamos de *oscilações sub-harmônicas* as oscilações não lineares estacionárias cujas frequências são um inteiro submúltiplo da frequência de excitação. Um exemplo de uma forma de onda em oscilação sub-harmônica é visto na Fig. 11.5, juntamente com a forma de onda da entrada. A geração de oscilações sub-harmônicas é dependente de parâmetros do sistema e de condições iniciais, bem como da amplitude e frequência da função de excitação. A frase *dependência de condições iniciais* significa que as oscilações sub-harmônicas não começam por si só. É necessário dar uma espécie de "empurrão", por exemplo, uma variação abrupta da amplitude ou frequência da função de excitação para iniciar tais oscilações. Uma vez que oscilações sub-harmônicas são excitadas, elas podem ser bastante estáveis para certa faixa de frequências. Se a frequência da função de excitação é mudada para um novo valor, ou as oscilações sub-harmônicas desaparecem ou a frequência da oscilação sub-harmônica também muda para um valor que é ω/n , onde ω é a frequência de excitação e n é a ordem da oscilação sub-harmônica. (Note que uma oscilação cuja frequência é a metade daquela da

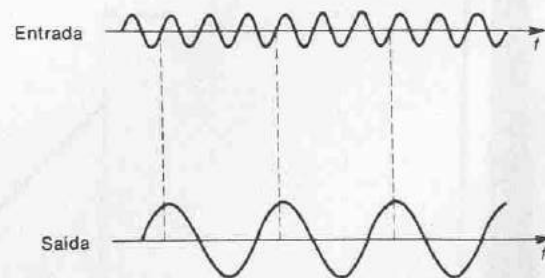


Fig. 11.5 Formas de onda de entrada e saída sob oscilação sub-harmônica.

função de excitação pode acontecer em um sistema linear se os parâmetros do sistema são modificados periodicamente com o tempo. Um sistema linear conservativo pode também apresentar oscilações que se parecem com oscilações sub-harmônicas de sistemas não lineares, mas as oscilações em sistemas lineares são essencialmente diferentes das oscilações sub-harmônicas.)

Oscilações auto-excitadas ou ciclos limite. Um outro fenômeno que é observado em certos sistemas não lineares é uma oscilação auto-excitada ou ciclo limite. Considere um sistema descrito pela seguinte equação:

$$m\ddot{x} - f(1 - x^2)\dot{x} + kx = 0$$

onde m , f e k são grandezas positivas. Esta equação é chamada equação de Van der Pol. Ela é não linear no termo de amortecimento. Ao examinar este termo, observamos que para pequenos valores de x o amortecimento será negativo e, na realidade, adicionará energia ao sistema, enquanto que para valores grandes de x ele será positivo, removendo energia do sistema. Portanto, pode-se esperar que tal sistema apresente uma oscilação mantida. Como este não é um sistema forçado, esta oscilação é chamada de oscilação auto-excitada ou ciclo limite. Note que se um sistema apresenta apenas um ciclo limite, como no caso do sistema presente, a amplitude deste ciclo limite não depende da condição inicial.

Sincronismo de frequência. Um exemplo de um fenômeno interessante que pode ser observado em alguns sistemas não lineares é o sincronismo de frequência. Se uma força periódica de frequência ω é aplicada ao sistema capaz de apresentar um ciclo limite de frequência ω_0 , o fenômeno bem conhecido de batimento é observado. Quando a diferença entre as duas frequências decresce, a frequência do batimento também decresce. Em um sistema linear se determina, tanto experimental quanto teoricamente, que a frequência de batimento decresce indefinidamente quando ω tende a ω_0 . Entretanto, em um sistema não linear auto-excitado se determina experimentalmente que a frequência ω_0 do ciclo limite entra em sincronismo, ou é sincronizada, pela frequência de excitação ω dentro de uma certa faixa de frequências. Este fenômeno é normalmente chamado de sincronismo de frequência, e a banda de frequência em que o sincronismo ocorre é chamada zona de sincronismo.

A Fig. 11.6 mostra a relação entre $|\omega - \omega_0|$ e ω . Para um sistema linear, a relação entre $|\omega - \omega_0|$ e ω seguiria as linhas tracejadas e $|\omega - \omega_0|$ seria zero apenas

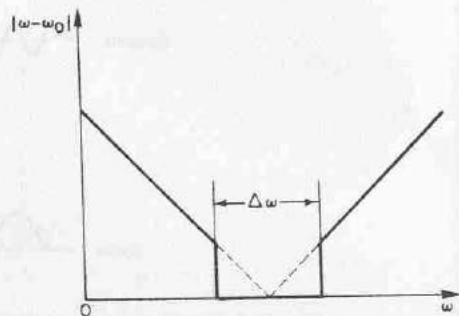


Fig. 11.6 Curva de $|\omega - \omega_0|$ em função de ω mostrando a região de sincronismo de frequência.

para um valor de ω ; $\omega = \omega_0$. Para um sistema não linear auto-excitado, ocorre o sincronismo de frequência, e na zona de sincronismo, que é indicada pela região $\Delta\omega$ na Fig. 11.6, as frequências ω e ω_0 se tornam iguais e existe apenas uma frequência ω . Tal sincronismo de frequência é observado na resposta de frequência de sistemas não lineares que apresentam ciclos-limite.

Supressão assíncrona. Em um sistema não linear que exhibe um ciclo limite de frequência ω_0 , é possível suprimir a oscilação de ciclo limite forçando o sistema a uma frequência ω_1 , onde ω_1 e ω_0 não são relacionadas uma com a outra. Este fenômeno é chamado de supressão assíncrona, ou estabilização de sinal.

Comentário. Nenhum dos fenômenos mencionados acima, bem como outros fenômenos não lineares não mencionados aqui, ocorre em sistemas lineares. Estes fenômenos não podem ser explicados pela teoria linear; para explicá-los, devemos resolver as equações diferenciais não lineares que descrevem a dinâmica do sistema em forma analítica ou gráfica.

11.2 SISTEMAS DE CONTROLE NÃO LINEARES

Muitos tipos diferentes de não linearidades podem ser achados em sistemas de controle reais e divididos em duas classes, dependendo de serem inerentes ao sistema ou inseridos propositalmente no sistema.

A seguir, primeiro discutiremos não linearidades inerentes, e então as não linearidades intencionais. Finalmente discutiremos abordagens à análise e projeto de sistemas de controle não lineares.

Não linearidades inerentes. As não linearidades inerentes são inevitáveis em sistemas de controle. Exemplos de tais não linearidades são

1. saturação
2. zona morta
3. histerese
4. folga (*backlash*)
5. atrito estático, atrito de Coulomb, e outros atritos não lineares
6. mola não linear
7. compressibilidade de fluido

De uma forma geral, a presença de tais não linearidades no sistema de controle afeta prejudicialmente o desempenho do sistema. Por exemplo, a folga pode causar instabilidade no sistema, e a zona morta pode causar erro estacionário.

Não linearidades intencionais. Alguns elementos não lineares são intencionalmente introduzidos em um sistema para melhorar o desempenho do sistema ou simplificar a construção deste, ou ambos. Um sistema não linear adequadamente projetado para uma certa função geralmente é superior do ponto de vista econômico, de peso, espaço, e confiabilidade quando comparado com sistemas lineares projetados para a mesma função. O exemplo mais simples de um sistema não linear intencional é um sistema operado convenientemente a relé. Outros exemplos podem ser achados em sistemas de controle ótimo que frequentemente empregam controladores não lineares complicados. (Para uma discussão de sistemas de controle ótimo, referir-se ao Cap. 16.) Deve-se notar que embora elementos não lineares intencionais possam melhorar o desempenho do sistema sob certas condi-

ções especificadas de operação, em geral eles degradarão o desempenho do sistema sob outras condições de operação.

Efeito de não linearidades inerentes na precisão estática. Uma característica de sistemas de controle é que a potência é transmitida através do ramo direto, enquanto que a precisão estática do sistema é determinada pelos elementos no ramo de realimentação. Portanto, o dispositivo de medida determina o limite superior na precisão estática; a precisão estática não pode ser melhor que a precisão deste dispositivo de medida. Portanto, quaisquer não linearidades inerentes nos elementos de realimentação devem ser minimizadas.

Se os elementos de realimentação sofrem os efeitos de atrito, folga etc., então é desejável aplicar o sinal de erro em um dispositivo de integração, porque o sistema não pode detectar um erro muito pequeno, a menos que o erro pequeno seja integrado continuamente, tornando a amplitude grande suficiente para ser detectada.

Abordagens usadas na análise e projeto de sistemas de controle não lineares. Não há um método geral para se lidar com todos os sistemas não lineares porque as equações diferenciais não lineares praticamente não permitem um método geral de estudo. (Soluções exatas podem ser achadas apenas para certas equações diferenciais não lineares simples. Para muitas das equações diferenciais não lineares de importância prática, são possíveis apenas soluções aproximadas, e estas soluções se aplicam somente sob as condições limitadas em que foram obtidas.) Como não há um método geral, podemos tomar cada equação não linear, ou grupo de equações similares, individualmente e tentar desenvolver um método de análise que se aplicará satisfatoriamente para aquele grupo particular. (Note que embora se possa fazer uma quantidade muito pequena de generalizações dentro do grupo de equações similares, é impossível uma generalização ampla de uma solução particular.)

Uma maneira de se analisar e projetar um grupo particular de sistemas de controle não lineares, em que o grau da não linearidade é pequeno, é usar técnicas de linearização equivalente e resolver o problema linearizado obtido. O método da função descritiva a ser discutido neste capítulo é um dos métodos de linearização equivalente. Em muitos casos particulares, estamos primordialmente interessados na estabilidade de sistemas de controle não lineares, e soluções analíticas de equações diferenciais não lineares podem não ser necessárias. (O estabelecimento de critérios de estabilidade é muito mais fácil do que a obtenção de soluções analíticas.) O método da função descritiva nos permite estudar a estabilidade de muitos sistemas de controle não lineares simples do ponto de vista do domínio da frequência.

O método da função descritiva fornece informação sobre a estabilidade para um sistema de qualquer ordem, mas não dá informação exata sobre as características de resposta temporal.

Outras formas de analisar e projetar sistemas de controle não lineares, que podem ser altamente não lineares, incluem a atual solução das equações diferenciais não lineares ou simplificações destas por meio de técnica do plano de fase ou aplicando técnicas baseadas no segundo método de Liapunov. (Para discussões sobre o método do plano de fase e do segundo método de Liapunov, referir-se aos Caps. 12 e 15, respectivamente.)

O método do plano de fase fornece informação tanto sobre estabilidade quanto comportamento de resposta temporal, mas é limitado a sistemas de primeira e segunda ordem.

O segundo método de Liapunov pode ser aplicado na análise de estabilidade de qualquer sistema não linear, mas sua aplicação pode ser prejudicada devido à

dificuldade de se achar funções de Liapunov para sistemas não lineares complicados. (Para funções de Liapunov, vide Cap. 15.)

Soluções em computador de problemas não lineares. Computadores modernos levaram a métodos novos de se estudar problemas não lineares. Técnicas de simulação em computadores pelo uso de computadores analógicos e/ou digitais são muito poderosas para analisar e projetar sistemas de controle não lineares. Agora é possível estudar sistemas não lineares bastante complicados através do uso de computadores em um espaço de tempo pequeno. Quando a complexidade de um sistema não permite o uso da abordagem analítica, as simulações em computadores podem ser muito vantajosas para se obter a informação necessária para fins de projeto.

Comentário. É importante lembrar que embora a predição do comportamento de sistemas não lineares seja normalmente difícil, ao se projetar um sistema de controle não devemos tentar forçar o sistema a ser o mais linear possível, porque a exigência de linearidade do sistema pode levar ao projeto de um sistema caro e menos desejável do que um sistema não linear adequadamente projetado.

11.3 FUNÇÕES DESCRITIVAS

Esta seção apresenta representações de função descritiva de elementos não lineares comumente encontrados.

Funções descritivas. Suponha que a entrada para um elemento não linear é senoidal. A saída do elemento não linear é, em geral, não senoidal. Suponha que a saída é periódica com o mesmo período que a entrada. (A saída contém harmônicas superiores, em adição à componente harmônica fundamental.)

Na análise por função descritiva, supomos que apenas a componente harmônica fundamental da saída é significativa. Tal suposição é freqüentemente válida uma vez que harmônicas superiores na saída de um elemento não linear são freqüentemente de menor amplitude do que a amplitude da componente de harmônica fundamental. Além disso, a maioria de sistemas de controle são filtros passa-baixas, com o resultado de que as harmônicas superiores são muito atenuadas quando comparadas com a componente harmônica fundamental.

A função descritiva ou função descritiva senoidal de um elemento não linear é definida como a relação complexa entre a componente harmônica fundamental da saída e a amplitude da entrada. Isto é,

$$N = \frac{Y_1}{X} \angle \phi_1$$

onde

N = função descritiva

X = amplitude da senóide de entrada

Y_1 = amplitude da componente harmônica fundamental da saída

ϕ_1 = defasagem da componente harmônica fundamental da saída

Se não há elemento de armazenamento de energia incluído no elemento não linear, então N é uma função apenas da amplitude da entrada para o elemento. Por outro lado, se elementos armazenadores de energia são incluídos, então N é uma função tanto da amplitude como da frequência da entrada.

Ao se calcular a função descritiva para um dado elemento não linear, necessi-

tamos achar a componente harmônica fundamental da saída. Para a entrada senoidal $x(t) = X \sin \omega t$ para o elemento não linear, a saída $y(t)$ pode ser expressa como uma série de Fourier como segue:

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \phi_n)$$

onde

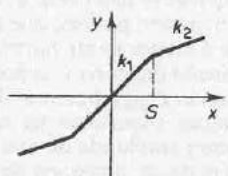
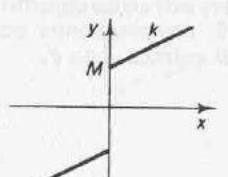
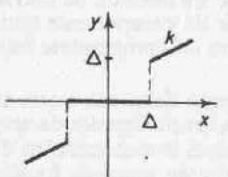
$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos n\omega t d(\omega t)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin n\omega t d(\omega t)$$

$$Y_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\phi_n = \tan^{-1} \left(\frac{A_n}{B_n} \right)$$

Tabela 11.1 Três não linearidades e suas funções descritivas

	$N = k_2 + \frac{2(k_1 - k_2)}{\pi} \left(\sin^{-1} \frac{S}{X} + \frac{S}{X} \sqrt{1 - \frac{S^2}{X^2}} \right)$ $(X \geq S)$
	$N = k + \frac{4M}{\pi X}$
	$N = k - \frac{2k}{\pi} \sin^{-1} \frac{\Delta}{X} + \frac{(4-2k)\Delta}{\pi X} \sqrt{1 - \frac{\Delta^2}{X^2}}$ $(X \geq \Delta)$

Se a não linearidade é simétrica, então $A_0 = 0$. A componente da harmônica fundamental da saída é

$$y_1(t) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t = Y_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

A função descritiva é então dada por

$$N = \frac{Y_1}{X} \angle \phi_1 = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{X} \angle \tan^{-1} \left(\frac{A_1}{B_1} \right)$$

Claramente, N é uma grandeza complexa quando ϕ_1 é não nula.

A Tabela 11.1 mostra três não linearidades e suas funções descritivas. (Na Tabela 11.1, k_1 , k_2 e k indicam as inclinações das linhas.) Cálculos ilustrativos das funções descritivas de não linearidades comumente encontradas são dados a seguir.

Não linearidade tipo liga-desliga (on-off). A não linearidade tipo liga-desliga é muitas vezes chamada de uma não linearidade de duas posições. Considere um elemento tipo liga-desliga cuja curva característica entrada-saída é vista na Fig. 11.7(a). A saída deste elemento é ou uma constante positiva ou uma constante negativa, e a Fig. 11.7(b) mostra as formas de onda da entrada e da saída.

Vamos obter uma expansão em série de Fourier da saída $y(t)$ de tal elemento.

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

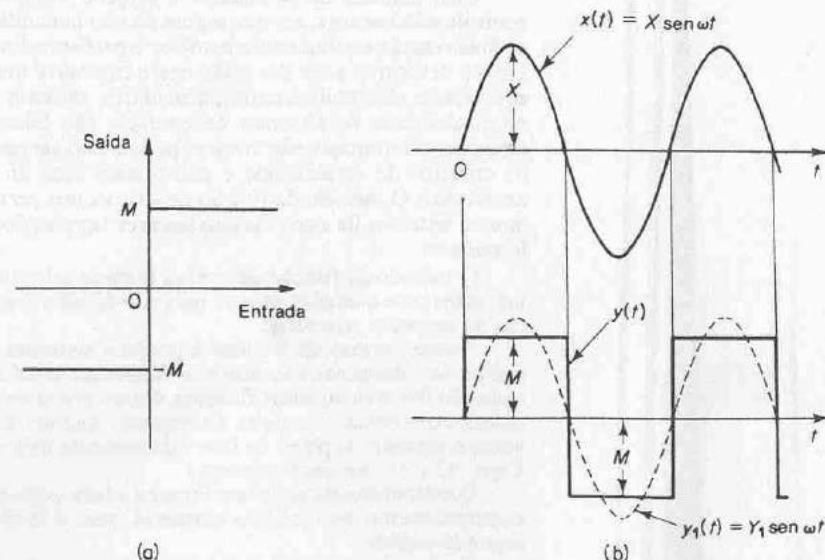


Fig. 11.7 (a) Curva da característica de entrada-saída para a não linearidade tipo liga-desliga; (b) formas de onda de entrada e saída para a não linearidade tipo liga-desliga.

Como visto na Fig. 11.7(b), a saída é uma função ímpar. Para uma função ímpar, temos $A_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Portanto,

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\omega t$$

A componente harmônica fundamental de $y(t)$ é

$$y_1(t) = B_1 \sin \omega t = Y_1 \sin \omega t$$

onde

$$Y_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t)$$

Substituindo $y(t) = M$ nesta última equação, resulta

$$Y_1 = \frac{2M}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \omega t d(\omega t) = \frac{4M}{\pi}$$

Portanto,

$$y_1(t) = \frac{4M}{\pi} \sin \omega t$$

A função descritiva N é então dada por

$$N = \frac{Y_1}{X} \angle 0^\circ = \frac{4M}{\pi X}$$

Claramente, a função descritiva de um elemento tipo liga-desliga é uma grandeza real e uma função apenas da amplitude de entrada X . Um gráfico desta função descritiva em função de M/X é visto na Fig. 11.8.

Não linearidade tipo liga-desliga com histerese. Considere um elemento tipo liga-desliga com histerese cuja curva característica de entrada-saída é vista na Fig. 11.9(a). As formas de onda da entrada e saída são vistas na Fig. 11.9(b). Claramente, a saída é uma onda quadrada, mas está atrasada em relação à entrada por $\omega t_1 = \sin^{-1}(h/X)$. Portanto a função descritiva para este elemento não linear é

$$N = \frac{4M}{\pi X} \left[-\sin^{-1} \left(\frac{h}{X} \right) \right]$$

É conveniente fazer um gráfico de

$$\frac{h}{M} N = \frac{4h}{\pi X} \left[-\sin^{-1} \left(\frac{h}{X} \right) \right]$$

em função de h/X ao invés de N em função de h/X porque hN/M é uma função apenas de h/X . Um gráfico de hN/M em função de h/X é visto na Fig. 11.10.

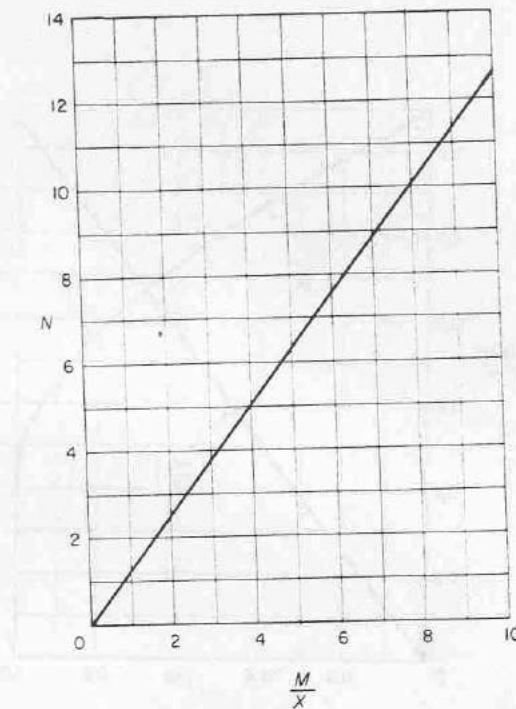


Fig. 11.8 Função descritiva da não linearidade tipo liga-desliga.

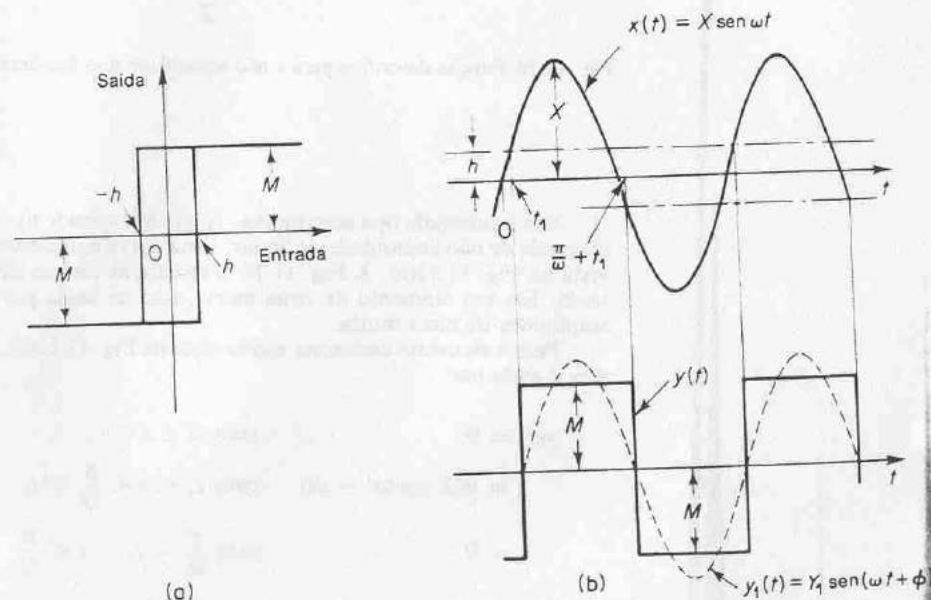


Fig. 11.9 (a) Curva da característica de entrada-saída para a não linearidade tipo liga-desliga com histerese; (b) formas de onda de entrada e saída para a não linearidade tipo liga-desliga com histerese.

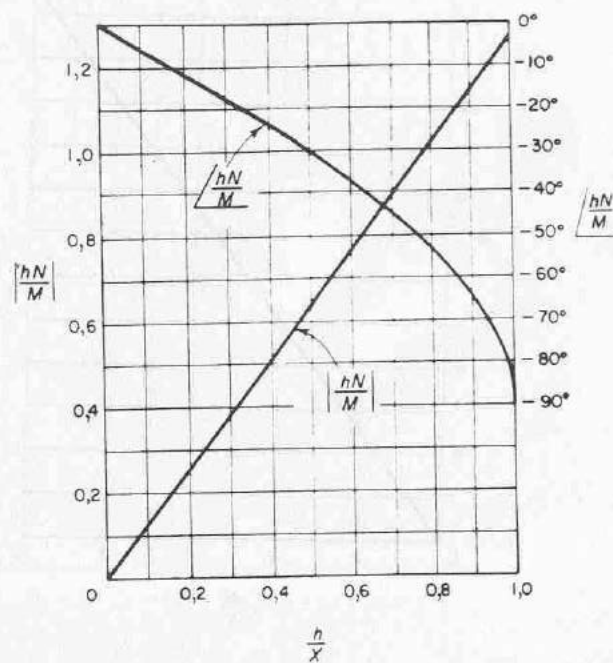


Fig. 11.10 Função descritiva para a não linearidade tipo liga-desliga com histerese.

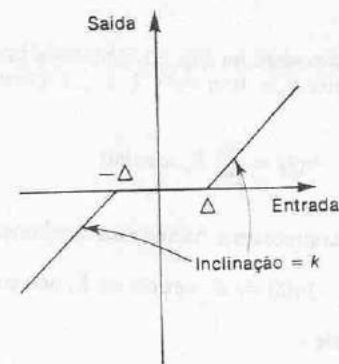
Não linearidade tipo zona morta. A não linearidade tipo zona morta é às vezes chamada de não linearidade de limiar. Uma curva característica de entrada-saída é vista na Fig. 11.11(a). A Fig. 11.11(b) mostra as formas de onda da entrada e da saída. Em um elemento de zona morta, não há saída para entradas dentro das amplitudes de zona morta.

Para o elemento com zona morta visto na Fig. 11.11(a), a saída $y(t)$ para $0 \leq \omega t \leq \pi$ é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= 0 & \text{para } 0 < t < t_1 \\ &= k(X \sin \omega t - \Delta) & \text{para } t_1 < t < \frac{\pi}{\omega} - t_1 \\ &= 0 & \text{para } \frac{\pi}{\omega} - t_1 < t < \frac{\pi}{\omega} \end{aligned}$$

Como a saída $y(t)$ é novamente uma função ímpar, sua expansão em série de Fourier tem apenas elementos senoidais. A componente harmônica fundamental da saída é dada por

$$y_1(t) = Y_1 \sin \omega t$$



(a)

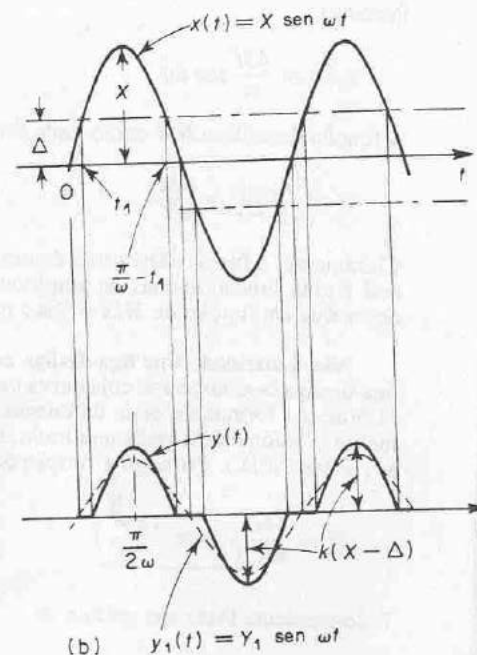


Fig. 11.11 (a) Curva característica de entrada-saída para a não linearidade tipo zona morta; (b) formas de onda da entrada e saída para a não linearidade tipo zona morta.

onde

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y(t) \sin \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{4k}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\pi/2} (X \sin \omega t - \Delta) \sin \omega t d(\omega t) \end{aligned}$$

Note que

$$\Delta = X \sin \omega t_1$$

ou

$$\omega t_1 = \sin^{-1} \left(\frac{\Delta}{X} \right)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{4Xk}{\pi} \left[\int_{\omega t_1}^{\pi/2} \sin^2 \omega t d(\omega t) - \sin \omega t_1 \int_{\omega t_1}^{\pi/2} \sin \omega t d(\omega t) \right] \\ &= \frac{2Xk}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{\Delta}{X} \right) - \frac{\Delta}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X} \right)^2} \right] \end{aligned}$$

A função descritiva para um elemento com zona morta pode ser obtida como

$$N = \frac{Y_1}{X} / 0^\circ = k - \frac{2k}{\pi} \left[\sin^{-1} \frac{\Delta}{X} + \frac{\Delta}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X} \right)^2} \right]$$

A Fig. 11.12 mostra um gráfico de N/k em função de Δ/X . Note que para $(\Delta/X) > 1$ a saída é nula, assim como o valor da função descritiva.

Não linearidade tipo saturação. Uma curva característica da entrada-saída para a não linearidade tipo saturação é vista na Fig. 11.13(a). Para sinais de entrada pequenos, a saída de um elemento de saturação é proporcional à entrada. Para sinais de entrada maiores a saída não aumentará proporcionalmente, e, finalmente, para sinais de entrada muito grandes a saída é constante. A Fig. 11.13(b) mostra as formas de onda da entrada e da saída para a não linearidade tipo saturação.

A função descritiva para um tal elemento pode ser obtida como

$$N = \frac{2k}{\pi} \left[\sin^{-1} \left(\frac{S}{X} \right) + \frac{S}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{S}{X} \right)^2} \right]$$

A Fig. 11.14 mostra um gráfico de N/k em função de S/X . Para $(S/X) > 1$, o valor da função descritiva é unitário.

Observe que a função descritiva para a não linearidade tipo zona morta e aquela para a não linearidade tipo saturação são relacionadas como segue:

$$N_{\text{zona morta}} = k - N_{\text{saturação}} \quad \text{para } \Delta = S$$

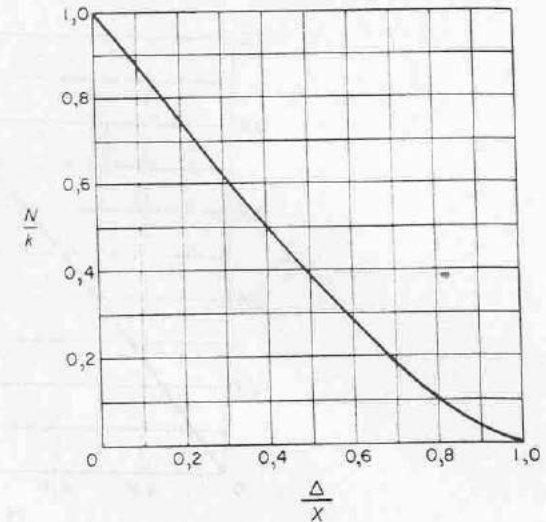


Fig. 11.12 Função descritiva para a não linearidade tipo zona morta.

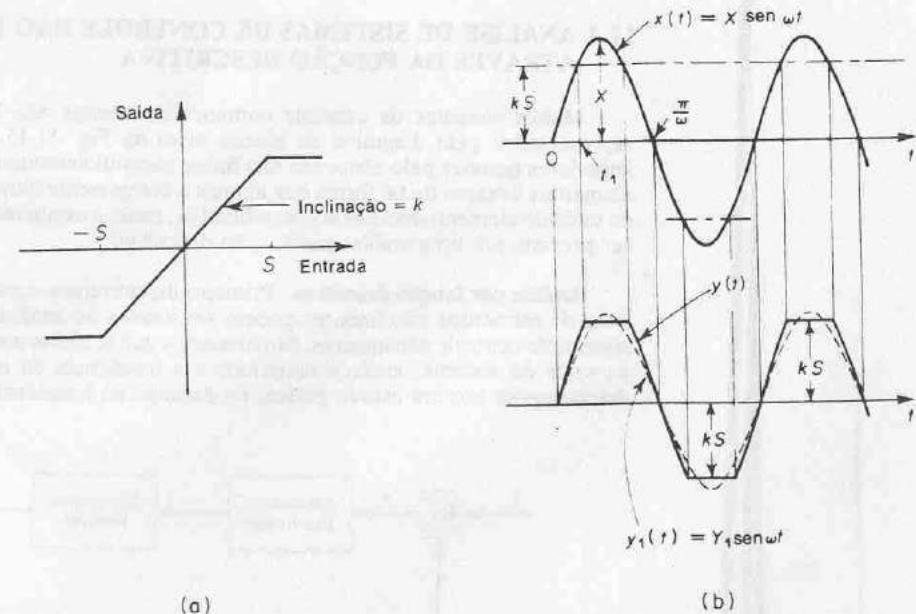


Fig. 11.13 (a) Curva de característica entrada-saída para a não linearidade tipo saturação; (b) formas de onda da entrada e saída para a não linearidade tipo saturação.

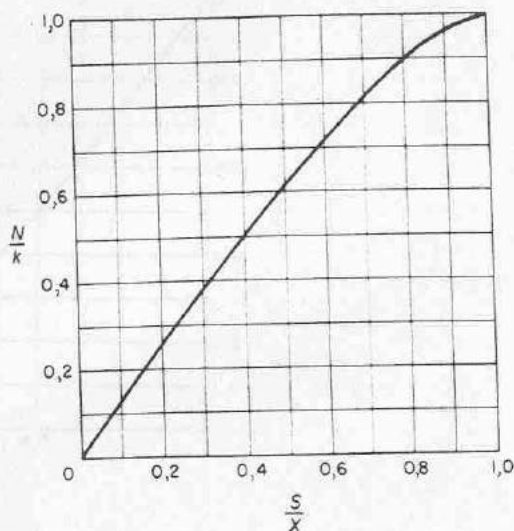


Fig. 11.14 Função descritiva para a não linearidade tipo saturação.

11.4 ANÁLISE DE SISTEMAS DE CONTROLE NÃO LINEARES ATRAVÉS DA FUNÇÃO DESCRITIVA

Muitos sistemas de controle contendo elementos não lineares podem ser representados pelo diagrama de blocos visto na Fig. 11.15. Se as harmônicas superiores geradas pelo elemento não linear são suficientemente atenuadas pelos elementos lineares de tal forma que apenas a componente harmônica fundamental da saída do elemento não linear é significativa, então a estabilidade do sistema pode ser prevista por uma análise por função descritiva.

Análise por função descritiva. Primeiro discutiremos como as funções descritivas de elementos não lineares podem ser usadas na análise de estabilidade de sistema de controle não lineares. Mostraremos que se existe uma oscilação mantida na saída do sistema, então a amplitude e a frequência da oscilação podem ser determinadas por um estudo gráfico no domínio da frequência.

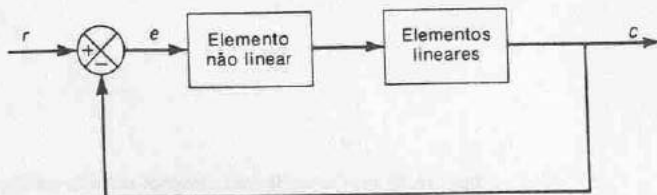


Fig. 11.15 Sistema de controle não linear.

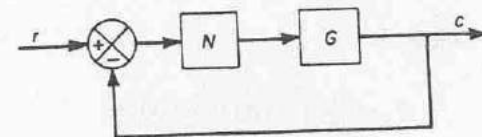


Fig. 11.16 Sistema de controle não linear.

Considere o sistema visto na Fig. 11.16. O bloco N indica a função descritiva do elemento não linear. Se as harmônicas de ordem superior são suficientemente atenuadas, a função descritiva N pode ser tratada como um ganho de variável real ou complexa. Então a resposta em frequência de malha-fechada se torna

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{NG(j\omega)}{1 + NG(j\omega)}$$

A equação característica é

$$1 + NG(j\omega) = 0$$

ou

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N} \quad (11.2)$$

Se a Eq. (11.2) é satisfeita, então a saída do sistema exibirá um ciclo limite. Esta situação corresponde ao caso em que o lugar geométrico de $G(j\omega)$ passa pelo ponto crítico. (Na análise convencional de resposta em frequência de sistemas de controle lineares, o ponto crítico é o ponto $-1 + j0$.)

Na análise de função descritiva, a análise convencional da resposta em frequência é modificada de tal forma que todo o lugar geométrico $-1/N$ se torna o lugar geométrico de pontos críticos. Portanto, a posição relativa dos lugares geométricos de $-1/N$ e de $G(j\omega)$ proverá a informação de estabilidade.

Para determinar a estabilidade do sistema, fazemos um gráfico dos lugares geométricos de $-1/N$ e de $G(j\omega)$. Na presente análise, supomos que a parte linear do sistema é de mínima fase ou que todos os pólos e zeros de $G(s)$ estão no semiplano esquerdo do plano s , incluindo o eixo $j\omega$. O critério para estabilidade é que se o lugar geométrico de $-1/N$ não é interceptado pelo lugar geométrico de $G(j\omega)$, então o sistema é estável, ou não há ciclo limite em regime estacionário.

Por outro lado, se o lugar geométrico de $-1/N$ é interceptado pelo lugar geométrico de $G(j\omega)$, então o sistema é instável, e a saída do sistema, quando sujeita a qualquer perturbação, crescerá até que haja danificação ou que se atinja um valor limite determinado por um obstáculo mecânico ou outro dispositivo de segurança.

Se os lugares geométricos de $-1/N$ e de $G(j\omega)$ se interceptam, então a saída do sistema pode apresentar uma oscilação mantida, ou um ciclo limite. Tal oscilação mantida não é senoidal, mas pode ser aproximada por uma senóide. A oscilação mantida é caracterizada pelo valor de X no lugar geométrico de $-1/N$ e o valor de ω na interseção do lugar geométrico de $G(j\omega)$.

Em geral, um sistema de controle não deve apresentar comportamento de ciclo limite, embora um ciclo limite de amplitude pequena possa ser aceitável em certas aplicações.

Estabilidade de oscilações mantidas, ou ciclos limite. A estabilidade de um ciclo limite pode ser prevista como segue: Considere o sistema visto na Fig. 11.17. Suponha que o ponto A no lugar geométrico de $-1/N$ corresponde a um baixo valor de X , onde X é a amplitude do sinal de entrada senoidal no elemento não linear, e que o ponto B no lugar geométrico de $-1/N$ corresponde a um valor grande de X . O valor de X no lugar geométrico de $-1/N$ aumenta na direção do ponto A ao ponto B .

Vamos supor que o sistema está sendo operado no ponto A . A oscilação tem amplitude X_A e frequência ω_A , determinados a partir dos lugares geométricos de $-1/N$ e de $G(j\omega)$, respectivamente. Suponha que uma leve perturbação é dada ao sistema, sendo operado no ponto A de tal forma que a amplitude da entrada ao elemento não linear é levemente aumentada. (Por exemplo, suponha que o ponto de operação se move do ponto A ao ponto C no lugar geométrico de $-1/N$.) Então o ponto de operação C corresponde ao ponto crítico ou ao ponto $-1 + j0$ no plano complexo para sistemas de controle lineares. Portanto, como visto na Fig. 11.17, o lugar geométrico de $G(j\omega)$ circunda o ponto C no significado de Nyquist. Como isto é semelhante ao caso em que o lugar geométrico de malha-aberta de um sistema linear circunda o ponto $-1 + j0$, a amplitude aumentará e o ponto de operação se move em direção ao ponto B .

Em seguida suponha que uma pequena perturbação diminui a amplitude da entrada senoidal ao elemento não linear. Suponha que o ponto de operação é movido do ponto A ao ponto D no lugar geométrico de $-1/N$. O ponto D então corresponde ao ponto crítico. Neste caso, o lugar geométrico de $G(j\omega)$ não circunda o ponto crítico e, portanto, a amplitude da entrada do elemento não linear diminui, e

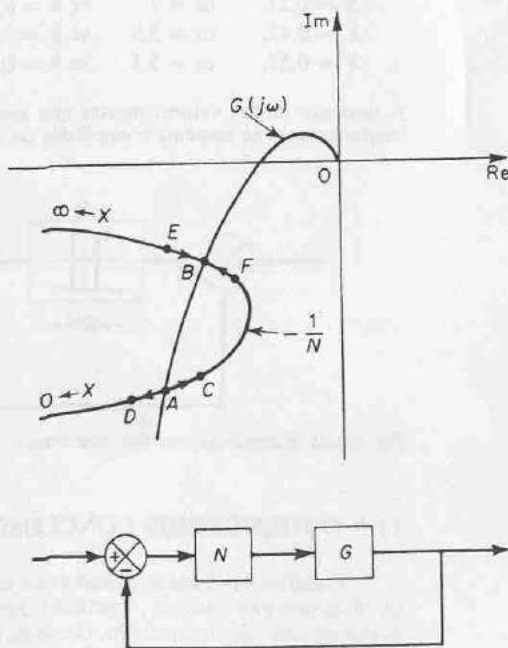


Fig. 11.17 Análise de estabilidade de operações de ciclo limite de sistema de controle não linear.

o ponto de operação se move além do ponto D para a esquerda. Portanto, o ponto A possui características divergentes e corresponde a um ciclo limite instável.

Considere a seguir o caso em que uma pequena perturbação é dada ao sistema operando no ponto B . Suponha que o ponto de operação é movido para o ponto E no lugar geométrico de $-1/N$. Então, neste caso, o lugar geométrico de $G(j\omega)$ não circunda o ponto crítico (ponto E). A amplitude da senóide de entrada do elemento não linear decresce, e o ponto de operação se move em direção ao ponto B .

De forma similar, suponha que uma pequena perturbação faz com que o ponto de operação do sistema se mova do ponto B ao ponto F . Então o lugar geométrico de $G(j\omega)$ circundará o ponto crítico (ponto F). Portanto, a amplitude da oscilação crescerá, e o ponto de operação se move do ponto F em direção ao ponto B . Desta forma, o ponto B possui características convergentes, e a operação do sistema no ponto B é estável; em outras palavras, o ciclo limite neste ponto é estável.

Para o sistema visto na Fig. 11.17, o ciclo limite estável correspondendo ao ponto B pode ser observado experimentalmente, mas não o ciclo limite instável que corresponde ao ponto A .

Precisão da análise por função descritiva. Observe que a amplitude e frequência do ciclo limite indicado pela intersecção dos lugares geométricos de $-1/N$ e $G(j\omega)$ são valores aproximados.

Se os lugares geométricos de $-1/N$ e $G(j\omega)$ se interceptam quase perpendicularmente, então a precisão da análise por função descritiva é geralmente boa. (Se as harmônicas de ordem superior são todas atenuadas, a precisão é excelente. Caso contrário a precisão é boa a razoável.)

Se o lugar geométrico de $G(j\omega)$ é tangente, ou quase tangente ao lugar geométrico de $-1/N$, então a precisão da informação obtida da análise por função descritiva depende de quão bem irá $G(j\omega)$ atenuar as harmônicas de ordem superior. Em alguns casos, há uma oscilação mantida, em outros casos, não há tais oscilações. Este fato depende da natureza de $G(j\omega)$. Entretanto, pode-se dizer que o sistema está a ponto de apresentar um ciclo limite quando os lugares geométricos de $-1/N$ e de $G(j\omega)$ são tangentes entre si.

Exemplo 11.1 A Fig. 11.18 mostra um sistema de controle com uma não linearidade tipo saturação. Supomos que $G(s)$ é uma função de transferência de mínima fase. A Fig. 11.19 mostra um gráfico dos lugares geométricos de $-1/N$ e $G(j\omega)$. O lugar geométrico de $-1/N$ começa no ponto -1 no eixo real negativo e se estende até $-\infty$. Claramente N é uma função apenas da amplitude do sinal de entrada $x(t) = X \sin \omega t$. O lugar geométrico de $G(j\omega)$ é uma função apenas de ω .

A Fig. 11.19 mostra que os dois lugares geométricos se interceptam. Esta intersecção corresponde a um ciclo limite estável. A amplitude do ciclo limite é lida do lugar geométrico de $-1/N$ como sendo $X = X_1$. A frequência do ciclo limite é lida do lugar geométrico de $G(j\omega)$ como sendo $\omega = \omega_1$.

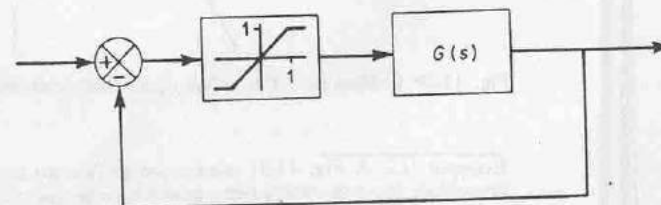


Fig. 11.18 Sistema de controle com não linearidade tipo saturação.

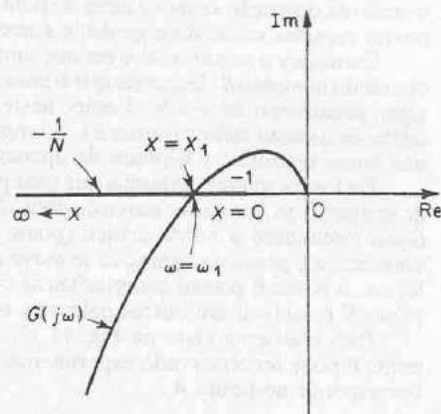


Fig. 11.19 Gráfico de $-1/N$ e $G(j\omega)$ para análise de estabilidade.

Na ausência de qualquer entrada de referência, a saída deste sistema em regime estacionário apresenta uma oscilação mantida com amplitude igual a X_1 e frequência igual a ω_1 .

Se o ganho da função de transferência $G(s)$ é diminuído de tal forma que os lugares geométricos de $-1/N$ e $G(j\omega)$ não se interceptem, como visto na Fig. 11.20, então o sistema se torna estável, e quaisquer oscilações que possam ocorrer na saída do sistema como resultado de perturbações se extinguirão e não haverá oscilações mantidas em regime estacionário. Isto acontece porque o lugar geométrico de $-1/N$ está à esquerda do lugar geométrico de $G(j\omega)$, ou o lugar geométrico de $G(j\omega)$ não intercepta o lugar geométrico de $-1/N$.

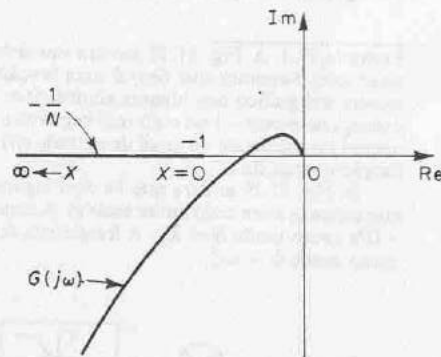


Fig. 11.20 Gráfico de $-1/N$ e $G(j\omega)$ para análise de estabilidade.

Exemplo 11.2 A Fig. 11.21 mostra um gráfico do lugar geométrico de $-1/N$ para a não linearidade tipo zona morta bem como o lugar geométrico de $G(j\omega)$. Neste sistema, os lugares geométricos de $-1/N$ e $G(j\omega)$ se interceptam. O ciclo limite neste caso é instável. A oscilação ou se extingue ou aumenta de amplitude indefinidamente. Isto indica uma situação indesejável e deve ser evitada.

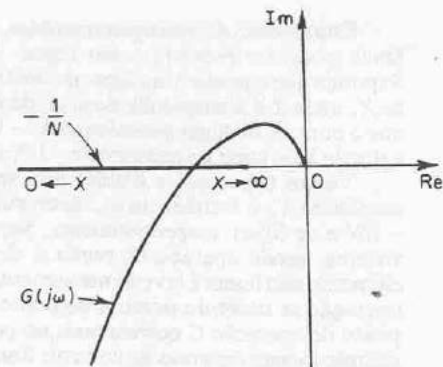


Fig. 11.21 Gráfico de $-1/N$ e $G(j\omega)$ para análise de estabilidade.

Exemplo 11.3 Considere o sistema visto na Fig. 11.22. Determine o efeito de histerese na amplitude e frequência da operação de ciclo limite do sistema.

Os lugares geométricos de $-1/N$ para três diferentes valores de h : $h = 0,1, 0,2$ e $0,3$, são vistos na Fig. 11.23, juntamente com o lugar geométrico de $G(j\omega)$. Os lugares geométricos de $-1/N$ são retas paralelas ao eixo real. Os valores de N são obtidos a partir da Fig. 11.10.

Da Fig. 11.23, pode-se ver que as amplitudes e frequências dos ciclos limite são

$X = 0,27,$	$\omega = 7$	se $h = 0,1$
$X = 0,42,$	$\omega = 5,9$	se $h = 0,2$
$X = 0,57,$	$\omega = 5,1$	se $h = 0,3$

A inspeção destes valores mostra que aumentando a largura da histerese se diminui a frequência mas se aumenta a amplitude do ciclo limite, como esperado.

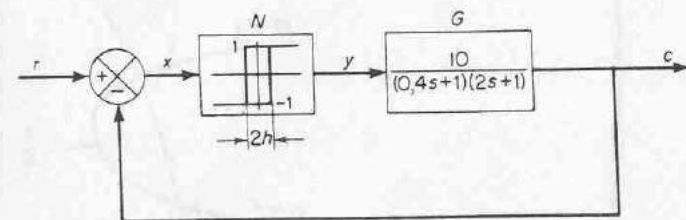


Fig. 11.22 Sistema de controle não linear.

11.5 COMENTÁRIOS CONCLUSIVOS

A análise por função descritiva é uma extensão de técnicas lineares ao estudo de sistemas não lineares. Portanto, aplicações típicas são para sistemas com um baixo grau de não linearidade. O uso da função descritiva na análise de sistemas não lineares de grau elevado pode levar a resultados muito errados; isto limita a aplicabilidade da função descritiva para a análise e projeto de sistemas não lineares de baixo grau.

Para concluir este capítulo, resumiremos o método da função descritiva para a análise e projeto de sistemas de controle não lineares.

1. O método da função descritiva é um método aproximado para determinar a estabilidade de sistemas de controle não lineares não excitados. Ao aplicar este método, deve-se ter em mente as suposições básicas e limitações. Embora muitos sistemas de controle na prática satisfaçam as suposições básicas do método de função descritiva, há alguns sistemas que não o fazem. Portanto, sempre é necessário examinar a validade do método em cada caso.
2. Na análise por função descritiva, a natureza da não linearidade presente no sistema determina a complexidade da análise. Em outras palavras, os elementos lineares de qualquer ordem não afetam a complexidade. Uma vantagem deste método é que a análise não é essencialmente mais complicada para sistemas com dinâmica complexa nas suas partes lineares. A precisão da análise é melhor para sistemas de ordem alta do que de ordem baixa porque sistemas de ordem elevada em geral têm melhores características de filtragem passa-baixas.
3. Embora o método da função descritiva seja bastante útil na predição da estabilidade de sistemas não forçados, ele fornece pouca informação sobre características de resposta transitória.
4. O método da função descritiva é conveniente para ser aplicado a problemas de projeto. O uso de funções descritivas nos permite aplicar métodos de resposta em frequência para o reajuste ou modificação do lugar geométrico de $G(j\omega)$. A análise por função descritiva é particularmente útil quando o projetista quer ter uma idéia a grosso modo dos efeitos de certas não linearidades ou dos efeitos da modificação de componentes lineares ou não lineares na malha de controle. A análise fornece informação gráfica sobre a estabilidade e sugere maneiras de melhorar as características de resposta, caso necessário. Quando o lugar geométrico de $-1/N$ e de $G(j\omega)$ são colocados em um

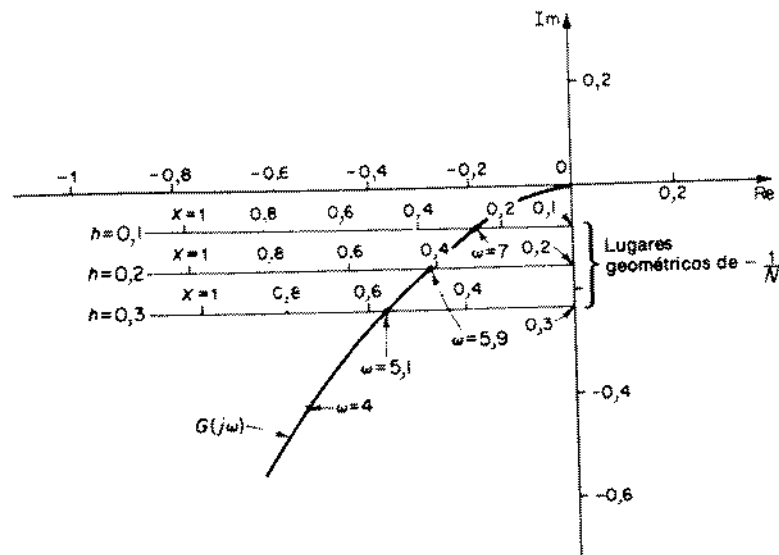
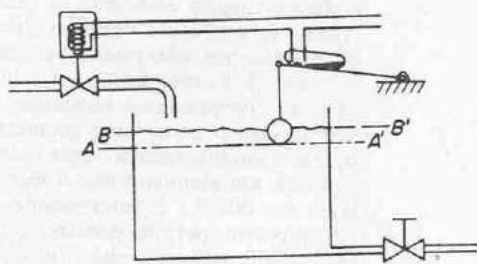


Fig. 11.23 Gráfico de $-1/N$ e $G(j\omega)$ para o sistema visto na Fig. 11.22.

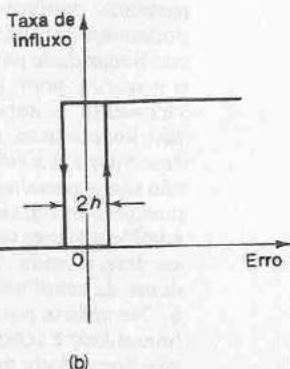
- gráfico do plano complexo, o desempenho do sistema pode ser estimado rapidamente a partir do gráfico. Se quaisquer melhoramentos de desempenho são necessários, eles podem ser conseguidos modificando-se os lugares geométricos. Esta modificação dos lugares geométricos sugere o tipo de uma rede de compensação adequada. (Projetos através da função descritiva podem sugerir certo lugar geométrico de $-1/N$, em particular, ao invés de sugerir a modificação do lugar geométrico de $G(j\omega)$. Entretanto, a realização física de um elemento não linear com uma função descritiva especificada pode ser difícil.) É interessante notar que embora o método da função descritiva nos permita prever ciclos-limite com boa precisão em termos de engenharia, em problemas de projeto o método é usado como um critério negativo, em que parâmetros do sistema são ajustados até que condições de ciclo limite sejam eliminadas e garantida uma estabilidade relativa adequada.
5. Um sistema físico pode possuir dois ou mais elementos não lineares. Quando apenas um elemento não linear se torna significativo para uma particular condição de operação, os efeitos dos outros elementos não lineares podem ser desprezados na análise. Por exemplo, se o sistema apresenta tanto não linearidade para baixos sinais como não linearidades para sinais grandes, o primeiro pode ser desprezado quando a amplitude do sinal é grande e vice-versa. É importante manter em mente que a função descritiva de duas não linearidades em série é, em geral, diferente do produto das funções descritivas individuais. Portanto, se dois ou mais elementos não lineares, que não são separados entre si por filtros passa-baixas efetivos, se tornam simultaneamente significativos sob certas condições de operação, eles podem ser combinados em um bloco, e a função descritiva equivalente deste bloco pode ser determinada. Neste caso, a função descritiva pode-se tornar tanto dependente da amplitude como da frequência.
6. Na análise por função descritiva usual, supõe-se que a entrada para a não linearidade é senoidal, mas esta hipótese pode ser estendida. A entrada para a não linearidade pode ser um sinal senoidal, somado com um sinal adicional, embora esta complicação adicional possa tornar a análise muito maçante. As funções descritivas que correspondem a este caso são chamadas de funções descritivas de entradas duais.
7. Em alguns casos a análise de estabilidade de sistemas de controle pode ser de interesse primordial, mas em outros casos pode-se desejar uma resposta ótima (em certo sentido). Problemas de projeto ótimo podem envolver a determinação de um controlador não linear (ou computador) a ser inserido no sistema. O desempenho do sistema não linear depende bastante dos sinais de entrada. Isto significa que são necessárias descrições precisas da entrada e da saída desejada. Em virtude da pequena correlação entre a resposta em frequência e a resposta temporal de sistemas não lineares, o método da função descritiva deixa de ser útil no projeto de sistemas de controle ótimos com entradas aperiódicas. (Sistemas de controle ótimos com entradas aperiódicas são discutidos no Cap. 16.)

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS E SOLUÇÕES

Problema A.11.1 A Fig. 11.24(a) é um diagrama esquemático de um sistema de controle de nível de líquido. O movimento da bóia posiciona a chave elétrica de mercúrio que energiza ou desenergiza a válvula elétrica operada por solenóide. Quando a válvula está aberta, entra líquido no tanque. A ação de controle é liga-desliga com histerese. A curva da taxa de influxo em função do erro é vista na Fig. 11.24(b). (A largura da histerese $2h$ é chamada de abertura (gap) diferencial.)



(a)



(b)

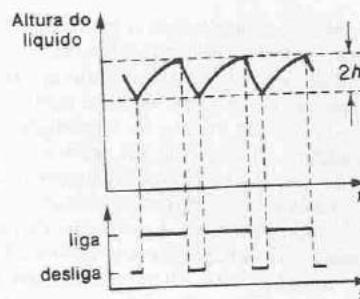
Fig. 11.24 (a) Sistema de controle de nível de líquido; (b) curva da taxa de influxo em função do erro para o controlador.

Faça um gráfico da altura do líquido em função do tempo em operação estacionária sob as seguintes condições:

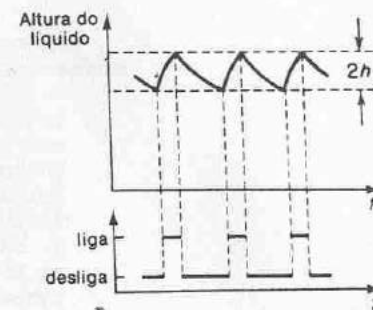
1. A taxa de subida na altura do líquido quando a válvula de influxo está aberta é consideravelmente menor que a taxa de descida na altura do líquido quando a válvula está fechada.
2. A taxa de subida na altura do líquido quando a válvula de influxo está aberta é consideravelmente maior do que a taxa de descida na altura do líquido quando a válvula está fechada.

Solução. Suponha que o nível do líquido está baixando e que a válvula de influxo está fechada. Quando o nível atinge o nível AA' na Fig. 11.24(a), o limite inferior da abertura diferencial, os contatos da chave de mercúrio serão fechados e a válvula de influxo será aberta, permitindo a entrada de líquido no tanque. A altura do líquido começará a aumentar quando a válvula de influxo é aberta. No começo haverá uma taxa de subida alta. À medida que o nível do tanque sobe, o efluxo aumentará devido à maior altura de líquido. O resultado é um influxo total menor no tanque. Quando a altura alcança o nível BB' na Fig. 11.24(a), os contatos da chave de mercúrio serão abertos e a válvula de influxo será fechada. A altura do líquido então começará a cair.

A Fig. 11.25(a) mostra a curva da altura do líquido em função do tempo sob a Condição 1, quando a taxa de subida na altura com a válvula de influxo aberta é consideravelmente menor do que a taxa de descida na altura quando a válvula está fechada. Aqui o tempo de permanên-



(a)



(b)

Fig. 11.25 (a) Curva da altura do líquido em função do tempo sob a Condição 1; (b) curva da altura do líquido em função do tempo sob a Condição 2.

cia no estado ligado é consideravelmente maior do que o tempo desligado. A Fig. 11.25(b) mostra uma curva de altura de líquido em função do tempo sob a Condição 2. O tempo ligado é consideravelmente menor do que o tempo desligado.

Em qualquer das condições, o nível oscila em torno do valor desejado. Portanto o sistema apresenta comportamento de ciclo limite. Em qualquer caso, o influxo médio é igual ao efluxo médio. As taxas de influxo-efluxo determinam a forma da curva do nível em função do tempo. Se a altura sobe com uma taxa que é igual à de descida com a válvula fechada, então o tempo ligado e o tempo desligado serão iguais.

Note que alargando a abertura da histerese (gap), haverá operação menos freqüente da chave de mercúrio e da válvula operada por solenóide. Isto normalmente significa vida mais longa para o equipamento. A desvantagem de se operar com menor freqüência é que a variação da altura do líquido no tanque se torna maior.

Finalmente, deve-se notar que o controle liga-desliga oferece a melhor economia, a maior sensibilidade e facilidade de manutenção. Portanto, se um ciclo limite de amplitude pequena é permitido em uma aplicação particular, então o uso de qualquer outro tipo de controle seria um erro.

Problema A.11.2 Obtenha a função descritiva para a não linearidade liga-desliga com zona morta vista na Fig. 11.26.

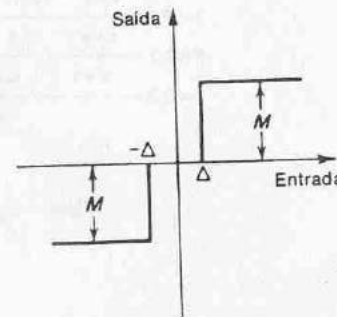


Fig. 11.26 Curva da característica de entrada-saída para a não linearidade tipo liga-desliga com zona morta.

Solução. A Fig. 11.27 mostra as formas de onda da entrada e da saída para um elemento com a dada não linearidade.

A saída do elemento não linear para $0 \leq \omega t \leq \pi$ é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= 0 & \text{para } 0 < t < t_1 \\ &= M & \text{para } t_1 < t < \frac{\pi}{\omega} - t_1 \\ &= 0 & \text{para } \frac{\pi}{\omega} - t_1 < t < \pi \end{aligned}$$

A forma de onda da saída é uma função ímpar. Portanto a componente harmônica fundamental da saída $y(t)$ é dada por

$$y_1(t) = Y_1 \sin \omega t$$

onde

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y(t) \sin \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{4}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\pi/2} M \sin \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{4M}{\pi} \cos \omega t_1 \end{aligned}$$

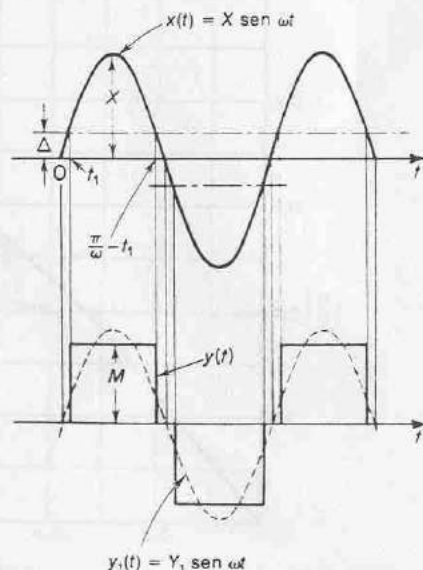


Fig. 11.27 Formas de onda de entrada e saída para a não linearidade tipo liga-desliga com zona morta.

Como $\sin \omega t_1 = \Delta/X$, obtemos

$$\cos \omega t_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}$$

Portanto

$$y_1(t) = \frac{4M}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2} \sin \omega t$$

A função descritiva para um elemento liga-desliga com zona morta é

$$N = \frac{4M}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}$$

A função descritiva neste caso é uma função apenas da amplitude de entrada X . A Fig. 11.28 mostra um gráfico de $\Delta N/M$ em função de Δ/X .

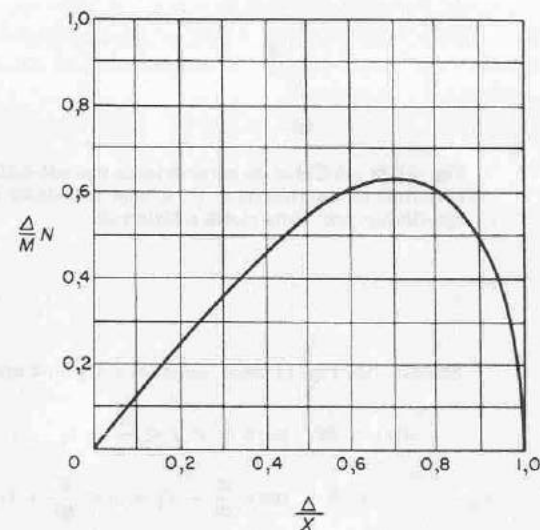


Fig. 11.28 Função descritiva para a não linearidade tipo liga-desliga com zona morta.

Problema A.11.3 A Fig. 11.29(a) mostra a curva de característica entrada-saída para uma não linearidade tipo liga-desliga com zona morta e histerese. A Fig. 11.29(b) mostra as formas de onda da entrada e saída de uma chave de contato com esta não linearidade.

A chave não se fecha até que a entrada exceda o valor $\Delta + h$. A chave permanece fechada até que a entrada se torna menor do que $\Delta - h$. Na região entre $\Delta - h$ e $\Delta + h$, a saída depende da história passada da entrada. A chave abre ou fecha de forma semelhante para uma entrada negativa.

Obtenha a função descritiva para a chave com esta não linearidade.

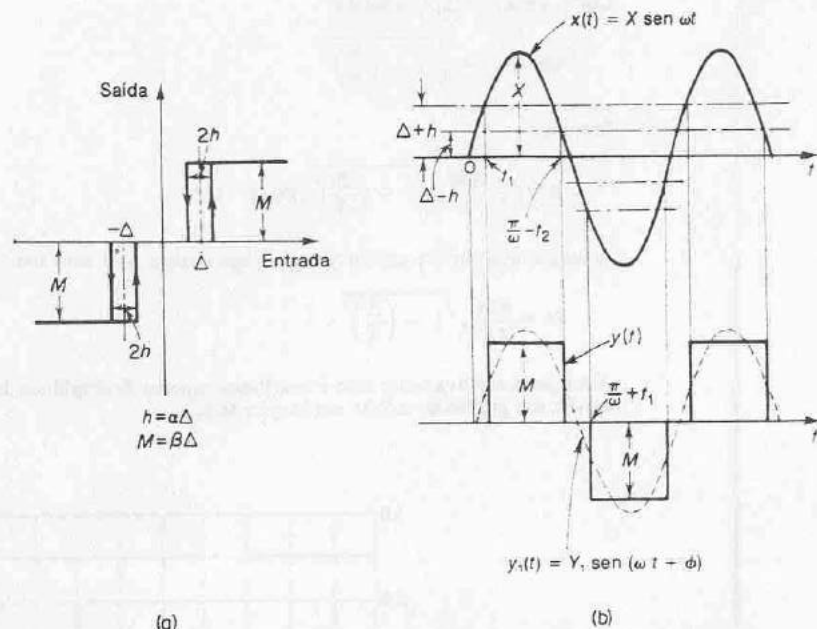


Fig. 11.29 (a) Curva da característica entrada-saída para a não linearidade tipo liga-desliga com zona morta e histerese; (b) formas de onda da entrada e saída para a não linearidade tipo liga-desliga com zona morta e histerese.

Solução. Da Fig. 11.29(b), obtemos a seguinte equação:

$$y(t) = M \quad \text{para } t_1 < t < \frac{\pi}{\omega} - t_2$$

$$= 0 \quad \text{para } \frac{\pi}{\omega} - t_2 < t < \frac{\pi}{\omega} + t_1$$

onde t_1 e t_2 são definidos por

$$\sin \omega t_1 = \frac{\Delta + h}{X}$$

$$\sin \omega t_2 = \frac{\Delta - h}{X}$$

Como visto na Fig. 11.29(b), a saída está atrasada em relação à entrada. A componente harmônica fundamental da saída pode ser obtida como segue:

$$y_1(t) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t$$

onde

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi y(t) \cos \omega t \, d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\pi - \omega t_2} M \cos \omega t \, d(\omega t) = \frac{4hM}{\pi X}$$

$$B_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi y(t) \sin \omega t \, d(\omega t)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\pi - \omega t_2} M \sin \omega t \, d(\omega t)$$

$$= \frac{2M}{\pi} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta - h}{X} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta + h}{X} \right)^2} \right]$$

Vamos definir

$$h = \alpha \Delta, \quad M = \beta \Delta$$

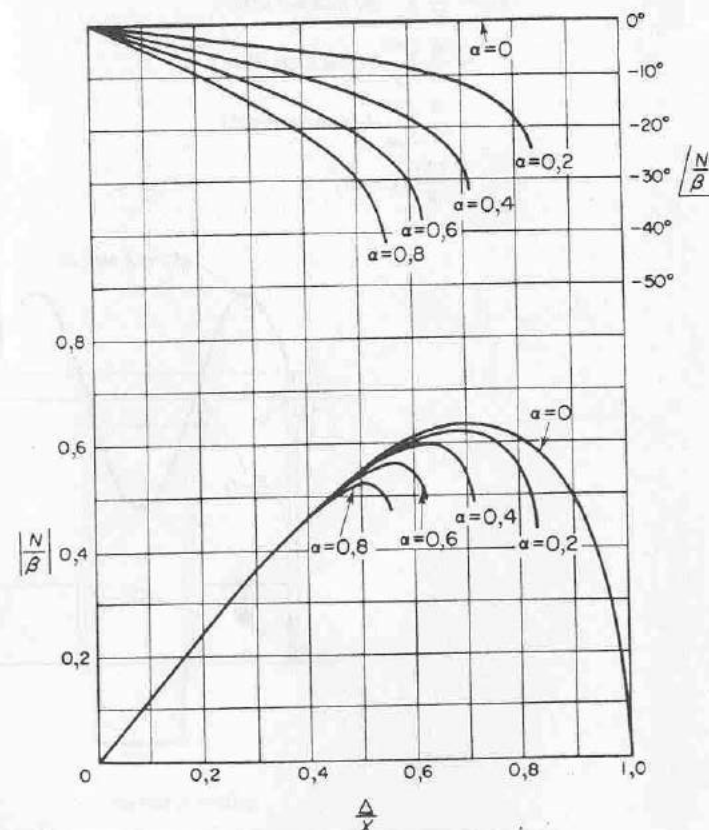


Fig. 11.30 Função descritiva para a não linearidade tipo liga-desliga com zona morta e histerese.

Os valores de α e β são constantes para uma dada não linearidade tipo liga-desliga com zona morta e histerese. Então.

$$\frac{A_1}{X} = -\frac{4\alpha\beta}{\pi} \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2$$

$$\frac{B_1}{X} = \frac{2\beta}{\pi} \frac{\Delta}{X} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2 (1 - \alpha)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2 (1 + \alpha)^2} \right]$$

Portanto a função descritiva para esta não linearidade é

$$N = \sqrt{\left(\frac{A_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{B_1}{X}\right)^2} \tan^{-1} \left(\frac{A_1}{B_1} \right)$$

Esta função descritiva é uma grandeza complexa. A Fig. 11.30 mostra gráficos de $|N/\beta|$ em função de Δ/X e N/β em função de Δ/X .

Problema A.11.4 O sistema visto na Fig. 11.31 apresenta um ciclo limite com a frequência de oscilação de 5.9 rad/s, como visto na Fig. 11.32. Queremos diminuir a frequência do ciclo limite para 4 rad/s. Determine a modificação necessária no ganho de $G(s)$, supondo que o elemento não linear é prefixado.

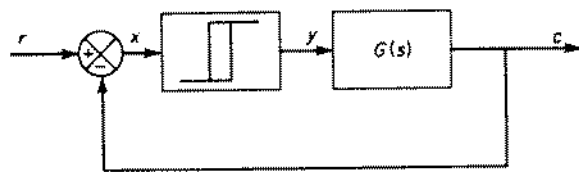


Fig. 11.31 Sistema de controle não linear.

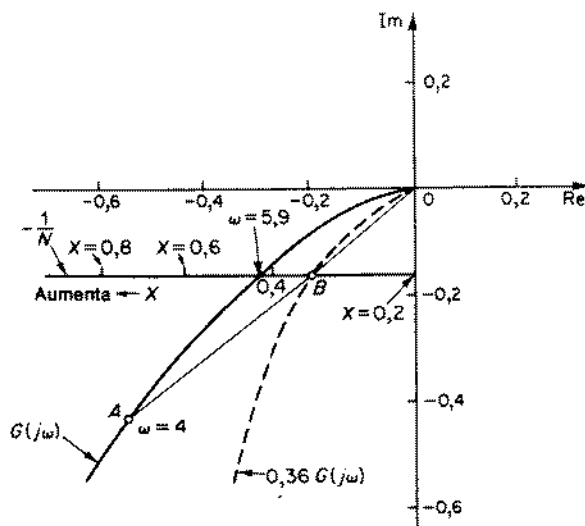


Fig. 11.32 Gráfico de $-1/N$ e $G(j\omega)$.

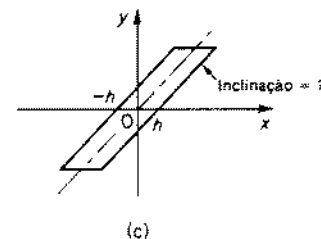
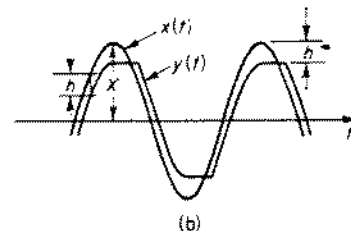
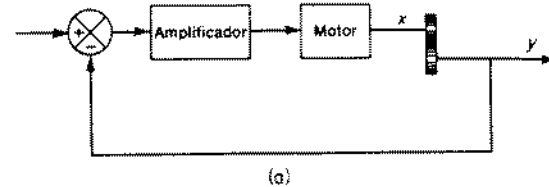


Fig. 11.33 (a) Diagrama em blocos de um servomecanismo com folga; (b) curvas características da não linearidade tipo folga; (c) curva da característica entrada-saída para uma não linearidade tipo folga (ou histerese).

Solução. Da Fig. 11.32, OB/OA é determinado como sendo 0.36. Portanto, se o valor do ganho de $G(s)$ é diminuído para 36% do valor original, a frequência do novo ciclo limite será 4 rad/s. A amplitude também diminui, de 0.42 para 0.35.

Problema A.11.5 A Fig. 11.33(a) mostra o diagrama em blocos de um servomecanismo consistindo em um amplificador, um motor e engrenagens. A posição da saída é realimentada para a entrada a fim de gerar o sinal de erro. Supõe-se que a inércia das engrenagens é desprezível comparada com a do motor, e também se supõe uma relação de engrenagens igual a um.

Em virtude da folga, os sinais $x(t)$ e $y(t)$ são relacionados como visto na Fig. 11.33(b). A Fig. 11.33(c) mostra a curva da característica de entrada-saída para a não linearidade tipo folga aqui considerada. A função descritiva para esta não linearidade é mostrada na Fig. 11.34.

Usando esta função descritiva, determine a amplitude e frequência do ciclo limite quando a função de transferência da combinação amplificador-motor é dada por

$$\frac{5}{s(s-1)}$$

e a amplitude da folga é dada como unitária, ou $h = 1$.

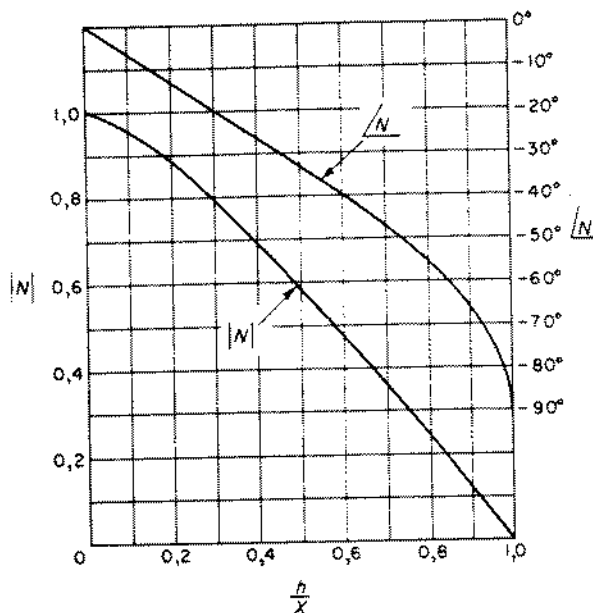


Fig. 11.34 Função descritiva para uma não linearidade tipo folga, ou uma não linearidade tipo histerese vista na Fig. 11.33(c).

Solução. Do enunciado do problema, o diagrama de blocos do sistema pode ser desenhado como visto na Fig. 11.35. A informação sobre a operação de ciclo limite do sistema pode ser facilmente obtida se fizermos um gráfico no domínio da frequência.

A Fig. 11.36 mostra um gráfico dos lugares geométricos de $-1/N$ e $G(j\omega)$ no diagrama do logaritmo do módulo em função da fase. Como visto no gráfico, há duas interseções dos dois lugares geométricos. Aplicando o teste de estabilidade para o ciclo limite, como discutido na Seção 11.4, percebemos que o ponto A corresponde a um ciclo limite estável e que o ponto B corresponde a um ciclo limite instável. O ciclo limite estável tem uma frequência de 1.6 rad/s e uma amplitude de 2. (O ciclo limite estável não pode ocorrer fisicamente.)

Para evitar comportamento de ciclo limite, o ganho do amplificador deve ser diminuído suficientemente para que o lugar geométrico de $G(j\omega)$ se localize bem abaixo do lugar geométrico de $-1/N$ no diagrama do log do módulo em função da fase. Se os dois lugares geométricos são tangentes, a precisão da análise por função descritiva é baixa, e podemos esperar um ciclo limite ou uma oscilação amortecida lentamente.

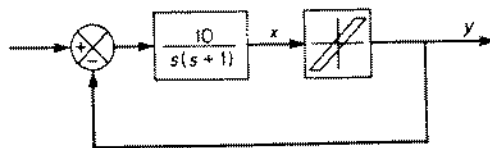


Fig. 11.35 Representação em diagrama em blocos para o servomecanismo visto na Fig. 11.33(a).

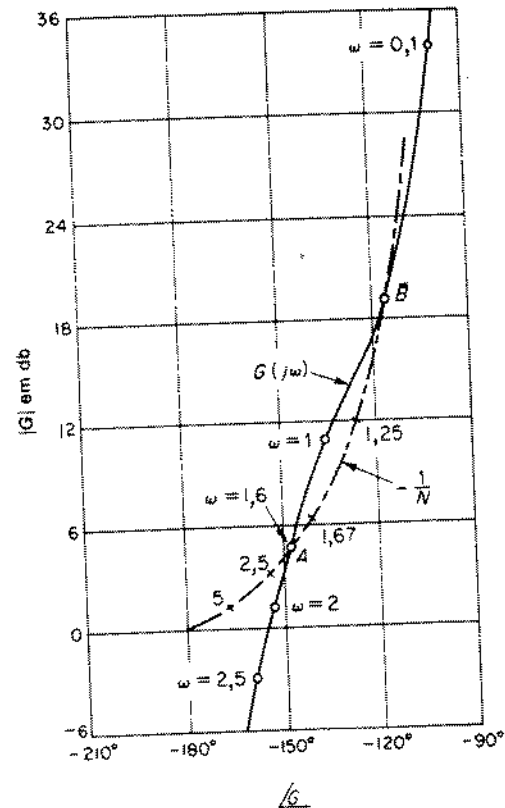


Fig. 11.36 Gráfico de $-1/N$ e $G(j\omega)$ do servomecanismo visto na Fig. 11.35.

PROBLEMAS

Problema B.11.1 Para o sistema visto na Fig. 11.37, determine a amplitude e frequência do ciclo limite.

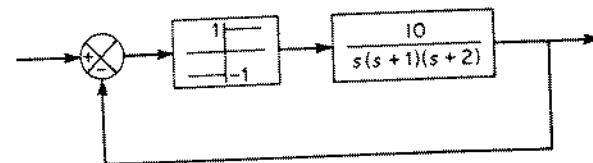


Fig. 11.37 Sistema de controle não linear.

Problema B.11.2 Determine a função descritiva para o elemento não linear descrito por

$$y = x^3$$

onde

x = entrada para o elemento não linear (sinal senoidal)

y = saída do elemento não linear

Problema B.11.3 Determine a estabilidade do sistema visto na Fig. 11.38.

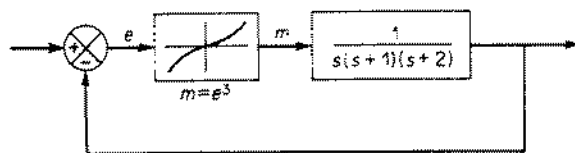


Fig. 11.38 Sistema de controle não linear.

Problema B.11.4 Determine a amplitude e a frequência do ciclo limite do sistema visto na Fig. 11.39.

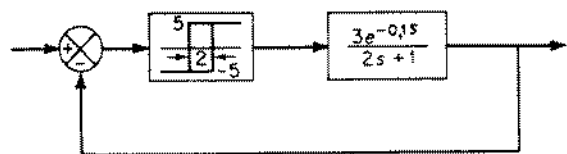


Fig. 11.39 Sistema de controle não linear.

Problema B.11.5 Determine a equação da função descritiva N para a não linearidade de histerese vista na Fig. 11.33(c).

Problema B.11.6 Referindo-se às formas de onda da entrada e saída para a não linearidade tipo saturação vista na Fig. 11.13(b), obtenha a amplitude da componente terceira harmônica da saída e faça um gráfico de Y_3/Y_1 como função de S/X , onde Y_1 é a amplitude da componente harmônica fundamental e Y_3 é a amplitude da componente terceira harmônica.

Problema B.11.7* Considere um elemento não linear cuja característica de entrada-saída é definida por

$$y = b_1x + b_3x^3 + b_5x^5 + b_7x^7 + \dots$$

onde

x = entrada para o elemento não linear (sinal senoidal)

y = saída do elemento não linear

Mostre que a função descritiva para esta não linearidade pode ser dada por

$$N = b_1 + \frac{2}{3}b_3X^2 + \frac{8}{15}b_5X^4 + \frac{64}{105}b_7X^6 + \dots$$

onde X é a amplitude da senóide de entrada $x = X \sin \omega t$.

*Referência W-1.

Análise por Plano de Fase

12.1 INTRODUÇÃO

Considere um sistema de segunda-ordem descrito pela seguinte equação diferencial ordinária:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

onde $f(x, \dot{x})$ é uma função linear ou não linear de x e \dot{x} . A solução temporal deste sistema pode ser ilustrada através de um gráfico de $x(t)$ em função de t . Ela também pode ser ilustrada fazendo-se o gráfico de $\dot{x}(t)$ em função de $x(t)$ usando t como parâmetro.

Se tomamos x e \dot{x} como as coordenadas de um plano, a cada estado do sistema corresponde um ponto neste plano. Quando t varia, este ponto descreve uma curva no plano $x - \dot{x}$, indicando a história do sistema. Tal curva é chamada uma *trajetória*.

A representação geométrica do comportamento do sistema em termos de trajetórias é chamada uma representação de plano de fase da dinâmica do sistema. Embora o diagrama do plano de fase forneça uma visualização clara das trajetórias para sistemas de segunda-ordem, normalmente é difícil visualizar ou construir trajetórias para sistemas de terceira-ordem. Para sistemas de ordem maior que três, é impossível visualizar as trajetórias; entretanto, noções sobre o movimento de um ponto representativo em espaço de duas dimensões podem ser conceitualmente estendidas para espaços n -dimensionais.

Este capítulo apresenta o método do plano de fase para análise de sistemas de segunda-ordem. O método é especialmente útil no tratamento de sistemas com fortes não linearidades. Ao contrário do método da função descritiva, o método do plano de fase não é restrito a pequenas não linearidades. A familiaridade com este método pode nos permitir resolver problemas de controle não linear específicos, bem como entender as características fundamentais de certos sistemas não lineares. Embora os sistemas que podem ser analisados por este método sejam praticamente limitados a sistemas de primeira e segunda-ordem, os resultados obtidos estudando-se os efeitos de uma não linearidade na resposta de um sistema de segunda-ordem fornecem considerável intuição no comportamento de sistemas de ordem superior tendo a mesma não linearidade. Neste sentido, o método do plano de fase é bastante útil para analisar sistemas de controle não lineares. Também é útil para sintetizar tais sistemas. Em particular, o controle ótimo de sistemas de segun-

da-ordem pode ser estudado convenientemente no plano de fase (veja Cap. 16). Note, entretanto, que as limitações na ordem do sistema diminuem a utilidade deste método no estudo de sistemas de controle ótimo de sistemas de ordem superior.

Método do plano de fase. O método do plano de fase introduzido por Poincare é um método de se obter graficamente a solução das seguintes equações diferenciais simultâneas de primeira-ordem:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \tag{12.1}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \tag{12.2}$$

onde $f_1(x_1, x_2)$ e $f_2(x_1, x_2)$ são funções lineares ou não lineares das variáveis x_1 e x_2 , respectivamente. As Eqs. (12.1) e (12.2) são chamadas autônomas, o que significa que a variável independente t aparece apenas na forma de derivadas. (Portanto, em um sistema autônomo, nem as forças nem as condições de contorno variam com o tempo.)

O plano com coordenadas retangulares x_1 e x_2 é chamado plano de fase, ou plano de estados. O plano de fase ou plano de estados é um espaço de estados bidimensional. Discutiremos em detalhes o espaço de estados no Cap. 14.)

Freqüentemente as Eqs. (12.1) e (12.2) assumem a seguinte forma simplificada:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f(x_1, x_2)$$

Se definirmos $x_1 = x$, então $x_2 = \dot{x}$. O plano de fase mais comum é o plano $x - \dot{x}$. Neste capítulo, a não ser que mencionemos o contrário, supomos que o plano de fase é o plano $x - \dot{x}$.

A análise por plano de fase dos sistemas de Eqs. (12.1) e (12.2) fornece uma visão geral das soluções para quaisquer condições iniciais possíveis. No campo de sistemas de controle, o método do plano de fase é particularmente adequado na análise e síntese de sistemas de segunda-ordem sujeitos a condições iniciais e/ou entradas aperiódicas, como entradas em degrau, entradas em rampa, entradas em pulso e entradas impulsivas.

Trajétórias no plano de fase. Do teorema fundamental da unicidade da solução de equações diferenciais simultâneas, sabemos que a solução das Eqs. (12.1) e (12.2) com uma dada condição inicial é única, desde que $f_1(x_1, x_2)$ e $f_2(x_1, x_2)$ nas Eqs. (12.1) e (12.2) são analíticas. (Uma função é analítica em um certo ponto se é possível obter uma expansão em série de Taylor da função ao redor do dado ponto.) Este resultado de unicidade não se aplica aos pontos onde $f_1(x_1, x_2) = 0$ e $f_2(x_1, x_2) = 0$, simultaneamente. Tais pontos são chamados pontos singulares. Pontos singulares são pontos de equilíbrio. Qualquer outro ponto no plano de fase é chamado um ponto ordinário.

Se não há outros pontos de equilíbrio nas vizinhanças de um dado ponto de equilíbrio, então este ponto de equilíbrio é chamado de um ponto isolado. Embora muitos sistemas reais envolvam apenas pontos de equilíbrio isolados, há alguns

casos em que isto não é verdade. Por exemplo, para o sistema

$$\ddot{x} + \dot{x} = 0$$

todos os pontos no eixo x são pontos de equilíbrio, e, portanto, os pontos de equilíbrio não são isolados.

Obtenção de equações diferenciais de primeira-ordem a partir de sistemas de segunda-ordem. A eliminação da variável independente t das Eqs. (12.1) e (12.2) fornece

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \tag{12.3}$$

A Eq. (12.3) é uma equação diferencial de primeira-ordem relacionando x_1 e x_2 , e, de fato, esta equação dá a inclinação da tangente à trajetória passando pelo ponto (x_1, x_2) .

O estado do sistema dado pelas Eqs. (12.1) e (12.2) [ou Eq. (12.3)] pode ser determinado a qualquer instante t pelos valores de x_1 e x_2 .

A solução da Eq. (12.3) pode ser escrita

$$x_2 = \phi(x_1) \tag{12.4}$$

A Eq. (12.4) representa uma curva no plano de fase e indica um movimento de um ponto representativo sobre a curva. A curva-solução, ou trajetória, que é um gráfico de x_2 em função de x_1 , é uma curva integral do sistema representado pela Eq. (12.3). A trajetória não mostra informação temporal de forma explícita. Se necessário, a trajetória pode ser graduada em unidades de tempo.

Gráficos de plano de fase. Uma família de trajetórias é chamada um gráfico de plano de fase (*phase-plane portrait*). A condição inicial determina a localização inicial de um ponto representativo na trajetória. Quando o tempo aumenta, o ponto representativo se move ao longo da trajetória. A representação por plano de fase de um sistema autônomo mostra a totalidade de todos os possíveis estados do sistema, e portanto a natureza da resposta do sistema é mostrada diretamente no gráfico de plano de fase. Como há uma e apenas uma trajetória passando por qualquer dado ponto ordinário no plano de fase, as trajetórias geradas por todas as possíveis condições iniciais não se cruzam, exceto em pontos singulares. Em pontos singulares, dx_2/dx_1 é indeterminado pois é da forma zero sobre zero. Uma infinidade de trajetórias podem-se aproximar ou se afastar de um ponto singular.

Para um sistema tendo uma não linearidade de dois valores, tal como a não linearidade tipo histerese, o sistema perde a sua analiticidade. Em tal caso, entretanto, pode ser possível dividir a região em sub-regiões em que o sistema é analítico, e portanto o método do plano de fase pode ser aplicado. Então a solução completa pode ser obtida conectando-se soluções analíticas por trechos. Deve-se notar que quando a resposta do sistema é definida por duas ou mais equações diferenciais de segunda-ordem, as trajetórias podem se cruzar.

Exemplo 12.1 Considere o sistema de primeira-ordem descrito por

$$\dot{x} = -x \tag{12.5}$$

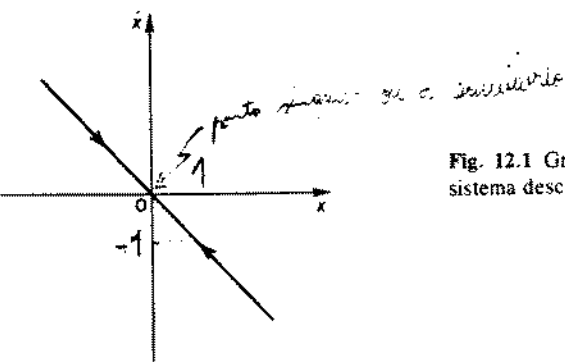
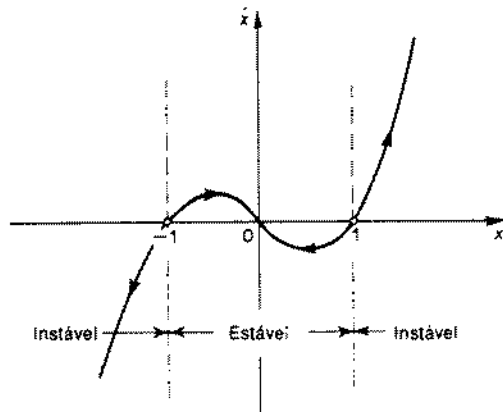


Fig. 12.1 Gráfico de plano de fase de um sistema descrito por $\dot{x} = -x$.

Fig. 12.2 Gráfico de plano de fase de um sistema descrito por $\dot{x} = -x + x^3$.



No plano de fase, ou plano $x-\dot{x}$, a Eq. (12.5) representa uma linha reta, como visto na Fig. 12.1. Para qualquer condição inicial $x(0)$, o sistema volta para seu ponto singular, a origem, após um tempo infinito. A condição inicial $x(0)$ determina o ponto de partida da trajetória. Considere em seguida o seguinte sistema de primeira-ordem:

$$\dot{x} = -x + x^3$$

A trajetória é vista na Fig. 12.2. Pode-se ver que a trajetória é dividida em três partes, uma parte estável e duas partes instáveis. Isto é, se $x(0) > 1$, então $x(\infty) \rightarrow \infty$. Se $1 > x(0) > -1$, então $x(\infty) \rightarrow 0$. Se $x(0) < -1$, então $x(\infty) \rightarrow -\infty$.

Exemplo 12.2 Considere o sistema representado pela seguinte equação:

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0 \quad (12.6)$$

A Fig. 12.3 mostra um gráfico de plano de fase para este sistema. A Eq. (12.6) resulta em

$$\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{-\dot{x} - x}{\dot{x}}$$

Na origem

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{0}{0}$$

A origem é portanto um ponto singular, isto é, o sistema está em equilíbrio na origem. Quando as condições iniciais da Eq. (12.6) são $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 10$, a trajetória correspondente é a curva $ABCD$ na Fig. 12.3. De forma semelhante, para $x(0) = 2$ e $\dot{x}(0) = -7$, a trajetória é a curva EFO .

Se um ponto representativo está na metade superior do plano $x-\dot{x}$ (por exemplo, o ponto B na Fig. 12.3), o ponto se move para a direita em uma trajetória quando o tempo aumenta, pois uma velocidade positiva ($\dot{x} > 0$) corresponde a um aumento no valor de x com o tempo. De forma similar, se um ponto representativo está na metade inferior do plano $x-\dot{x}$ (por exemplo, o ponto D na Fig. 12.3), então o ponto se move para a esquerda em uma trajetória quando o tempo aumenta, uma vez que uma velocidade negativa ($\dot{x} < 0$) corresponde a um decréscimo em x com o tempo. Portanto, movimentos ao longo de uma trajetória no plano $x-\dot{x}$ se fazem na direção horária. Quando a trajetória cruza o eixo x , a velocidade \dot{x} é nula. Portanto, a trajetória cruzará o eixo x perpendicularmente.

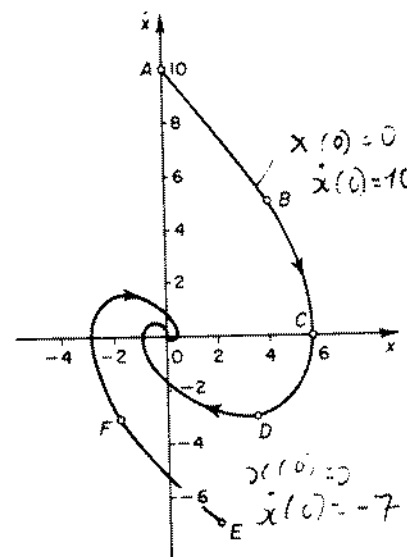


Fig. 12.3 Gráfico de plano de fase de um sistema descrito por $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$.

12.2 MÉTODOS PARA CONSTRUIR TRAJETÓRIAS

Na análise de plano de fase de sistemas de segunda-ordem as trajetórias podem ser construídas analiticamente, graficamente ou experimentalmente. Nesta seção apresentaremos métodos analíticos e gráficos para construir trajetórias.

Os métodos analíticos são úteis para sistemas cujas equações diferenciais são simples e lineares por trechos. Obviamente, se a análise do sistema é de interesse primordial e se a solução temporal da equação diferencial do sistema pode ser

obtida facilmente por métodos analíticos, há pouca justificativa de se fazer um gráfico de plano de fase do sistema. Entretanto, métodos analíticos para se obter as equações das trajetórias se mostram úteis em casos onde as expressões analíticas das trajetórias de equações diferenciais lineares simples são necessárias para sintetizar sistemas não lineares ou para auxiliar em uma demonstração de existência de uma curva fechada no plano de fase etc.

Os métodos gráficos são úteis quando é cansativo, difícil ou impossível de se resolver a dada equação diferencial analiticamente. Métodos gráficos podem ser aplicados tanto para equações lineares quanto não lineares. Estes métodos fornecem diretamente gráficos de trajetórias no plano de fase. Como a maioria das equações diferenciais não lineares de segunda-ordem não podem ser resolvidas analiticamente, então, é para tais equações que os métodos gráficos têm muito que oferecer.

Todos os métodos gráficos são essencialmente baseados em procedimentos tipo passo-a-passo. O número de passos necessários para se obter uma trajetória depende do tamanho dos incrementos utilizados. Estes incrementos devem ser de magnitude adequada de tal forma que ocorram apenas variações relativamente pequenas durante cada incremento. Eles não devem ser nem muito pequenos nem muito grandes. Se os incrementos forem muito pequenos, os cálculos podem levar muito tempo.

A precisão de métodos gráficos depende da maneira com que se faz a construção. Obviamente, o grau de precisão pode ser aumentado até um certo ponto, à medida que o tamanho da figura é aumentado. Deve ficar claro que se os incrementos são muito grandes, a precisão provavelmente será ruim. No entanto devemos notar que, mesmo que os incrementos sejam pequenos, se o número de incrementos for muito grande, a precisão provavelmente também será ruim. Isto ocorre por causa de erros inevitáveis, pois, mesmo que eles sejam pequenos a cada passo, tendem a se acumular e podem causar uma falta de precisão na porção final da solução.

Os dois métodos gráficos discutidos neste capítulo são o método das isóclinas e o método delta. Quaisquer parâmetros na dada equação devem, obviamente, ter associados valores numéricos antes que os métodos gráficos possam ser aplicados.

Também existem técnicas experimentais para a obtenção das trajetórias. Uma vez que montamos as equações para a análise do plano de fase, podemos em seguida usar um computador analógico e um osciloscópio ou traçador xy . Por exemplo, as trajetórias podem ser visualizadas na tela aplicando-se às placas defletoras de um osciloscópio tensões proporcionais a x para a deflexão horizontal e a \dot{x} para a deflexão vertical. Tal técnica experimental para a obtenção das trajetórias permite fazer uma análise de plano de fase geral para o problema além de economizar tempo que seria necessário no cálculo manual para construir as trajetórias.

Simetria nos gráficos de plano de fase. Em certos casos, o gráfico de plano de fase pode ser simétrico em torno do eixo x , do eixo \dot{x} , ou de ambos. A simetria no gráfico de plano de fase pode ser facilmente determinada a partir das equações diferenciais originais ou da equação representando a trajetória.

Simetria em torno do eixo x : Considere a seguinte equação:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

ou

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}}$$

Para que as trajetórias sejam simétricas em torno do eixo x , a inclinação $d\dot{x}/dx$ deve ser igual mas de sinal oposto para $\dot{x} > 0$ e $\dot{x} < 0$ para todo x . Desta condição pode-se mostrar que, se o gráfico de plano de fase é simétrico em torno do eixo x , então

$$f(x, \dot{x}) = f(x, -\dot{x})$$

ou seja, $f(x, \dot{x})$ deve ser uma função par de \dot{x} . Portanto, o gráfico de plano de fase de uma equação diferencial que não contém \dot{x} é sempre simétrico em torno do eixo x .

Se o gráfico de plano de fase é simétrico em torno do eixo x , a única diferença entre o gráfico no semiplano superior daquele no semiplano inferior é a direção do movimento. Isto é, o movimento de um ponto representativo no semiplano superior é para a direita, e no semiplano inferior é para a esquerda. Portanto, para este caso, pode não ser necessário levantar o gráfico de plano de fase para o semiplano inferior.

Simetria em torno do eixo \dot{x} : Para simetria em torno do eixo \dot{x} , a inclinação $d\dot{x}/dx$ deve ser igual mas de sinal oposto para $x > 0$ e $x < 0$ para qualquer \dot{x} . Isto requer que

$$f(x, \dot{x}) = -f(-x, \dot{x})$$

ou $f(x, \dot{x})$ deve ser uma função ímpar de x .

Simetria em torno tanto do eixo x como do eixo \dot{x} . Para o gráfico do plano de fase ser simétrico em torno de ambos os eixos x e \dot{x} , as condições para os dois casos anteriores devem ser satisfeitas simultaneamente. Isto requer que

$$f(-x, \dot{x}) = -f(x, -\dot{x})$$

Métodos analíticos para construir trajetórias. Há dois métodos para a determinação analítica das equações das trajetórias. Um método é integrar a Eq. (12.3) para obter a seguinte equação da trajetória:

$$x_2 = \phi(x_1) \quad (12.7)$$

Este método só é aplicável se a Eq. (12.3) puder ser integrada. Uma vez que a Eq. (12.7) é obtida, a relação entre x_1 e x_2 pode ser diretamente posta num gráfico. O outro método é obter x_1 e x_2 como funções de t e então eliminar t dessas duas equações. Este método pode ser aplicado se a eliminação de t das Eqs. (12.1) e (12.2) pode ser feita sem muita dificuldade.

Exemplo 12.3 Considere a seguinte equação diferencial de segunda-ordem simples:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Usando a relação $\ddot{x} = d\dot{x}/dt = \dot{x}d\dot{x}/dx$, podemos mudar a equação para a seguinte forma:

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -\omega^2 x = 0 \quad (12.8)$$

O primeiro método analítico é integrar a Eq. (12.8). Isto pode ser feito facilmente, e a equação para a trajetória é obtida como

$$\frac{\dot{x}^2}{\omega^2} + x^2 = A^2 \quad (12.9)$$

onde A é uma constante, determinada a partir das condições iniciais.

Para um sistema simples como este, o segundo método analítico também pode ser aplicado. A solução $x(t)$ pode ser determinada como

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (12.10)$$

onde A e α são constantes a serem determinadas das condições iniciais. Derivando a Eq. (12.10) com respeito a t , obtemos

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \alpha) \quad (12.11)$$

Eliminando t das Eqs. (12.10) e (12.11), podemos obter a Eq. (12.9).

Exemplo 12.4 Considere a seguinte equação:

$$\dot{x} = -M \quad (M = \text{constante}) \quad (12.12)$$

com as condições iniciais

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

A Eq. (12.12) pode ser escrita como

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -M \quad (12.13)$$

Separando as variáveis e integrando a Eq. (12.13), obtém-se

$$\dot{x}^2 = 2(x_0 - x)M \quad (12.14)$$

onde a constante de integração foi determinada das condições iniciais dadas. A Eq. (12.14) representa uma trajetória passando pelo ponto $(x_0, 0)$.

A Eq. (12.14) pode também ser obtida achando-se $x = \phi_1(t)$, $\dot{x} = \phi_2(t)$ e eliminando t destas duas equações. Usando as condições iniciais dadas, $\dot{x}(t)$ e $x(t)$ são determinadas como

$$\dot{x}(t) = -Mt \quad (12.15)$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}Mt^2 + x_0 \quad (12.16)$$

Eliminando t das Eqs. (12.15) e (12.16), resulta na Eq. (12.14). Os gráficos de plano de fase do sistema correspondendo a $M = 1$ e $M = -1$ são vistos na Fig. 12.4. A trajetória particular correspondendo a $M = 1$ e passando pelo ponto $(x_0, 0)$ é mostrada como uma curva mais grossa.

Método gráfico de construção de trajetórias — o método das isóclinas. O método das isóclinas é usado para obter o campo de trajetórias graficamente, sem ter que

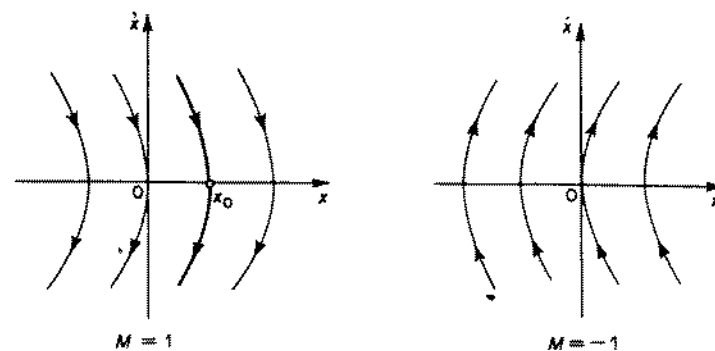


Fig. 12.4 Gráficos de plano de fase de um sistema descrito por $\dot{x} = -M$ para $M = 1$ e $M = -1$.

resolver uma dada equação diferencial. O método das isóclinas é aplicável à seguinte equação diferencial de primeira-ordem:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \quad (12.17)$$

onde $f_1(x_1, x_2)$ e $f_2(x_1, x_2)$ são analíticas. Na Eq. (12.17), x_1 é considerada a variável independente e x_2 a variável dependente.

O lugar geométrico de uma inclinação constante da trajetória, isto é, o lugar geométrico de

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \alpha = \text{constante} \quad (12.18)$$

no plano de fase pode ser obtido das Eqs. (12.17) e (12.18). Ou seja, a seguinte equação:

$$f_2(x_1, x_2) = \alpha f_1(x_1, x_2)$$

fornece o lugar geométrico de inclinação constante α . O lugar geométrico de pontos onde as trajetórias têm uma dada inclinação é chamado de uma isóclina. Se desenharmos isóclinas correspondendo a vários valores de α , o campo de direções de tangentes às trajetórias pode ser obtido.

Quando construímos um gráfico de plano de fase pelo método das isóclinas, todo o plano de fase pode ser preenchido por pequenos segmentos de reta que fixam direções do campo, como visto na Fig. 12.5. Em muitos casos, as isóclinas para inclinação zero e infinito podem ser facilmente construídas. Como a inclinação é indeterminada em um ponto singular, não se pode desenhar nenhum segmento de reta neste ponto. A trajetória passando por um dado ponto ordinário qualquer no plano de fase pode ser construída desenhando-se uma curva contínua seguindo as direções do campo.

Como um exemplo, considere a equação diferencial

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2x = 0 \quad (12.19)$$

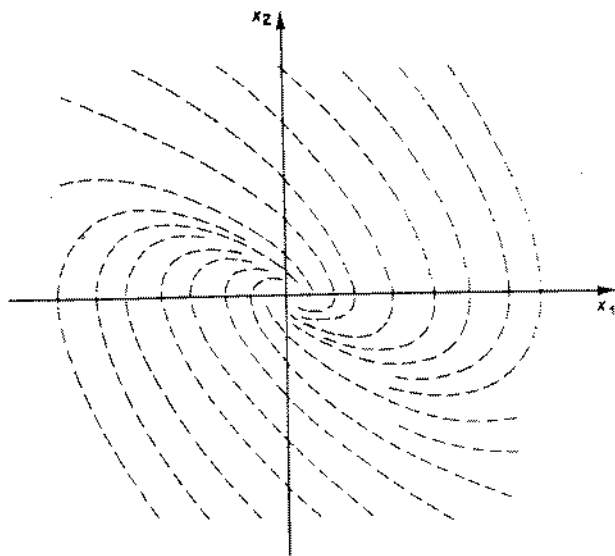


Fig. 12.5 Um exemplo de um diagrama de plano de fase preenchido com segmentos de reta curtos dando as direções do campo.

A Eq. (12.19) pode ser reescrita como segue:

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} - 2\zeta\omega\dot{x} - \omega^2x = 0 \quad (12.20)$$

Fazendo $d\dot{x}/dx = \alpha$, podemos escrever a Eq. (12.20) como

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{-\omega^2}{2\zeta\omega + \alpha} \quad (12.21)$$

A Eq. (12.21) representa uma isóclina, o lugar geométrico de tangente constante α , e é uma equação de uma reta. As isóclinas para equações lineares de segunda ordem são linhas retas e passam pela origem do plano de fase.

A Fig. 12.6 mostra isóclinas e uma particular trajetória para o sistema dado pela Eq. (12.19) quando $\zeta = 0.5$ e $\omega = 1$. A trajetória começando no ponto A na Fig. 12.6 pode ser construída como segue: Quando a trajetória está na região delimitada pelas isóclinas correspondendo a $\alpha = -1$ e $\alpha = -1.2$, a inclinação da trajetória é aproximadamente $(-1 - 1.2)/2 = -1.1$. Portanto, se a reta com inclinação -1.1 é desenhada do ponto A, interceptando a isóclina correspondendo a $\alpha = -1.2$ no ponto B, a reta AB é aproximadamente uma parte da trajetória. Similarmente, a trajetória passando pelo ponto B tem uma inclinação de aproximadamente $(-1.2 - 1.4)/2 = -1.3$ na região delimitada pelas isóclinas correspondendo a $\alpha = -1.2$ e $\alpha = -1.4$. Então a reta BC com inclinação -1.3 , interceptando a isóclina $\alpha = -1.4$ no ponto

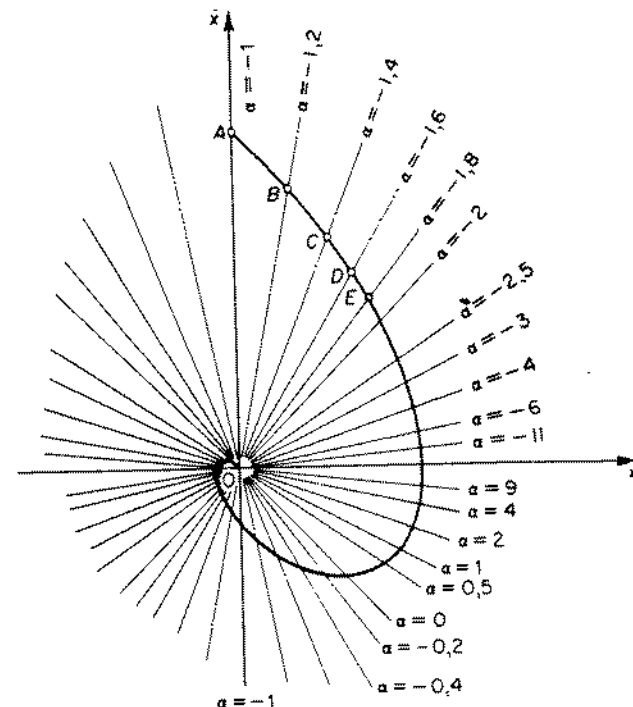


Fig. 12.6 Diagrama de plano de fase mostrando isóclinas e uma trajetória típica para um sistema descrito por $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$.

C, é uma parte da trajetória. A inclinação da trajetória entre os pontos C e D é -1.5 . Construindo a trajetória desta forma, podemos obter a curva ABCDEO.

Para um sistema linear, há apenas uma trajetória passando por qualquer ponto ordinário no plano de fase. Portanto, a trajetória partindo do ponto D na Fig. 12.6 é a curva DEO, uma parte da curva ABCDEO. Obviamente, a trajetória pode ser construída tanto na direção horária como anti-horária, a partir de qualquer ponto no plano de fase.

Deve-se notar que, ao se construir as trajetórias desta forma, podemos acumular erros que podem ocorrer durante o curso da construção, e a trajetória resultante pode não ser precisa. Para boa precisão, é conveniente primeiro preencher uma certa região do plano de fase por pequenos segmentos de reta que indicam direções do campo. Então constrói-se uma trajetória fazendo um esboço cuidadoso, seguindo as direções do campo. Deste forma, pode-se evitar a eventualidade de se acumular certos erros.

Lembre-se de que a precisão do resultado pode não ser boa se, como no caso de certas equações diferenciais não lineares, as inclinações das trajetórias variam rapidamente em certas regiões do plano de fase. A precisão deste método, em geral, depende do número de isóclinas utilizadas. Para uma razoável precisão, as isóclinas podem ser desenhadas a cada 5° ou 10° .

Para o sistema dado pela Eq. (12.19), a equação da isóclina, Eq. (12.21), pode ser escrita como

$$\alpha = -\left(2\zeta\omega + \frac{\omega^2}{\tan \theta}\right) \quad (12.22)$$

onde usamos a relação

$$\frac{\dot{x}}{x} = \tan \theta$$

e o ângulo θ é aquele visto na Fig. 12.7. Usando a Eq. (12.22), podemos desenhar isóclinas para qualquer valor de θ .

O método das isóclinas discutido aqui é conveniente quando as isóclinas são linhas retas. Se não o forem, o método delta, que será discutido a seguir, pode ser menos monótono para se construir a trajetória passando por um dado ponto.

Deve-se notar que a inclinação $\alpha = d\dot{x}/dx$ é uma quantidade com uma dimensão e seu valor depende da unidade de tempo. É muito conveniente usar as mesmas escalas ao longo dos eixos de x e \dot{x} para que o valor de α e a correspondente inclinação geométrica da trajetória sejam os mesmos.

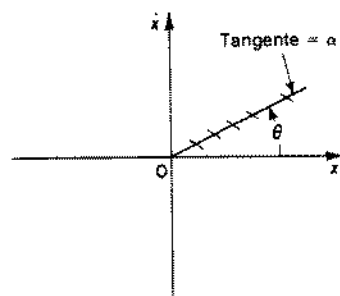


Fig. 12.7 Diagrama mostrando o ângulo θ da Eq. (12.22).

Exemplo 12.5 Obtenha um gráfico de plano de fase da seguinte equação usando o método das isóclinas:

$$\ddot{x} + a|\dot{x}| + x = 0 \quad (a > 0) \quad (12.23)$$

Em geral, quando a equação do sistema envolve valores absolutos de x ou \dot{x} ou ambos, a substituição da equação diferencial não linear por várias equações diferenciais lineares simplifica a construção das isóclinas.

Vamos substituir a Eq. (12.23) por

$$\begin{aligned} \ddot{x} + a\dot{x} + x &= 0 & \text{para } \dot{x} > 0 \\ \ddot{x} - a\dot{x} + x &= 0 & \text{para } \dot{x} < 0 \end{aligned} \quad (12.24)$$

No semiplano superior do plano $x-\dot{x}$, a equação das isóclinas é

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{-1}{a + \alpha}$$

e no semiplano inferior é

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{-1}{-a + \alpha}$$

A Fig. 12.8 mostra um gráfico de plano de fase, juntamente com isóclinas para o sistema da Eq. (12.23) quando $a = 1$. As linhas retas são isóclinas e os segmentos de reta curtos em cada linha indicam o campo de direções de tangentes às trajetórias. (Segmentos de reta curtos são colocados para que as trajetórias possam ser facilmente visualizadas.) Para este sistema, as trajetórias são curvas ovais concêntricas, e o movimento é periódico para quaisquer condições iniciais dadas, exceto na origem. [isto pode estar claro também pela Eq. (12.24) uma vez que a energia dissipada durante o meio ciclo (correspondendo a um período para o qual $\dot{x} > 0$) é a mesma energia fornecida ao sistema durante o outro meio-ciclo (correspondendo a um período para o qual $\dot{x} < 0$), e portanto a dissipação total de energia é nula para um ciclo. Neste exemplo, a natureza simétrica do gráfico de plano de fase pode ser prevista diretamente da Eq. (12.23). Como a substituição de \dot{x} por $-\dot{x}$ não modifica a equação, ela é simétrica em torno do eixo x .

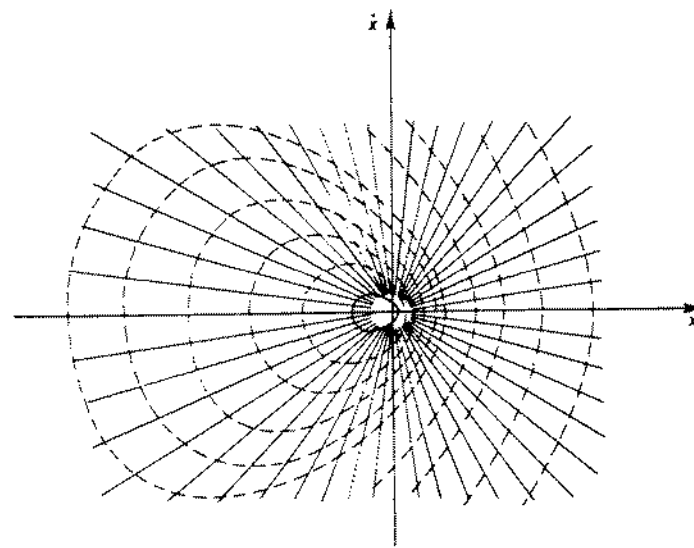


Fig. 12.8 Gráfico de plano de fase para um sistema descrito por $\ddot{x} + |\dot{x}| + x = 0$.

Método gráfico para construir trajetórias — o método delta. No método delta, a trajetória é obtida como uma sequência de arcos circulares cujos centros se deslocam ao longo do eixo x . O método delta pode ser aplicado a equações da forma

$$\ddot{x} = -f(\dot{x}, x, t) \quad (12.25)$$

onde $f(\dot{x}, x, t)$ pode ser tanto linear como não linear e pode ser variante no tempo, mas deve ser contínua e unívoca. Ao aplicar este método, modificamos a Eq.

(12.25) para a seguinte forma:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -f(\dot{x}, x, t) + \omega^2 x \quad (12.26)$$

Um termo $\omega^2 x$ é adicionado a ambos os lados da Eq. (12.25). Este termo deve ser escolhido adequadamente de tal forma que os valores da função δ definida abaixo não sejam nem muito pequenos nem muito grandes para a gama de valores de \dot{x} , x e t considerados.

$$\delta(\dot{x}, x, t) = \frac{-f(\dot{x}, x, t) + \omega^2 x}{\omega^2} \quad (12.27)$$

Usando a Eq. (12.27), podemos escrever a Eq. (12.26) como

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 \delta(\dot{x}, x, t) \quad (12.28)$$

A função $\delta(\dot{x}, x, t)$ depende das variáveis \dot{x} , x e t . Para pequenas variações nestas variáveis, entretanto, $\delta(\dot{x}, x, t)$ pode ser considerado constante. Então, nas vizinhanças do estado $x = x_1$, $\dot{x} = \dot{x}_1$, $t = t_1$; ou seja, $x = x_1 \pm \Delta x_1$, $\dot{x} = \dot{x}_1 \pm \Delta \dot{x}_1$, $t = t_1 \pm \Delta t_1$, onde Δx_1 , $\Delta \dot{x}_1$, Δt_1 são supostos pequenos, o valor de δ pode ser suposto constante, δ_1 , e a Eq. (12.28) pode ser modificada para

$$\ddot{x} + \omega^2(x - \delta_1) = 0 \quad (12.29)$$

A Eq. (12.29) mostra um movimento harmônico simples. As trajetórias para este sistema são circunferências centradas em $x = \delta_1$, $\dot{x}/\omega = 0$ no plano de fase normalizado [plano $x - (\dot{x}/\omega)$]. Portanto, podemos ver que para um pequeno incremento nas vizinhanças do estado $x = x_1$, $\dot{x}/\omega = \dot{x}_1/\omega$, $t = t_1$, a trajetória é um arco da circunferência centrada em $x = \delta_1$, $\dot{x}/\omega = 0$ com raio igual a

$$\sqrt{\left(\frac{\dot{x}_1}{\omega}\right)^2 + (x_1 - \delta_1)^2}$$

Nota-se que no método delta é essencial usar um plano de fase normalizado de tal forma que a trajetória da Eq. (12.29) se torna uma circunferência. (Também é necessário usar escalas numéricas iguais ao longo dos eixos x e \dot{x}/ω .) A construção de uma trajetória é vista na Fig. 12.9. O ponto P representa o estado do sistema na

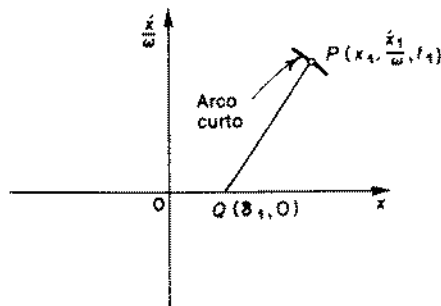


Fig. 12.9 Diagrama mostrando a construção de uma trajetória usando o método delta.

trajetória no instante $t = t_1$. O valor de δ_1 é determinado da Eq. (12.27) como

$$\delta_1 = -\frac{f(\dot{x}_1, x_1, t_1)}{\omega^2} + x_1$$

Uma vez que o ponto Q , o centro do arco de circunferência, está localizado no eixo x , o raio está fixado como sendo PQ . A trajetória verdadeira nas vizinhanças do ponto P é então aproximada por um pequeno arco de circunferência. O arco deve ser suficientemente pequeno para assegurar que variações nas variáveis são pequenas.

Considere em seguida a equação:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\zeta\omega \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (12.30)$$

A Eq. (12.30) contém um termo em x com um coeficiente positivo. Portanto, a Eq. (12.30) pode ser modificada para a forma da Eq. (12.26) simplesmente trazendo o segundo termo da Eq. (12.30) para o lado direito da equação. Ou seja,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = -2\zeta\omega \frac{dx}{dt} \quad (12.31)$$

A Eq. (12.31) pode ser normalizada substituindo

$$t = \frac{1}{\omega} \tau$$

para fornecer

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = -2\zeta \frac{dx}{d\tau} \quad (12.32)$$

Se fizermos

$$\frac{\dot{x}}{\omega} = \frac{dx}{dt} \frac{1}{\omega} = \frac{dx}{d\tau} = y$$

então a Eq. (12.32) se torna

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = \delta \quad (12.33)$$

onde $\delta = -2\zeta y$.

Para $y = y_1 = \text{constante}$, a Eq. (12.33) indica que a trajetória no plano $x - (dx/d\tau)$ é uma circunferência, cujo centro está localizado em $x = -2\zeta y_1$, $y = 0$. Como a localização do centro depende de y_1 , o centro da circunferência se move ao longo do eixo x quando y varia. Ao construir a trajetória da Eq. (12.32), achamos conveniente desenhar uma reta $x = \delta$, ou seja,

$$x = -2\zeta y$$

no plano $x-y$. As Figs. 12.10(a) e (b) mostram a construção de trajetórias.

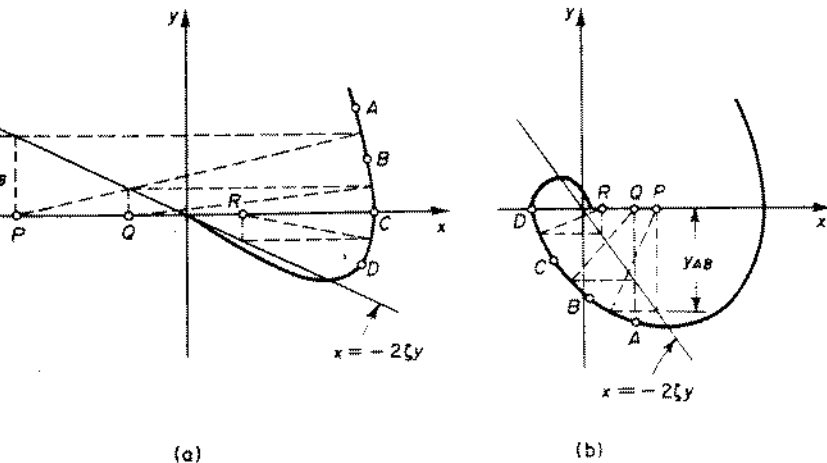


Fig. 12.10 Diagramas mostrando a construção de trajetórias usando o método delta. (a) sistema sobreamortecido; (b) sistema subamortecido.

Em ambas as Figs. 12.10(a) e (b), o centro do arco AB está localizado no ponto P ($x = -2\zeta y_{AB}$, $y = 0$). Aqui y_{AB} é o valor médio de y entre o ponto A e o ponto B. A localização do centro da circunferência pode ser obtida direta e simplesmente usando-se a reta $x = -2\zeta y$ desenhada no plano $x-y$. Nas Figs. 12.10 (a) e (b), os segmentos de arcos do ponto B ao ponto C e do ponto C ao ponto D têm seus centros no ponto Q e ponto R, respectivamente.

O método delta é um método geral, pois as trajetórias podem ser construídas no plano de fase tanto para uma equação de plano de fase representando um sistema físico linear quanto não linear, e, além do mais, independentemente de a equação de plano de fase incluir elementos variantes no tempo ou uma função excitação variando no tempo.

Exemplo 12.6 Considere o sistema descrito pela seguinte equação:

$$\ddot{x} + \dot{x} + x^3 = 0 \quad (12.34)$$

Dadas as condições iniciais $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$, construa a trajetória partindo do ponto inicial. Use o método delta.

Vemos que a Eq. (12.34) não contém um termo em x com um coeficiente positivo. Portanto, é necessário adicionar um termo $\omega^2 x$ em ambos os lados da Eq. (12.34). O valor de ω deve ser escolhido de tal forma que os valores de δ não sejam nem muito pequenos nem muito grandes. Se escolhermos $\omega = 1$, a Eq. (12.34) pode ser escrita como

$$\ddot{x} - x = -\dot{x} - x^3 + x$$

$$\delta = -\dot{x} - x^3 + x$$

Como o valor de δ depende tanto de x como de \dot{x} , será necessário fazer tentativas sucessivas no processo de construção.

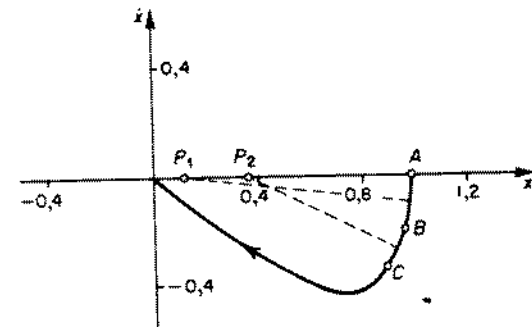


Fig. 12.11 Diagrama de plano de fase mostrando a trajetória partindo do ponto $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$, de um sistema descrito por $\ddot{x} + \dot{x} + x^3 = 0$.

A trajetória começa no ponto A ($x = 1$, $\dot{x} = 0$), na Fig. 12.11. Nas vizinhanças do ponto A,

$$\delta = -0 - 1 + 1 = 0$$

Portanto, o arco inicial está centrado no ponto (0,0) com raio igual à unidade. Então um arco pequeno é desenhado. O valor médio de x e o valor médio de \dot{x} para este arco são usados para determinar um valor mais preciso de δ . Algumas tentativas sucessivas serão suficientes para obter um valor razoavelmente preciso de δ . Neste exemplo, o primeiro arco AB da Fig. 12.11 está centrado no ponto P_1 ($x = 0,12$, $\dot{x} = 0$). Para o segundo arco são feitas tentativas sucessivas similares, mostrando que o segundo arco BC da Fig. 12.11 está centrado no ponto P_2 ($x = 0,37$, $\dot{x} = 0$). Continuando desta forma, podemos construir a trajetória até onde desejarmos.

Da discussão que acabamos de fazer, pode-se ver que um sistema com δ , que depende de três variáveis \dot{x} , x e t , pode ser tratado da mesma forma. Ao construir trajetórias, entretanto, devemos manter a contagem de t . (Informação temporal pode ser obtida da trajetória. Alguns métodos para se obter informação de um gráfico de plano de fase são dados na seção seguinte.)

12.3 OBTENÇÃO DE SOLUÇÕES TEMPORAIS A PARTIR DE GRÁFICOS DE PLANO DE FASE

A trajetória desenhada no plano $x-\dot{x}$ é um gráfico de \dot{x} em função de x . O tempo não aparece explicitamente neste gráfico. Para a análise de um sistema, podemos necessitar apenas de trajetórias; entretanto, às vezes é desejável se obter um gráfico da variável x em função do tempo t . Em tal caso, é possível se obter a solução temporal do gráfico do plano de fase, mesmo que a equação diferencial original não possa ser resolvida para x e \dot{x} como funções de t . O processo de obtenção de uma solução temporal é essencialmente passo-a-passo e pode ser feito de várias diferentes maneiras. Uma vez que a trajetória está graduada em t , o comportamento da resposta do sistema com respeito ao tempo pode ser visualizado.

Informação temporal baseada em $\Delta t = \Delta x/\dot{x}$. Pode-se ver que para pequenos incrementos Δx e Δt , a velocidade média é dada por $\dot{x}_{med} = \Delta x/\Delta t$. O tempo

incremental Δt é então

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\dot{x}_{\text{méd.}}} \quad (12.35)$$

A Fig. 12.12(a) mostra uma trajetória no plano $x-\dot{x}$. O tempo incremental Δt_{AB} necessário para que o ponto representativo atravessasse o desvio incremental Δx_{AB} é $\Delta t_{AB} = \Delta x_{AB} / \dot{x}_{AB}$. De forma similar, $\Delta t_{BC} = \Delta x_{BC} / \dot{x}_{BC}$. Então a solução temporal $x = x(t)$ pode ser facilmente desenhada como visto na Fig. 12.12(b). Para boa precisão, o desvio incremental Δx deve ser escolhido suficientemente pequeno para que as correspondentes variações incrementais em \dot{x} e t sejam razoavelmente pequenas. Entretanto, o valor de Δx não precisa ser constante. Ele pode ser mudado de acordo com as formas de porções da trajetória para minimizar o trabalho necessário para se obter uma precisão razoável.

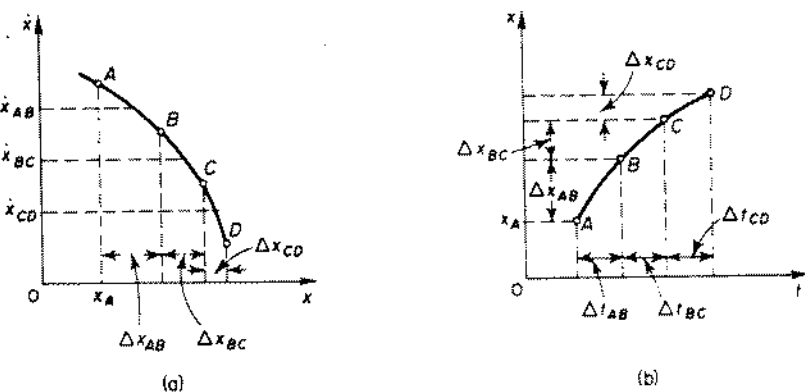


Fig. 12.12 (a) Uma trajetória no plano $x-\dot{x}$; (b) um gráfico da solução temporal $x(t)$ em função de t .

Para trajetórias no plano de fase normalizado [plano $x - (\dot{x}/\omega)$], a Eq. (12.35) é modificada para

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\dot{x}_{\text{méd.}}} = \frac{1}{\omega} \frac{\Delta x}{\left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)_{\text{méd.}}}$$

Em um caso geral onde as equações diferenciais originais são dadas pelas Eqs. (12.1) e (12.2), Δt pode ser obtida da seguinte relação:

$$\Delta t = \frac{\Delta x_1}{f_1(x_{1\text{méd.}}, x_{2\text{méd.}})} = \frac{\Delta x_2}{f_2(x_{1\text{méd.}}, x_{2\text{méd.}})}$$

onde $x_{1\text{méd.}}$ e $x_{2\text{méd.}}$ são os valores médios de x_1 e x_2 durante um dado intervalo de tempo Δt . Os incrementos em Δx_1 , Δx_2 , e Δt devem ser razoavelmente pequenos para uma boa precisão.

Informação temporal baseada em $t = \int (1/\dot{x}) dx$. Como $\dot{x} = dx/dt$, então o intervalo de tempo $t_2 - t_1$ pode ser expresso como

$$t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\dot{x}} dx \quad (12.36)$$

A Eq. (12.36) mostra que se a trajetória é refeita com a coordenada $1/\dot{x}$ e a abscissa x , a área sob a curva resultante representa o correspondente intervalo de tempo. O tempo requerido para o ponto representativo na trajetória para ir do ponto A ao ponto B visto na Fig. 12.13(a) pode ser obtido da seguinte equação:

$$t_{AB} = \int_A^B \frac{1}{\dot{x}} dx \quad (12.37)$$

O lado direito da Eq. (12.37) é a área hachurada na Fig. 12.13(b). Esta área pode ser obtida analítica ou graficamente por meios convencionais.

Quando o valor de \dot{x} se torna zero entre os limites de integração, o valor de $1/\dot{x}$ se torna infinito, resultando em uma dificuldade no cálculo da integral dada pela Eq. (12.36). Por exemplo, o valor de \dot{x} se torna zero entre o ponto C e o ponto D na Fig. 12.13(a). Portanto, o intervalo de tempo necessário para o ponto representativo se mover do ponto C ao ponto D deve ser computado por alguma outra forma. (Veja o método baseado em aproximações por arcos de circunferência apresentado a seguir.)

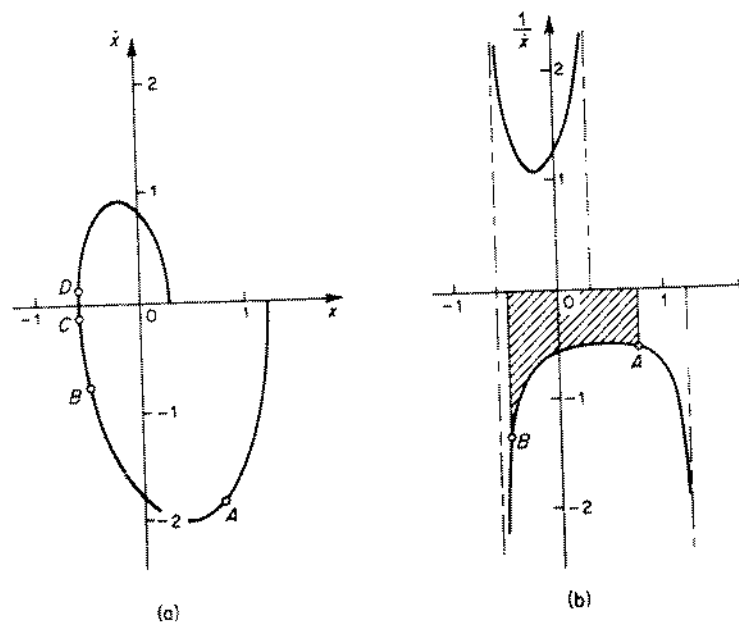


Fig. 12.13 (a) Uma trajetória no plano $x-\dot{x}$; (b) computação gráfica de t_{AB} . (A área hachurada é igual a t_{AB} .)

Para trajetórias no plano de fase normalizado [plano $x - (\dot{x}/\omega)$], a Eq. (12.36) é modificada para

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\omega} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)} dx$$

Informação temporal baseada em aproximações por arcos de circunferência.

Neste método, a trajetória é aproximada por uma sequência de arcos de circunferência centrados no eixo x . No plano $x - \dot{x}$, se a variável x está em movimento harmônico simples em torno do ponto $(x_0, 0)$ com uma velocidade angular de 1 rad/s, ou seja,

$$\ddot{x} + (x - x_0) = 0$$

então a trajetória pode ser escrita como

$$\dot{x}^2 + (x - x_0)^2 = K^2 \quad (12.38)$$

onde K é uma constante de integração. A Eq. (12.38) indica que a trajetória é uma circunferência de raio K , centrada em $x = x_0, \dot{x} = 0$. A velocidade de um ponto representativo ao longo da trajetória é dada por

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\dot{x}}{dt}\right)^2}$$

(Esta velocidade não deve ser confundida com a velocidade \dot{x} , que é a taxa de variação temporal do deslocamento x .) Em geral, a velocidade de um ponto representativo varia quando ele se move ao longo da trajetória. A velocidade é não nula e finita, exceto em pontos singulares, onde esta velocidade se torna nula, porque tanto dx/dt como $d\dot{x}/dt$ se tornam zero simultaneamente. A velocidade do ponto representativo na trajetória circular é dada por

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \ddot{x}^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + (x - x_0)^2} = K$$

Isto indica que a velocidade de um ponto representativo ao longo da trajetória é constante. Como o perímetro da circunferência é $2\pi K$ e a velocidade de um ponto

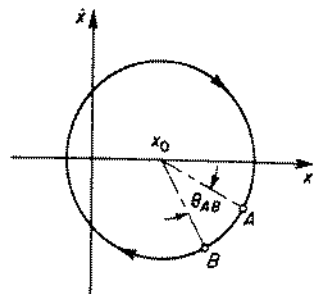


Fig. 12.14 Trajetória circular.

representativo é uma constante K , este ponto requer 2π segundos para percorrer uma circunferência completa, portanto o período é 2π segundos.

A Fig. 12.14 mostra uma trajetória circular. O tempo necessário para o ponto representativo na trajetória se mover do ponto A ao ponto B pode ser obtido como

$$t_{AB} = 2\pi \frac{\theta_{AB}}{2\pi} = \theta_{AB} \text{ s}$$

onde o ângulo θ_{AB} é a magnitude do ângulo correspondente ao arco circular AB e medido em radianos. Portanto, o tempo t_{AB} em segundos é numericamente igual a θ_{AB} rad se as coordenadas do plano de fase são x e \dot{x} . Isto é, se θ_{AB} é igual a 0.5 rad, então t_{AB} é igual a 0.5 s.

Em geral, as trajetórias não são circulares; entretanto, podem ser bem aproximadas por uma série de arcos de circunferências centradas no eixo x . Por exemplo, considere a trajetória vista na Fig. 12.15. Uma parte da trajetória, $ABCD$, pode ser aproximada por três arcos circulares centrados no eixo x . AB pode ser aproximada por uma parte da circunferência centrada no ponto P . Similarmente, BC e CD são partes de circunferências centradas no ponto Q e no ponto R , respectivamente. Então t_{AD} , o tempo necessário para um ponto representativo se mover do ponto A ao ponto D na trajetória, pode ser obtido como

$$t_{AD} = t_{AB} + t_{BC} + t_{CD}$$

onde t_{AB} , t_{BC} e t_{CD} são numericamente iguais a θ_{AB} , θ_{BC} e θ_{CD} , respectivamente; e $\theta_{AB} = \angle APB$, $\theta_{BC} = \angle BQC$ e $\theta_{CD} = \angle CRD$, todos medidos em radianos.

Se o plano de fase é normalizado com x e \dot{x}/ω como coordenadas, então t_{AB} e θ_{AB} não são numericamente iguais. Vamos considerar este caso com mais detalhes. Se a variável x está em movimento harmônico simples com velocidade angular ω rad/s, ou seja,

$$\ddot{x} - \omega^2(x - x_0) = 0$$

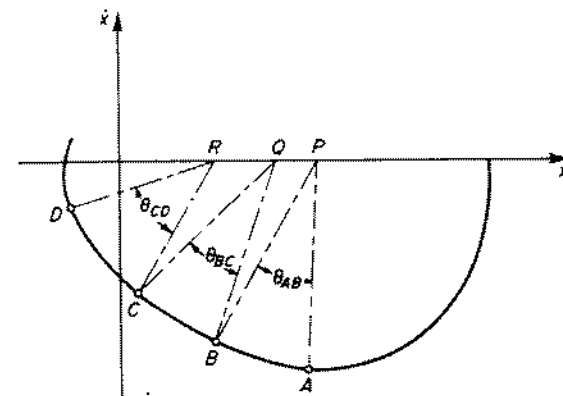


Fig. 12.15 Aproximação de uma trajetória no plano $x - \dot{x}$ por arcos de circunferências.

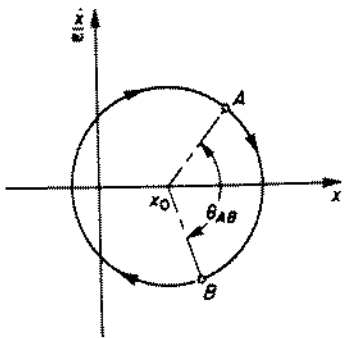


Fig. 12.16 Computation gráfica de t_{AB} no plano $x - (\dot{x}/\omega)$.

a equação da trajetória pode ser escrita como

$$\left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2 + (x - x_0)^2 = K^2 \quad (12.39)$$

onde K é uma constante. A trajetória dada pela Eq. (12.39) é uma circunferência centrada no ponto $(x_0, 0)$ no plano $x - (\dot{x}/\omega)$ com raio igual a K . A velocidade de um ponto representativo na trajetória é constante, e este ponto requer $2\pi/\omega$ segundos para percorrer um ciclo completo. Portanto, na Fig. 12.16, t_{AB} , o intervalo de tempo requerido para um ponto representativo se mover do ponto A ao ponto B , pode ser obtido como

$$t_{AB} = \frac{2\pi}{\omega} \times \frac{\theta_{AB}}{2\pi} = \frac{\theta_{AB}}{\omega} \text{ s}$$

Portanto, no plano $x - (\dot{x}/\omega)$, o intervalo de tempo t_{AB} segundos é igual a θ_{AB}/ω , onde θ_{AB} é medido em radianos e ω é medido em radianos por segundo.

12.4 PONTOS SINGULARES

Nesta seção, examinaremos o comportamento de trajetórias nas vizinhanças de pontos singulares. Considere o sistema

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2)$$

onde $f_1(x_1, x_2)$ e $f_2(x_1, x_2)$ são funções analíticas das variáveis x_1 e x_2 nas vizinhanças da origem. Suponha que a origem é um ponto singular, ou um ponto de equilíbrio, de tal forma que

$$f_1(0, 0) = 0,$$

$$f_2(0, 0) = 0$$

Vamos expandir $f_1(x_1, x_2)$ e $f_2(x_1, x_2)$ em série de Taylor nas vizinhanças da origem. O sistema de equações então se torna

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 + b_1x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + g_1(x_1, x_2) \quad (12.40)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_2x_1 + b_2x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 + g_2(x_1, x_2) \quad (12.41)$$

onde $g_1(x_1, x_2)$ e $g_2(x_1, x_2)$ envolvem apenas potências de ordem três ou superior de x_1 e x_2 .

Nas vizinhanças da origem, onde x_1 e x_2 são muito pequenos, as Eqs. (12.40) e (12.41) podem ser aproximadas apenas por termos lineares, contanto que sejam dominantes perto da origem. Então,

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 + b_1x_2 \quad (12.42)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_2x_1 + b_2x_2 \quad (12.43)$$

Um exame das soluções das Eqs. (12.42) e (12.43) é útil para desenhar as trajetórias perto da origem.

As Eqs. (12.42) e (12.43) podem ser modificadas para

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \quad (12.44)$$

onde

$$x = x_1$$

$$a = -a_1 - b_2$$

$$b = a_1b_2 - a_2b_1$$

Note que a Eq. (12.44) é equivalente às Eqs. (12.42) e (12.43). Se as raízes da equação característica da Eq. (12.44) têm partes reais negativas, todas as trajetórias perto da origem se dirigirão a ela quando t cresce indefinidamente. Se pelo menos uma raiz é nula, então a estabilidade não pode ser determinada a partir da equação linearizada, a Eq. (12.44). Neste caso, o comportamento das trajetórias perto da origem depende dos termos de ordem superior nas Eqs. (12.40) e (12.41).

Classificação de pontos singulares. O gráfico de plano de fase de um sistema linear autônomo é uma família de trajetórias que não se cruzam, que descrevem a resposta do sistema a todas as condições iniciais possíveis. Considere a equação diferencial de segunda-ordem linearizada, Eq. (12.44). A localização do ponto singular no plano $x - \dot{x}$ é a origem. A natureza da solução da Eq. (12.44) é determinada pelas duas raízes λ_1 e λ_2 da seguinte equação característica:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Aqui supomos que a e b são constantes com $b \neq 0$. A localização de λ_1 e λ_2 no plano complexo determina as características do ponto singular. Pode-se ver que existem os seguintes seis casos:

1. λ_1 e λ_2 são complexos conjugados e estão no semiplano esquerdo
2. λ_1 e λ_2 são complexos conjugados e estão no semiplano direito
3. λ_1 e λ_2 são reais e estão no semiplano esquerdo
4. λ_1 e λ_2 são reais e estão no semiplano direito.
5. λ_1 e λ_2 são complexos conjugados e estão no eixo $j\omega$.
6. λ_1 e λ_2 são reais, λ_1 está no semiplano esquerdo e λ_2 está no semiplano direito.

De acordo com a natureza das respostas correspondendo a cada caso, os pontos singulares são classificados como foco estável, foco instável, nó estável, nó instável, centro, e ponto de sela, respectivamente. Os gráficos de plano de fase de cada um dos seis casos são ilustrados na Fig. 12.17, e os pontos singulares associados são indicados. Se o ponto singular é um ponto de sela, há trajetórias particulares que entram no ponto de sela e separam o plano de fase em regiões de movimentos distintos. Tais trajetórias são chamadas separatrizes. As trajetórias vistas na Fig. 12.17 podem ser construídas facilmente pelo método das isóclinas. Os gráficos de plano de fase mostram claramente o tipo de resposta do sistema, uma vez que a condição inicial é dada.

A classificação de pontos singulares que acabamos de dar se aplica apenas para sistemas de segunda-ordem. Para sistemas de terceira-ordem ou superior, os pontos singulares são normalmente classificados como estáveis, assintoticamente estáveis, ou instáveis. Para detalhes, referir-se ao Cap. 15.

Ciclos-limite. Ciclos-limite ocorrem freqüentemente em sistemas físicos como osciladores eletrônicos. Ciclos-limite têm uma configuração geométrica distinta no gráfico de plano de fase, ou seja, aquela de um caminho fechado isolado no plano de fase. Um dado sistema pode ter mais que um ciclo-limite. Um ciclo-limite representa uma oscilação estacionária, para a qual ou da qual todas as trajetórias vizinhas irão convergir ou divergir. Portanto ela divide o plano em uma região interna e uma externa. Nenhuma trajetória dentro (fora) de um particular ciclo-limite cruza o ciclo-limite para entrar na região externa (interna).

Um ciclo-limite em um sistema não linear descreve a amplitude e período de uma oscilação mantida. Deve-se ressaltar que nem todas as curvas fechadas no plano de fase são ciclos-limite. Um gráfico de plano de fase de um sistema conservativo, em que não há amortecimento para dissipar energia, é uma família contínua de curvas fechadas. Curvas fechadas desta espécie não são ciclos-limite porque nenhuma destas curvas é isolada da outra. Tais trajetórias sempre ocorrem como uma família contínua, de tal forma que há curvas fechadas em qualquer vizinhança de qualquer curva fechada em particular. Por outro lado, ciclos-limite são movimentos periódicos apresentados apenas por sistemas não lineares não conservativos. (Se o sistema é dissipativo em toda região, então a perda líquida de energia ao longo de qualquer trajetória no plano de fase é positiva, e não pode haver ciclos-limite. Portanto, se um sistema não linear não conservativo apresenta comportamento de ciclo-limite, o amortecimento equivalente deve ser igual a zero.) Como ciclos-limite são isolados um do outro, não pode haver ciclos-limite nas vizinhanças de qualquer um ciclo-limite.

Um ciclo-limite é chamado estável se as trajetórias perto do ciclo-limite, originando-se de dentro ou de fora, convergem para aquele ciclo-limite. Neste caso, o sistema apresenta uma oscilação mantida com amplitude constante. Isto é mostrado na Fig. 12.18(a). A região interna do ciclo-limite é uma região instável no sentido em que as trajetórias divergem para o ciclo-limite, e a região externa é uma

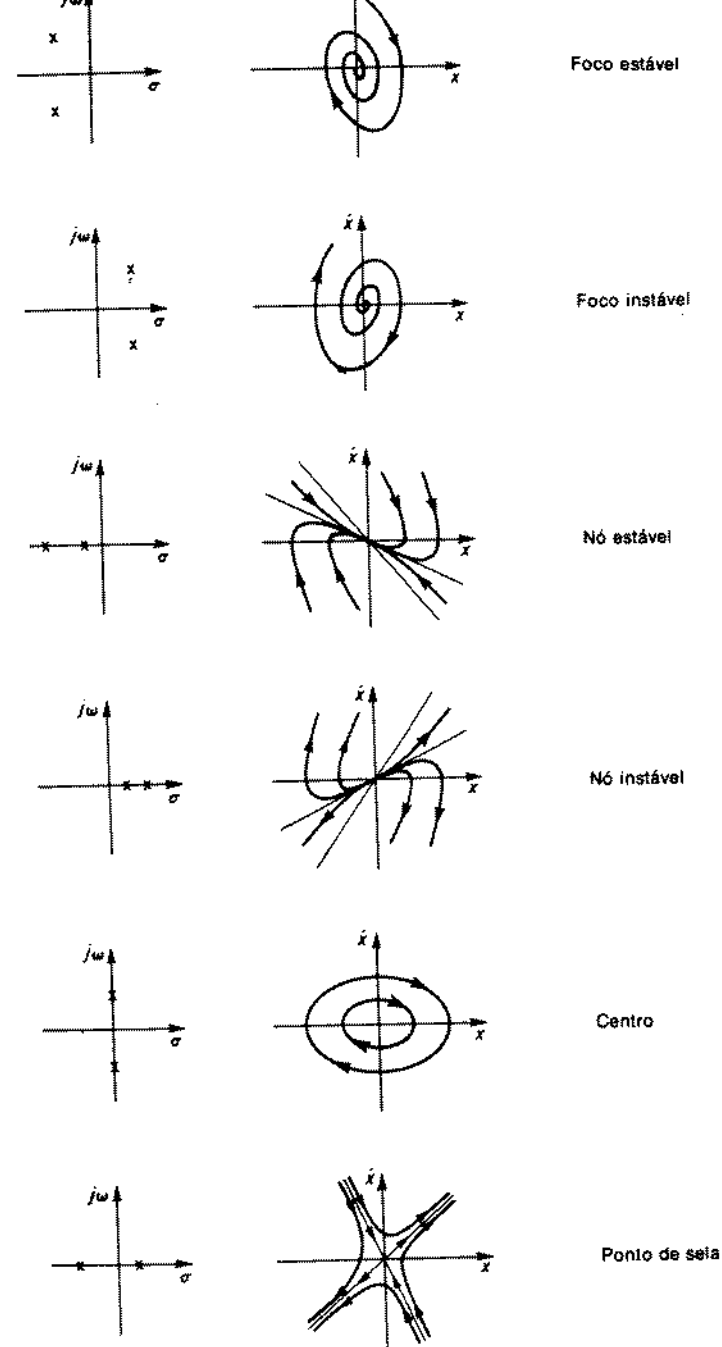


Fig. 12.17 Pontos singulares.

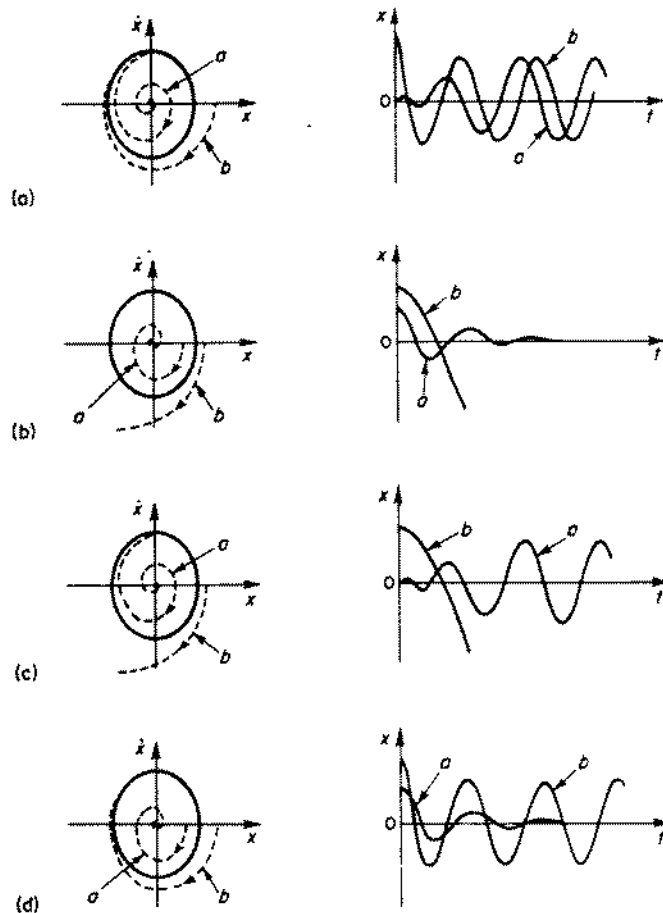


Fig. 12.18 Ciclos-limite e curvas típicas de x em função de t . (a) Ciclo-limite estável, (b) ciclo-limite instável, (c) ciclo-limite semi-estável. (d) ciclo-limite semi-estável.

região estável no sentido em que as trajetórias convergem para o ciclo-limite. No caso de sistemas de controle tendo este tipo de ciclo-limite, o critério de projeto frequentemente usado é o de fazer a magnitude do ciclo-limite pequena suficiente para satisfazer os requisitos de precisão.

Um ciclo-limite é chamado de instável quando trajetórias próximas divergem deste ciclo-limite. Neste caso, uma região instável circunda uma região estável. Se uma trajetória começa dentro de uma região estável, ela converge para um ponto singular dentro do ciclo-limite. Se uma trajetória começa em uma região instável, entretanto, ela diverge e aumenta para infinito com o tempo. Isto é mostrado na Fig. 12.18(b). A região interna de um ciclo-limite instável é a região estável, e a região externa é a região instável. O critério de projeto para um sistema de controle com um tal ciclo-limite instável é fazer a região estável a maior possível. Operação de

ciclo-limite instável pode ser realizada teoricamente se as condições iniciais podem ser ajustadas com exatidão. Entretanto, qualquer pequena perturbação irá causar instabilidade nesta operação de ciclo-limite.

Um ciclo-limite é chamado semi-estável se as trajetórias que se originam em pontos fora do ciclo-limite divergem deste, enquanto que trajetórias que se originam em pontos dentro do ciclo-limite convergem a este, como visto na Fig. 12.18(c), ou vice-versa, como visto na Fig. 12.18(d). Um sistema de controle pode não ter ciclo-limite, ou então ter um ou mais.

Considere um sistema com dois ciclos-limite e suponha que estes dois ciclos-limite estão localizados perto um do outro. Se o ciclo-limite maior é instável, enquanto que o ciclo-limite menor é estável como visto na Fig. 12.19, então as características do sistema se tornam similares às de um ciclo-limite semi-estável visto na Fig. 12.18(c). De modo similar, se o ciclo-limite maior é estável, enquanto que o menor é instável, as características do sistema se tornam similares à de um ciclo-limite semi-estável, visto na Fig. 12.18(d).

Ciclos-limite estáveis podem ser observados experimentalmente, mas, em virtude de "ruído", o mesmo não se pode dizer de ciclos-limite instáveis e semi-estáveis.

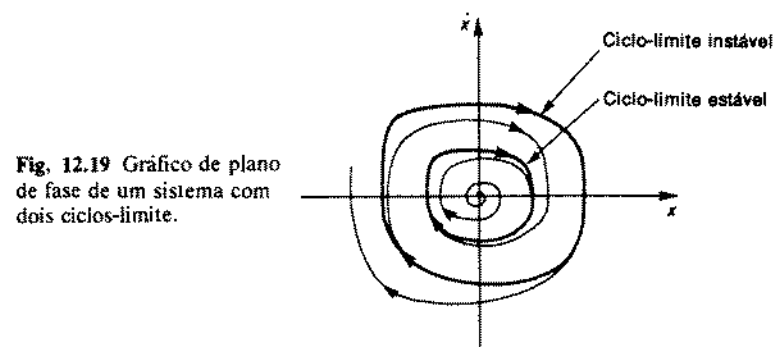


Fig. 12.19 Gráfico de plano de fase de um sistema com dois ciclos-limite.

Com relação à operação de ciclo-limite, devemos notar que, obviamente, deve ser fornecida energia ao sistema de alguma forma, por exemplo, uma tensão DC, vento constante, etc. Em um sistema auto-oscilatório, o trabalho realizado pela fonte de energia, que pode ser constante, é periódico. Em outras palavras, um sistema auto-oscilatório pode gerar um movimento periódico a partir de uma fonte de energia não periódica.

Finalmente, note que exceto em casos simples, é difícil ou impossível determinar a localização exata de ciclos-limite no plano de fase por técnicas analíticas. A localização exata de ciclos-limite pode ser achada apenas por técnicas gráficas, experimentais, ou computacionais.

Exemplo 12.7 Obtenha um gráfico de plano de fase do sistema dado por

$$\ddot{x} + 0,5\dot{x} + 2x + x^2 = 0 \quad (12.45)$$

Os pontos singulares para este sistema são

$$x = 0, \dot{x} = 0 \quad \text{e} \quad x = -2, \dot{x} = 0$$

A natureza destes pontos pode ser determinada como segue. Em uma vizinhança da origem, a Eq. (12.45) pode ser linearizada para

$$\ddot{x} + 0,5\dot{x} + 2x = 0$$

As duas raízes da equação característica

$$\lambda^2 + 0,5\lambda + 2 = 0$$

são

$$\lambda_1 = -0,25 + j1,39, \quad \lambda_2 = -0,25 - j1,39$$

Portanto este ponto singular é um foco estável.

Em uma vizinhança do ponto singular $(-2, 0)$, a Eq. (12.45) pode ser escrita como segue: Fazendo

$$y = x + 2$$

obtemos

$$\ddot{y} + 0,5\dot{y} - 2y + y^2 = 0 \quad (12.46)$$

Perto do ponto $y = 0, \dot{y} = 0$, a Eq. (12.46) se torna

$$\ddot{y} + 0,5\dot{y} - 2y = 0$$

As duas raízes da equação característica

$$\mu^2 + 0,5\mu - 2 = 0$$

são

$$\mu_1 = 1,19, \quad \mu_2 = -1,69$$

Portanto o ponto singular $(-2, 0)$ é um ponto de sela.

Usando o método das isóclinas, o gráfico de plano de fase, como visto na Fig. 12.20, pode ser obtido. As duas trajetórias que entram no ponto de sela $(-2, 0)$ são separatrizes. Neste sistema uma das separatrizes divide o plano de fase em duas regiões de movimento distinto. Em outras palavras, a solução da Eq. (12.45) tem dois tipos diferentes de trajetórias. O tipo de trajetória depende da condição inicial. Se o ponto inicial está na região hachurada (a região delimitada por uma das duas separatrizes), as trajetórias convergem para a origem. Se o ponto inicial está fora da região hachurada, as trajetórias tendem a infinito. (O desvio crescerá na direção negativa sem limite quando o tempo aumenta indefinidamente.)

12.5 ANÁLISE DE PLANO DE FASE DE SISTEMAS DE CONTROLE LINEARES

O método do plano de fase é bastante útil para analisar sistemas não lineares de segunda-ordem. Antes de apresentarmos a análise de sistemas não lineares, entre-

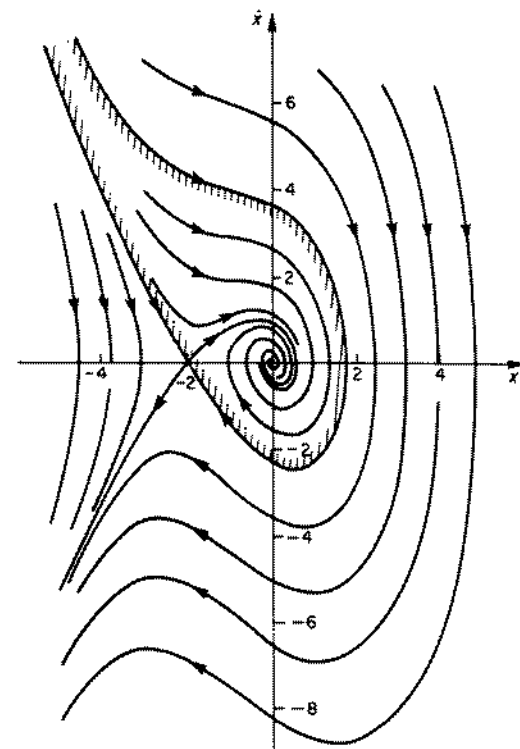


Fig. 12.20 Gráficos de plano de fase de um sistema descrito por $\ddot{x} + 0,5\dot{x} + 2x = 0$.

tanto, é desejável considerar uma aplicação do método do plano de fase para a análise de sistemas lineares de segunda-ordem porque muitos sistemas de controle com não linearidades dependentes de sinal podem ser aproximados por sistemas lineares por trechos.

Nesta seção, ilustraremos a aplicação deste método na análise de resposta transitória do sistema de controle de segunda-ordem visto na Fig. 12.21.

Resposta a degrau. Suponha que o sistema está inicialmente em repouso. Para este sistema, temos

$$T\ddot{e} + \dot{e} = Ke \quad (12.47)$$

Como $e = r - c$, a Eq. (12.47) pode ser escrita

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = T\ddot{r} + \dot{r} \quad (12.48)$$

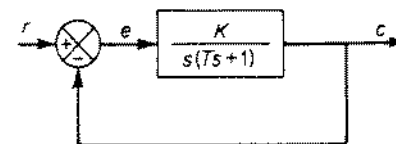


Fig. 12.21 Sistema de controle de segunda-ordem.

Para a entrada em degrau $r(t) = R$, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ para $t > 0$. Portanto, a Eq. (12.48) pode ser escrita como

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = 0 \quad \text{para } t > 0 \quad (12.49)$$

Como foi suposto inicialmente que o sistema estava em repouso, as condições iniciais para o sinal de erro são $e(0) = R$ e $\dot{e}(0) = 0$. A trajetória no plano $e - \dot{e}$ começa no ponto $(R, 0)$ e converge para a origem, o ponto singular do sistema. A Fig. 12.22(a) mostra a trajetória quando as raízes da equação característica do sistema são um par complexo conjugado e estão no semiplano esquerdo. A Fig. 12.22(b) mostra a trajetória quando as raízes são reais e estão no semiplano esquerdo. Em ambos os casos, o erro do sistema é nulo em regime estacionário. A natureza da resposta pode ser claramente vista nos gráficos de plano de fase. Por exemplo, o sobre-sinal máximo no caso subamortecido pode ser obtido do gráfico de plano de fase da Fig. 12.22(a).

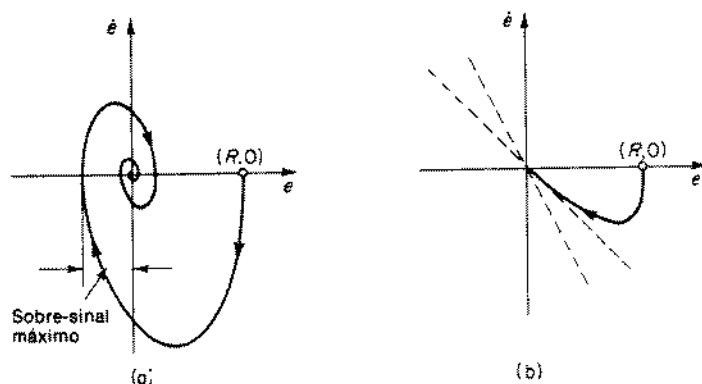


Fig. 12.22 Trajetórias correspondendo a respostas a degrau do sistema da Fig. 12.21. (a) Caso subamortecido. (b) caso sobreamortecido.

Resposta em rampa. Para a entrada em rampa $r(t) = Vt$ ou rampa mais degrau $r(t) = Vt + R$, as derivadas de $r(t)$ se tornam $\dot{r} = 0$ e $\ddot{r} = V$ para $t > 0$. Portanto, a Eq. (12.48) pode ser escrita como

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = V \quad (12.50)$$

Seja

$$e - \frac{V}{K} = x$$

Então a Eq. (12.50) se torna

$$T\ddot{x} + \dot{x} + Kx = 0 \quad (12.51)$$

O gráfico de plano de fase da equação diferencial dada pela Eq. (12.51) no plano $x - \dot{x}$ é o mesmo que o da Eq. (12.49) no plano $e - \dot{e}$.

Nota-se que a natureza do ponto singular é determinada pelas raízes da equação característica. A localização do ponto singular no plano $e - \dot{e}$, em geral, depende tanto dos componentes em degrau como da rampa da entrada. (Neste exemplo em particular, a localização do ponto singular no plano de fase depende apenas da entrada em rampa porque o lado direito da Eq. (12.48) não contém um termo em r .) Como é suposto que o sistema está inicialmente em repouso, as condições iniciais para o sinal de erro podem ser escritas como

$$e(0) = R, \quad \dot{e}(0) = V$$

onde R pode ser zero. As Figs. 12.23(a) e (b) mostram trajetórias no plano $e - \dot{e}$. [A Fig. 12.23(a) corresponde ao caso em que as raízes da equação característica, correspondendo à Eq. (12.49), são um par complexo-conjugado e estão no semiplano esquerdo. A Fig. 12.23(b) corresponde ao caso em que as raízes são reais e estão no semiplano esquerdo.] Nas Figs. 12.23(a) e (b), para entrada em rampa a trajetória começa, por exemplo, no ponto A. Para uma entrada em rampa mais degrau a trajetória começa, por exemplo, no ponto B. Em ambos os casos, as trajetórias convergem para o ponto singular $(V/K, 0)$.

Da análise feita, pode-se ver que o gráfico de plano de fase do sistema visto na Fig. 12.21 para uma entrada em rampa ou rampa mais degrau é o mesmo que aquele para uma entrada em degrau, exceto que todo o gráfico está deslocado para a direita de V/K . O erro estacionário da saída do sistema, quando o sistema está sujeito à entrada $r(t) = Vt + R$, é V/K .

Note que para um sistema com um ponto singular é possível deslocar a posição do ponto singular para a origem de um novo plano de fase introduzindo-se uma nova variável. Portanto, para tal sistema, as características de resposta a degrau e resposta a rampa podem ser mostradas em um único gráfico de plano de fase. Para um sistema não linear com dois ou mais pontos singulares, entretanto, é impossível deslocar todos estes pontos singulares para a origem ao mesmo tempo. Portanto, para um tal sistema, é imperativo se usar um gráfico de plano de fase separado para uma resposta a degrau e para uma resposta a rampa.

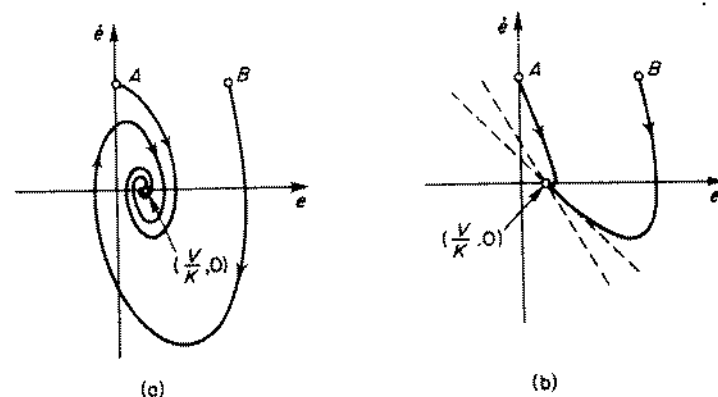


Fig. 12.23 Trajetórias correspondendo a respostas à rampa do sistema da Fig. 12.21. (a) Caso subamortecido. (b) caso sobreamortecido.

Resposta impulsiva. Para uma entrada impulso unitário, a equação do sistema é

$$T\ddot{c} + \dot{c} + Kc = 0 \quad \text{para } t > 0$$

com condições iniciais $c(0-) = \dot{c}(0-) = 0$ e

$$c(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sK}{Ts^2 + s + K} = 0, \quad \dot{c}(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 K}{Ts^2 + s + K} = \frac{K}{T}$$

O ponto de partida da trajetória no plano $c - \dot{c}$ é $(0, K/T)$. Em termos do sinal de erro.

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = 0 \quad \text{para } t > 0$$

com condições iniciais

$$e(0+) = 0, \quad \dot{e}(0+) = -\frac{K}{T}$$

No plano $e - \dot{e}$, o ponto de partida (correspondendo a $t = 0+$) da trajetória é $(0, -K/T)$. As trajetórias indicando respostas a impulso unitário para $t > 0$ são vistas nas Figs. 12.24 e 12.25. A Fig. 12.24 corresponde a um sistema subamortecido, e a Fig. 12.25 corresponde a um sistema sobreamortecido. Nestas figuras, os pontos de partida (em $t = 0+$) das trajetórias são mostrados pelo ponto P .

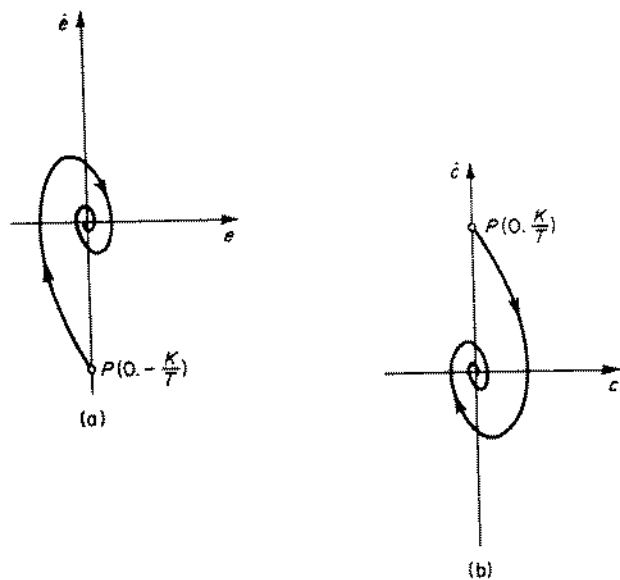


Fig. 12.24 Trajetórias correspondendo a respostas a impulsos unitários do sistema da Fig. 12.21 (caso subamortecido). (a) Gráfico no plano $e - \dot{e}$. (b) gráfico no plano $c - \dot{c}$.

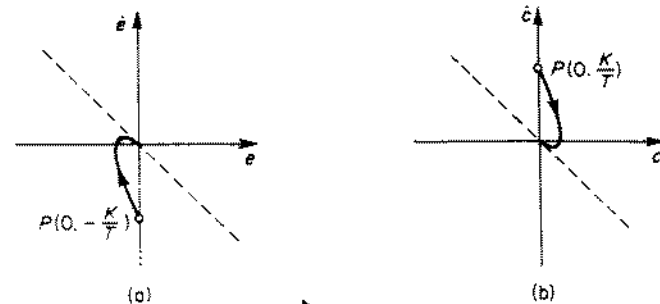


Fig. 12.25 Trajetórias correspondendo a respostas a impulso unitário do sistema da Fig. 12.21 (caso sobreamortecido). (a) Gráfico no plano $e - \dot{e}$. (b) gráfico no plano $c - \dot{c}$.

12.6 ANÁLISE DE PLANO DE FASE DE SISTEMAS DE CONTROLE NÃO LINEARES*

Em sistemas de segunda-ordem com não linearidades dependentes de sinal, é possível aproximar o sistema por vários sistemas lineares por trechos. O plano de fase inteiro é dividido em várias sub-regiões, cada uma correspondendo a uma operação linear individual. Há um ponto singular para cada região, embora ele possa estar localizado fora daquela região particular.

Se o ponto singular está dentro de sua sub-região, então ele é chamado de um ponto singular real. Mas, se o ponto singular está fora da sub-região a que ele pertence e, portanto, nunca pode ser alcançado pelas suas próprias trajetórias, ele é chamado de um ponto singular *virtual*. Um sistema de segunda-ordem com não linearidade dependente de sinal pode ter apenas um ponto singular real.

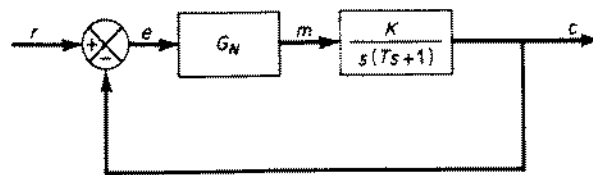
Todas as regiões adjacentes a uma região com um ponto singular real terão pontos singulares virtuais. A localização e natureza de cada ponto singular são determinadas a partir da equação diferencial que governa a dada sub-região. A localização de um ponto singular pode depender da entrada. O gráfico de plano de fase de cada sub-região é o de um sistema linear. A trajetória composta, que é obtida juntando trajetórias nas fronteiras de cada região de operação, fornece a resposta transitória do sistema não linear.

Sistemas de controle com ganhos não lineares. Considere o sistema não linear visto na Fig. 12.26(a). O bloco chamado G_N é o elemento de ganho não linear. A curva característica de entrada-saída deste elemento é vista na Fig. 12.26(b). O ganho do elemento é unitário ou k , sempre que a magnitude do sinal de erro e é maior do que ou menor do que e_0 , respectivamente. Ou seja,

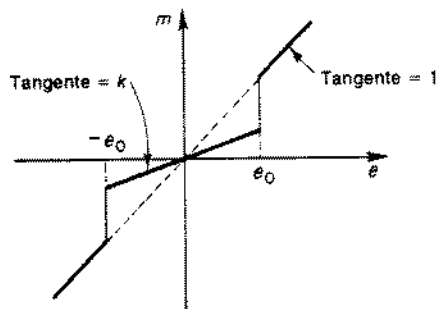
$$m = e \quad \text{para } |e| > e_0 \quad (12.52)$$

$$m = ke \quad \text{para } |e| < e_0 \quad (12.53)$$

*Esta seção segue a Referência K-1.



(a)



(b)

Fig. 12.26 (a) Sistema não linear. (b) curva característica de entrada-saída do elemento de ganho não linear.

O sistema tem um ganho grande para sinais de erro grandes e tem um ganho pequeno para sinais de erro pequenos. O chaveamento do ganho pode ser conseguido usando-se um dispositivo de chaveamento que muda o ganho do amplificador abruptamente de um valor para outro. Para valores pequenos de e , o sistema apresenta uma resposta lenta, e para grandes erros, uma resposta rápida. Esta característica pode ser desejável para sistemas sujeitos a ruídos de baixa amplitude e alta frequência uma vez que sinais de ruído indesejáveis serão suprimidos substancialmente, enquanto que sinais de comando podem ser transmitidos de modo satisfatório.

Como este sistema é linear por trechos, é possível obter trajetórias para este sistema combinando as trajetórias de dois sistemas lineares.

Neste exemplo, supomos que o sistema está inicialmente em repouso. A equação diferencial relacionando as variáveis c e m é

$$T\ddot{c} + \dot{c} = Km$$

Como $e = r - c$, esta última equação pode ser reescrita como

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Km = T\dot{r} + \dot{r} \quad (12.54)$$

Dois tipos de entradas serão consideradas aqui, a entrada em degrau e a entrada em rampa (ou rampa mais degrau).

Para entradas em degrau. Como para entradas em degrau $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ para $t > 0$, a Eq. (12.54) se torna

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Km = 0 \quad \text{para } t > 0 \quad (12.55)$$

Das Eqs. (12.52), (12.53) e (12.55), obtemos as seguintes duas equações:

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = 0 \quad \text{para } |e| > e_0 \quad (12.56)$$

$$T\ddot{e} + \dot{e} + kKe = 0 \quad \text{para } |e| < e_0 \quad (12.57)$$

Para se obter a trajetória do sinal de erro, os pontos singulares do sistema devem ser inicialmente determinados. Os pontos singulares estão onde $\dot{e} = \ddot{e} = 0$. Está claro, a partir das Eqs. (12.56) e (12.57), que a origem (0, 0) é o ponto singular para o sistema representado por estas duas equações. Na análise que se segue, será suposto que as raízes da equação característica, correspondendo à Eq. (12.56), são complexos conjugados e estão no semiplano esquerdo do plano complexo. Portanto, a natureza do ponto singular (0, 0) neste caso é aquela de um foco estável.

O valor de k é suposto tal que o coeficiente de amortecimento da equação característica correspondendo à Eq. (12.57) é igual a um. Então, a resposta é subamortecida para erros grandes e criticamente amortecida para erros pequenos. Se a relação entre m e e fosse dada ou por $m = ke$ ou $m = e$ para todas as magnitudes do sinal de erro, então o gráfico de plano de fase teria o aspecto visto na Fig. 12.27(a) ou aquele visto na Fig. 12.27(b).

A Fig. 12.28 mostra a trajetória do sinal de erro do sistema visto na Fig. 12.26(a), com as constantes do sistema sendo $T = 1$, $K = 4$, $k = 0.0625$, e $e_0 = 0.2$. Supõe-se que a entrada do sistema é um degrau unitário. Como visto na Fig. 12.28, o plano de fase está dividido em três regiões. Na região limitada pelas linhas $e = e_0$ e $e = -e_0$, ocorre uma operação linear representada pela Eq. (12.57). Fora desta

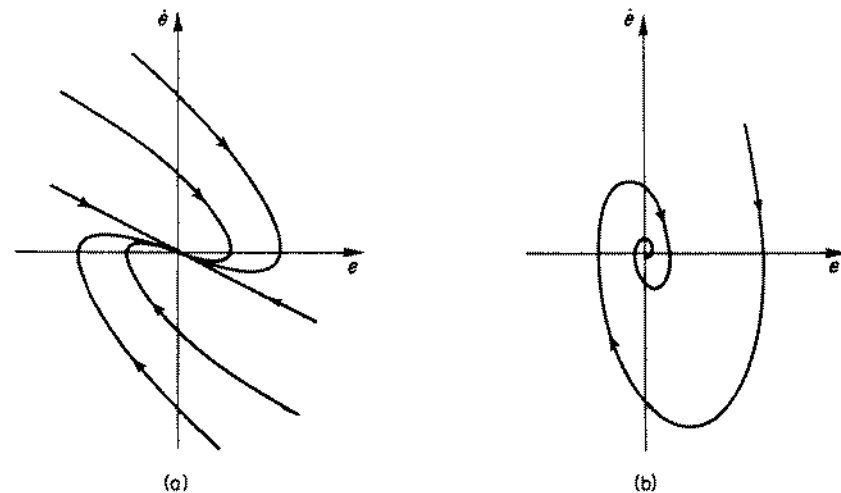


Fig. 12.27 Gráficos de plano de fase de sistemas não lineares. (a) Caso sobreamortecido ($m = ke$). (b) caso subamortecido ($m = e$).

região, ocorrerá a outra operação linear, correspondendo à Eq. (12.56). Na Fig. 12.28, a trajetória começando no ponto A, que é determinada pelas condições iniciais $e(0) = 1$, $\dot{e}(0) = 0$, tende a convergir para o foco estável (0, 0). A operação do sistema é chaveada no ponto B, entretanto, onde a trajetória intercepta a linha de fronteira $e = e_0$. Neste ponto, a trajetória é conectada a uma trajetória pertencendo ao ponto singular da região adjacente e passando por este ponto. A partir do ponto B, até que a operação do sistema seja novamente chaveada, a trajetória tende a convergir para o nó estável (0, 0). A operação do sistema muda novamente no ponto C, e a trajetória tende a convergir para o foco estável (0, 0) até que o ponto D é alcançado. Neste ponto, a operação do sistema é chaveada mais uma vez. Repetindo o mesmo processo, a trajetória finalmente converge para o nó estável (0, 0). Em regime estacionário, não há erro.

Pode-se ver que a trajetória vista na Fig. 12.28 representa de forma geral características de resposta a degrau mais desejáveis do que aquelas trajetórias vistas nas Figs. 12.27(a) e (b), no sentido de que a primeira resposta é mais rápida que a última. Para pequenas entradas em degrau, a resposta não exibe sobre-sinais. Para entradas em degrau de amplitude média, a resposta do sistema exibe um único sobre-sinal. Para entradas em degraus maiores, pode haver sobre-sinais e "subsinais" (undershoot) nas curvas de resposta. A Fig. 12.29 mostra curvas típicas de resposta a degrau.

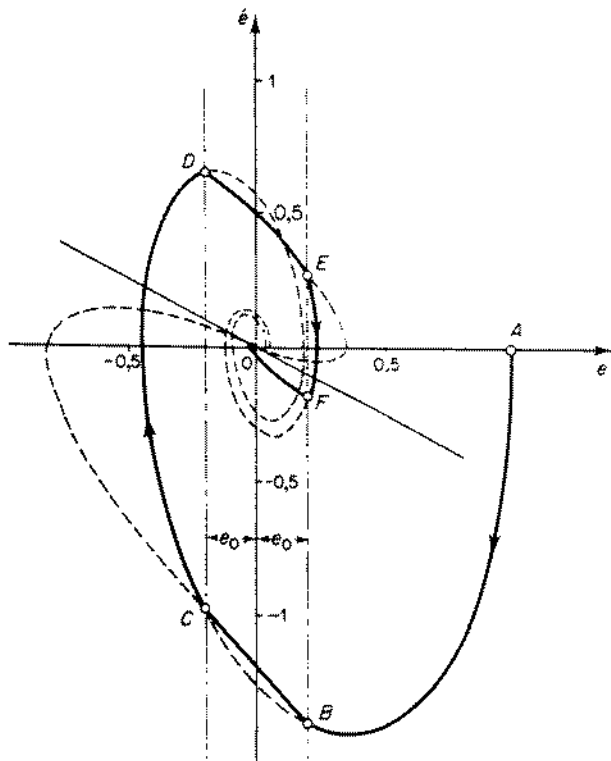


Fig. 12.28 Trajetória correspondendo a uma resposta a degrau unitário do sistema visto na Fig. 12.26(a).

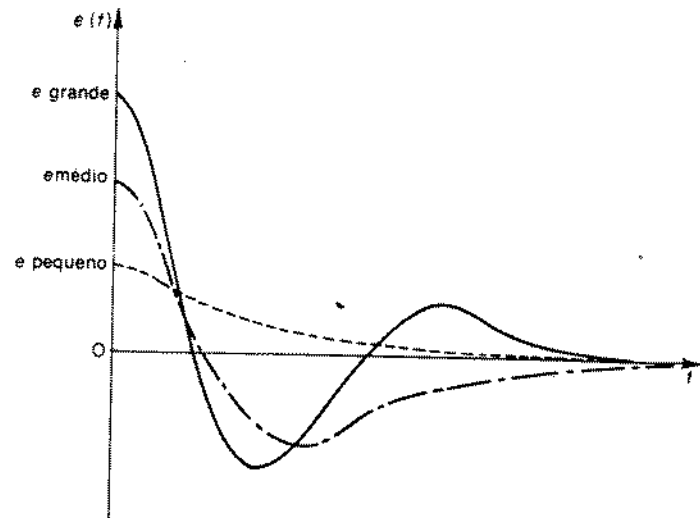


Fig. 12.29 Curvas típicas de resposta a degrau para o sistema visto na Fig. 12.26(a).

Para entradas em rampa (ou rampa mais degrau): Para o sinal de entrada

$$r(t) = R + Vt$$

a Eq. (12.54) se torna

$$T\ddot{e} - \dot{e} - Km = V \quad \text{para } t > 0 \quad (12.58)$$

Das Eqs. (12.52), (12.53) e (12.58), obtemos para $t > 0$

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = V \quad \text{para } |e| > e_0 \quad (12.59)$$

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Kke = V \quad \text{para } |e| < e_0 \quad (12.60)$$

O ponto singular correspondente à Eq. (12.59) é $(V/K, 0)$, que é suposto ser um foco estável, e o correspondente à Eq. (12.60) é $(V/Kk, 0)$, que se acredita ser um nó estável.

A localização dos pontos singulares pode também ser obtida graficamente. Os valores de e , correspondendo às interseções da reta horizontal $m = V/K$ com a reta $m = ke$ e com a reta $m = e$, fornecem os valores de e dos pontos singulares. Isto é mostrado nas Figs. 12.30(a), (b) e (c). Para valores pequenos de V , ou seja, para $|V| < kKe_0$, os pontos singulares estão localizados dentro da faixa delimitada pelas retas $e = \pm e_0$ no plano $e - \dot{e}$. Para valores médios de V , ou seja, $kKe_0 < |V| < Ke_0$, o ponto singular, correspondendo à Eq. (12.59), está dentro da faixa delimitada pelas retas $e = \pm e_0$ no plano $e - \dot{e}$, e o outro ponto singular, correspondendo à Eq. (12.60), está fora desta faixa. Para valores maiores que V , ou seja, $|V| > Ke_0$, os pontos singulares estão fora desta faixa.

Se a relação entre m e e fosse tal que $m = ke$ durante a resposta temporal, então o gráfico de plano de fase do sistema sujeito à entrada $r(t) = R + Vt$ seria o mesmo

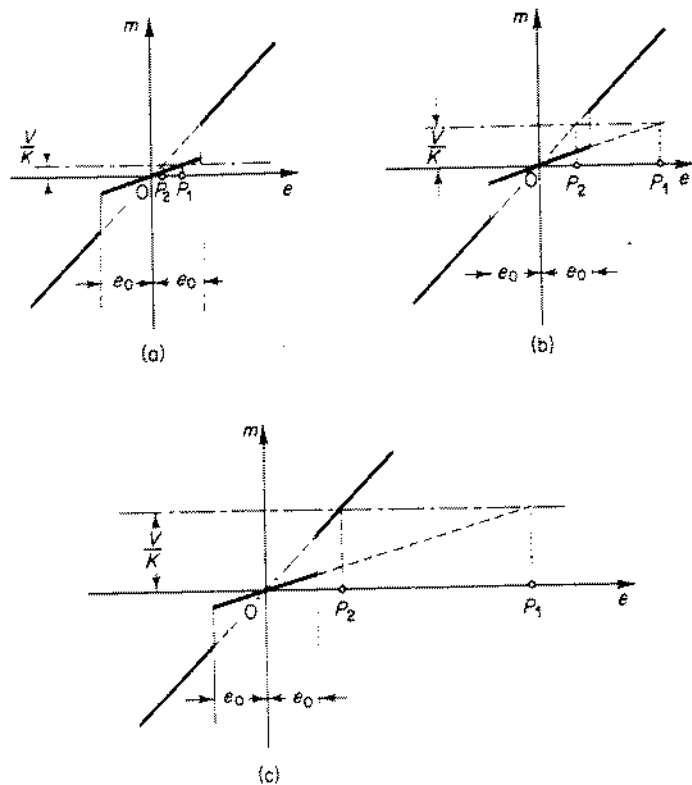


Fig. 12.30 Diagramas mostrando as localizações de pontos singulares.

que aquele visto na Fig. 12.27(a), com exceção de que o primeiro está deslocado para a direita de um valor V/Kk , como visto na Fig. 12.31(a). Similarmente, se m fosse igual a e durante a resposta temporal, então o gráfico do plano de fase seria o mesmo que aquele visto na Fig. 12.27(b), exceto que o primeiro estaria deslocado para a direita pela quantidade V/K , como visto na Fig. 12.31(b).

A Fig. 12.32 mostra a trajetória do sinal de erro para o caso $V < kKe_0$. (Os valores numéricos usados para este exemplo são $T = 1$, $K = 4$, $k = 0.0625$, $e_0 = 0.2$, $R = 0.3$, e $V = 0.04$.) O ponto de partida A da trajetória é determinado pelas condições iniciais $e(0) = R = 0.3$ e $\dot{e}(0) = V = 0.04$. A trajetória partindo do ponto A tende a convergir para o foco estável P_2 . Tão logo a trajetória alcance o ponto B , entretanto, a operação do sistema é chaveada, e a trajetória começa a convergir para o nó estável P_1 . Em regime permanente, o sistema tem um erro, cuja magnitude é OP_1 .

A Fig. 12.33 mostra a trajetória do sinal de erro quando $kKe_0 < V < Ke_0$. (Na Fig. 12.33, as constantes do sistema são $T = 1$, $K = 4$, $k = 0.0625$, e $e_0 = 0.2$. A entrada é $r(t) = Vt = 0.4t$.) A trajetória começa no ponto A , que corresponde às condições iniciais $e(0) = 0$, $\dot{e}(0) = 0.4$, e tende a convergir para o nó estável P_1 , (1.6, 0). O chaveamento na operação ocorre no ponto B , e então a trajetória tende a convergir para o foco estável P_2 (0.1, 0). O sistema novamente chaveia no ponto C , e

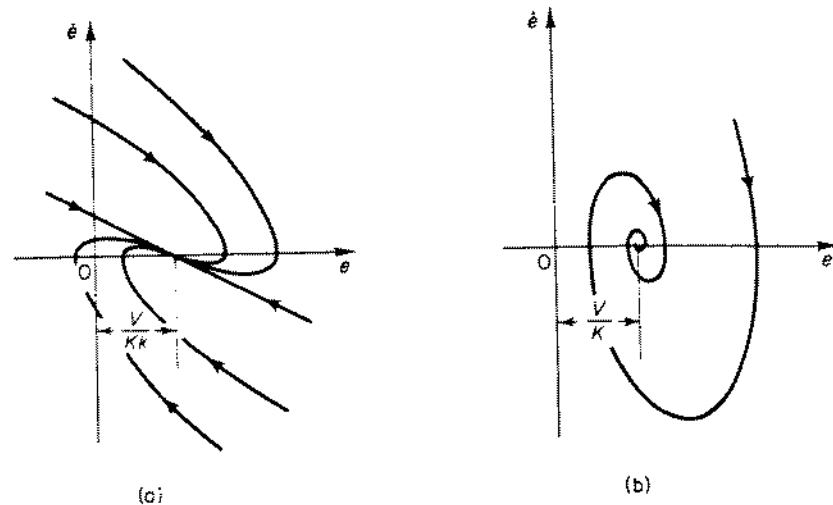


Fig. 12.31 Gráficos de plano de fase de sistemas não lineares com entradas em rampa. (a) Caso sobreamortecido ($m = ke$). (b) caso subamortecido ($m = e$).

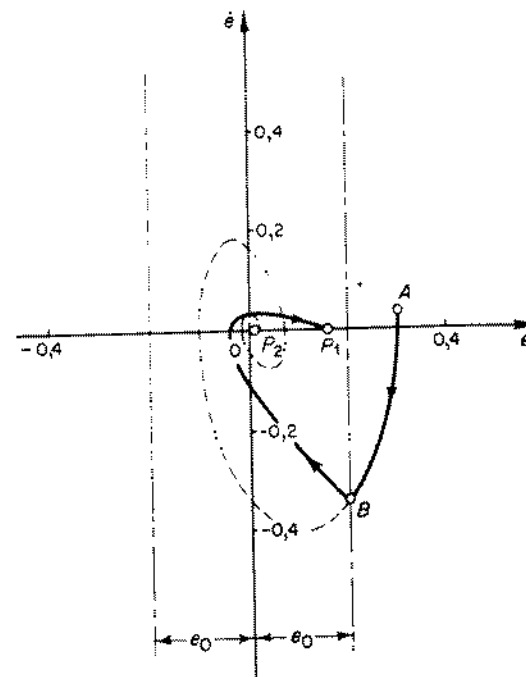


Fig. 12.32 Trajetória correspondendo a uma resposta a rampa (rampa + degrau) do sistema visto na Fig. 12.26(a).

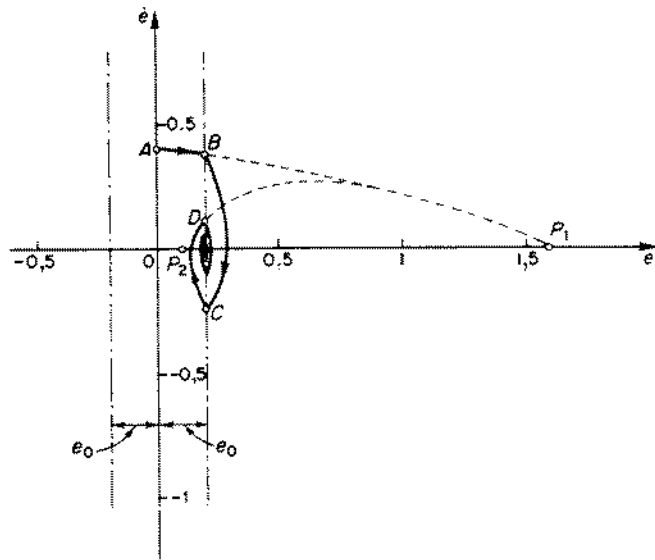


Fig. 12.33 Trajetória correspondendo a uma resposta a rampa do sistema da Fig. 12.26(a).

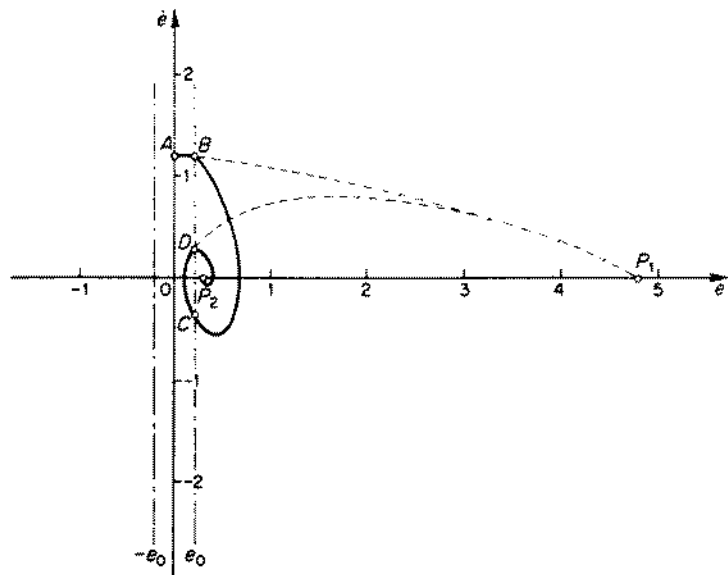


Fig. 12.34 Trajetória correspondendo a uma resposta a rampa do sistema da Fig. 12.26(a).

a trajetória tende a convergir para o nó estável P_1 . Um outro chaveamento ocorre na operação do sistema no ponto D . O mesmo processo continua até que a trajetória converge para o ponto onde $e = e_0$, $\dot{e} = 0$. Pode-se ver, da Fig. 12.33, que à medida que a trajetória se aproxima do ponto singular $(e_0, 0)$, o sinal de erro exibe pequenas oscilações, e a magnitude do erro estacionário se torna e_0 .

A operação estacionária do sistema depende da construção física do elemento de ganho não linear. Se o chaveamento de uma operação linear para outra envolve algum atraso, a resposta do sistema apresentará um ciclo limite em torno do ponto $(e_0, 0)$. Se o chaveamento ocorre instantaneamente, o sistema, em regime estacionário, apresenta uma espécie de oscilação tudo-ou-nada (em inglês, *chattering*).

A Fig. 12.34 mostra a trajetória do sinal de erro para o caso em que $V > Ke_0$. [A entrada é $r(t) = Vt = 1.2t$.] A trajetória partindo do ponto A , com o ponto correspondendo à condição inicial, tende a convergir para o foco estável P_1 (4.8, 0). Entretanto, a operação do sistema é chaveada no ponto B , e a trajetória tende a convergir para o foco estável P_2 (0.3, 0). A operação é novamente chaveada no ponto C , e depois no ponto D , e finalmente a trajetória converge para o foco estável P_2 . À medida que a trajetória se aproxima da vizinhança do ponto P_2 , o sinal de erro apresenta pequenas oscilações, que irão decair para zero. Em regime estacionário, a magnitude do erro é \overline{OP}_2 .

A análise feita até agora ilustrou que os tipos de resposta de sistemas não lineares são dependentes da entrada. Por exemplo, para uma pequena entrada em degrau, a resposta não apresenta sobre-sinal. Para uma entrada em degrau grande, a resposta é oscilatória. Para uma entrada em rampa de pequena amplitude, a resposta é aperiódica, enquanto que para uma entrada em rampa de amplitude grande a resposta é oscilatória.

Exemplo 12.8 Considere o sistema visto na Fig. 12.35(a). A curva característica do elemento não linear é vista na Fig. 12.35(b). Supõe-se que não há atraso de tempo no chaveamento da

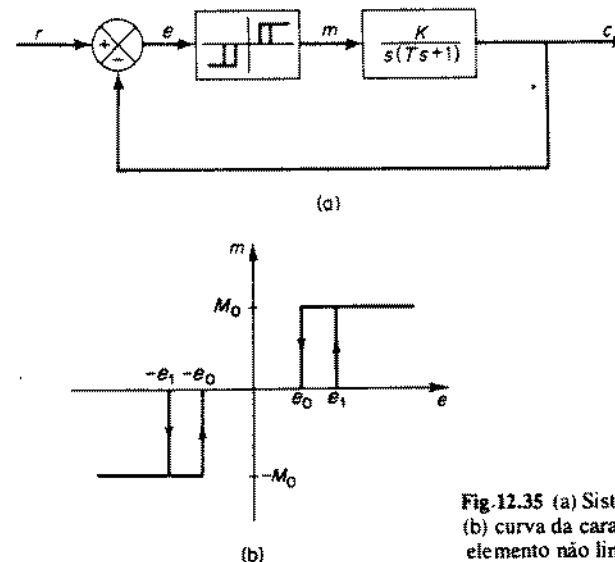


Fig. 12.35 (a) Sistema de controle não linear; (b) curva da característica entrada-saída do elemento não linear.

condição ligado para a condição desligado. Determine o comportamento de resposta a degrau e a rampa para este sistema. Supõe-se que as constantes do sistema são $T = 1$, $K = 4$, $e_0 = 0,1$, $e_1 = 0,2$, e $M_0 = 0,2$.

A equação para este sistema é

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Km = T\dot{r} + r$$

Para $\dot{e} > 0$, temos

$$\begin{aligned} m &= M_0 & \text{para } e > e_1 \\ m &= 0 & \text{para } e_1 > e > -e_0 \\ m &= -M_0 & \text{para } e < -e_0 \end{aligned}$$

Para $\dot{e} < 0$, temos

$$\begin{aligned} m &= M_0 & \text{para } e > e_0 \\ m &= 0 & \text{para } e_0 > e > -e_1 \\ m &= -M & \text{para } e < -e_1 \end{aligned}$$

Para entradas em degrau: A trajetória deste sistema com uma entrada degrau unitário é vista na Fig. 12.36. A resposta mostra um ciclo limite em regime estacionário. Portanto, a oscilação na saída do sistema continua indefinidamente.

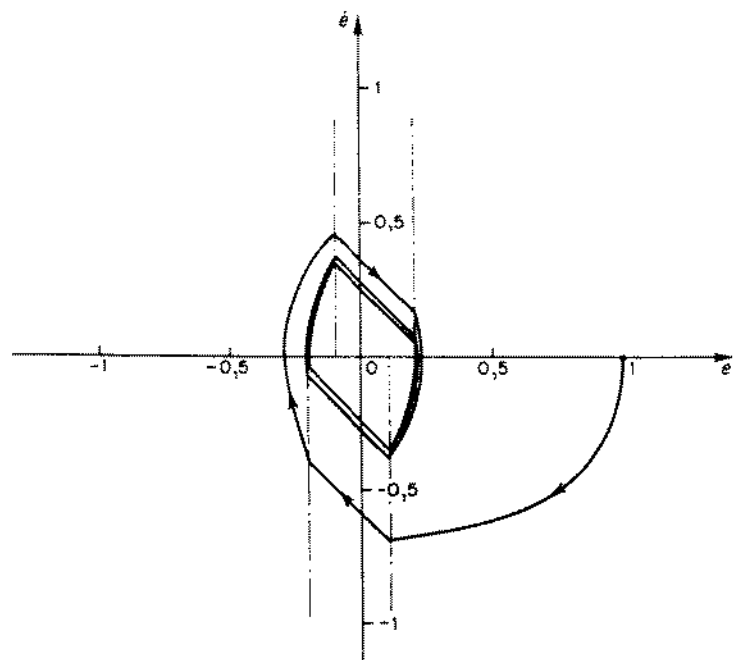


Fig. 12.36 Trajetória correspondente a uma resposta a degrau unitário do sistema visto na Fig. 12.35(a).

Para entradas em rampa: Para uma entrada em rampa $r(t) = Vt$, a equação do sistema se torna

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Km = V$$

Investigaremos agora a resposta para a entrada em rampa para três casos diferentes.

Caso 1 ($V > KM_0$): Um gráfico de plano de fase para o caso em que $V = 1,2$ é visto na Fig. 12.37. A trajetória partindo do ponto A, por exemplo, seguirá o caminho ABCD. A trajetória é assintótica à reta $\dot{e} = 0,4$. O erro tende a infinito quando o tempo aumenta indefinidamente.

Caso 2 ($V < KM_0$): Um gráfico de plano de fase para o caso em que $V = 0,4$ é visto na Fig. 12.38. A trajetória partindo do ponto A segue o caminho ABCDEF e converge para um ciclo limite. A oscilação de saída continua indefinidamente.

Caso 3 ($V = KM_0$): Um gráfico de plano de fase para o caso em que $V = 0,8$ é visto na Fig. 12.39. A trajetória partindo do ponto A segue o caminho ABCD. A trajetória converge para o ponto D. Em regime estacionário, o sistema terá um erro estacionário igual a OD .

Resumo. A matéria apresentada nesta seção pode ser resumida como segue: Considere o sistema visto na Fig. 12.40. O bloco N no elo direto representa um elemento de ganho não linear que é dependente da amplitude. Se $n(e)$ assume valores univocamente, é uma função contínua e diferenciável de e , então sua inclinação $dn(e)/de = n'(e)$ define um ganho incremental de malha. Enquanto a trajetória permanece em uma faixa vertical em torno de $e = e_1$ no plano de fase, a não linearidade pode ser substituída por uma constante $n'(e_1) = K$. O comportamento das trajetórias em uma faixa em torno de $e = e_1$ será governado por uma

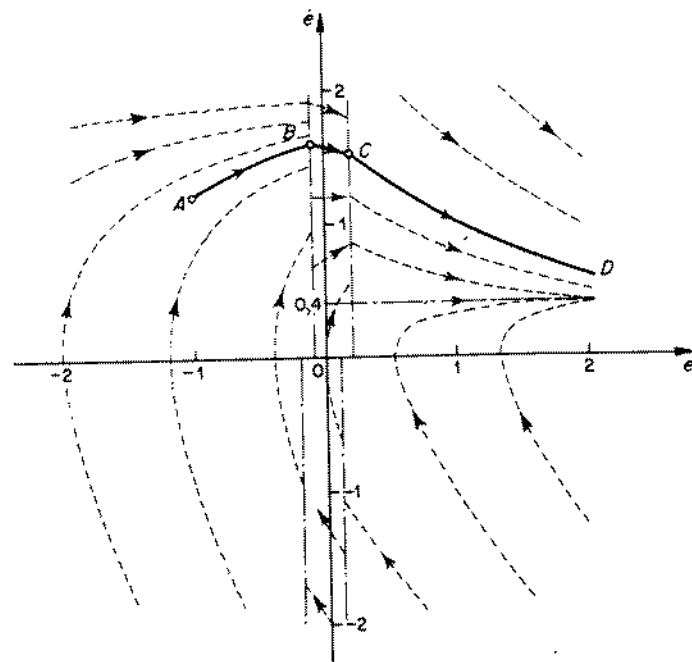


Fig. 12.37 Gráfico de plano de fase do sistema visto na Fig. 12.35(a). [$r(t) = 1,2t$].

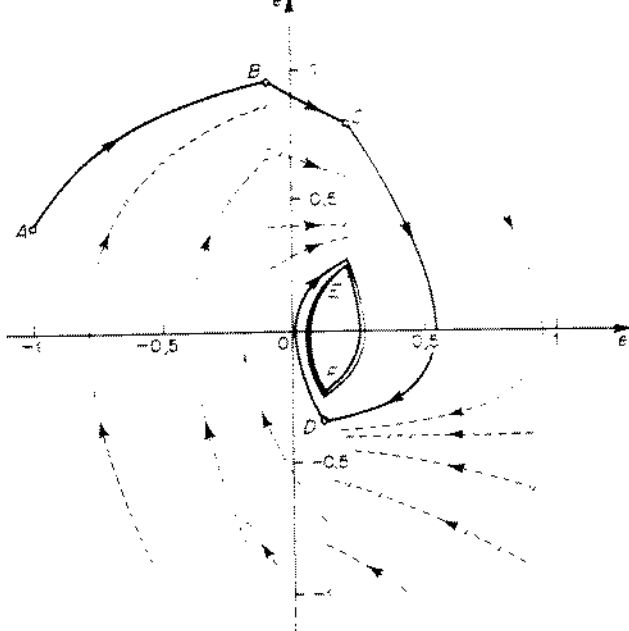


Fig. 12.38 Gráfico de plano de fase do sistema visto na Fig. 12.35(a). $[r(t) = 0.4t]$.

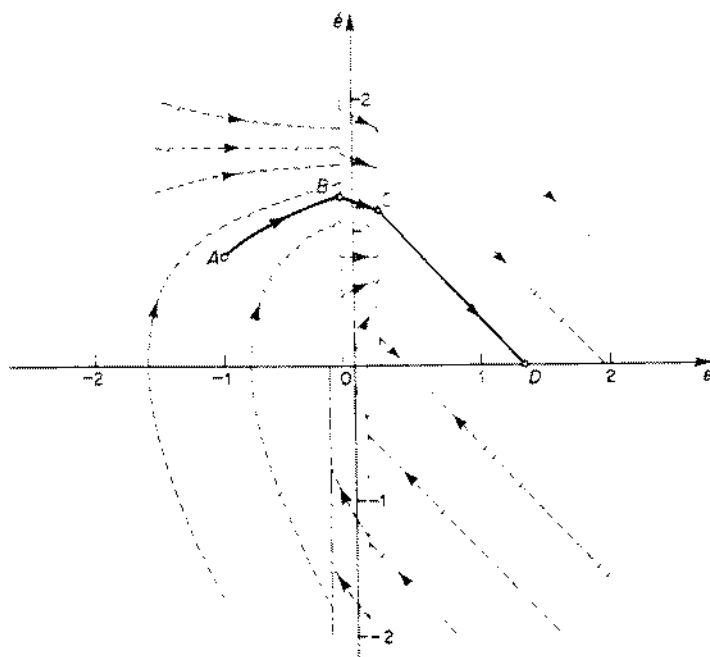


Fig. 12.39 Gráfico de plano de fase do sistema visto na Fig. 12.35(a). $[r(t) = 0.8t]$.

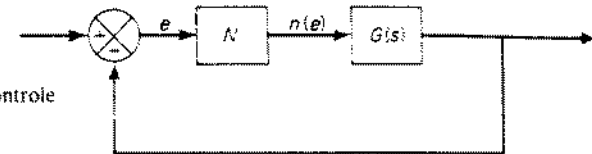


Fig. 12.40 Sistema de controle não linear.

equação diferencial linear invariante no tempo. Isto é, para cada segmento de reta da curva $n(e)$ em função de e corresponde uma região no plano de fase dentro da qual as soluções transitórias obedecem a uma equação diferencial linear. Portanto, o plano de fase inteiro está dividido em várias regiões.

1. Se $n(e)$ é substituído pelo ganho variável K correspondendo a todos os possíveis valores de $n(e)$, e se determina que o sistema a malha fechada é estável para todos os valores de K , então é intuitivamente claro que o sistema é estável e que todas as trajetórias irão convergir para um ponto singular único e estável.
2. Se o sistema a malha fechada é instável para alguns valores de K e estável para outros, o sistema pode apresentar um ciclo-limite, ou ciclos-limite. Considere o caso em que todo o plano de fase é dividido em três regiões, como visto na Fig. 12.41. Se as trajetórias na dada região têm um ponto singular dentro desta região, então ele é um ponto singular real. Se o ponto singular está localizado fora da região dada, ele é um ponto singular virtual. Referindo-se à Fig. 12.41, suponha que a região II tem um ponto singular real e que as regiões I e III têm pontos singulares virtuais. Suponha também que o ponto singular real é instável e que os pontos singulares virtuais são estáveis. Pode-se ver que todas as trajetórias irão entrar na região II. Como o ponto singular nesta região é instável, as trajetórias não podem permanecer na região II, e acabarão tendo que deixá-la. Portanto, pode-se ver que as trajetórias não podem terminar em um ponto singular pois o único ponto singular real é instável. Elas não podem tender a infinito pois os pontos singulares virtuais são estáveis. Portanto, o único comportamento possível para as trajetórias é tender a um ciclo-limite estável. O conceito de pontos singulares reais e virtuais é muito fácil de ser tratado, e pode ser estendido facilmente para sistemas de ordem maior que a segunda.

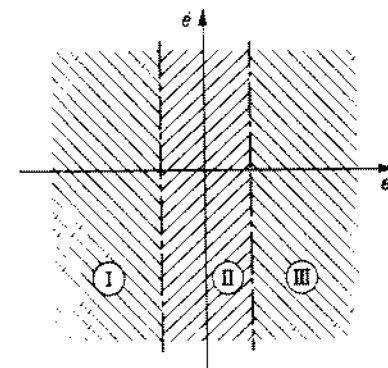


Fig. 12.41 Plano de fase dividido em três regiões.

Um sistema de equações diferenciais ordinárias de ordem n contendo um número arbitrário de não linearidades contínuas e unívocas, onde cada não linearidade pode ser aproximada por um número suficientemente grande de segmentos de reta (em outras palavras, onde os aspectos topológicos da solução de uma equação diferencial são preservados sempre que a não linearidade é substituída por uma aproximação por uma reta adequadamente escolhida), é chamado *monoestável* se a equação diferencial linear em cada ponto no espaço de fase é estável. Em outras palavras, a equação diferencial a que nos referimos deixa de ser monoestável apenas se a equação diferencial linear incremental é instável em alguma região no espaço de fase. O comportamento dinâmico de sistemas monoestáveis é essencialmente similar ao de sistemas lineares. Se a trajetória no espaço de fase permanece dentro de duas superfícies concêntricas esféricas com nenhum ponto singular disponível, então não podemos afirmar que a trajetória tenderá para uma órbita periódica ou ciclo-limite. Entretanto é verdade que a trajetória tenderá para uma trajetória limite quase periódica. Em um sistema de controle, tal trajetória geralmente representa um desempenho indesejável, tanto quanto uma órbita periódica.

12.7 COMENTÁRIOS CONCLUSIVOS

Neste capítulo, apresentamos a análise gráfica associada com sistemas de segunda-ordem. A maior parte da discussão foi dada no plano de fase com as coordenadas x e \dot{x} . Outras variáveis podem ser usadas como coordenadas, mas o gráfico de plano de fase se modificará de acordo.

Mostramos que o comportamento limite das trajetórias de um sistema de segunda-ordem quando o tempo t tende a infinito será uma das três possibilidades seguintes:

1. As trajetórias tendem para um ou mais pontos de equilíbrio estáveis.
2. As trajetórias tendem a infinito.
3. As trajetórias tendem a um ciclo-limite ou ciclos-limite.

Mostramos que é possível estabelecer todas as características qualitativas das trajetórias examinando o campo de direções definido pelas equações diferenciais em um número suficientemente grande de pontos no plano de fase. Pode-se fazer com que a precisão de tal gráfico seja tão boa quanto desejada, dentro de certos limites.

Embora a análise gráfica do plano de fase seja limitada a sistemas de segunda-ordem, os conceitos da análise de plano de fase podem ser estendidos para sistemas de ordem superior. Em virtude das dificuldades de trabalhar graficamente em espaço tridimensional e da impossibilidade de visualizar trajetórias em espaços n -dimensionais se $n > 3$, torna-se necessário utilizar outros métodos. Os métodos de análise de espaço de estados, que são indispensáveis na teoria de controle moderno e que são apresentados nos Caps. 14 a 16, são extensões do método do plano de fase e são aplicáveis na análise e síntese de sistemas dinâmicos em espaço n -dimensional.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS E SOLUÇÕES

Problema A-12.1 Considere o pêndulo simples visto na Fig. 12.42. A equação para este sistema é

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Obtenha a equação para a trajetória. Em seguida construa o gráfico de plano de fase.

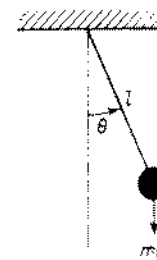


Fig. 12.42 Pêndulo simples.

Solução. Reescrevendo a equação do sistema, obtemos

$$\dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

ou

$$\dot{\theta} d\dot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta d\theta \quad (12.61)$$

Integrando ambos os lados da Eq. (12.61), obtemos a equação da trajetória:

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{g}{l} \cos \theta = k$$

onde k é uma constante. Façamos

$$\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \alpha, \quad \sqrt{\frac{g}{l}} = \omega$$

Então a Eq. (12.61) se torna

$$-\omega^2 \frac{\sin \theta}{\dot{\theta}} = \alpha$$

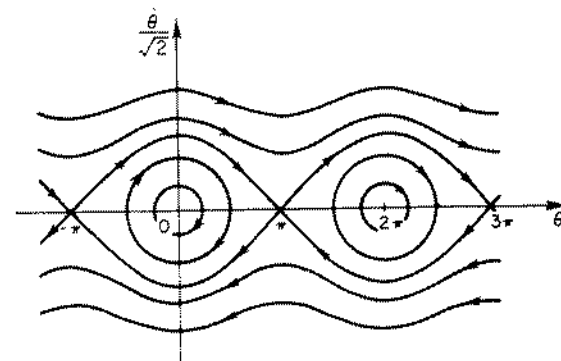


Fig. 12.43 Gráficos de plano de fase para o sistema de pêndulo simples.

As isóclinas são curvas senoidais. A Fig. 12.43 mostra o gráfico de plano de fase para o sistema.

Problema A.12.2 Considere o sistema visto na Fig. 12.44. Supõe-se que o sistema está inicialmente em repouso. A entrada do sistema é a função pulso vista na Fig. 12.45(a). A altura e a largura do pulso são h e α , respectivamente. Esta entrada em pulso pode ser considerada como a soma de duas entradas em degrau, como visto na Fig. 12.45(b). A entrada em degrau positivo $h \cdot 1(t)$ é aplicada em $t = 0$, e então a entrada em degrau negativo $-h \cdot 1(t - \alpha)$ é aplicada em $t = \alpha$.

Construa a trajetória do sistema quando sujeito a esta entrada em pulso.

Fig. 12.44 Sistema de controle.

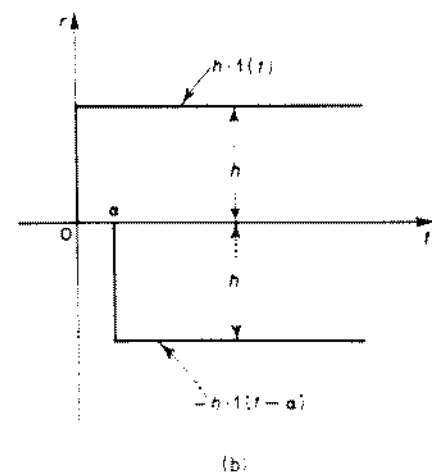
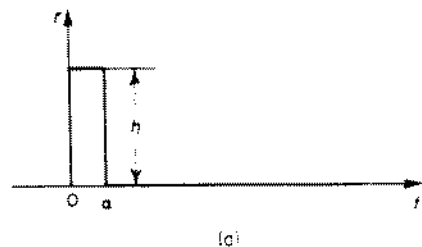
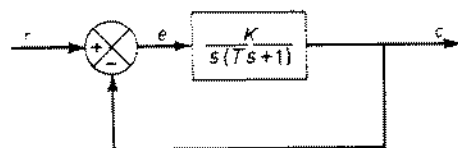


Fig. 12.45 (a) Função pulso; (b) duas funções degrau para se obter a função pulso.

Solução. As equações para o sistema são

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = 0 \quad \text{para } 0 < t < \alpha$$

$$T\ddot{e} - \dot{e} + Ke = -\infty \quad \text{para } t = \alpha$$

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = 0 \quad \text{para } \alpha < t$$

Suporemos que os pólos da função de transferência de malha-fechada são complexos conjugados e estão no semiplano esquerdo. (Outros casos podem ser tratados de forma semelhante.)

Como é suposto que o sistema está inicialmente em repouso, as condições iniciais para o sinal de erro são $e(0) = h$ e $\dot{e}(0) = 0$. Então, como visto na Fig. 12.46(a), a trajetória no plano $e-\dot{e}$ começa no ponto A e segue o caminho que converge para o foco estável (0, 0) até que $t = \alpha$. Em $t = \alpha$, a trajetória alcança o ponto B. Como a entrada em degrau negativo é aplicada

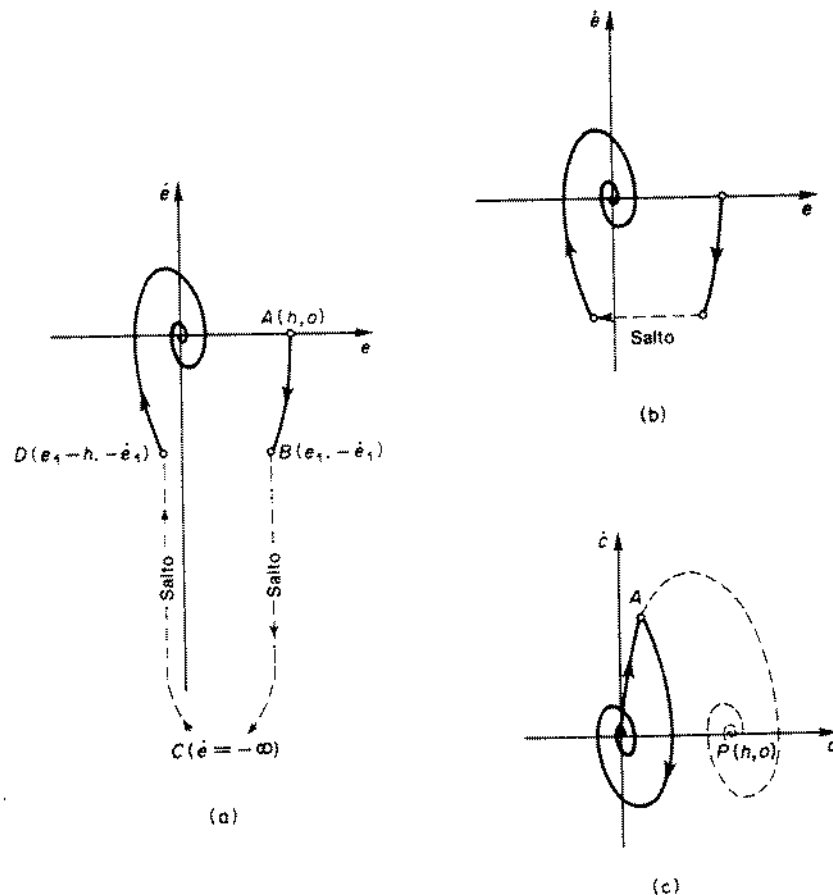


Fig. 12.46 (a) Trajetória no plano $e-\dot{e}$; (b) trajetória indicando um salto; (c) trajetória no plano $c-\dot{c}$.

Neste instante, a trajetória pula do ponto B ao ponto C , onde $\dot{e} = -\infty$. Do ponto C , a trajetória pula para o ponto D . Estes saltos do ponto B ao ponto C ao ponto D ocorrem no instante $t = \alpha$. Do ponto D , a trajetória converge para a origem, como visto na Fig. 12.46(a). No plano de fase, tais saltos podem ser indicados por uma linha tracejada, como visto na Fig. 12.46(b).

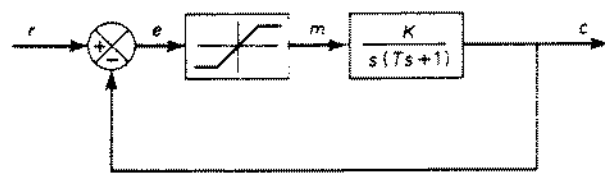
Em termos do sinal de entrada, as equações do sistema se tornam

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Kc = Kh \quad \text{para } 0 < t < \alpha$$

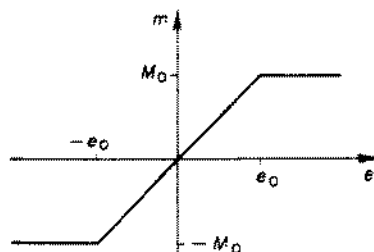
$$T\ddot{e} + \dot{e} + Kc = 0 \quad \text{para } t > \alpha$$

No plano $e-\dot{e}$, a trajetória parte da origem como visto na Fig. 12.46(c). Isto acontece porque as condições iniciais são $e(0) = \dot{e}(0) = 0$. A trajetória tende a convergir para um foco estável P . Em $t = \alpha$, a trajetória alcança o ponto A . Neste momento, o ponto singular do sistema é chaveado do ponto P à origem. Portanto, para $t > \alpha$, a trajetória converge para a origem, um foco estável, como visto na Fig. 12.46(c). A trajetória no plano $e-\dot{e}$ não exibe quaisquer saltos. Como visto da Fig. 12.46(c), a resposta ao pulso da saída do sistema $c(t)$ é oscilatória uma vez que se supõe que os pólos da função de transferência de malha-fechada são complexos conjugados e localizados no semiplano esquerdo. Se $c(t)$ fosse desenhado em função do tempo, o ponto A na Fig. 12.46(c) corresponderia ao primeiro ponto de inflexão da curva de resposta temporal.

Problema A.12.3 A Fig. 12.47(a) mostra um sistema de controle com uma não linearidade tipo saturação. A curva da característica de entrada-saída da não linearidade tipo saturação é vista na Fig. 12.47(b). Supondo que o sistema está inicialmente em repouso, construa as trajetórias no plano de fase quando o sistema é sujeito a uma entrada em degrau $r(t) = R$ e uma entrada em rampa $r(t) = Vt$, ($V > 0$). Supõe-se que as constantes do sistema são $T = 1$, $K = 4$, $e_0 = 0.2$, e $M_0 = 0.2$.



(a)



(b)

Fig. 12.47 (a) Sistema de controle com não linearidade tipo saturação. (b) curva da característica entrada-saída da não linearidade tipo saturação.

Solução. Da curva característica da saturação vista na Fig. 12.47(b), obtemos

$$m = e \quad \text{para } |e| \leq e_0$$

$$m = M_0 \quad \text{para } e > e_0$$

$$m = -M_0 \quad \text{para } e < -e_0$$

A equação para o sistema é

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Km = T\ddot{r} + \dot{r}$$

Para entrada em degrau: Para a entrada em degrau, $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ para $t > 0$. Portanto,

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Km = 0$$

Para a operação linear do sistema,

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = 0$$

O ponto singular (0, 0) ou é um nó estável ou um foco estável. Para a operação não linear do sistema,

$$T\ddot{e} + \dot{e} + KM_0 = 0 \quad \text{para } e > e_0$$

$$T\ddot{e} + \dot{e} - KM_0 = 0 \quad \text{para } e < -e_0$$

Definamos

$$\frac{d\dot{e}}{de} = \alpha$$

e então obtemos

$$\dot{e} = \frac{-\frac{KM_0}{T}}{\alpha + \frac{1}{T}} \quad \text{para } e > e_0 \quad (12.62)$$

$$\dot{e} = \frac{\frac{KM_0}{T}}{\alpha + \frac{1}{T}} \quad \text{para } e < -e_0 \quad (12.63)$$

Da Eq. (12.62), pode-se ver que para $e > e_0$, todas as trajetórias são assintóticas à reta

$$\dot{e} = -KM_0$$

que corresponde a $\alpha = 0$. Similarmente, da Eq. (12.63), para $e < -e_0$, todas as trajetórias são assintóticas à reta

$$\dot{e} = KM_0$$

A Fig. 12.48 mostra um gráfico de plano de fase para a região $|e| > e_0$. A Fig. 12.49 mostra a trajetória quando o sistema está sujeito a uma entrada em degrau de amplitude 2.

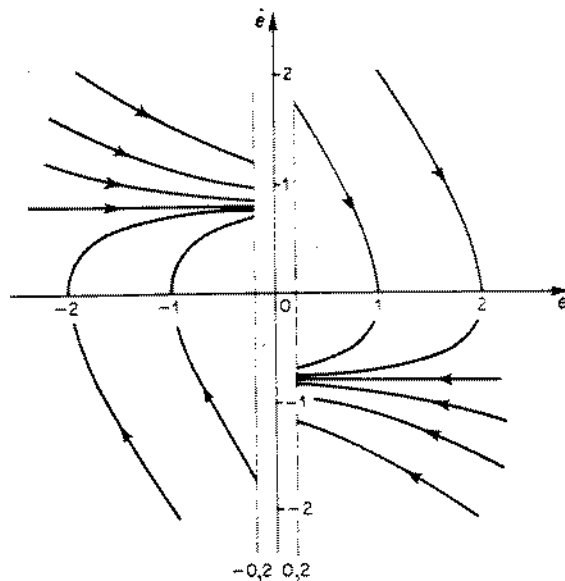


Fig. 12.48 Gráfico de plano de fase para a região $e > e_0$ para o sistema visto na Fig. 12.47(a).

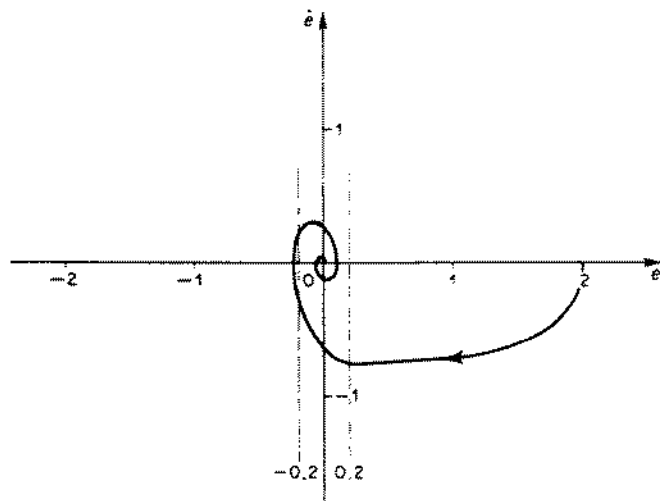


Fig. 12.49 Trajetória correspondendo a uma resposta a degrau do sistema visto na Fig. 12.47(a).

Para entradas em rampa: Para a entrada em rampa $r = Vt$ e $\dot{r} = V = \text{constante}$. Portanto a equação do sistema se torna

$$T\ddot{e} - \dot{e} - Km = V$$

ou

$$T\ddot{e} - \dot{e} + Ke = V \quad \text{para } |e| < e_0$$

$$T\ddot{e} - \dot{e} + KM_0 = V \quad \text{para } e > e_0$$

$$T\ddot{e} - \dot{e} - KM_0 = V \quad \text{para } e < -e_0$$

O ponto singular para a operação linear está localizado em $(V/K, 0)$. Ele ou é um foco estável ou um nó estável. Para operações não lineares,

$$\dot{e} = \frac{\frac{V}{T} - \frac{KM_0}{T}}{\alpha + \frac{1}{T}} \quad \text{para } e > e_0$$

$$\dot{e} = \frac{\frac{V}{T} + \frac{KM_0}{T}}{\alpha + \frac{1}{T}} \quad \text{para } e < -e_0$$

Para $e > e_0$, exceto para o caso especial quando $V = KM_0$, as trajetórias são assintóticas à reta

$$\dot{e} = V - KM_0 \quad (12.64)$$

e, para $e < -e_0$, as trajetórias são assintóticas à reta

$$\dot{e} = V + KM_0 \quad (12.65)$$

Das Eqs. (12.64) e (12.65), pode-se ver que a reta para a qual as trajetórias se aproximam assintoticamente ou está acima do eixo \dot{e} ou abaixo do eixo \dot{e} , dependendo de $V > KM_0$ ou $V < KM_0$.

Caso 1 ($V > KM_0$): O gráfico de plano de fase para o caso em que $V = 1,2$ é visto na Fig. 12.50. Se a condição inicial é dada pelo ponto A, então a trajetória segue o caminho ABCD. Do ponto B ao ponto C, a trajetória tende a convergir para um foco estável, $(V/K, 0)$; entretanto, a trajetória não pode convergir para este foco estável. Ao invés disto, a trajetória se torna assintótica a uma reta horizontal $\dot{e} = 0,4$. Em regime estacionário, o erro se torna infinito.

Caso 2 ($V < KM_0$): O gráfico de plano de fase para o caso em que $V = 0,4$ é visto na Fig. 12.51. Se a condição inicial é dada pelo ponto A, então a trajetória converge para um foco estável, $(V/K, 0)$, o ponto singular real.

Caso 3 ($V = KM_0$): Neste caso, para $e > e_0$,

$$T\ddot{e} - \dot{e} = 0$$

ou

$$e \left(T \frac{d\dot{e}}{de} - 1 \right) = 0$$

Isto significa que para $e > e_0$ as trajetórias ou são retas com inclinação $-1/T$ ou a reta $e = 0$. O gráfico de plano de fase para o caso em que $V = 0,8$ é visto na Fig. 12.52. Se a condição inicial é

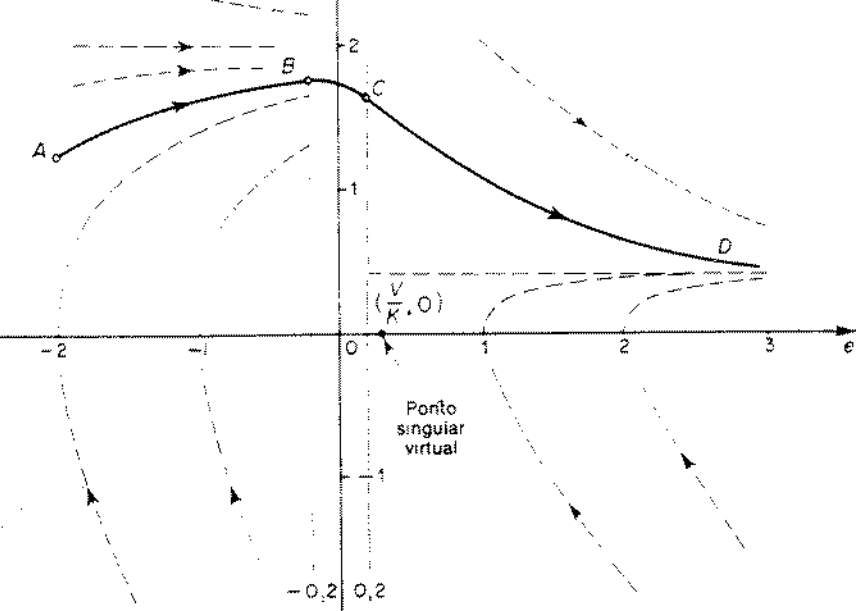


Fig. 12.50 Gráfico de plano de fase do sistema visto na Fig. 12.47(a). $[r(t) = 1.2r]$.

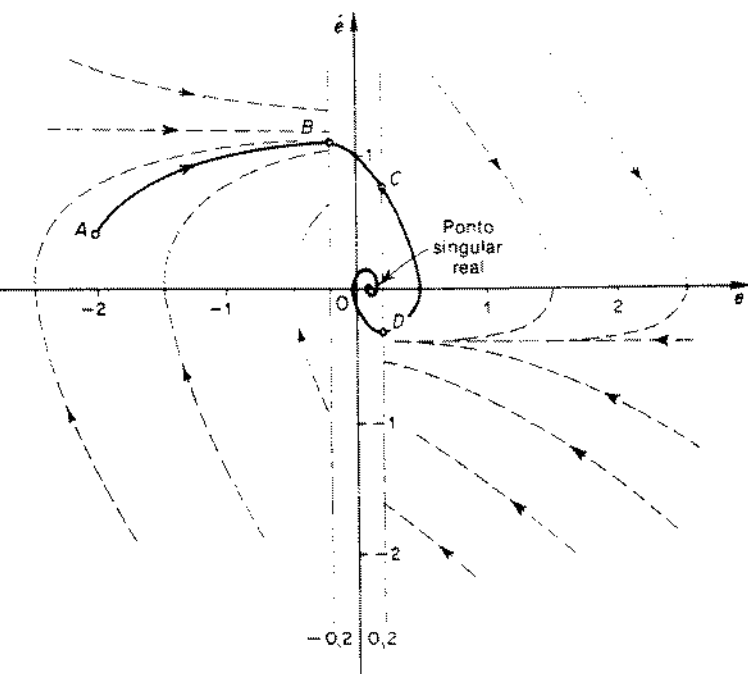


Fig. 12.51 Gráfico de plano de fase do sistema visto na Fig. 12.47(a). $[r(t) = 0.4r]$.

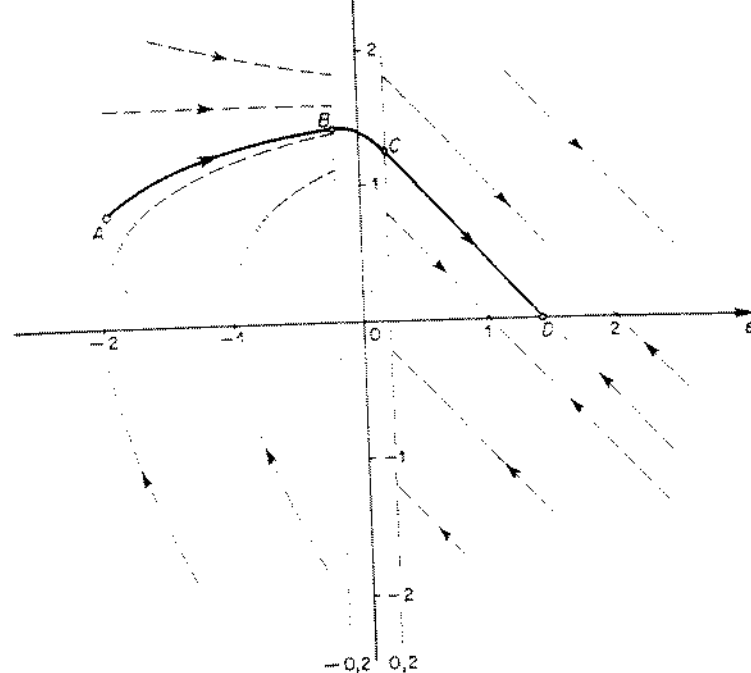


Fig. 12.52 Gráfico de plano de fase do sistema visto na Fig. 12.47(a). $[r(t) = 0.8r]$.

dada pelo ponto A, a trajetória segue o caminho ABCD. Do ponto B ao ponto C a trajetória tende a convergir para o foco estável em $(V/K, 0)$. Do ponto C a trajetória converge ao ponto D. A resposta termina no ponto D. A amplitude do erro estacionário é OD .

Problema A.12.4* A Fig. 12.53(a) mostra um diagrama de blocos de um sistema de controle com amortecimento não linear. A curva da característica de entrada-saída do elemento não linear G_A é vista na Fig. 12.53(b). A característica do elemento não linear é tal que o sinal m é nulo se a magnitude do sinal de erro é maior do que e_m . Isto significa que para sinais de erro grandes o sistema tem amortecimento nulo ou uma constante de velocidade infinita. Para sinais de erro menores ($e < e_m$), o sistema tem o termo de amortecimento K_A . Portanto, a quantidade de sinal tacométrico de realimentação é controlada não linearmente. As características de resposta transitória deste sistema são, em geral, superiores às de sistemas lineares, no sentido de que os primeiros têm características de resposta mais rápida com menor sobre-sinal do que os últimos. (Para um sinal de erro grande, o sistema apresenta resposta mais rápida; para um sinal de erro menor, o sistema é bem amortecido.)

Supondo que o sistema está inicialmente em repouso e que as constantes do sistema são $K = 4$, $K_0 = 1$, e $e_m = 0.2$, construa a trajetória no plano de fase normalizado quando o sistema é sujeito a uma entrada degrau unitário. Em seguida construa as trajetórias no plano de fase normalizado quando o sistema é sujeito a uma entrada $r(t) = 0.5 - 0.1t$ e uma entrada $r(t) = t$.

* Referência L-8.

Solução. Da Fig. 12.53(a), obtemos

$$\dot{c} = Kb$$

$$b = e - m\dot{c}$$

$$c = r - e$$

A equação para o sinal de erro pode ser escrita como

$$\ddot{e} - mK\dot{e} + Ke = \ddot{r} + mK\dot{r} \quad (12.66)$$

Da Fig. 12.53(b),

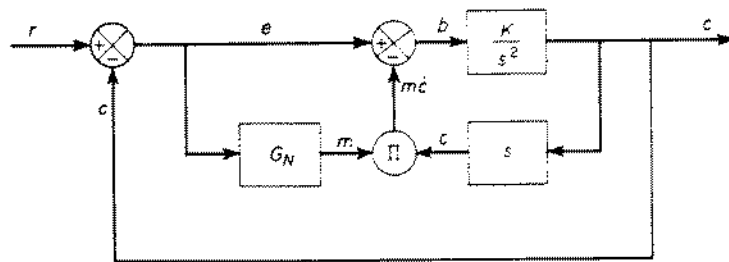
$$m = K_0 \quad \text{para } |e| < e_0$$

$$m = 0 \quad \text{para } |e| > e_0$$

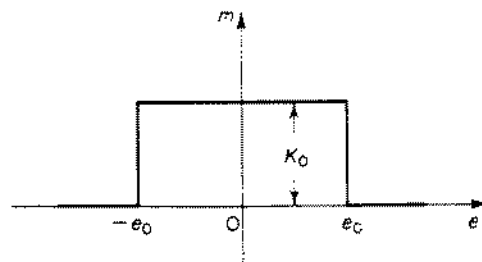
Para entradas em degrau: Como para a entrada em degrau $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ para $t > 0$, a Eq. (12.66) pode ser simplificada para

$$\ddot{e} + KK_0\dot{e} + Ke = 0 \quad \text{para } |e| < e_0 \quad (12.67)$$

$$\ddot{e} + Ke = 0 \quad \text{para } |e| > e_0 \quad (12.68)$$



(a)



(b)

Fig. 12.53 (a) Sistema de controle com amortecimento não linear; (b) curva da característica entrada-saída do elemento não linear G_N .

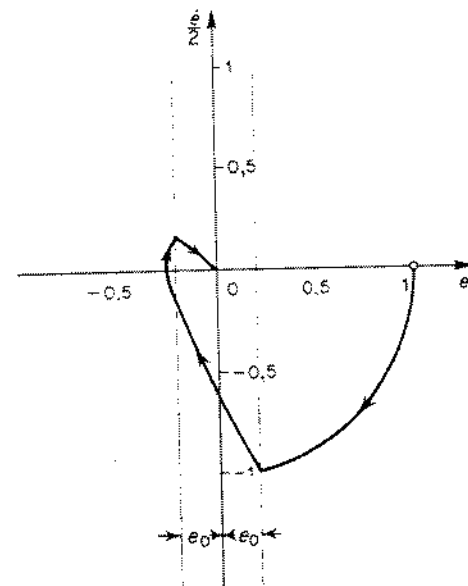


Fig. 12.54 Trajetória correspondendo a uma resposta a degrau unitário do sistema visto na Fig. 12.53(a).

Portanto, a operação do sistema consiste em dois modos lineares. Das Eqs. (12.67) e (12.68), pode-se ver que para ambos os modos de operação linear a origem é o ponto singular. Para $|e| < e_0$, o ponto singular ou é um nó estável ou um foco estável. Para $|e| > e_0$, o ponto singular é um centro.

Da Eq. (12.68), pode-se ver que a trajetória é para $|e| > e_0$ uma circunferência no plano de fase normalizado [plano $e - (e/\sqrt{K})$]. A Fig. 12.54 mostra a trajetória do sinal de erro no plano de fase normalizado quando o sistema é sujeito a uma entrada degrau unitário.

Para entradas em rampa ou rampa mais degrau: Vamos chamar

$$r(t) = R + V(t)$$

Para $t > 0$, a Eq. (12.66) pode ser reescrita como

$$\ddot{e} + mK\dot{e} - Ke = mKV$$

ou

$$\ddot{e} + KK_0\dot{e} + Ke = KK_0V \quad \text{para } |e| < e_0 \quad (12.69)$$

$$\ddot{e} + Ke = 0 \quad \text{para } |e| > e_0 \quad (12.70)$$

Das Eqs. (12.69) e (12.70), determinamos que o ponto singular para $|e| < e_0$ é $(K_0V, 0)$ e que para $|e| > e_0$ é a origem $(0, 0)$. Como o sistema tem amortecimento positivo para $|e| < e_0$, o ponto singular $(K_0V, 0)$ ou é um nó estável ou um foco estável. Para valores menores de V , ou seja, $V < e_0/K_0$, o ponto singular está no eixo e entre 0 e e_0 ; para valores maiores de V , ou seja, $V > e_0/K_0$, ele se localiza sobre o eixo e à direita do ponto $e = e_0$.

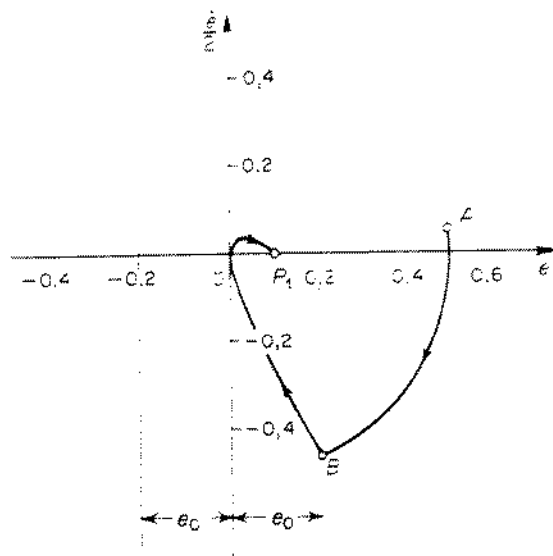


Fig. 12.55 Trajetória correspondendo a uma resposta a rampa (rampa + degrau) do sistema visto na Fig. 12.53(a). [$r(t) = 0.5 + 0.1t$].

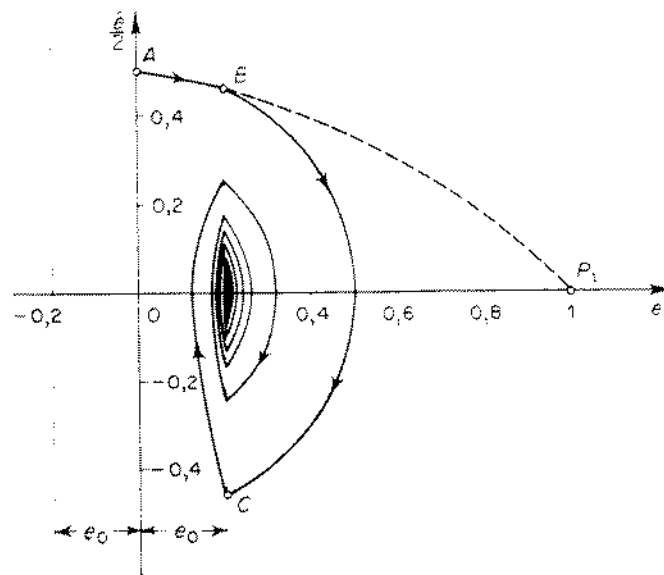


Fig. 12.56 Trajetória correspondendo a uma resposta a rampa do sistema visto na Fig. 12.53(a). [$r(t) = t$].

A Fig. 12.55 mostra a trajetória do sinal de erro no plano de fase normalizado quando $R = 0.5$ e $V = 0.1$. A trajetória parte do ponto A, que é especificado pelas condições iniciais $e(0) = 0.5$, $\dot{e}(0)/2 = 0.05$. O ponto representativo se move ao longo do arco centrado na origem até que a trajetória alcance a reta $e = e_c$ no ponto B, onde a operação do sistema é chaveada para a outra operação linear. Deste ponto em diante, a trajetória converge para o ponto singular P_1 , $(K_0V, 0)$. Em regime estacionário, a amplitude do erro é \overline{OP}_1 .

A Fig. 12.56 mostra a trajetória do sinal de erro no plano de fase normalizado quando $R = 0$ e $V = 1$. A trajetória começa no ponto A, que corresponde às condições iniciais $e(0) = 0$, $\dot{e}(0)/2 = 0.5$, e começa a convergir para o ponto singular P_1 , $(1, 0)$. No ponto B ocorre o chaveamento na operação do sistema, e a trajetória começa a convergir para um centro $(0, 0)$. No ponto C, ocorre outro chaveamento na operação. Repetindo o mesmo processo, a trajetória finalmente converge para o ponto $(e_c, 0)$. Nas vizinhanças do ponto $(e_c, 0)$, o sinal de erro exibe pequenas oscilações.

O comportamento de regime estacionário do sistema depende da construção física deste. Se o chaveamento entre duas operações lineares acontece instantaneamente, o sistema apresentará *chattering* em regime estacionário. Se há um atraso considerável no chaveamento, entretanto, o sistema exibirá um ciclo limite em torno do ponto $(e_c, 0)$.

Da análise que fizemos, pode-se ver que para a entrada em rampa $r(t) = Vt$ o sistema não linear presente tem um erro estacionário de amplitude e_0 ou menor, dependendo da amplitude de V . Isto pode ser considerado como uma vantagem do sistema não linear em discussão sobre seu sistema linear correspondente, porque, para uma entrada em rampa $r(t) = Vt$, o sistema linear cuja equação diferencial é dada pela Eq. (12.69) tem um erro estacionário de K_0V , que é proporcional a V ; portanto ele pode ter um valor grande para um valor grande de V ; no caso do sistema não linear em discussão, a amplitude do erro estacionário para entradas em rampa é no máximo e_0 , que pode ser feito pequeno.

Problema A.12.5 A Fig. 12.57 mostra um servomecanismo de segunda ordem com atrito de Coulomb. O atrito de Coulomb é uma força de atrito independente da amplitude da

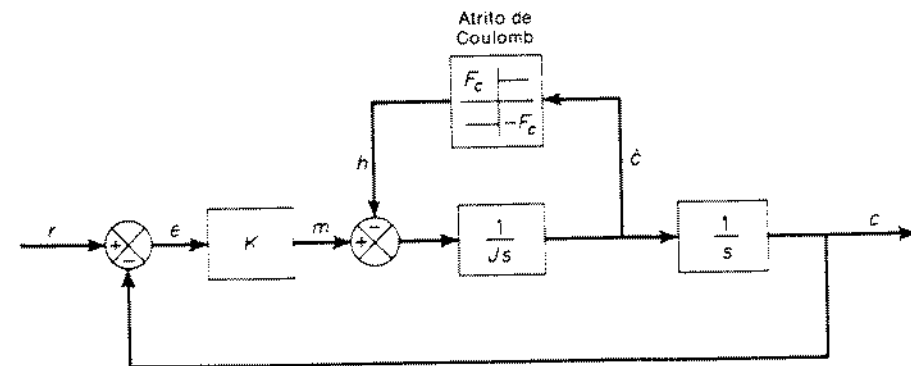


Fig. 12.57 Servomecanismo de segunda ordem com atrito de Coulomb.

velocidade mas sempre se opondo a ela. Desenhe as trajetórias no plano $e-\dot{e}$ quando o sistema é sujeito às condições iniciais (i) $e(0) = 2.2$, $\dot{e}(0) = 0$; (ii) $e(0) = 3.5$, $\dot{e}(0) = 0$. Suponha que as constantes do sistema são $K = 2$, $J = 1$, e $F_c = 1$.

Solução. As equações que descrevem a dinâmica do sistema são

$$J\ddot{c} = m - h = Ke - h$$

$$c = r - e$$

onde

$$h = F_c \quad \text{para } \dot{e} > 0 \\ = -F_c \quad \text{para } \dot{e} < 0$$

Em termos do sinal de erro, as equações do sistema podem ser simplificadas fornecendo

$$J\ddot{e} - Ke - h = J\dot{e} \quad (12.71)$$

Na análise presente, $r = 0$. Portanto a Eq. (12.71) se torna

$$J\ddot{e} - Ke - h = 0$$

ou

$$J\dot{e} \frac{d\dot{e}}{de} - Ke + F_c = 0 \quad \text{para } \dot{e} > 0 \quad (12.72)$$

$$J\dot{e} \frac{d\dot{e}}{de} - Ke - F_c = 0 \quad \text{para } \dot{e} < 0 \quad (12.73)$$

Vamos definir

$$\frac{K}{J} = \omega^2$$

Então a Eq. (12.72) pode ser escrita

$$\frac{1}{\omega^2} \dot{e} \frac{d\dot{e}}{de} - \left(e + \frac{F_c}{K} \right) de = 0$$

Integrando ambos os lados desta última equação, obtém-se

$$\left(\frac{\dot{e}}{\omega} \right)^2 - \left(e + \frac{F_c}{K} \right)^2 = A^2 \quad (12.74)$$

onde A é uma constante. Esta é a equação de uma circunferência no plano de fase normalizado (plano $e - \dot{e}/\omega$). O centro da circunferência está em $e = -F_c/K$, $\dot{e}/\omega = 0$, e o raio é igual a A . Como a Eq. (12.74) vale para $\dot{e} > 0$, as trajetórias no semiplano superior no plano de fase normalizado são semicircunferências.

De forma semelhante, a Eq. (12.73) pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\dot{e}}{\omega} \right)^2 - \left(e - \frac{F_c}{K} \right)^2 = B^2$$

onde B é uma constante. As trajetórias no semiplano esquerdo do plano de fase normalizado também são semicircunferências.

Pode-se ver que o efeito de atrito de Coulomb na resposta do sistema é deslocar o gráfico de plano de fase do correspondente sistema linear, sem o atrito de Coulomb, da distância F_c/K para a esquerda no semiplano superior e, a mesma distância, para a direita no semiplano inferior.

A Fig. 12.58 mostra duas trajetórias correspondendo às condições iniciais dadas. A trajetória denotada por (i) indica que há um erro estacionário de magnitude 0,2. A trajetória denotada por (ii) termina em $e(0) = -0,5$, $\dot{e}(0) = 0$; portanto o sistema exibe um erro estacionário de magnitude 0,5.

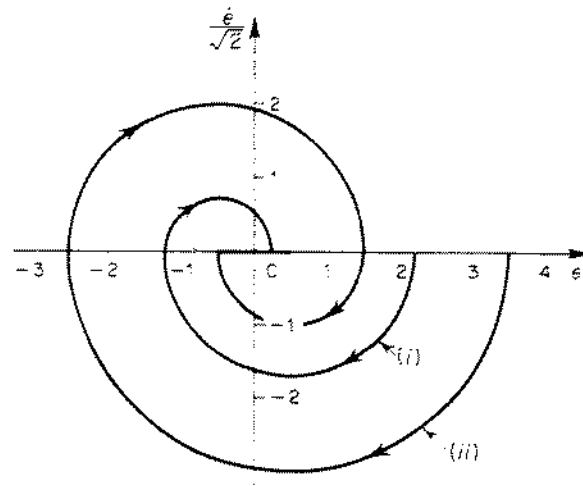


Fig. 12.58 Trajetórias para o servomecanismo visto na Fig. 12.57.

PROBLEMAS

Problema B.12.1 Construa um gráfico de plano de fase do sistema definido por

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - x_2$$

Problema B.12.2 Construa um gráfico de plano de fase para o seguinte sistema:

$$\ddot{x} + \dot{x} + |x| = 0$$

Problema B.12.3 Construa um gráfico de plano de fase do seguinte sistema:

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} + \sin \theta = 0$$

Problema B.12.4 Determine as localizações e tipos de pontos singulares do sistema não linear descrito por

$$\dot{x}_1 = 0,3 - 0,1x_1 + x_2 - 0,188x_1^2x_2 - 0,75x_1^3$$

$$\dot{x}_2 = -0,25x_1 - 0,1x_2 - 0,047x_1^2 + 0,188x_1x_2^2$$

Problema B.12.5 A seguinte equação é chamada de equação de Van der Pol:

$$\ddot{x} - (1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

Determine o tipo do ponto singular. Desenhe um gráfico de plano de fase.

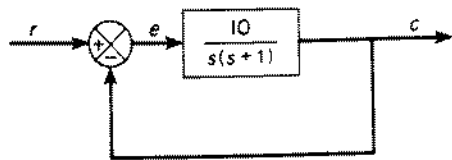


Fig. 12.59 Sistema de controle.

Problema B.12.6 Obtenha a trajetória que representa a resposta do sistema visto na Fig. 12.59 quando este é sujeito à entrada

$$r(t) = R_1 1(t) + R_2 1(t-2) + R_3 1(t-3)$$

onde $1(t-t_i)$ é uma função degrau unitário que ocorre em $t = t_i$. Suponha que o sistema está inicialmente em repouso.

Problema B.12.7 Considere o sistema visto na Fig. 12.60. Construa gráficos de plano de fase para este sistema no plano $e-\dot{e}$ quando $K = 0$ e $K = 1$. Suponha que a entrada $r(t)$ é nula para $t > 0$ e que o sistema está sujeito apenas à condição inicial.

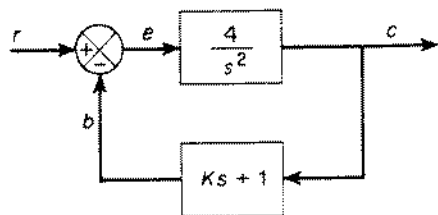


Fig. 12.60 Sistema de controle.

Problema B.12.8 Construa diagramas de plano de fase para o sistema visto na Fig. 12.61 quando $\Delta = 0$ e $\Delta = 0.1$. A entrada r é uma função degrau unitário. Use e e \dot{e} como as coordenadas.

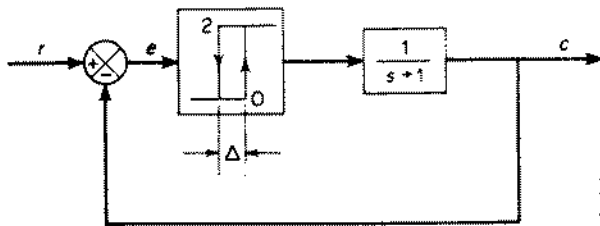


Fig. 12.61 Sistema de controle não linear.

Problema B.12.9 Considere o sistema visto na Fig. 12.62. A entrada r é uma função rampa unitária. Construa uma trajetória típica no plano $e-\dot{e}$.

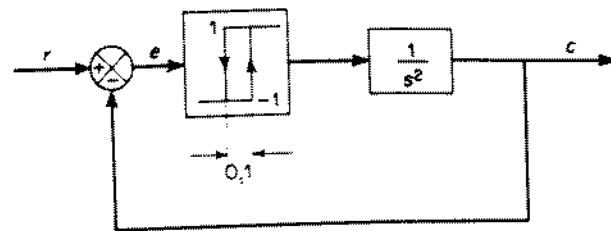


Fig. 12.62 Sistema de controle não linear.

Problema B.12.10 Considere o sistema visto na Fig. 12.63. Suponha que ele está sujeito apenas à condição inicial. Construa uma trajetória típica no plano $c-\dot{c}$.

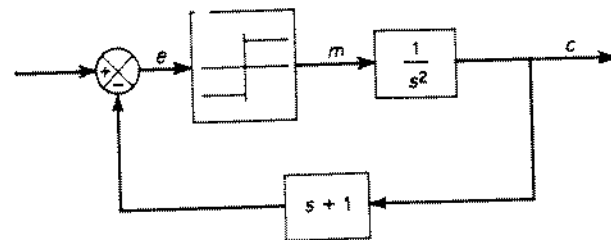


Fig. 12.63 Sistema de controle não linear.

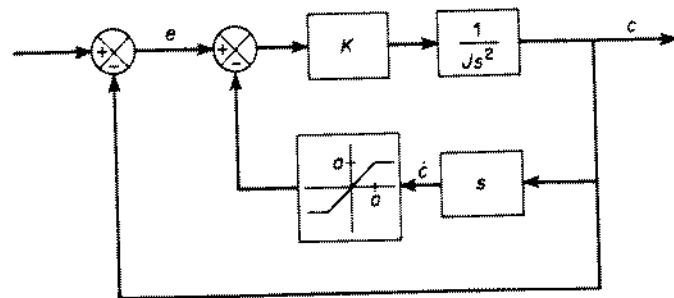


Fig. 12.64 Sistema de controle não linear.

Problema B.12.11 A Fig. 12.64 mostra um sistema de segunda-ordem com um ganho de realimentação não linear. O bloco K indica um ganho de controle proporcional, e o bloco $1/Js^2$ indica uma carga inercial pura. A característica do elemento não linear na malha de realimentação tácométrica é o de uma saturação.

Desenhe trajetórias típicas no plano $e-\dot{e}$ mostrando as respostas para várias condições iniciais. Suponha que $K = 5$, $J = 1$, e $a = 1$.

Sistemas de Tempo Discreto e o Método da Transformada z

13.1 INTRODUÇÃO A SISTEMAS DE TEMPO DISCRETO

Sistemas de tempo discreto, ou sistemas a dados amostrados, são sistemas dinâmicos em que uma ou mais variáveis podem mudar apenas em instantes discretos de tempo. Estes instantes, que denotaremos por kT ou t_k ($k = 0, 1, 2, \dots$), podem especificar o instante em que é feita alguma medida física ou o instante em que é lida a memória de um computador digital etc. O intervalo de tempo entre dois instantes discretos é considerado suficientemente pequeno, de tal forma que os dados para os tempos entre estes instantes discretos podem ser aproximados por interpolação simples.

Sistemas de tempo discreto diferem dos de tempo contínuo, em que os sinais para um sistema de tempo discreto estão na forma amostrada.

Sistemas de tempo discreto ocorrem na prática quando as medidas necessárias para o controle são obtidas de forma intermitente, ou um controlador de larga escala ou computador é multiplexado no tempo entre vários processos de tal forma que um sinal de controle é mandado para cada processo apenas periodicamente ou quando um computador digital é usado para fazer as computações necessárias para controle. Muitos sistemas de controle industrial modernos são sistemas de tempo discreto uma vez que invariavelmente incluem alguns elementos cujas entradas e/ou saídas são discretas no tempo. Às vezes, entretanto, a operação de amostragem, ou discretização, pode ser inteiramente fictícia e introduzida apenas para simplificar a análise de um sistema de controle que na realidade contém apenas elementos contínuos.

Neste capítulo, estudaremos sistemas de tempo discreto onde o sinal que representa o esforço de controle é constante por trechos e muda apenas em instantes discretos no tempo. Como há vários tipos diferentes de operação de amostragem de importância prática, estes serão alistados como segue:

1. Amostragem periódica (convencional): Neste caso, os instantes de amostragem são igualmente espaçados, ou $t_k = kT$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).
2. Amostragem de ordem múltipla: o padrão dos instantes t_k é repetido periodicamente, ou $t_{k+r} - t_k = \text{constante}$ para todo k .
3. Amostragem de taxa múltipla: Neste caso, duas amostragens concorrentes ocorrem a $t_k = pT_1$ e qT_2 , onde T_1, T_2 são constantes e p, q são inteiros.
4. Amostragem aleatória: Neste caso, os instantes de amostragem são aleatórios, ou t_k é uma variável aleatória.

Neste livro trataremos somente do caso de amostragem periódica.

Quantização. A inclusão de um computador digital em um sistema analógico produz sinais em forma digital (normalmente como números binários) em parte do sistema. O sistema então toma a forma de uma combinação mista digital-analógica. A introdução de um computador digital em um sistema de controle requer o uso de conversores digital-analógico e analógico-digital. A conversão de um sinal analógico para o correspondente sinal digital (número binário) é uma aproximação porque o sinal analógico pode assumir um número infinito de valores, ao passo que a variedade de diferentes números que podem ser formados por um conjunto finito de dígitos é limitada. Este processo de aproximação é chamado de *quantização*.

O processo de quantização (conversão de um sinal em forma analógica para um em forma digital) pode ser ilustrado através da curva característica da Fig. 13.1. A gama de amplitudes de entrada é dividida em um número finito de intervalos disjuntos h_i que não são necessariamente iguais. Todas as amplitudes caindo dentro de cada intervalo são equacionadas a um valor único dentro do intervalo. Este valor único é a aproximação digital para as amplitudes do sinal de entrada analógico. Portanto, se x é a entrada analógica, a saída digital é dada por $y = Q(x)$, onde Q é a função de quantização.

A função $x(t)$ ilustrada na Fig. 13.2(a) é uma função discreta; aquela vista na Fig. 13.2(b) é uma função quantizada, e aquela vista na Fig. 13.2(c) é quantizada tanto em amplitude como no tempo. A operação de sistemas de controle digital envolve quantização tanto em amplitude como em tempo.

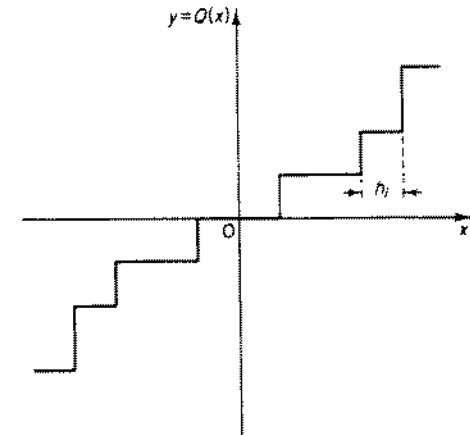


Fig. 13.1 Uma curva mostrando quantização.

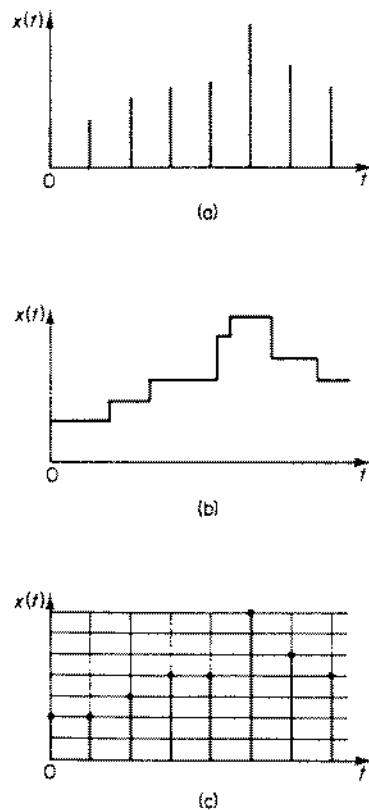


Fig. 13.2 (a) Função de tempo discreto; (b) função quantizada; (c) função quantizada de tempo discreto.

Definições. Apresentaremos em seguida as definições de vários termos.

Transdutor. Um transdutor é um dispositivo que converte um sinal de entrada em um sinal de saída de outra forma. (A saída em geral depende da história passada da entrada.)

Transdutor analógico. Um transdutor analógico é um transdutor em que os sinais de entrada e saída são funções contínuas no tempo. As amplitudes destes sinais podem ter qualquer valor dentro de limitações físicas do sistema.

Transdutor a dados amostrados. Este é um transdutor em que os sinais de entrada e saída ocorrem apenas em instantes discretos de tempo (normalmente periódico), mas as amplitudes do sinal, como no caso do transdutor analógico, são não-quantizadas.

Transdutor digital. Um transdutor digital é aquele em que os sinais de entrada e saída ocorrem apenas em instantes discretos de tempo e as amplitudes dos sinais são quantizadas, i.e., podem assumir apenas certos níveis discretos.

Transdutor analógico-digital. Este é um transdutor em que o sinal de entrada é uma função contínua do tempo e o sinal de saída é um sinal quantizado que pode

assumir apenas certos valores discretos.

Transdutor digital-analógico. Um transdutor digital-analógico é aquele em que o sinal de entrada é um sinal quantizado e o sinal de saída é uma função contínua no tempo.

Controladores analógicos e controladores digitais. Ao considerar os tipos de controladores que são usados em sistemas de controle industriais, podemos dividi-los nas seguintes três categorias:

Controladores ou computadores analógicos: Estes representam as variáveis nas equações por grandezas físicas contínuas. Controladores analógicos podem ser projetados para que sirvam satisfatoriamente como controladores não de decisão.

Controladores ou computadores digitais: Estes operam apenas sobre números. A função de decisão é importante em controladores digitais, e atualmente estão sendo usados para a solução de problemas envolvendo a operação ótima global de processos industriais.

Controladores ou computadores analógico-digitais: Estes são frequentemente chamados de controladores híbridos. São combinações de controladores analógicos e digitais. Alguns dos controladores de alto desempenho são deste tipo.

Vantagens de controladores digitais sobre controladores analógicos. Algumas das vantagens de controladores digitais sobre controladores analógicos podem ser resumidas como segue:

1. Controladores digitais são capazes de realizar complexas computações com precisão constante a grande velocidade. Computadores digitais podem ter quase qualquer grau de precisão nas computações com um aumento relativamente pequeno de custo. Por outro lado, o custo de computadores analógicos aumenta rapidamente quando aumenta a complexidade das computações, caso uma precisão constante deva ser mantida.
2. Controladores digitais são extremamente versáteis. Fazendo um novo programa, podem-se modificar completamente as operações que estão sendo executadas. Esta característica é particularmente importante se o sistema de controle deve receber informação de operação ou instruções de algum centro de computação, onde uma análise econômica e estudos de otimização estão sendo feitos.

Em virtude da inabilidade de técnicas convencionais de tratar problemas de controle complexos, é costumeiro subdividir um processo em unidades menores e então tratar cada uma destas como um problema de controle em separado. Operadores humanos são normalmente usados para coordenar a operação de unidades. Avanços recentes em sistemas de controle por computador causaram mudanças neste uso de controles de processos industriais. Novos desenvolvimentos em computadores de larga escala e de métodos matemáticos fornecem uma base para o uso de toda informação disponível no sistema de controle. No controle convencional, esta parte da malha de controle é feita diretamente por seres humanos.

Controle de sistemas complexos por computador. A tendência atual no controle de sistema de larga escala é de consolidar a multiplicidade de unidades controladas independentemente em processos únicos controlados de forma ótima. Em sistemas de controle de processos industriais, em geral não é prático operar por um tempo muito longo em regime estacionário porque podem ocorrer certas mudanças em especificações de produção, matéria-prima, fatores econômicos, e equipamentos e técnicas de processamento. Portanto, o comportamento transitório de processos industriais deve ser levado em conta. Como há interações entre variáveis do processo, o uso de apenas uma variável de processo para cada agente de controle

não é adequado para um controle realmente completo. Usando controle por computador, é possível levar em conta todas as variáveis do processo juntamente com fatores econômicos, especificações de produção, desempenho de equipamento etc., e portanto obter um controle ótimo de processos industriais.

Note que um sistema capaz de controlar um processo tão completamente quanto possível terá que resolver equações complexas. Quanto mais completo o controle, mais importante se torna conhecer e usar as relações corretas entre variáveis de operação. O sistema deve ser capaz de aceitar instruções de fontes tão variadas como computadores e operadores humanos e também modificar completamente seu subsistema de controle em um tempo curto.

Abordagem de transformada z e de espaço de estado na análise de sistemas de tempo discreto. A análise de sistemas de tempo discreto pode ser feita facilmente em um de dois diferentes métodos. Um é o da transformada z , e o outro é o de espaço de estados.

O método da transformada z tem a mesma relação para sistemas lineares invariantes no tempo de tempo discreto que o método da transformada de Laplace para sistemas lineares de tempo contínuo invariantes no tempo. Este capítulo apresenta apenas o método da transformada z para a análise de sistemas lineares invariantes no tempo de tempo discreto. A abordagem de espaço de estados para a análise de sistemas lineares de tempo discreto é vista nas Seções 14.6 e 14.7.

13.2 A TRANSFORMADA z

Esta seção apresenta o método da transformada z para tratar de funções de tempo discreto. Como dito anteriormente, o papel desempenhado pela transformada z em sistemas de tempo discreto é bastante similar ao da transformação de Laplace em sistemas de tempo contínuo. Como funções de tempo discreto ocorrem quando sinais contínuos são amostrados, iremos primeiro discutir dispositivos amostradores e seguradores.

Dispositivos amostradores e seguradores. O elemento essencial de um sistema de tempo discreto é o amostrador. Em um amostrador convencional, uma chave se fecha para admitir um sinal de entrada a cada T segundos. Na prática, a duração de amostragem é muito curta em comparação com a constante de tempo mais significativa do processo. Um amostrador converte um sinal contínuo em um trem de pulsos ocorrendo nos instantes de amostragem $0, T, 2T, \dots$, onde T é o período de amostragem. (Entre os instantes de amostragem, o amostrador não transmite nenhuma informação.) Dois sinais, cujos respectivos valores nos instantes de amostragem são iguais, resultarão em um mesmo sinal amostrado.

Um dispositivo segurador converte o sinal amostrado em um sinal contínuo, que reproduz aproximadamente o sinal aplicado a um amostrador. O dispositivo segurador mais simples converte o sinal amostrado em um com amplitude constante entre dois instantes consecutivos de amostragem, como visto na Fig. 13.3. Tal dispositivo é chamado um dispositivo segurador de ordem zero. A função de transferência G_h de um dispositivo segurador de ordem zero é

$$G_h = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

Quando o sinal de entrada $x(t)$ é amostrado em instantes discretos, o sinal amostrado é passado pelo dispositivo segurador. Este dispositivo, que é um filtro passa-baixas, alisa o sinal amostrado $x^*(t)$ para produzir o sinal $x_h(t)$, que é cons-

tante a partir do último valor amostrado até que a próxima amostra esteja disponível. Isto é,

$$x_h(kT + t) = x(kT) \quad \text{para } 0 \leq t < T$$

Na análise seguinte, supomos que o dispositivo segurador é de ordem zero. Essencialmente, um dispositivo segurador de ordem zero integra o sinal $x^*(t)$ entre dois instantes consecutivos de amostragem. Notando que a integral de uma função impulso é uma constante, vemos que a entrada de um dispositivo segurador de ordem zero é um trem de funções impulso.

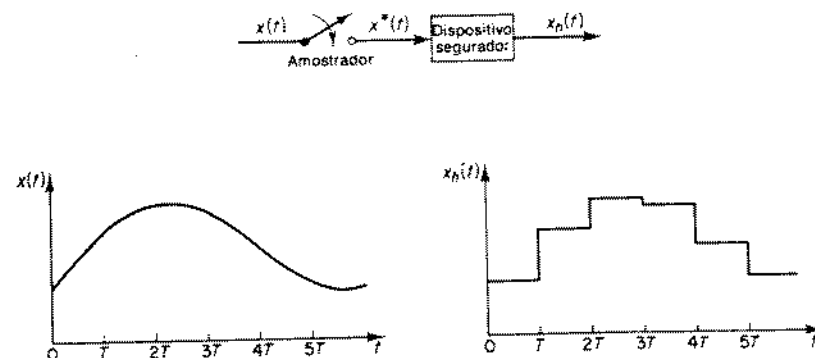


Fig. 13.3 Sinais antes e depois do dispositivo amostrador e segurador.

Considerando a saída do amostrador como um trem de impulsos com certos pesos, podemos relacionar o sinal contínuo $x(t)$ com a saída do amostrador $x^*(t)$ através de

$$x^*(t) = \delta_T(t) x(t)$$

onde $\delta_T(t)$ representa um trem de impulsos unitários, como visto na Fig. 13.4(a). A saída do amostrador é igual ao produto da entrada contínua $x(t)$ e o trem de impulsos unitários. Em outras palavras, o amostrador pode ser considerado como um modulador com a entrada $x(t)$ como o sinal modulador e o trem de impulsos unitários como a portadora, como visto na Fig. 13.4(b). Note que $\delta_T(t)$ pode ser escrito como

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

onde $\delta(t - kT)$ é a função impulso unitário ocorrendo em $t = kT$. Se o sinal contínuo $x(t)$ é amostrado de uma forma periódica, o sinal amostrado pode ser representado como

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT) \quad (13.1)$$

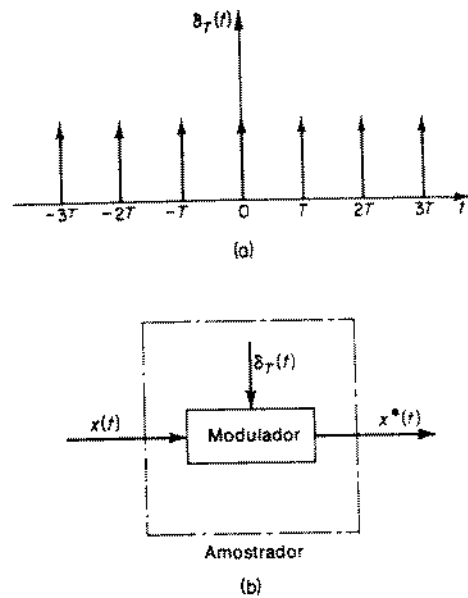


Fig. 13.4 (a) Trem de impulsos unitários; (b) amostrador como um modulador.

ou

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT) \quad (13.2)$$

A Fig. 13.5 mostra $\delta_T(t)$, $x(t)$, e $x^*(t)$. Como a amplitude de qualquer função impulso é infinita, é conveniente indicar sua magnitude, ou área, pelo comprimento de uma flecha. Na Fig. 13.5, o comprimento de cada flecha no gráfico do sinal amostrado $x^*(t)$ indica a magnitude de cada valor amostrado $x(kT)$.

A maioria das funções temporais que consideraremos neste livro são nulas para $t < 0$. Portanto, a não ser que digamos o contrário, suporemos que este é o caso. Então, para o sinal $x(t)$, as Eqs. (13.1) e (13.2) se tornam, respectivamente,

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t) \delta(t - kT) \quad (13.3)$$

e

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT) \quad (13.4)$$

Nas análises que se seguem, consideramos a Eq. (13.2) ou (13.4) [alternativamente, a Eq. (13.1) ou (13.3)] como a definição do sinal amostrado $x^*(t)$. Isto é, consideraremos a saída do amostrador como um trem de impulsos, as magnitudes

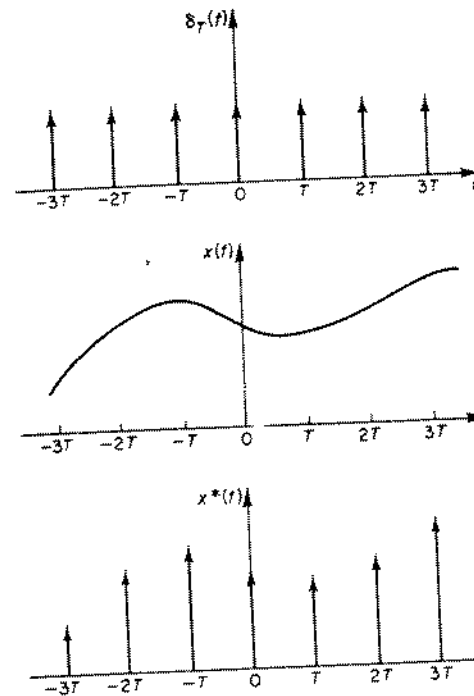


Fig. 13.5 Gráficos de $\delta_T(t)$ em função de t , $x(t)$ em função de t , e $x^*(t)$ versus t .

dos quais são iguais aos valores amostrados nos respectivos instantes de amostragem.

Transformada z . Definiremos agora a transformada z . A partir da transformada de Laplace da Eq. (13.4), obtemos

$$X^*(s) = \mathcal{L}[x^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}$$

Definamos

$$e^{Ts} = z$$

e escrevamos $X^*(s)$ como $X(z)$. Então,

$$X(z) = X^*(s) = X^*\left(\frac{1}{T} \ln z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

$X(z)$ é chamada de transformada z de $x^*(t)$, e a notação para a transformada z de $x^*(t)$ é $\mathcal{Z}[x^*(t)]$.

Na transformada z , consideramos apenas os valores do sinal nos instantes de amostragem. Portanto, a transformada z de $x(t)$ e de $x^*(t)$ fornecem o mesmo resultado, ou

$$\mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[x^*(t)] = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} \quad (13.5)$$

Como $X(z)$ depende apenas dos valores de $x(t)$ em $t = kT$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), a transformada inversa z de $X(z)$ nos dá informação sobre $x(t)$ apenas nos instantes de amostragem. (Para a transformada z inversa, referir-se à Seção 13.4.)

Note que a Eq. (13.5) não é a única forma que fornece a transformada z de $x(t)$. Há outras duas expressões para a transformada z . (Veja Problemas A.13.5 a A.13.8.)

Uma tabela de transformadas z comuns é dada na Tabela 13.1. A Tabela 13.2 nos dá propriedades úteis de transformada z .

Exemplo 13.1 Ache a transformada z da função degrau unitário $1(t)$ usando a Eq. (13.5).

Tabela 13.1 Uma tabela de transformadas z

	$X(s)$	$x(t)$ ou $x(k)$	$X(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t - kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
8	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k \cos k\pi$	$\frac{z}{z-a}$

$$\begin{aligned}\tilde{z}[1(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} 1(kT)z^{-k} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \\ &= \frac{z}{z-1}\end{aligned}$$

Note que sempre que a série infinita $X(z)$, representando a transformada z de uma função, converge em uma região do plano z , não é necessário especificar os valores de z em que $X(z)$ converge ao usar o método da transformada z para resolver problemas de tempo discreto.

Exemplo 13.2 Obtenha a transformada z do sinal $x(t)$ onde

$$\begin{aligned}x(t) &= 0 && \text{para } t < 0 \\ &= e^{-at} && \text{para } t \geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{z}[e^{-at}] &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} \\ &= 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + \dots \\ &= \frac{z}{z - e^{-aT}}\end{aligned}$$

Tabela 13.2 Propriedades da transformada z

	$x(t)$ ou $x(k)$	$\tilde{z}[x(t)]$ ou $\tilde{z}[x(k)]$
1	$ax(t)$	$aX(z)$
2	$x_1(t) + x_2(t)$	$X_1(z) + X_2(z)$
3	$x(t+T)$ ou $x(k+1)$	$zX(z) - zx(0)$
4	$x(t-2T)$	$z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(T)$
5	$x(k+2)$	$z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1)$
6	$x(t+kT)$	$z^k X(z) - z^k x(0) - z^{k-1} x(T) - \dots - zx(kT-T)$
7	$x(k+m)$	$z^m X(z) - z^m x(0) - z^{m-1} x(1) - \dots - zx(m-1)$
8	$tx(t)$	$-Tz \frac{d}{dz} [X(z)]$
9	$kx(k)$	$-z \frac{d}{dz} [X(z)]$
10	$e^{-at} x(t)$	$X(ze^{aT})$
11	$e^{-ak} x(k)$	$X(ze^a)$
12	$a^k x(k)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$

Tabela 13.2 (Cont.) Propriedades da transformada z

13	$ka^k x(k)$	$-z \frac{d}{dz} \left[X\left(\frac{z}{a}\right) \right]$
14	$x(0)$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ se o limite existe
15	$x(\infty)$	$\lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)]$ se $\frac{z-1}{z} X(z)$ é analítica sobre e fora do círculo unitário
16	$\sum_{k=0}^{\infty} x(k)$	$X(1)$
17	$\sum_{k=0}^n x(kT)y(nT-kT)$	$X(z)Y(z)$

Exemplo 13.3 Obtenha a transformada z de $x(t)$ onde

$$x(t) = 0 \quad \text{para } t < 0$$

$$= \sin \omega t \quad \text{para } t \geq 0$$

Como

$$\mathcal{Z}[e^{-at}] = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

obtemos

$$\mathcal{Z}[\sin \omega t] = \mathcal{Z}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right]$$

$$= \frac{1}{2j} \left(\frac{z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} \right)$$

$$= \frac{1}{2j} \frac{z(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})}{z^2 - z(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) + 1}$$

$$= \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

Exemplo 13.4 Obtenha a transformada z de

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \frac{1}{s(s+1)}$$

Sempre que uma função de s é dada, a correspondente transformada z pode ser obtida inicialmente expandindo-se a função dada em s em frações parciais e então combinando a transformada z de cada termo de fração parcial. Vamos expandir $X(s)$ em frações parciais.

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

A transformada z , correspondendo a $1/s$ [ou $1/t$], é $z/(z-1)$, e a correspondente a $1/(s+1)$ [ou e^{-t}] é $z/(z - e^{-T})$. Portanto,

$$\mathcal{Z}[x(t)] = X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}$$

$$= \frac{z(1 - e^{-T})}{(z-1)(z - e^{-T})}$$

13.3 RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇA USANDO O MÉTODO DA TRANSFORMADA z

A resolução de equações de diferença pelo método da transformada z é muito útil, tal como a solução de equações diferenciais por transformadas de Laplace. Essencialmente, usando o método da transformada z , podemos transformar equações de diferenças em equações algébricas em z . A seguir usaremos a notação simplificada $x(k)$ para denotar $x(kT)$.

Transformada z de $x(k+1)$. A transformada z de $x(k+1)$ é dada por

$$\mathcal{Z}[x(k+1)] = zX(z) - zx(0) \quad (13.6)$$

onde $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)]$. Isto pode ser demonstrado como segue:

$$\mathcal{Z}[x(k+1)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)z^{-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x(k)z^{-k+1}$$

$$= z \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} - x(0) \right]$$

$$= zX(z) - zx(0)$$

Note que se $x(0) = 0$, então

$$\mathcal{Z}[x(k+1)] = z\mathcal{Z}[x(k)] \quad \text{se } x(0) = 0$$

Portanto, se $x(0) = 0$, então a multiplicação da transformada z de uma função $x(k)$ por z corresponde a um deslocamento para diante no tempo de um período.

A Eq. (13.6) pode ser facilmente modificada para se obter a seguinte relação:

$$\mathcal{Z}[x(k+2)] = z\mathcal{Z}[x(k+1)] - zx(1)$$

$$= z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1)$$

De forma semelhante,

$$\mathcal{Z}[x(k+m)] = z^m X(z) - z^m x(0) - z^{m-1} x(1) - z^{m-2} x(2) - \dots - zx(m-1)$$

onde m é um inteiro positivo. Note que quando a equação de diferenças é transformada em uma equação algébrica em z pelo método da transformada z , os dados iniciais são automaticamente incluídos na representação algébrica.

Exemplo 13.5 Resolver a seguinte equação de diferenças usando o método da transformada z :

$$x(k+2) + 3x(k+1) + 2x(k) = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$$

Tomando a transformada z em ambos os lados desta equação de diferenças, obtemos

$$z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1) - 3zX(z) - 3zx(0) - 2X(z) = 0$$

Substituindo os dados iniciais e simplificando, temos

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z}{z^2 + 3z + 2} \\ &= \frac{z}{(z+1)(z+2)} \\ &= \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2} \end{aligned}$$

Notando que

$$\mathcal{Z}[a^k] = \frac{z}{z-a}$$

temos

$$\mathcal{Z}[(-1)^k] = \frac{z}{z+1}, \quad \mathcal{Z}[(-2)^k] = \frac{z}{z+2}$$

Portanto

$$x(k) = (-1)^k - (-2)^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Exemplo 13.6 Determine a resposta $x(k)$ do seguinte sistema:

$$x(k+2) - 3x(k+1) + 2x(k) = u(k) \quad (13.7)$$

onde

$$\begin{aligned} x(k) &= 0 \quad \text{para } k \leq 0 \\ u(0) &= 1 \\ u(k) &= 0 \quad \text{para } k < 0, k > 0 \end{aligned}$$

Substituindo $k = -1$ na Eq. (13.7), obtemos

$$x(1) = 0$$

Tomando a transformada z da Eq. (13.7) com dados iniciais $x(0) = x(1) = 0$, obtemos

$$(z^2 - 3z + 2)X(z) = U(z)$$

Note que a transformada z da função de excitação $u(k)$ é

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k} = 1$$

Portanto

$$X(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

Usando a relação

$$\mathcal{Z}[x(k+1)] = zX(z) - zx(0)$$

e notando que $x(0) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(k+1)] &= zX(z) \\ &= -\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-2} \end{aligned}$$

Como

$$\mathcal{Z}[1^k] = \frac{z}{z-1}, \quad \mathcal{Z}[2^k] = \frac{z}{z-2}$$

obtemos

$$x(k+1) = -1 + 2^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

ou

$$x(k) = -1 + 2^{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Teorema do valor inicial. Se $x(t)$ tem a transformada $X(z)$ e $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ existe, então o valor inicial $x(0)$ de $x(t)$ ou $x(k)$ é dado por

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (13.8)$$

Para provar isto, note que

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \\ &= x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots \end{aligned}$$

Fazendo $z \rightarrow \infty$, obtemos a Eq. (13.8).

Teorema do valor final. Se $x(t)$ tem a transformada $X(z)$, e se $X(z)$ não tem pólos duplos ou de ordem mais alta na circunferência unitária centrada na origem do plano z e nenhum pólo fora do círculo unitário [esta é a condição para a estabilidade de $X(z)$, ou a condição de que $x(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) permaneça finita (veja a Seção 13.6)], então o valor final de $x(t)$ ou $x(k)$ é dado por

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)] \quad (13.9)$$

Para provar isto, note que

$$\begin{aligned} \tilde{z}[x(k)] &= X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \\ \tilde{z}[x(k+1)] &= zX(z) - zx(0) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)z^{-k} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} zX(z) - zx(0) - X(z) &= (z-1)X(z) - zx(0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \end{aligned}$$

do qual obtemos

$$(z-1)X(z) = zx(0) + \sum_{k=0}^{\infty} [x(k+1) - x(k)]z^{-k}$$

Em virtude da suposta condição de estabilidade, obtemos, quando $z \rightarrow 1$,

$$\lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)] = x(0) + x(\infty) - x(0) = x(\infty)$$

que é a Eq. (13.9).

13.4 A TRANSFORMADA z INVERSA

Dado $X(z)$, há três métodos para se obter a transformada z inversa, $x(kT)$ ou $x(k)$. Os três métodos são baseados na expansão por série infinita de potências, na expansão por frações parciais, e a integral de inversão. Ao obter a transformada z inversa, supomos como sempre que a série temporal $x(kT)$ ou $x(k)$ é zero para $k < 0$.

Obtenção da transformada z inversa expandindo $X(z)$ em uma série infinita de potências. Se $X(z)$ é expandido em uma série de potências convergentes, como visto abaixo,

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \\ &= x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots + x(kT)z^{-k} + \dots \end{aligned}$$

então os valores de $x(kT)$ podem ser determinados por inspeção.

Se $X(z)$ é dada na forma de uma função racional, a expansão em uma série de potências infinita pode ser feita simplesmente dividindo-se o numerador pelo denominador. Se a série resultante é convergente, os coeficientes de z^{-k} na série são os valores $x(kT)$ da sequência temporal. Ao se obter os coeficientes por divisão longa, tanto o numerador como o denominador de $X(z)$ devem ser escritos como potências ascendentes de z^{-1} .

Embora o presente método forneça os valores de $x(0)$, $x(T)$, $x(2T)$, ... em uma

forma sequencial, é normalmente difícil obter uma expressão para o termo geral a partir de um conjunto de valores de $x(kT)$.

Exemplo 13.7 Determine $x(kT)$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4$ quando $X(z)$ é dado por

$$X(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$$

$X(z)$ pode ser escrito como

$$X(z) = \frac{10z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

Fazendo uma divisão longa,

$$X(z) = 10z^{-1} + 30z^{-2} + 70z^{-3} + 150z^{-4} + \dots$$

Esta série infinita converge. Portanto, obtemos por inspeção

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(T) &= 10 \\ x(2T) &= 30 \\ x(3T) &= 70 \\ x(4T) &= 150 \end{aligned}$$

Obtenção da transformada z inversa expandindo $X(z)$ em frações parciais. Um método alternativo para a obtenção de $x(kT)$ é baseado na expansão em frações parciais de $X(z)/z$ e a identificação de cada um dos termos usando-se uma tabela de transformadas z . (Tabelas de transformadas z complicadas podem não ser disponíveis. Portanto, os polinômios em z devem ser expandidos em frações parciais antes que as transformadas inversas possam ser obtidas.) Note que a razão pela qual expandimos $X(z)/z$ em frações parciais é que as funções de z que aparecem em tabelas normalmente têm o fator z nos seus numeradores.

Considere $X(z)$ dado por

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z - b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z - a_n} \quad (m \leq n)$$

Inicialmente fatoramos o polinômio do denominador de $X(z)$ e determinamos os pólos de $X(z)$. Então expandimos $X(z)/z$ em frações parciais de tal forma que cada um dos termos pode ser facilmente reconhecido em uma tabela de transformadas z . A transformada inversa de $X(z)$ é obtida como a soma das transformadas z inversas das frações parciais.

Exemplo 13.8 Determine $x(kT)$ se $X(z)$ é dada por

$$X(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$$

Inicialmente expandimos $X(z)/z$ em frações parciais como segue:

$$\begin{aligned}\frac{X(z)}{z} &= \frac{10}{(z-1)(z-2)} \\ &= \frac{-10}{z-1} + \frac{10}{z-2}\end{aligned}$$

Portanto,

$$X(z) = -\frac{10z}{z-1} + \frac{10z}{z-2}$$

Da Tabela 13.1, obtemos

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right] = 1, \quad \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right] = 2^k$$

Portanto

$$x(kT) = 10(-1 + 2^k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

ou

$$\begin{aligned}x(0) &= 0 \\ x(T) &= 10 \\ x(2T) &= 30 \\ x(3T) &= 70 \\ x(4T) &= 150 \\ &\dots\end{aligned}$$

Claramente, o resultado confere com o $x(kT)$ obtido no Exemplo 13.7.

Obtenção da transformada z inversa por integral de inversão. O terceiro método de determinar a transformada inversa é usando a integral de inversão. Da Eq. (13.5), temos

$$\begin{aligned}X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \\ &= x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots + x(kT)z^{-k} + \dots\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados desta última equação por z^{k-1} , obtemos

$$X(z)z^{k-1} = x(0)z^{k-1} + x(T)z^{k-2} + x(2T)z^{k-3} + \dots + x(kT)z^{-1} + \dots \quad (13.10)$$

Note que devido a

$$z = e^{Ts}$$

se $s = \sigma + j\omega$ é substituído nesta última equação, obtemos $z = e^{T(\sigma + j\omega)}$ ou

$$|z| = e^{T\sigma}, \quad \angle z = \omega T$$

Se os pólos de $\mathcal{L}[x]$ estão para a esquerda da reta $s = \sigma_1$ no plano s , os pólos de $\tilde{x}[z]$ estarão no interior da circunferência cujo centro é a origem e o raio é igual a $e^{T\sigma_1}$ no plano z .

Suponha que integramos ambos os lados da Eq. (13.10) ao longo desta circunferência na direção anti-horária:

$$\oint X(z)z^{k-1} dz = \oint x(0)z^{k-1} dz + \oint x(T)z^{k-2} dz + \dots + \oint x(kT)z^{-1} dz + \dots$$

Aplicando o teorema de Cauchy, vemos que todos os termos do lado direito desta última equação são nulos exceto um termo:

$$\oint x(kT)z^{-1} dz$$

Portanto

$$\oint X(z)z^{k-1} dz = \oint x(kT)z^{-1} dz$$

do que obtemos

$$x(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)z^{k-1} dz \quad (13.11)$$

A Eq. (13.11) é a integral de inversão para a transformada z . A Eq. (13.11) equivale a dizer que

$$x(kT) = \sum [\text{resíduos de } X(z)z^{k-1} \text{ nos pólos de } X(z)] \quad (13.12)$$

Exemplo 13.9 Obtenha $x(kT)$ usando a integral de inversão quando $X(z)$ é dado por

$$X(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$$

Das Eqs. (13.11) e (13.12),

$$\begin{aligned}x(kT) &= \frac{1}{2\pi j} \oint \left[\frac{10z}{(z-1)(z-2)} z^{k-1} \right] dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint \left[-\frac{10z^k}{z-1} + \frac{10z^k}{z-2} \right] dz \\ &= (\text{resíduo de } -\frac{10z^k}{z-1} \text{ no pólo } z=1) + (\text{resíduo de } \frac{10z^k}{z-2} \text{ no pólo } z=2) \\ &= 10(-1 + 2^k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)\end{aligned}$$

13.5 FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA PULSADA

Esta seção apresenta o material básico necessário para analisar sistemas de tempo discreto, ou sistemas a dados amostrados usando o método da transfor-

mada z .

Ao analisar sistemas de tempo discreto por este método, é importante notar que embora os valores da resposta do sistema em instantes de amostragem sejam corretos, a resposta do sistema obtida pelo método da transformada z pode não mostrar o comportamento correto de resposta temporal do sistema real, a não ser que a função de transferência $G(s)$ da parte contínua do sistema tenha pelo menos dois pólos a mais do que zeros, de tal forma que $\lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = 0$.

Teorema da amostragem. O teorema da amostragem de Shannon apresentado aqui é importante no projeto de sistemas de tempo discreto pois dá a mínima frequência de amostragem necessária para reconstruir o sinal original a partir de um sinal amostrado.

Suporemos que um sinal contínuo $x(t)$ tem o espectro de frequência como mostrado na Fig. 13.6. Este sinal $x(t)$ não contém quaisquer componentes de frequência acima de ω_1 rad/s.

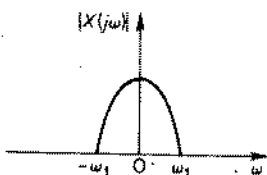


Fig. 13.6 Um espectro de frequência.

Teorema de amostragem. Se $\omega_s = 2\pi/T$, onde T é o período de amostragem, é maior do que $2\omega_1$, ou

$$\omega_s > 2\omega_1$$

onde $2\omega_1$ corresponde ao espectro de frequência do sinal contínuo $x(t)$, então o sinal $x(t)$ pode ser completamente reconstruído a partir do sinal amostrado $x^*(t)$.

Demonstraremos isto quando $\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = x(0+) = 0$. Vamos definir

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$$

Referindo-se ao Problema A.13.5, a transformada de Laplace do sinal amostrado $x^*(t)$ é dada por

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s + j\omega_s k)$$

Substituindo $s = j\omega$ nesta última equação, obtemos o espectro de frequência para $X^*(s)$ como segue:

$$\begin{aligned} |X^*(j\omega)| &= \frac{1}{T} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega + \omega_s k)] \right| \\ &= \dots + \frac{1}{T} |X[j(\omega - \omega_s)]| + \frac{1}{T} |X(j\omega)| \\ &\quad + \frac{1}{T} |X[j(\omega + \omega_s)]| + \dots \end{aligned}$$

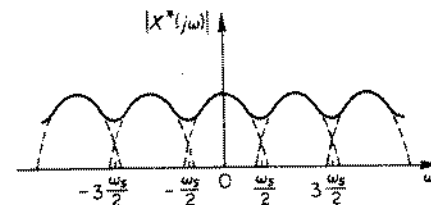
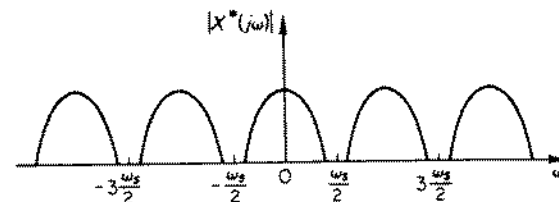


Fig. 13.7 Gráficos de $|X^*(j\omega)|$ em função de ω .

A Fig. 13.7 mostra gráficos de $|X^*(j\omega)|$ em função de ω para dois valores de T . Cada gráfico de $|X^*(j\omega)|$ versus ω consiste em $|X(j\omega)|$ repetido a cada $\omega_s = 2\pi/T$ rad/s. No espectro de frequência, a componente $|X(j\omega)|/T$ é chamada de componente primária, e as outras componentes $|X[j(\omega \pm \omega_s k)]|/T$ são chamadas de componentes complementares.

Se $\omega_s > 2\omega_1$ ou $T < (\pi/\omega_1)$, não haverá sobreposição de componentes. Portanto a forma original de $|X(j\omega)|$ é preservada pelo processo de amostragem.

Se $\omega_s < 2\omega_1$ ou $(\pi/\omega_1) < T$, então a forma original de $|X(j\omega)|$ não aparece mais no gráfico de $|X^*(j\omega)|$ em função de ω .

Portanto, vemos que o sinal contínuo $x(t)$ pode ser reproduzido a partir do sinal amostrado $x^*(t)$ através de filtragem se e apenas se $\omega_s > 2\omega_1$ ou $T < (\pi/\omega_1)$.

Portanto, se o período de amostragem T é menor que π/ω_1 , então o sinal contínuo pode ser reconstruído usando-se um filtro passa-baixas após o sinal ter sido amostrado. Se o filtro passa-baixas tem uma característica tal que deixa passar apenas sinais com frequências menores que ω_1 , então podemos obter o espectro de frequência na saída do filtro exatamente como $1/T$ vezes $|X(j\omega)|$.

Note que na maioria dos sistemas a dados amostrados ou de tempo discreto, o circuito que segue o amostrador tem a característica de um filtro passa-baixas. Isto reduz as componentes de alta frequência, alisa o sinal amostrado, e reproduz a grosso modo o sinal contínuo original.

Características de resposta em frequência de dispositivos seguradores de ordem zero. Para atenuar as componentes complementares introduzidas pelo amostrador, o sinal amostrado é normalmente passado por um circuito segurador, um filtro passa-baixas.

Se o sinal entre dois instantes consecutivos de amostragem é aproximado por um polinômio de ordem n , então o dispositivo segurador é chamado de segurador de ordem n . Neste livro, consideramos apenas dispositivos seguradores de ordem zero. Tais dispositivos aproximam o sinal de saída $x(t)$ por um polinômio de grau

zero, ou uma constante. Portanto,

$$x(t) = x(kT) \quad \text{para } kT \leq t < (k+1)T$$

onde $k = 0, 1, 2, \dots$. A função de transferência de um dispositivo segurador de ordem zero é

$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

Substituindo $s = j\omega$ nesta função de transferência, obtemos

$$\begin{aligned} G_h(j\omega) &= \frac{1 - e^{-Tj\omega}}{j\omega} \\ &= \frac{2e^{-Tj\omega/2}(e^{Tj\omega/2} - e^{-Tj\omega/2})}{2j\omega} \\ &= T \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} e^{-Tj\omega/2} \end{aligned}$$

Em termos da frequência de amostragem $\omega_s = 2\pi/T$,

$$G_h(j\omega) = \frac{2\pi}{\omega_s} \frac{\sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_s}\right)}{\frac{\pi\omega}{\omega_s}} e^{-j\pi(\omega/\omega_s)}$$

A Fig. 13.8 mostra a curva de resposta em frequência do dispositivo segurador de ordem zero. Claramente, ele tem característica de um filtro passa-baixas.

Soma de convolução. Considere o sistema de tempo discreto visto na Fig. 13.9. Aqui a sequência de impulsos $x^*(t)$ é a entrada para o processo de tempo contínuo cuja função de transferência é $G(s)$. A saída do processo é um sinal contínuo $y(t)$. Se na saída há um outro amostrador, que está sincronizado em fase com o amostrador

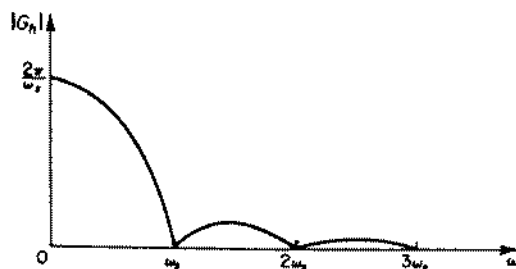


Fig. 13.8 Curva de resposta em frequência do dispositivo segurador de ordem zero.

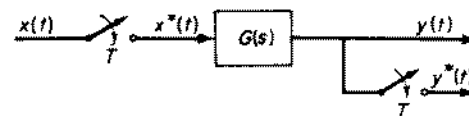


Fig. 13.9 Sistema de tempo discreto.

de entrada e opera no mesmo período de amostragem, então a saída é um trem de impulsos. Se $y(t) = 0$ para $t < 0$, então a transformada z de $y(t)$ é

$$\mathcal{Z}[y(t)] = Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k} \quad (13.13)$$

Na ausência de um amostrador na saída, se considerarmos um amostrador fictício (que é sincronizado em fase com o amostrador de entrada e opera à mesma taxa de amostragem) na saída e observarmos a sequência de valores tomados por y apenas nos instantes $t = kT$, então a transformada z da saída pode também ser dada pela Eq. (13.13).

Deve-se notar que, ao realimentar o sinal de saída para a entrada, isto é, fechando a malha, a existência ou não existência do amostrador de saída dentro da malha faz uma diferença no comportamento do sistema. (Se o amostrador de saída está fora da malha, isto não fará nenhuma diferença na operação de malha-fechada.)

Para um processo linear estável invariante no tempo, sabe-se que a saída $y(t)$ do processo está relacionada com a entrada $x(t)$ através da integral de convolução, ou

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)x(\tau) d\tau = \int_0^t x(t - \tau)g(\tau) d\tau$$

onde $g(t)$ é a função de resposta ao impulso do processo. Para sistemas de tempo discreto temos a soma de convolução, que é similar à integral de convolução. Como $x^*(t)$ é um trem de impulsos, a resposta do processo à entrada $x^*(t)$ é a soma das respostas a impulsos individuais. Portanto, para $0 \leq t \leq kT$,

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t)x(0) + g(t - T)x(T) + g(t - 2T)x(2T) + \dots + g(t - kT)x(kT) \\ &= \sum_{h=0}^k g(t - hT)x(hT) \end{aligned}$$

Os valores da saída $y(t)$ nos instantes de amostragem $t = kT$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) são dados por

$$y(kT) = \sum_{h=0}^k g(kT - hT)x(hT) \quad (13.14)$$

$$= \sum_{h=0}^k x(kT - hT)g(hT) \quad (13.15)$$

A soma na Eq. (13.14) ou (13.15) é chamada soma de convolução. Note que a notação simplificada

$$y(kT) = x(kT) * g(kT)$$

é frequentemente chamada de soma de convolução.

Funções de transferência pulsada. Inicialmente notaremos que $y(kT)$ pode também ser escrito como

$$y(kT) = \sum_{h=0}^{\infty} g(kT - hT)x(hT) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

pois $g(kT - hT) = 0$ para $h > k$. Portanto,

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} g(kT - hT)x(hT)z^{-k} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} g(mT)x(hT)z^{-(m+h)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} g(mT)z^{-m} \sum_{h=0}^{\infty} x(hT)z^{-h} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} g(mT)z^{-m} X(z) \\ &= G(z)X(z) \end{aligned} \quad (13.16)$$

onde

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-k} \\ &= g(0) + g(T)z^{-1} + g(2T)z^{-2} + \dots \\ &= z \text{ transformada } z \text{ de } g(t) \end{aligned}$$

A Eq. (13.16) relaciona a saída pulsada do sistema com sua entrada em pulsos. A função $G(z)$, onde

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

é chamada de função de transferência z , ou função de transferência pulsada, do sistema de tempo discreto. A Fig. 13.10 mostra um diagrama de bloco para uma função de transferência pulsada $G(z)$, juntamente com a entrada $X(z)$ e a saída $Y(z)$.

Procedimento geral para obtenção de funções de transferência pulsada. A função de transferência pulsada de um sistema pode ser obtida usando-se o seguinte procedimento:

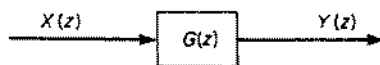


Fig. 13.10 Diagrama de bloco para um sistema de função de transferência pulsada.

1. Obtenha a função de transferência $G(s)$ do sistema.
2. Obtenha a função de resposta ao impulso $g(t)$, onde $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$.
3. Calcule

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-k}$$

onde $g(kT)$ é obtido de $g(t)$ substituindo t por kT . Para sistemas estáveis, a série infinita converge.

É importante lembrar que na abordagem por transformada z , ou a abordagem por função de transferência pulsada, para a análise de sistemas de tempo discreto, supõe-se que o sinal amostrado é um trem de impulsos cujas magnitudes, ou áreas, são iguais ao sinal de tempo contínuo nos instantes de amostragem. Tal suposição é válida apenas se a duração de amostragem do dispositivo amostrador é pequena quando comparada com a maior constante de tempo do sistema.

Exemplo 13.10 Obtenha a função de transferência pulsada do sistema visto na Fig. 13.11. A função de transferência $G(s)$ pode ser expandida em frações parciais como segue:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K}{(s+a)(s+b)} \\ &= \frac{K}{b-a} \left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} \right) \end{aligned}$$

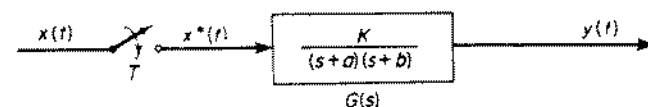


Fig. 13.11 Sistema de tempo discreto.

A função de resposta ao impulso é então obtida como

$$g(t) = \frac{K}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$$

Portanto

$$g(kT) = \frac{K}{b-a} (e^{-akT} - e^{-bkT})$$

Então $G(z)$ é obtida como

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{K}{b-a} (e^{-akT} - e^{-bkT}) z^{-k} \quad (13.17)$$

Como

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-aT} z^{-1} (e^{-akT+aT} z^{-k+1}) \\ &= 1 + e^{-aT} z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} \end{aligned}$$

obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \tag{13.18}$$

Substituindo a Eq. (13.18) na Eq. (13.17), obtemos a seguinte função de transferência pulsada $G(z)$:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{K}{b-a} \left(\frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-bT} z^{-1}} \right) \\ &= \frac{K}{b-a} \frac{z(e^{-aT} - e^{-bT})}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})} \end{aligned}$$

Exemplo 13.11 Obtenha a função de transferência pulsada do sistema visto na Fig. 13.12. Do diagrama de bloco, obtemos

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{C(s)}{M^*(s)} = \frac{1 - e^{-s}}{s^2(s+1)} \\ &= (1 - e^{-s}) \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right) \end{aligned}$$

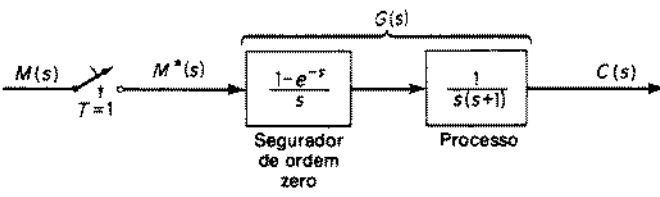


Fig. 13.12 Sistema de tempo discreto.

Portanto

$$g(t) = (t - 1 + e^{-t})1(t) - (t - 1 - 1 + e^{-(t-1)})1(t-1)$$

Como $T = 1$, temos $kT = k$ e

$$\begin{aligned} g(k) &= (k - 1 + e^{-k}) - (k - 2 + e^{-(k-1)}) \\ &= e^{-k} + 1 - e^{-(k-1)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \\ g(0) &= 0 \end{aligned}$$

Portanto $G(z)$ é obtida como

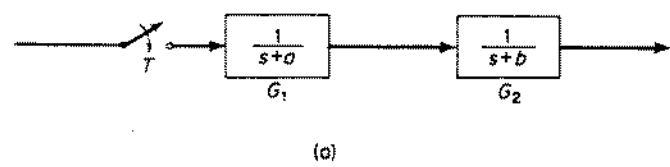
$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-k} + 1 - e^{-(k-1)}) z^{-k} + e - 2 \\ &= \frac{1 - e}{1 - e^{-1} z^{-1}} + \frac{1}{1 - z^{-1}} + e - 2 \\ &= \frac{e^{-1} z^{-1} + (1 - 2e^{-1}) z^{-2}}{1 - (1 + e^{-1}) z^{-1} + e^{-1} z^{-2}} \\ &= \frac{e^{-1} z + 1 - 2e^{-1}}{z^2 - (1 + e^{-1}) z + e^{-1}} \end{aligned}$$

Funções de transferência pulsada de elementos em cascata. É importante notar que as funções de transferência pulsada dos sistemas vistos nas Figs. 13.13(a) e (b) são diferentes. Para o sistema visto na Fig. 13.13(a), a função de transferência pulsada é, do Exemplo 13.10 (com $K = 1$),

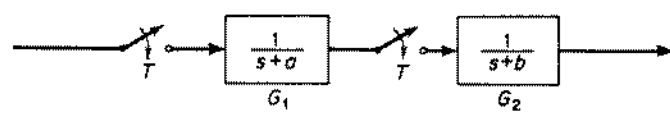
$$G_1 G_2(z) = \frac{z(e^{-aT} - e^{-bT})}{(b-a)(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$$

Para o sistema visto na Fig. 13.13(b) (supondo que os dois amostradores estão sincronizados e têm o mesmo período de amostragem), obtemos

$$G_1(z) G_2(z) = \frac{z^2}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$$



(a)



(b)

Fig. 13.13 (a) Sistema de tempo discreto com um amostrador; (b) sistema de tempo discreto com dois amostradores sincronizados.

Portanto

$$G_1 G_2(z) \neq G_1(z) G_2(z)$$

Portanto, devemos ser cuidadosos e observar se há ou não um amostrador entre elementos em cascata.

Funções de transferência pulsada de sistemas a malha-fechada. Considere o sistema a malha-fechada da Fig. 13.14. Neste sistema, o erro atuante é amostrado. Do diagrama de bloco.

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s)$$

$$C(s) = G(s)E^*(s)$$

Portanto

$$E(s) = R(s) - G(s)H(s)E^*(s)$$

Então, obtemos

$$E^*(s) = R^*(s) - GH^*(s)E^*(s)$$

ou

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + GH^*(s)}$$

Como

$$C^*(s) = G^*(s)E^*(s)$$

obtemos

$$C^*(s) = \frac{G^*(s)R^*(s)}{1 + GH^*(s)}$$

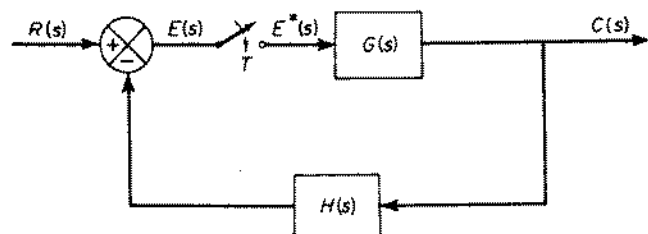


Fig. 13.14 Sistema de tempo discreto a malha-fechada.

Em termos da transformada z , $C(z)$ é dada por

$$C(z) = \frac{G(z)R(z)}{1 + GH(z)} \quad (13.19)$$

A transformada z inversa da Eq. (13.19) nos dá os valores da saída nos instantes de amostragem. A função de transferência pulsada do presente sistema a malha-

Tabela 13.3 Configurações típicas de sistemas de tempo discreto a malha-fechada e as correspondentes saídas $C(z)$

	$C(z) = \frac{G(z)R(z)}{1 + GH(z)}$
	$C(z) = \frac{G(z)R(z)}{1 + G(z)H(z)}$
	$C(z) = \frac{RG(z)}{1 + HG(z)}$
	$C(z) = \frac{G_2(z)RG_1(z)}{1 + G_1G_2H(z)}$
	$C(z) = \frac{G_1(z)G_2(z)R(z)}{1 + G_1(z)G_2H(z)}$

fechada é

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \quad (13.20)$$

A Tabela 13.3 mostra cinco configurações típicas de sistemas a malha-fechada de tempo discreto. Para cada configuração, é vista a correspondente saída $C(z)$.

Exemplo 13.12 Obtenha a resposta a degrau unitário do sistema visto na Fig. 13.15. A função de transferência pulsada deste sistema a malha-fechada é

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

Como

$$G(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s^2(s+1)}$$

referindo-se ao Exemplo 13.11, obtemos

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{e^{-1}z + 1 - 2e^{-1}}{z^2 - (1 + e^{-1})z + e^{-1}} \\ &= \frac{0,368z + 0,264}{z^2 - 1,368z + 0,368} \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0,368z + 0,264}{z^2 - z + 0,632}$$

Para uma entrada degrau unitário,

$$R(z) = \frac{z}{z-1}$$

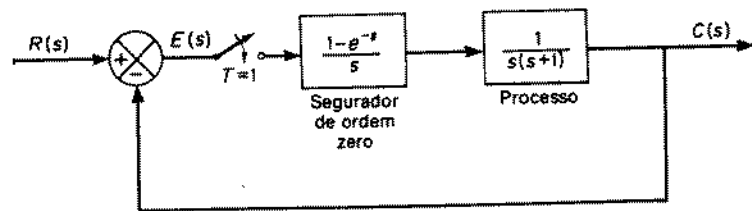


Fig. 13.15 Sistema de tempo discreto a malha-fechada.

A saída $C(z)$ é então obtida como segue:

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{(0,368z + 0,264)z}{(z^2 - z + 0,632)(z-1)} \\ &= \frac{0,368z^2 + 0,264z}{z^3 - z^2 - 1,632z + 0,632} \\ &= \frac{0,368z^{-1} + 0,264z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + 1,632z^{-2} - 0,632z^{-3}} \\ &= 0,368z^{-1} - z^{-2} + 1,4z^{-3} + 1,4z^{-4} \\ &\quad - 1,147z^{-5} + 0,895z^{-6} - 0,802z^{-7} + \dots \end{aligned}$$

A transformada z inversa de $C(z)$ nos dá

$$\begin{aligned} c(0) &= 0 \\ c(1) &= 0,368 \\ c(2) &= 1 \\ c(3) &= 1,4 \\ c(4) &= 1,4 \\ c(5) &= 1,147 \\ c(6) &= 0,895 \\ c(7) &= 0,802 \end{aligned}$$

A saída $c(k)$ é mostrada no gráfico da Fig. 13.16.

A análise por transformada z não dará informação sobre a resposta entre instantes de amostragem. Portanto, a curva suave conectando os pontos é apenas aproximada.

Se desejamos obter informação sobre a resposta entre instantes de amostragem usando o método da transformada z , precisamos modificar este método. O método da transformada z modificada, o método da amostragem submúltipla etc. nos permitem obter a resposta do sistema entre instantes de amostragem. (O leitor interessado em tais métodos modificados deve consultar livros especializados sobre sistemas a dados amostrados.)

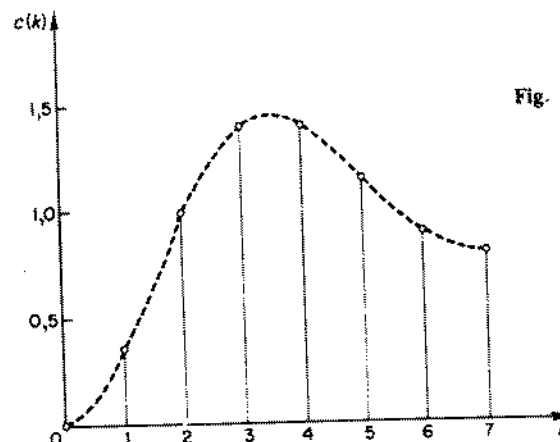


Fig. 13.16 Gráfico de $c(k)$ versus k .

13.6 ANÁLISE DE ESTABILIDADE NO PLANO z

Esta seção apresenta a análise de estabilidade de sistemas de tempo discreto no plano z . A análise de estabilidade de tais sistemas usando-se o segundo método de Liapunov será discutida na Seção 15.4.

Mapeamento do semiplano esquerdo no plano s sobre o plano z . Um sistema dinâmico linear é estável se todos os pólos da função de transferência estão no semiplano esquerdo do plano s . No plano z , o semiplano esquerdo em s corresponde ao círculo unitário centrado na origem, ou o semiplano esquerdo em s mapeia-se dentro do círculo unitário no plano z . Isto pode ser provado facilmente. Como

$$z = e^{Ts}, \quad s = \sigma + j\omega$$

obtemos

$$|z| = e^{T\sigma}, \quad \angle z = \omega T$$

No semiplano esquerdo em s , $\sigma < 0$. Portanto, o módulo de z varia entre 0 e 1. O eixo imaginário, ou $\sigma = 0$, corresponde ao círculo unitário no plano z . O interior do círculo corresponde ao semiplano esquerdo em s .

Note que como $\angle z = \omega T$, o ângulo de z varia de $-\infty$ a ∞ quando ω varia de $-\infty$ a ∞ . Considere um ponto representativo no eixo $j\omega$ no plano s . A medida que este ponto se move de $-\pi/T$ a π/T no eixo $j\omega$, temos $z = 1$, e $\angle z$ varia de $-\pi$ a π na direção anti-horária no plano z . Quando o ponto representativo se move de π/T a $3\pi/T$ no eixo $j\omega$, o ponto correspondente no plano z descreve uma vez a circunferência unitária no sentido anti-horário. Portanto, quando o ponto no plano s se move de $-\infty$ a ∞ no eixo $j\omega$, percorremos a circunferência unitária no plano z um número infinito de vezes.

Desta análise, é claro que cada faixa de largura $2\pi/T$ no semiplano esquerdo do plano s é mapeada dentro do círculo unitário no plano z , como visto na Fig. 13.17(a). As Figs. 13.17(b) e (c) mostram regiões correspondentes nos planos s e z .

Análise de estabilidade. Discutiremos agora a estabilidade do sistema a malha-fechada visto na Fig. 13.14 no plano z . A relação saída-entrada do sistema a erro amostrado é dada pela Eq. (13.20), reescrita como

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}$$

A estabilidade de tal sistema pode ser determinada pela localização das raízes da equação característica

$$1 + GH(z) = 0 \quad (13.21)$$

Como este polinômio em z pode ser convertido em uma razão de dois polinômios em z , para haver estabilidade todas as raízes z_i da equação característica, a Eq. (13.21), devem estar dentro do círculo unitário, ou

$$|z_i| < 1$$

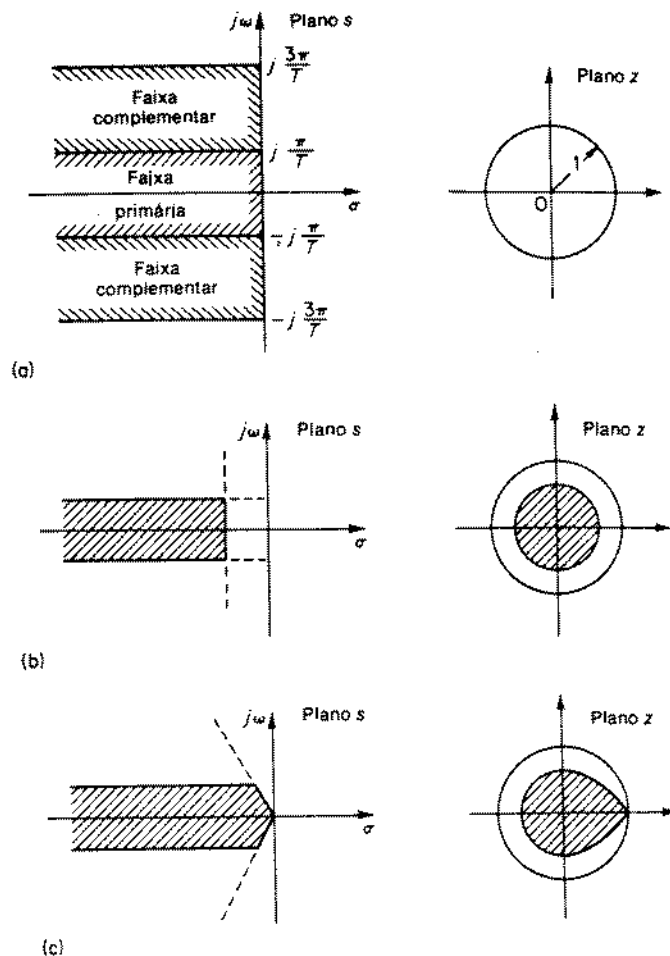


Fig. 13.17 (a) Mapeamento de faixas do plano s sobre o plano z ; (b) e (c) regiões do plano s e as correspondentes regiões no plano z .

O sistema a malha-fechada $C(z)/R(z)$ se torna instável se qualquer pólo de malha-fechada estiver fora do círculo unitário e/ou qualquer pólo múltiplo estiver sobre a circunferência unitária.

Alguns métodos são disponíveis para a determinação da existência de raízes sobre ou fora do círculo unitário de um polinômio em z . Um método é modificar o critério de estabilidade de Routh. O critério de estabilidade de Routh nos diz se qualquer das raízes de um polinômio fica do lado direito do plano complexo. Como a seguinte transformação:

$$z = \frac{r+1}{r-1}$$

mapeia o interior do círculo unitário no plano z sobre o lado esquerdo do plano r , com esta transformação, o critério de estabilidade de Routh pode ser aplicado ao polinômio em r da mesma forma que em sistemas de tempo contínuo. O Exemplo 13.13 ilustra este método. Uma outra abordagem é aplicar o critério de estabilidade de Schur-Cohn. (Para uma discussão deste critério, consultar um livro especializado em sistemas a dados amostrados.)

Alternativamente, escrevendo uma equação de espaço de estados para o sistema de tempo discreto, podemos aplicar métodos de espaço de estados para determinar a estabilidade. Discutiremos este assunto nos Caps. 14 e 15.

Exemplo 13.13 Considere o sistema de tempo discreto visto na Fig. 13.18. A função de transferência de malha-aberta do sistema é

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

A transformada z de $G(s)$ é

$$G(z) = \frac{10(1 - e^{-1})z}{(z-1)(z - e^{-1})}$$

A equação característica

$$1 + G(z) = 0$$

se torna

$$(z-1)(z - e^{-1}) + 10(1 - e^{-1})z = 0$$

Observando-se que $e^{-1} = 0.368$, podemos simplificar a equação característica para

$$z^2 + 4,952z + 0,368 = 0 \quad (13.22)$$

da qual podemos achar as raízes

$$z = -0,076, \quad z = -4,876$$

Portanto, uma raiz da equação característica tem módulo maior do que a unidade, e o sistema é instável.

É importante notar que na ausência de um amostrador, um sistema de segunda-ordem sempre é estável. Na presença de um amostrador, entretanto, um sistema de segunda-ordem como este pode-se tornar instável para valores grandes do ganho. De fato, pode-se observar

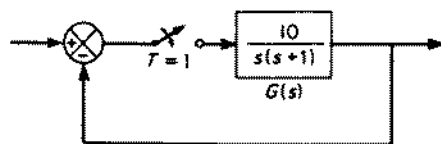


Fig. 13.18 Sistema de tempo discreto a malha-fechada.

que o sistema de segunda-ordem visto na Fig. 13.18 com

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

é estável apenas para $0 < K < 4,32$. (Veja Problema A.13.14.)

No presente sistema, a equação característica é de forma quadrática e pode ser resolvida facilmente. Para uma equação característica de grau superior, não é fácil determinar as raízes. Em tal caso, é conveniente transformar a equação característica em z em um polinômio em r usando a transformação

$$z = \frac{r+1}{r-1} \quad (13.23)$$

e então aplicar o critério de estabilidade de Routh para o polinômio resultante.

Ilustraremos este método usando o sistema presente. Usando a transformação dada pela Eq. (13.23) podemos escrever a equação característica, Eq. (13.22), como

$$\left(\frac{r+1}{r-1}\right)^2 + 4,952\left(\frac{r+1}{r-1}\right) + 0,368 = 0$$

ou

$$6,32r^2 + 1,264r - 3,584 = 0$$

A tabela de Routh se torna

r^2	6,32	-3,584
r^1	1,264	0
r^0	-3,584	

Há uma mudança de sinal na primeira coluna da tabela de Routh. Portanto, há uma raiz no semiplano direito do plano r , o que implica que há uma raiz fora do círculo unitário no plano z . Isto corresponde ao resultado obtido previamente.

Note que, em geral, a estabilidade de um sistema de tempo discreto é melhorada quando o período de amostragem é diminuído, porque o aumento da taxa de amostragem tende a fazer o sistema se comportar de forma mais parecida com o sistema de tempo contínuo correspondente. (No presente exemplo, o sistema de tempo contínuo correspondente — um sistema de segunda-ordem — é estável para todos os valores positivos de K .)

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS E SOLUÇÕES

Problema A.13.1 Obtenha as transformadas z de a^k e A^k , onde A é uma matriz $n \times n$.

Solução. Por definição, a transformada z de a^k é

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[a^k] &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} \\ &= 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - az^{-1}} \\ &= \frac{z}{z - a} \end{aligned}$$

De forma semelhante,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[A^k] &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k z^{-k} \\ &= I + Az^{-1} + A^2 z^{-2} + \dots \\ &= (I - Az^{-1})^{-1} \\ &= (zI - A)^{-1} z\end{aligned}$$

Note que A^k pode ser obtida tomando-se a transformada z inversa de $(zI - A)^{-1}z$, ou

$$A^k = \mathcal{Z}^{-1}[(zI - A)^{-1}z]$$

Problema A.13.2 Considere o sistema visto na Fig. 13.19. Derive a equação de diferenças que descreve a dinâmica do sistema quando a tensão de entrada aplicada é constante por trechos, ou

$$e(t) = e(kT) \quad \text{para } kT \leq t < (k+1)T$$

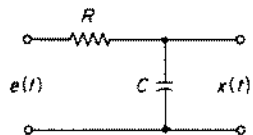


Fig. 13.19 Sistema a circuito elétrico.

Solução. Da Fig. 13.19, obtemos

$$RC\dot{x}(t) + x(t) = e(kT) \quad \text{para } kT \leq t < (k+1)T$$

Tomando a transformada de Laplace desta última equação, considerando $t = kT$ como o instante inicial, obtemos

$$RC[sX(s) - x(kT)] + X(s) = \frac{e(kT)}{s}$$

ou

$$X(s) = \frac{e(kT)}{s} + \frac{x(kT) - e(kT)}{s + \frac{1}{RC}}$$

A transformada inversa de Laplace de $X(s)$ nos dá

$$x(t) = e(kT) + [x(kT) - e(kT)]e^{-(t-kT)/RC} \quad \text{para } kT \leq t < (k+1)T$$

Substituindo $t = (k+1)T - 0$ nesta última equação e notando que $x(t)$ é uma função contínua do tempo e portanto $x((k+1)T - 0) = x((k+1)T + 0) = x((k+1)T)$, obtemos a equação de diferenças desejada, ou

$$x((k+1)T) = e^{-T/RC} x(kT) + (1 - e^{-T/RC})e(kT)$$

Problema A.13.3 Dado

$$X(z) = \frac{2z(z^2 - 1)}{(z^2 + 1)^2}$$

obtenha $x(kT)$.

Solução. Expandindo $X(z)/z$ em frações parciais, obtemos

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z+j)^2} + \frac{0}{z+j} + \frac{1}{(z-j)^2} + \frac{0}{z-j}$$

Portanto

$$\begin{aligned}X(z) &= \frac{z}{(z+j)^2} + \frac{z}{(z-j)^2} \\ &= (e^{j(\pi/2)}) \frac{ze^{-j(\pi/2)}}{(z - e^{-j(\pi/2)})^2} + (e^{-j(\pi/2)}) \frac{ze^{j(\pi/2)}}{(z - e^{j(\pi/2)})^2}\end{aligned}$$

Usando a Tabela 13.1, obtemos a transformada z inversa de $X(z)$ como segue

$$\begin{aligned}x(kT) &= e^{j(\pi/2)k} e^{-j(\pi/2)k} + e^{-j(\pi/2)k} e^{j(\pi/2)k} \\ &= jk \left[\cos \frac{\pi k}{2} - j \sin \frac{\pi k}{2} \right] - jk \left[\cos \frac{\pi k}{2} + j \sin \frac{\pi k}{2} \right] \\ &= 2k \sin \frac{\pi k}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)\end{aligned}$$

Problema A.13.4 Mostre que a transformada de Laplace de

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT)$$

é

$$\begin{aligned}X^*(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs} \\ &= X(s) * \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) \frac{1}{1 - e^{-T(s-p)}} dp\end{aligned}$$

onde c é a abscissa de convergência para $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$.

Solução. Inicialmente, notemos que

$$\mathcal{L}[\delta(t - kT)] = e^{-kTs}$$

Portanto

$$\begin{aligned}X^*(s) &= \mathcal{L}[x^*(t)] = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT)\right] \\ &= \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}\end{aligned}$$

Como

$$\mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)\right] = 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-Ts}}$$

obtemos

$$X^*(s) = \mathcal{L}[x^*(t)] = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(t) \delta(t - kT)\right]$$

$$= \mathcal{L}[x(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)]$$

$$= X(s) * \frac{1}{1 - e^{-Ts}}$$

A transformada de Laplace do produto de duas funções $f(t)$ e $g(t)$ é

$$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \int_0^{\infty} f(t)g(t) e^{-st} dt$$

A integral de inversão definida pela Eq. (2.8) é

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (t > 0)$$

onde c é a abscissa de convergência para $F(s)$. Portanto,

$$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{\infty} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} g(t) e^{-st} dt dp$$

Em virtude da convergência uniforme das integrais consideradas, podemos inverter a ordem da integração, ou

$$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) dp \int_0^{\infty} g(t) e^{-(s-p)t} dt$$

Notando que

$$\int_0^{\infty} g(t) e^{-(s-p)t} dt = G(s-p)$$

obtemos

$$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s-p) dp$$

Portanto

$$\mathcal{L}[x^*(t)] = \mathcal{L}[x(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)]$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) \frac{1}{1 - e^{-T(s-p)}} dp$$

Problema A.13.5 Supondo que os pólos de $X(s)$ estão no semiplano esquerdo do plano s e que $X(s)$ pode ser expresso como uma razão de polinômios com um denominador de grau pelo menos 2 a mais que o do numerador [o que significa que $\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = x(0+) = 0$]. calcule

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} dp$$

onde o contorno é uma linha paralela ao eixo imaginário no plano p que separa os pólos de $X(p)$ daqueles de $1/[1 - e^{-T(s-p)}]$, e mostre que

$$X(z) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(s + j\frac{2\pi}{T}k\right) \Big|_{s=(1/T) \ln z}$$

Solução. Os pólos de $1/[1 - e^{-T(s-p)}]$ podem ser obtidos resolvendo-se

$$1 - e^{-T(s-p)} = 0$$

e então

$$p = s \pm j\frac{2\pi}{T}k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Portanto há um número infinito de pólos.

Para calcular a integral dada, vamos escolher o contorno que consiste na reta de $c - j\infty$ a $c + j\infty$ e o semicírculo Γ de um raio infinito no semiplano direito do plano p , como visto na Fig. 13.20. O contorno fechado engloba todos os pólos de $1/[1 - e^{-T(s-p)}]$, mas não engloba quaisquer pólos de $X(p)$.

Agora $X^*(s)$ pode ser escrita como

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} dp$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} dp$$

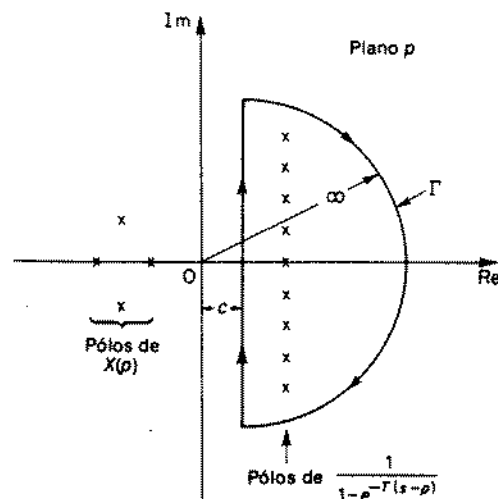


Fig. 13.20 Contorno no plano p .

Vamos considerar a integral ao longo do semicírculo Γ . Como o grau do denominador de $X(s)$ é pelo menos 2 a mais do que o grau do numerador, pode-se mostrar que o valor desta integral é zero, ou

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} dp = 0$$

Portanto,

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} dp$$

A integral ao longo do contorno fechado pode ser obtida calculando-se os resíduos. Portanto,

$$\begin{aligned} X^*(s) &= - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left. \frac{d}{dp} [1 - e^{-T(s-p)}] \right|_{p=s+j(2\pi/T)k} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(s + j\frac{2\pi}{T}k\right) \end{aligned}$$

Portanto,

$$X(z) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(s + j\frac{2\pi}{T}k\right) \quad z = (1/T) \ln z$$

Problema A.13.6 Supondo que os pólos de $X(s)$, uma razão de dois polinômios em s , estão no semiplano esquerdo de s e que $\lim_{s \rightarrow \infty} X(s) = 0$, calcule

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} dp$$

e mostre que

$$X(z) = \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{1}{(n_i - 1)!} \frac{d^{n_i-1}}{ds^{n_i-1}} \left[\frac{(s - s_i)^{n_i} X(s) z}{z - e^{Ts}} \right] \right\}_{s=s_i}$$

onde os s_i são os pólos de $X(s)$ e n_i é a ordem do pólo em $s = s_i$, ou

$$X(z) = \sum [\text{resíduos de } \frac{X(s)z}{z - e^{Ts}} \text{ nos pólos de } X(s)]$$

Solução. Como obtido no Problema A.13.5, os pólos de $1/[1 - e^{-Ts-p}]$ no plano p são

$$p = s \pm j\frac{2\pi}{T}k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Para calcular a dada integral, vamos escrever

$$\begin{aligned} X^*(s) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} dp \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} dp - \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} dp \end{aligned}$$

O contorno fechado consiste na reta de $c - j\infty$ a $c + j\infty$ e o semicírculo Γ de raio infinito no lado esquerdo do plano p , como visto na Fig. 13.21. No caso presente determinamos que a integral ao longo do semicírculo infinito Γ não é sempre zero. Se não for zero, considere $X(p)$ como $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{\epsilon p} X(p)$, ($\epsilon > 0$). Então podemos mostrar que a integral ao longo de Γ é zero. Portanto,

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} dp = 0$$

Portanto

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} dp$$

Como os pólos de $X(p)$ são p_1, p_2, \dots, p_m ,

$$\begin{aligned} X^*(s) &= \sum [\text{resíduos de } \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} \text{ nos pólos de } X(p)] \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{(n_i - 1)!} \frac{d^{n_i-1}}{dp^{n_i-1}} \left[(p - p_i)^{n_i} \frac{X(p)}{1 - e^{-T(s-p)}} \right]_{p=p_i} \end{aligned}$$

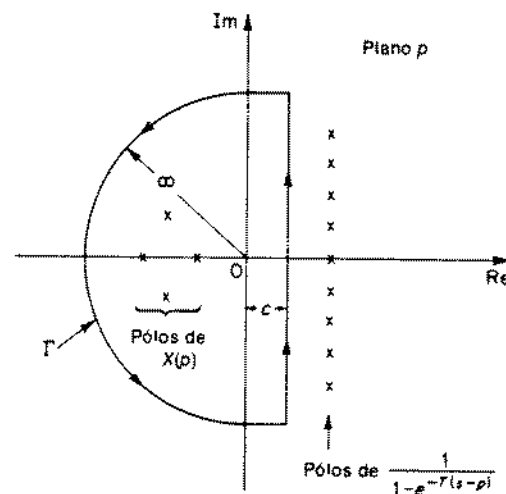


Fig. 13.21 Contorno no plano p .

Substituindo $z = e^{Ts}$ nesta última equação, obtemos

$$X(z) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{(n_i - 1)!} \frac{d^{n_i-1}}{dp^{n_i-1}} \left[(p - p_i)^{n_i} X(p) \frac{z}{z - e^{Ts}} \right]_{p=p_i}$$

Mudando a variável complexa de p para s , obtemos

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{(n_i - 1)!} \frac{d^{n_i-1}}{ds^{n_i-1}} \left[(s - s_i)^{n_i} X(s) \frac{z}{z - e^{Ts}} \right]_{s=s_i} \\ &= \sum [\text{resíduos de } \frac{X(s)z}{z - e^{Ts}} \text{ nos pólos de } X(s)] \end{aligned}$$

Problema A.13.7 Obtenha a transformada z de te^{-at} , onde $t \geq 0$. Note que $\mathcal{L}\{te^{-at}\} = 1/(s+a)^2$.

Solução

$$\begin{aligned} F(z) &= \left[\text{resíduo de } \frac{X(s)z}{z - e^{Ts}} \text{ em } s = -a \right] \\ &= \left[\text{resíduo de } \frac{z}{(s+a)^2(z - e^{Ts})} \text{ em } s = -a \right] \\ &= \frac{d}{ds} \left[\frac{z}{z - e^{Ts}} \right]_{s=-a} \\ &= \frac{Tze^{Ts}}{(z - e^{Ts})^2} \Big|_{s=-a} \\ &= \frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2} \end{aligned}$$

Problema A.13.8 Dado

$$X(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

obtenha $X(z)$.

Solução

$$\begin{aligned} X(z) &= \left[\text{resíduo de } \frac{(s+3)z}{(s+1)(s+2)(z - e^{Ts})} \text{ em } s = -1 \right] \\ &\quad + \left[\text{resíduo de } \frac{(s+3)z}{(s+1)(s+2)(z - e^{Ts})} \text{ em } s = -2 \right] \\ &= \frac{(s+3)z}{(s+2)(z - e^{Ts})} \Big|_{s=-1} + \frac{(s+3)z}{(s+1)(z - e^{Ts})} \Big|_{s=-2} \\ &= \frac{2z}{z - e^{-T}} - \frac{z}{z - e^{-2T}} \end{aligned}$$

Problema A.13.9 Prove que

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^n x(k)\right] &= \frac{z}{z-1} X(z) \\ \mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{n-1} x(k)\right] &= \frac{1}{z-1} X(z) \end{aligned}$$

Em seguida prove que

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} X(z)$$

Solução. A transformada z da primeira diferença "para a frente" (forward) é

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\Delta f(k)] &= \mathcal{Z}[f(k+1)] - \mathcal{Z}[f(k)] \\ &= [zF(z) - zf(0)] - F(z) \\ &= (z-1)F(z) - zf(0) \end{aligned}$$

Vamos escrever

$$x(n) = \sum_{k=0}^n x(k) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k) = \Delta \sum_{k=0}^{n-1} x(k)$$

Então

$$\mathcal{Z}\left[\Delta \sum_{k=0}^{n-1} x(k)\right] = \mathcal{Z}[x(n)] = X(z) = (z-1) \mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{n-1} x(k)\right]$$

como o valor da soma $\sum_{k=0}^{n-1} x(k)$ para $n=0$ é igual a zero. Portanto,

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{n-1} x(k)\right] = \frac{X(z)}{z-1}$$

e

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^n x(k)\right] = \mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{n-1} x(k)\right] + \mathcal{Z}[x(n)] = \frac{X(z)}{z-1} + X(z)$$

ou

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^n x(k)\right] = \frac{z}{z-1} X(z)$$

Usando o teorema do valor final, achamos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^n x(k) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \frac{z}{z-1} X(z) \right]$$

ou

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} X(z)$$

Problema A.13.10 Prove as seguintes relações. Note que $X(z) = \mathcal{Z}[x(t)]$.

- $\mathcal{Z}[a^k x(t)] = X\left(\frac{z}{a}\right)$
- $\mathcal{Z}[e^{-at} x(t)] = X(ze^{aT})$
- $\mathcal{Z}[tx(t)] = -Tz \frac{d}{dz} X(z)$
- $\mathcal{Z}[t] = \frac{Tz}{(z-1)^2}$

Solução

$$\begin{aligned} 1. \quad \mathcal{Z}[a^k x(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(kT) z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \left(\frac{z}{a}\right)^{-k} \\ &= X\left(\frac{z}{a}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad \mathcal{Z}[e^{-aT}x(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT}x(kT)z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)(ze^{aT})^{-k} \\
&= X(ze^{aT})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad \mathcal{Z}[tx(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} kTx(kT)z^{-k} \\
&= -T \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z \frac{d}{dz}(z^{-k}) \\
&= -Tz \frac{d}{dz} \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \right] \\
&= -Tz \frac{d}{dz} X(z)
\end{aligned}$$

4. Como $\mathcal{Z}[1(t)] = z/(z-1)$, referindo-se à relação que acabamos de obter, vemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[t] &= -Tz \frac{d}{dz} [\mathcal{Z}[1(t)]] \\
&= -Tz \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) \\
&= \frac{Tz}{(z-1)^2}
\end{aligned}$$

Problema A.13.11 Obtenha a solução da seguinte equação de diferenças em termos de $x(0)$ e $x(1)$:

$$x(k+2) + ax(k+1) + bx(k) = 0$$

onde a e b são constantes e $k \geq 0$.

Solução. As transformadas z de $x(k+2)$, $x(k+1)$, e $x(k)$ são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[x(k+2)] &= z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1) \\
\mathcal{Z}[x(k+1)] &= zX(z) - zx(0) \\
\mathcal{Z}[x(k)] &= X(z)
\end{aligned}$$

Portanto, a transformada z da equação de diferenças dada se torna

$$[z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1)] + a[zX(z) - zx(0)] + bX(z) = 0$$

ou

$$(z^2 + az + b)X(z) = (z^2 + az)x(0) + zx(1)$$

Resolvendo para $X(z)$, temos

$$X(z) = \frac{(z^2 + az)x(0) + zx(1)}{z^2 + az + b}$$

Chamando as raízes do polinômio do denominador de m_1 e m_2 , ou

$$z^2 + az + b = (z - m_1)(z - m_2)$$

e expandindo $X(z)/z$ em frações parciais, obtemos

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{(m_1 - a)x(0) + x(1)}{m_1 - m_2} \frac{1}{z - m_1} + \frac{(m_2 + a)x(0) + x(1)}{m_2 - m_1} \frac{1}{z - m_2}$$

Notando que $a = -m_1 - m_2$, obtemos

$$X(z) = \frac{m_2 x(0) - x(1)}{m_2 - m_1} \frac{z}{z - m_1} + \frac{m_1 x(0) - x(1)}{m_1 - m_2} \frac{z}{z - m_2}$$

A transformada z inversa de $X(z)$ dá a solução da equação de diferenças fornecida. Ou seja,

$$x(k) = \frac{m_2 x(0) - x(1)}{m_2 - m_1} m_1^k + \frac{m_1 x(0) - x(1)}{m_1 - m_2} m_2^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Problema A.13.12 Obtenha a função de transferência pulsada do sistema a malha-fechada visto na Fig. 13.22.

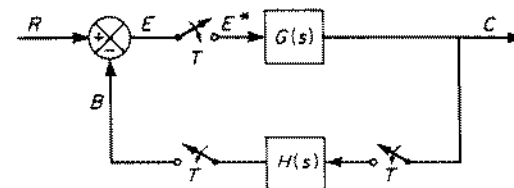


Fig. 13.22 Sistema de tempo discreto a malha-fechada.

Solução. Do diagrama de blocos da Fig. 13.22, obtemos

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

ou

$$E(z) = R(z) - B(z)$$

Também

$$C(z) = G(z)E(z)$$

$$B(z) = H(z)C(z)$$

Portanto

$$C(z) = [R(z) - H(z)C(z)]G(z)$$

ou

$$C(z)[1 + H(z)G(z)] = R(z)G(z)$$

A função de transferência pulsada se torna

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + H(z)G(z)}$$

Problema A.13.13 Obtenha a função de transferência pulsada do sistema a malha-fechada visto na Fig. 13.23.

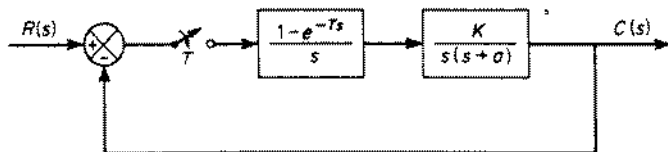


Fig. 13.23 Sistema de tempo discreto a malha-fechada.

Solução. A transformada z da função de transferência de malha-aberta é

$$\mathcal{Z}\left[\frac{K(1 - e^{-Ts})}{s^2(s+a)}\right] = K(1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+a)}\right]$$

Note que

$$\frac{1}{s^2(s+a)} = \frac{1}{as^2} - \frac{1}{a^2s} + \frac{1}{a^2(s+a)}$$

Da Tabela 13.1, obtemos a transformada z desta última equação como segue:

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+a)}\right] = \frac{Tz}{a(z-1)^2} - \frac{z}{a^2(z-1)} + \frac{z}{a^2(z - e^{-aT})}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[\frac{K(1 - e^{-Ts})}{s^2(s+a)}\right] &= \frac{KT}{a(z-1)} - \frac{K}{a^2} + \frac{K(z-1)}{a^2(z - e^{-aT})} \\ &= \frac{K[(aT-1 + e^{-aT})z + (1 - e^{-aT} - aTe^{-aT})]}{a^2(z-1)(z - e^{-aT})} \end{aligned}$$

A função de transferência de malha-fechada é então

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{K[(aT-1 + e^{-aT})z + (1 - e^{-aT} - aTe^{-aT})]}{a^2z^2 + [K(aT-1 + e^{-aT}) - a^2(1 + e^{-aT})]z + (1 - e^{-aT} - aTe^{-aT} + a^2e^{-aT})}$$

Problema A.13.14 Considere o sistema visto na Fig. 13.24. Mostre que o sistema de tempo discreto é estável se e apenas se

$$0 < K < 2 \coth\left(\frac{T}{2T_1}\right)$$

Solução. Como

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)}$$

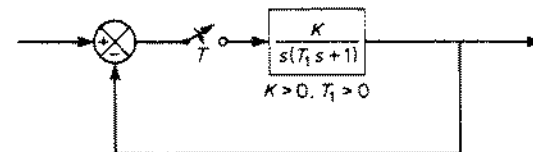


Fig. 13.24 Sistema de tempo discreto a malha-fechada.

obtemos

$$G(z) = \frac{K(1 - e^{-T/T_1})z}{(z-1)(z - e^{-T/T_1})}$$

A equação característica é

$$z^2 + [K(1 - e^{-T/T_1}) - (1 + e^{-T/T_1})]z + e^{-T/T_1} = 0 \quad (13.24)$$

Usando a seguinte transformação:

$$z = \frac{r+1}{r-1}$$

a Eq. (13.24) se torna

$$[K(1 - e^{-T/T_1})]r^2 + 2(1 - e^{-T/T_1})r + 2(1 + e^{-T/T_1}) - K(1 - e^{-T/T_1}) = 0$$

A tabela de Routh é

r^2	$K(1 - e^{-T/T_1})$	$2(1 + e^{-T/T_1}) - K(1 - e^{-T/T_1})$
r^1	$2(1 - e^{-T/T_1})$	0
r^0	$2(1 + e^{-T/T_1}) - K(1 - e^{-T/T_1})$	

Como $1 - e^{-T/T_1} > 0$, o sistema é estável se e apenas se

$$\begin{aligned} K &> 0 \\ \frac{2(1 + e^{-T/T_1})}{1 - e^{-T/T_1}} &> K \end{aligned}$$

Portanto o sistema é estável se e apenas se

$$0 < K < \frac{2(1 + e^{-T/T_1})}{1 - e^{-T/T_1}} = 2 \coth\left(\frac{T}{2T_1}\right)$$

problema B.13.1 Obtenha a transformada z de $g(t - kT)$, onde $g(t)$ é a função de resposta ao impulso de um sistema linear.

problema B.13.2 Se $X(z) = X_1(z)X_2(z)$, mostre que

$$x(kT) = \sum_{h=0}^k x_1(kT - hT)x_2(hT)$$

problema B.13.3 Dado

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-2)}$$

determine $x(kT)$.

problema B.13.4 Dado

$$X(z) = \frac{z^2}{(ze-1)^3}$$

determine $x(kT)$ computando o resíduo de $X(z)z^{k-1}$ no pólo $z = 1/e$.

Problema B.13.5 Dado

$$X(z) = \frac{z(1 - e^{-T})}{(z-1)(z - e^{-T})}$$

determine $x(kT)$ expandindo $X(z)$ em uma série convergente de potências em z^{-1} .

Problema B.13.6 Dado

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$

determine a função de transferência pulsada $G(z)$.

Problema B.13.7 Dado

$$G(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

determine a função de transferência pulsada $G(z)$.

Problema B.13.8 Considere o circuito RC visto na Fig. 13.25. Determine $y(kT)$ quando a tensão de entrada é dada por $x(t) = 100e^{-t}$ volts.

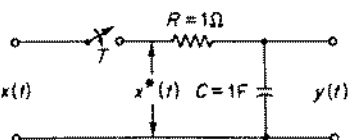


Fig. 13.25 Circuito RC com amostrador.

Problema B.13.9 Determine a solução da seguinte equação de diferenças:

$$x(k+2) + 2x(k+1) + x(k) = u(k), \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

onde

$$u(k) = k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

14

Análise de Sistemas de Controle por Espaço de Estados

14.1 INTRODUÇÃO

Limitações da teoria convencional de controle. Nos Caps. 8 a 10, mostramos que o método do lugar das raízes e os métodos de resposta em frequência são bastante úteis para tratar de sistemas de uma entrada e uma saída. Por exemplo, usando testes de resposta em frequência de malha-aberta, podemos prever o comportamento dinâmico do sistema a malha-fechada. Se necessário, o comportamento dinâmico de um sistema complexo pode ser melhorado inserindo-se um simples compensador avançador ou atrasador de fase. As técnicas da teoria convencional de controle são conceitualmente simples e requerem apenas uma pequena quantidade de computações.

Na teoria convencional de controle, apenas os sinais de entrada, saída e de erro são considerados importantes; a análise e projeto de sistemas de controle são feitos usando-se funções de transferência, juntamente com uma variedade de técnicas gráficas tais como o método do lugar das raízes e gráficos de Nyquist. A característica essencial da teoria de controle convencional é que ela é baseada na relação de entrada-saída do sistema, ou a função de transferência.

A principal desvantagem da teoria de controle convencional é que, de modo geral, ela é aplicável apenas para sistemas lineares invariantes no tempo tendo uma única entrada e uma única saída. Ela é impotente para sistemas variantes no tempo, sistemas não lineares (exceto os mais simples), e sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas. Portanto as técnicas convencionais (os métodos do lugar das raízes e de resposta em frequência) não se aplicam para o projeto de

sistemas ótimos ou de sistemas adaptativos, que são em geral variantes no tempo e/ou não lineares.

Uma nova abordagem para a análise e projeto de sistemas de controle — a teoria de controle moderno. A tendência atual em sistemas de engenharia é para maior complexidade, devido principalmente às necessidades de tarefas complexas e boa precisão. Sistemas complexos podem ter múltiplas entradas e múltiplas saídas e podem ser variantes no tempo. Em virtude da necessidade de satisfazer especificações cada vez mais rigorosas no desempenho de sistemas de controle, o aumento na complexidade do sistema e o fácil acesso a computadores, a teoria de controle moderno, que é uma nova abordagem na análise e projeto de sistemas de controle complexos, foi desenvolvida em torno de 1960. Esta nova abordagem é baseada no conceito de estado. O conceito de estado por si só não é novo, pois já existia faz tempo no campo da dinâmica clássica e outras áreas. (De fato, o método do plano de fase, discutido no Cap. 13, é um método de espaço de estados bidimensional.)

Teoria de controle moderno versus teoria de controle convencional. A teoria de controle moderno contrasta com a teoria de controle convencional, em que a primeira é aplicável para sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas, que podem ser lineares ou não lineares, invariantes ou variantes no tempo, enquanto que a segunda só é aplicável para sistemas lineares invariantes no tempo de uma entrada e uma saída. Também, a teoria de controle moderno é essencialmente uma abordagem de domínio de tempo, enquanto que a teoria de controle convencional é uma abordagem de domínio da frequência complexa.

O projeto de sistemas na teoria clássica de controle é baseado em procedimentos de tentativa e erro, que, em geral, não fornecem sistemas de controle ótimos. O projeto de sistemas na teoria moderna de controle, por outro lado, permite ao engenheiro projetar sistemas de controle ótimos com respeito a dados critérios de desempenho. Adicionalmente, o projeto na teoria de controle moderno pode ser feito para uma classe de entradas, ao invés de uma função de entrada específica, tal como a função impulsiva, função degrau, ou função senoidal. Também, a teoria de controle moderno permite ao engenheiro incluir condições iniciais no projeto.

Antes de prosseguir, devemos definir estado, variáveis de estado, vetor de estados, e espaço de estados.

Estado. O estado de um sistema dinâmico é o menor conjunto de variáveis (chamadas variáveis de estado) tal que o conhecimento destas variáveis em $t = t_0$, juntamente com a entrada para $t \geq t_0$, determina completamente o comportamento do sistema para qualquer instante $t \geq t_0$.

Portanto, o estado de um sistema dinâmico no instante t é univocamente determinado pelo estado no instante t_0 e a entrada para $t \geq t_0$, e é independente do estado e a entrada antes de t_0 . Note que, ao lidar com sistemas lineares invariantes no tempo, usualmente escolhemos a referência de tempo t_0 como zero.

Variáveis de estado. As variáveis de estado de um sistema dinâmico são o menor conjunto de variáveis que determina o estado do sistema dinâmico. Se pelo menos n variáveis $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ são necessárias para descrever completamente o comportamento de um sistema dinâmico (tal que uma vez dada a entrada para $t \geq t_0$ e o estado inicial em $t = t_0$ é especificado, o estado futuro do sistema está completamente determinado), então as tais n variáveis $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ são um conjunto de variáveis de estado. Note que as variáveis de estado não precisam ser grandezas fisicamente mensuráveis ou observáveis. Em termos práticos, entretanto, é conveniente escolher grandezas facilmente mensuráveis para as variáveis

de estado porque leis de controle ótimo irão requerer a realimentação de todas as variáveis de estado com ganhos adequados.

Vetor de estado. Se n variáveis de estado são necessárias para descrever completamente o comportamento de um dado sistema, então estas n variáveis de estado podem ser consideradas como as n componentes de um vetor $\mathbf{x}(t)$. Tal vetor é chamado de um vetor de estados. Um vetor de estado é portanto um vetor que determina unicamente o estado do sistema $\mathbf{x}(t)$ para qualquer $t \geq t_0$, uma vez que a entrada $\mathbf{u}(t)$ para $t \geq t_0$ é especificada.

Espaço de estados. O espaço n -dimensional cujos eixos de coordenadas são os eixos x_1, x_2, \dots, x_n é chamado de um espaço de estados. Qualquer estado pode ser representado por um ponto no espaço de estados.

Exemplo 14.1 Considere o circuito RLC visto na Fig. 14.1. O comportamento dinâmico do sistema é completamente definido para $t \geq t_0$ se os valores iniciais da corrente $i(t_0)$, a tensão do capacitor $v_c(t_0)$, e a tensão de entrada $v(t)$ para $t \geq t_0$ são conhecidos. Portanto, o estado do circuito para $t \geq t_0$ é completamente determinado por $i(t)$, $v_c(t)$, e a tensão de entrada $v(t)$ para $t \geq t_0$. Portanto $i(t)$ e $v_c(t)$ são um conjunto de variáveis de estado para este sistema.

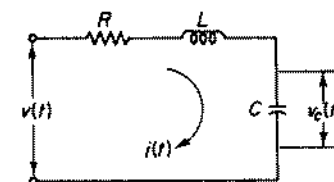


Fig. 14.1 Circuito RLC.

(Note, entretanto, que a escolha de variáveis de estado para um dado sistema não é única. Por exemplo, neste sistema $x_1(t) = v_c(t) + Ri(t)$ e $x_2(t) = v_c(t)$ podem ser escolhidos como um conjunto de variáveis de estado.)

Suponha que escolhemos $i(t)$ e $v_c(t)$ como as variáveis de estado. Então as equações que descrevem a dinâmica do sistema são

$$L \frac{di}{dt} + Ri + v_c = v$$

$$C \frac{dv_c}{dt} = i$$

Em notação vetorial-matricial, temos

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{v}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} [v]$$

Esta é uma representação de espaço de estados para o dado sistema ou circuito.

Análise de sistemas complexos. Um sistema moderno complexo pode ter muitas entradas e muitas saídas, e estas podem estar inter-relacionadas de uma maneira

complicada. Para analisar tal sistema, é essencial reduzir a complexidade nas expressões matemáticas, bem como utilizar computadores para a maioria dos cálculos maçantes necessários para a análise. A abordagem de espaço de estados para a análise de sistemas é mais adequada sob este ponto de vista.

Enquanto a teoria de controle convencional é baseada na relação entre entrada e saída ou função de transferência, a teoria de controle moderno se baseia na descrição das equações do sistema em termos de n equações diferenciais de primeira-ordem, que podem ser combinadas em uma equação diferencial vetorial-matricial de primeira-ordem. O uso da notação vetor-matriz simplifica muito a representação matemática de sistemas de equações. O aumento no número de variáveis de estado, de entradas, ou de saídas não aumenta a complexidade das equações. De fato, a análise de sistemas complicados de múltiplas entradas e saídas pode ser feita por procedimentos que são apenas um pouco mais complicados do que aqueles requeridos para a análise de sistemas de equações diferenciais escalares de primeira-ordem.

Do ponto de vista computacional, os métodos de espaço de estados são particularmente adequados para computações em computadores digitais por causa da abordagem no domínio do tempo. Isto libera o engenheiro de computações maçantes que seriam de outra forma necessárias e permite que ele dedique seus esforços apenas para os aspectos analíticos do problema. Esta é uma das vantagens dos métodos de espaço de estados.

Finalmente, é importante notar que não é necessário que as variáveis de estado representem grandezas físicas do sistema. Podem-se escolher como variáveis de estado grandezas que não representam grandezas físicas bem como aquelas que não são nem mensuráveis nem observáveis. Tal liberdade de escolha de variáveis de estado é outra vantagem de métodos de espaço de estados.

14.2 REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS POR ESPAÇO DE ESTADOS

Um sistema dinâmico que consiste em um número finito de elementos concentrados pode ser descrito por equações diferenciais ordinárias em que o tempo é a variável independente. Usando-se notação matricial, uma equação diferencial de ordem n pode ser representada por uma equação matricial diferencial de primeira-ordem. Se n elementos do vetor são um conjunto de variáveis de estado, então a equação matricial diferencial é chamada uma equação de estado. Nesta seção apresentaremos métodos para obtenção de representações de espaço de estados de sistemas contínuos.

Representação de espaço de estados de sistemas de equações diferenciais lineares de ordem n em que a função excitação não envolve termos em derivadas. Considere o seguinte sistema de ordem n :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = u \tag{14.1}$$

Observando que o conhecimento de $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$, junto com a entrada $u(t)$ para $t \geq 0$, determina completamente o futuro comportamento do sistema, podemos considerar $y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$ como um conjunto de n variáveis de estado. (Matematicamente, tal escolha é bastante conveniente. Na prática, entretanto, em virtude da imprecisão de termos em derivada de ordem superior devido a efeitos de ruídos inerentes em quaisquer situações práticas, tal escolha de variáveis de estado pode não ser desejável.)

Vamos definir

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= y^{(n-2)} \\ x_n &= \dot{y}^{(n-1)} \end{aligned}$$

Então a Eq. (14.1) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - \dots - a_1 x_n - u \end{aligned}$$

ou

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} - \mathbf{Bu} \tag{14.2}$$

onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A equação de saída se torna

$$y = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ou

$$y = \mathbf{Cx} \tag{14.3}$$

onde

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

A equação diferencial de primeira-ordem, a Eq. (14.2), é a equação de estado, e a equação algébrica, a Eq. (14.3), é a equação de saída.

Exemplo 14.2 Considere o sistema definido por

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y = 6u \quad (14.4)$$

onde y é a saída e u é a entrada do sistema. Obtenha uma representação em espaço de estados do sistema.

Vamos escolher as variáveis de estado como

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$x_3 = \ddot{y}$$

Então obtemos

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 6u$$

A última destas três equações foi obtida resolvendo-se a equação diferencial original para o termo em derivada de ordem mais alta \ddot{y} e então substituindo $y = x_1$, $\dot{y} = x_2$, $\ddot{y} = x_3$ na equação resultante. Usando-se a notação matricial, estas três equações diferenciais de primeira-ordem podem ser combinadas em uma só como segue:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} [u] \quad (14.5)$$

A equação de saída é dada por

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (14.6)$$

As Eqs. (14.5) e (14.6) podem ser postas em uma forma padrão como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (14.7)$$

$$y = \mathbf{Cx} \quad (14.8)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0]$$

A Fig. 14.2 mostra a representação em diagrama de blocos da equação de estados e da

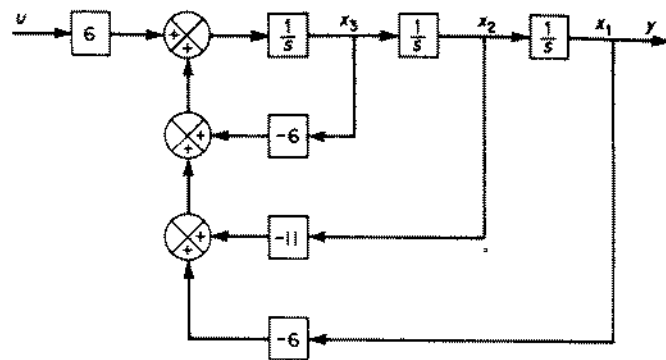


Fig. 14.2 Representação em diagrama em blocos do sistema descrito pelas Eqs. (14.7) e (14.8).

equação de saída. Observe que as funções de transferência dos blocos de realimentação são idênticas aos valores negativos dos coeficientes da equação diferencial original, a Eq. (14.4).

A não-unicidade do conjunto de variáveis de estado. Dissemos que um conjunto de variáveis de estado não é único para um dado sistema. Suponha que x_1, x_2, \dots, x_n são um conjunto de variáveis de estado. Então podemos considerar como outro conjunto de variáveis de estado qualquer conjunto de funções.

$$\hat{x}_1 = X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\hat{x}_2 = X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\hat{x}_n = X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

contanto que, para cada conjunto de valores $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$, corresponda um único conjunto de valores x_1, x_2, \dots, x_n e vice-versa. Portanto, se \mathbf{x} é um vetor de estado, então $\hat{\mathbf{x}}$, onde

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Px}$$

também é um vetor de estados, contanto que \mathbf{P} seja não-singular. Diferentes vetores de estado fornecem a mesma informação sobre o comportamento do sistema.

Autovalores de uma matriz \mathbf{A} $n \times n$. Os autovalores de uma matriz \mathbf{A} $n \times n$ são as raízes da equação característica

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

Os autovalores são às vezes chamados de raízes características.

Considere, por exemplo, a seguinte matriz \mathbf{A} :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

A equação característica é

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0 \end{aligned}$$

Os autovalores de A são as raízes da equação característica, ou -1, -2, e -3.

Exemplo 14.3 Considere o mesmo sistema discutido no Exemplo 14.2. Mostraremos que a Eq. (14.5) não é a única equação de estado possível para este sistema. Suponha que definamos um novo conjunto de variáveis de estado z_1, z_2, z_3 pela transformação

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z} \quad (14.9)$$

onde

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad (14.10)$$

Então, substituindo a Eq. (14.9) na Eq. (14.7), obtemos

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{B}u$$

Multiplicando ambos os lados desta última equação à esquerda por \mathbf{P}^{-1} , obtemos

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}u \quad (14.11)$$

ou

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 2,5 & 0,5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 3 & 2,5 & 0,5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

Simplificando, temos

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} u \quad (14.12)$$

A Eq. (14.12) também é uma equação de estados que descreve o mesmo sistema definido pela Eq. (14.5).

A equação de saída, a Eq. (14.8), é modificada para

$$y = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{z}$$

ou

$$\begin{aligned} y &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \\ &= [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14.13)$$

Observe que a matriz de transformação \mathbf{P} , definida pela Eq. (14.10), transforma a matriz de coeficientes de \mathbf{z} na matriz diagonal. Como claramente visto na Eq. (14.12), as três equações de estado separadas são desacopladas. Observe também que os elementos diagonais da matriz $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ na Eq. (14.11) são idênticos aos três autovalores de \mathbf{A} . É muito importante notar que os autovalores de \mathbf{A} e aqueles de $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ são idênticos. A seguir provaremos isto para um caso geral.

Invariância dos autovalores. Para provar a invariância dos autovalores sob uma transformação linear, devemos mostrar que os polinômios característicos $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ e $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}|$ são idênticos.

Como o determinante de um produto é o produto dos determinantes, obtemos

$$\begin{aligned} |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}| &= |\lambda\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}| \\ &= |\mathbf{P}^{-1}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}| \\ &= |\mathbf{P}^{-1}| |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| |\mathbf{P}| \\ &= |\mathbf{P}^{-1}| |\mathbf{P}| |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| \end{aligned}$$

Observando que o produto dos determinantes $|\mathbf{P}^{-1}|$ e $|\mathbf{P}|$ é o determinante do produto $|\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}|$, obtemos

$$\begin{aligned} |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}| &= |\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}| |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| \\ &= |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| \end{aligned}$$

Portanto provamos que os autovalores de \mathbf{A} são invariantes sob uma transformação linear.

Diagonalização de matrizes $n \times n$. Note que se uma matriz \mathbf{A} $n \times n$ com autovalores distintos é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \quad (14.14)$$

a transformação $x = Pz$ onde

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n = n$ autovalores distintos de A

transformará $P^{-1}AP$ em uma matriz diagonal, ou

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Se a matriz A definida pela Eq. (14.14) envolve autovalores múltiplos, então a diagonalização é impossível. Por exemplo, se a matriz A 3×3 , onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

tem os autovalores $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_3$, então a transformação $x = Sz$, onde

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$

fornecerá

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Esta é a chamada forma de Jordan canônica.

Exemplo 14.4 Considere o mesmo sistema discutido nos Exemplos 14.2 e 14.3, reescrito abaixo:

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y = 6u \quad (14.15)$$

Demonstraremos que a representação de espaço de estado dada pelas Eqs. (14.12) e (14.13) pode também ser obtida usando-se a técnica da expansão em frações parciais.

Vamos reescrever a Eq. (14.15) na forma de uma função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Expandindo esta função de transferência em frações parciais, obtemos

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3}{s+1} + \frac{-6}{s+2} + \frac{3}{s+3}$$

Portanto

$$Y(s) = \frac{3}{s+1}U(s) + \frac{-6}{s+2}U(s) + \frac{3}{s+3}U(s) \quad (14.16)$$

Vamos definir

$$X_1(s) = \frac{3}{s+1}U(s) \quad (14.17)$$

$$X_2(s) = \frac{-6}{s+2}U(s) \quad (14.18)$$

$$X_3(s) = \frac{3}{s+3}U(s) \quad (14.19)$$

As transformadas inversas de Laplace das Eqs. (14.17), (14.18) e (14.19) fornecem

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 3u$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 - 6u$$

$$\dot{x}_3 = -3x_3 + 3u$$

Como a Eq. (14.16) pode ser escrita como

$$Y(s) = X_1(s) + X_2(s) + X_3(s)$$

obtemos

$$y = x_1 + x_2 + x_3$$

Em termos da notação matricial, obtemos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} [u] \quad (14.20)$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (14.21)$$

* As Eqs. (14.20) e (14.21) são claramente idênticas às Eqs. (14.12) e (14.13), respectivamente.

A Fig. 14.3 mostra uma representação em diagramas de blocos das Eqs. (14.20) e (14.21). Note que as funções de transferência nos blocos de realimentação são idênticas aos autovalores do sistema. Note também que os resíduos dos pólos da função de transferência, ou os coeficientes da expansão em frações parciais de $Y(s)/U(s)$, aparecem nos blocos de elo direto.

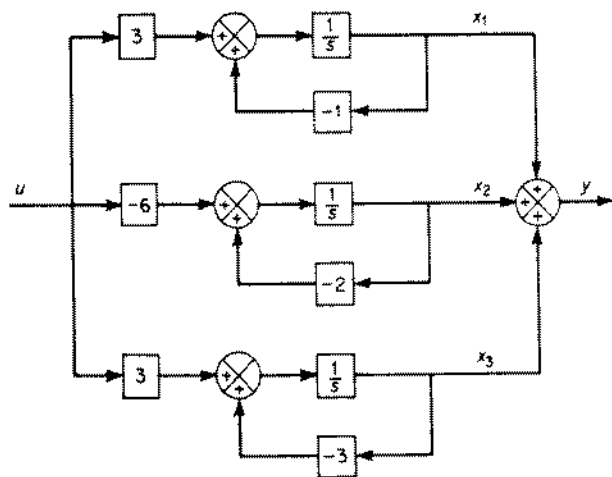


Fig. 14.3 Representação em diagrama em blocos do sistema descrito pelas Eqs. (14.20) e (14.21).

Representação de espaço de estados de sistemas de equações diferenciais de ordem n com r funções de excitação. Considere o sistema de múltiplas entradas e saídas visto na Fig. 14.4. Neste sistema, x_1, x_2, \dots, x_n representam as variáveis de estado; u_1, u_2, \dots, u_r representam as variáveis de entrada; e y_1, y_2, \dots, y_m são as variáveis de saída. Da Fig. 14.4, obtemos o sistema de equações como segue:

$$\dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_{11}(t)u_1 + b_{12}(t)u_2 + \dots + b_{1r}(t)u_r$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_{21}(t)u_1 + b_{22}(t)u_2 + \dots + b_{2r}(t)u_r$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_{n1}(t)u_1 + b_{n2}(t)u_2 + \dots + b_{nr}(t)u_r$$

onde os $a(t)$ e $b(t)$ são constantes ou funções de t . Em termos da notação matricial, estas n equações podem ser escritas compactamente como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad (14.22)$$

onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \text{vetor de estado}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} = \text{vetor de entrada (ou controle)}$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \dots & b_{1r}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \dots & b_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \dots & b_{nr}(t) \end{bmatrix}$$

A Eq. (14.22) é a equação de estado para o sistema. [Note que uma equação diferencial matricial, como a da Eq. (14.22) (ou as n equações diferenciais de

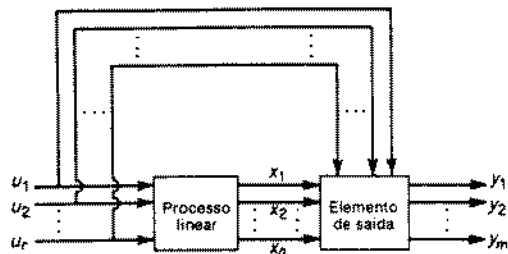


Fig. 14.4 Sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas.

primeira-ordem equivalentes), descrevendo a dinâmica de um sistema, é uma equação de estado se e apenas se o conjunto de variáveis dependentes na equação diferencial matricial satisfaz a definição de variáveis de estado.]

Para os sinais de saída, obtemos

$$y_1 = c_{11}(t)x_1 + c_{12}(t)x_2 + \dots + c_{1n}(t)x_n + d_{11}(t)u_1 + d_{12}(t)u_2 + \dots + d_{1r}(t)u_r$$

$$y_2 = c_{21}(t)x_1 + c_{22}(t)x_2 + \dots + c_{2n}(t)x_n + d_{21}(t)u_1 + d_{22}(t)u_2 + \dots + d_{2r}(t)u_r$$

$$y_m = c_{m1}(t)x_1 + c_{m2}(t)x_2 + \dots + c_{mn}(t)x_n + d_{m1}(t)u_1 + d_{m2}(t)u_2 + \dots + d_{mr}(t)u_r$$

Em termos de notação matricial, estas m equações podem ser escritas compactamente como

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \quad (14.23)$$

onde

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \text{vetor de saída}$$

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & \dots & c_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}(t) & c_{m2}(t) & \dots & c_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) & \dots & d_{1r}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) & \dots & d_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1}(t) & d_{m2}(t) & \dots & d_{mr}(t) \end{bmatrix}$$

a Eq. (14.23) é a equação de saída do sistema. As matrizes $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ e $\mathbf{D}(t)$ caracterizam completamente a dinâmica do sistema.

Uma representação em diagrama de blocos e uma representação em gráfico de fluxo de sinais do sistema definido pelas Eqs. (14.22) e (14.23) são vistas nas Figs. 14.5(a) e (b), respectivamente. Para indicar grandezas vetoriais, usamos duplas flechas nos diagramas.

Representação de espaço de estados de sistemas de equações diferenciais de ordem n em que a função excitação envolve termos em derivada. Se a equação diferencial do sistema envolve derivadas da função de excitação, como por exemplo,

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_0\dot{u} + b_1u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}\dot{u} + b_nu \quad (14.24)$$

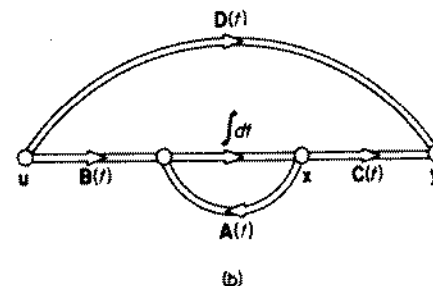
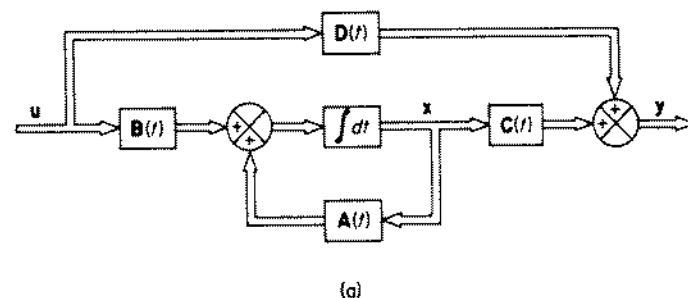


Fig. 14.5 (a) Representação em diagrama em blocos do sistema descrito pelas Eqs. (14.22) e (14.23); (b) representação por diagrama de fluxo de sinal do sistema de (a).

então o conjunto de n variáveis $y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)}$ não é um conjunto de variáveis de estado, e o método simples que empregamos anteriormente não pode ser empregado. Isto porque n equações diferenciais de primeira-ordem

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + b_0 u + b_1 \dot{u} + \dots + b_n u^{(n-1)}$$

onde $x_1 = y$ podem não fornecer uma solução única.

O problema principal em se definir as variáveis de estado para este caso está na existência de termos em derivada no lado direito da última equação do sistema de n equações acima. As variáveis de estado devem ser tais que eliminem as derivadas de u na equação de estado.

Um fato bem conhecido na teoria de controle moderno é que se definirmos as seguintes n variáveis como um conjunto de n variáveis de estado.

$$\begin{aligned} x_1 &= y - \beta_0 u \\ x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\ x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} - \beta_0 y^{(n-1)} - \beta_1 y^{(n-2)} - \dots - \beta_{n-2} \dot{u} - \beta_{n-1} u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u \end{aligned} \quad (14.25)$$

onde $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ são determinadas de

$$\begin{aligned} \beta_0 &= b_0 \\ \beta_1 &= b_1 - a_1 \beta_0 \\ \beta_2 &= b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 \\ \beta_3 &= b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0 \\ &\vdots \\ \beta_n &= b_n - a_1 \beta_{n-1} - \dots - a_{n-1} \beta_1 - a_n \beta_0 \end{aligned} \quad (14.26)$$

então a existência e unicidade da solução da equação de estado estão asseguradas. (Note que esta não é a única escolha de um conjunto de variáveis de estado.) Com a presente escolha de variáveis de estado, obtemos a seguinte equação de estado e equação de saída para o sistema da Eq. (14.24):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} [u]$$

$$y = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

ou

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (14.27)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du \quad (14.28)$$

onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0], \quad D = \beta_0 = b_0$$

A condição inicial $\mathbf{x}(0)$ pode ser determinada usando-se a Eq. (14.25).

Nesta representação de espaço de estados, a matriz \mathbf{A} é essencialmente a mesma que no sistema da Eq. (14.1). As derivadas no lado direito da Eq. (14.24) afetam apenas os elementos da matriz \mathbf{B} .

Note que a representação de espaço de estados para a seguinte função de transferência

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

é dada também pelas Eqs. (14.27) e (14.28).

Exemplo 14.5 Considere o sistema de controle visto na Fig. 14.6. A função de transferência de malha-fechada é

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{160(s+4)}{s^3 + 18s^2 + 192s + 640}$$

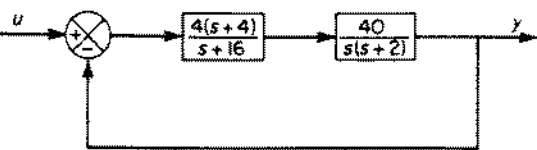


Fig. 14.6 Sistema de controle.

A correspondente equação diferencial é

$$\ddot{y} + 18\dot{y} + 192y = 160\ddot{u} + 640\dot{u}$$

Obtenha uma representação de espaço de estado do sistema.

Referindo-se à Eq. (14.25), vamos definir

$$\begin{aligned} x_1 &= y - \beta_0 u \\ x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\ x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \end{aligned}$$

onde β_0 , β_1 e β_2 são determinados da Eq. (14.26) como segue:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= b_0 = 0 \\ \beta_1 &= b_1 - a_1 \beta_0 = 0 \\ \beta_2 &= b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 = 160 \\ \beta_3 &= b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0 = -2240 \end{aligned}$$

Então a equação de estado para o sistema se torna

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -192 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 160 \\ -2240 \end{bmatrix} [u]$$

A equação de saída se torna

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

14.3 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADO INVARIANTE NO TEMPO

Nesta seção, obteremos a solução geral da equação de estado linear invariante no tempo. Consideraremos inicialmente o caso homogêneo, e então o caso não homogêneo.

Solução de equações de estado homogêneas. Antes de resolver equações diferenciais matriciais, vamos rever a solução da equação diferencial escalar

$$\dot{x} = ax \quad (14.29)$$

Ao resolver esta equação, podemos supor uma solução $x(t)$ da forma

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots \quad (14.30)$$

Substituindo esta solução suposta na Eq. (14.29), obtemos

$$\begin{aligned} b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \dots + kb_k t^{k-1} + \dots \\ = a(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots) \end{aligned} \quad (14.31)$$

Se a solução suposta deve ser a solução verdadeira, a Eq. (14.31) deve valer para qualquer t . Portanto, equacionando os coeficientes de iguais potências de t , obtemos

$$\begin{aligned} b_1 &= ab_0 \\ b_2 &= \frac{1}{2} ab_1 = \frac{1}{2} a^2 b_0 \\ b_3 &= \frac{1}{3} ab_2 = \frac{1}{3 \times 2} a^3 b_0 \\ &\vdots \\ b_k &= \frac{1}{k!} a^k b_0 \end{aligned}$$

O valor de b_0 é determinado substituindo-se $t = 0$ na Eq. (14.30), ou

$$x(0) = b_0$$

Portanto a solução $x(t)$ pode ser escrita como

$$x(t) = \left(1 + at + \frac{1}{2!} a^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} a^k t^k + \dots \right) x(0) = e^{at} x(0)$$

Resolveremos agora a equação diferencial matricial

$$\dot{x} = Ax \quad (14.32)$$

onde

x = vetor n -dimensional

A = matriz constante $n \times n$

Por analogia com o caso escalar, suporemos que a solução é na forma de uma série de potências vetoriais em t , ou

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots \quad (14.33)$$

Substituindo esta suposta solução na Eq. (14.32), obtemos

$$\begin{aligned} b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \dots + kb_k t^{k-1} + \dots \\ = A(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + kb_k t^k + \dots) \end{aligned} \quad (14.34)$$

Se a solução suposta deve ser a solução verdadeira, a Eq. (14.34) valerá para todo t . Portanto impomos que os coeficientes de potências iguais de t sejam idênticos, ou

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}\mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{b}_3 = \frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{b}_2 = \frac{1}{3 \times 2}\mathbf{A}^3\mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{b}_k = \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{b}_0$$

Substituindo $t = 0$ na Eq. (14.33), obtemos

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}_0$$

Portanto a solução $\mathbf{x}(t)$ pode ser escrita como

$$\mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \dots \right) \mathbf{x}(0)$$

A expressão em parênteses no lado direito desta última equação é uma matriz $n \times n$. Em virtude da sua similitude com a série infinita de potências para uma exponencial escalar, chamamos esta de matriz exponencial e escrevemos

$$\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \dots = e^{\mathbf{A}t}$$

Em termos da matriz exponencial, a solução da Eq. (14.32) pode ser escrita como

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \quad (14.35)$$

Como a matriz exponencial é muito importante na análise de espaço de estados de sistemas lineares, examinaremos em seguida as propriedades da matriz exponencial.

Matriz exponencial. Pode-se provar que a matriz exponencial de uma matriz \mathbf{A} $n \times n$

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^kt^k}{k!}$$

converge absolutamente para todo t finito. (Portanto cálculos em computador para calcular os elementos de $e^{\mathbf{A}t}$, usando a expansão em série, podem ser facilmente feitos.)

Devido à convergência da série infinita $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^kt^k/k!$, a série pode ser diferenciada termo a termo, resultando

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{A} + \mathbf{A}^2t + \frac{\mathbf{A}^3t^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^kt^{k-1}}{(k-1)!} + \dots \\ &= \mathbf{A} \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots \right] = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} \\ &= \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots \right] \mathbf{A} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A} \end{aligned}$$

A matriz exponencial tem a seguinte propriedade:

$$e^{\mathbf{A}(t+s)} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s}$$

Isto pode ser provado como segue:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^kt^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^ls^l}{l!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^ks^{k-l}}{l!(k-l)!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{(t+s)^k}{k!} \\ &= e^{\mathbf{A}(t+s)} \end{aligned}$$

Em particular, se $s = -t$, então

$$e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t} = e^{-\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}(t-t)} = \mathbf{I}$$

Portanto a inversa de $e^{\mathbf{A}t}$ é $e^{-\mathbf{A}t}$. Como a inversa de $e^{\mathbf{A}t}$ sempre existe, $e^{\mathbf{A}t}$ é não singular.

É muito importante lembrar que

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} \quad \text{se } \mathbf{AB} = \mathbf{BA}$$

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} \neq e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} \quad \text{se } \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

Para provar isto, notamos que

$$\begin{aligned} e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} &= \mathbf{I} + (\mathbf{A} + \mathbf{B})t + \frac{(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2t^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A} + \mathbf{B})^3t^3}{3!} + \dots \\ e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} &= \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \dots \right) \left(\mathbf{I} + \mathbf{B}t + \frac{\mathbf{B}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{B}^3t^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \mathbf{I} + (\mathbf{A} + \mathbf{B})t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \mathbf{AB}t^2 + \frac{\mathbf{B}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} \\ &\quad + \frac{\mathbf{A}^2\mathbf{B}t^3}{2!} + \frac{\mathbf{AB}^2t^3}{2!} + \frac{\mathbf{B}^3t^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Portanto

$$e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} = \frac{BA - AB}{2!}t^2 + \frac{BA^2 + ABA - B^2A - BAB - 2A^2B - 2AB^2}{3!}t^3 + \dots$$

A diferença entre $e^{(A+B)t}$ e $e^{At}e^{Bt}$ é nula se A e B comutam.

Abordagem da transformada de Laplace para a solução de equações de estado homogêneas. Vamos inicialmente considerar o caso escalar:

$$\dot{x} = ax \quad (14.36)$$

Aplicando a transformada de Laplace para a Eq. (14.36), obtemos

$$sX(s) - x(0) = aX(s) \quad (14.37)$$

onde $X(s) = \mathcal{L}[x]$. Resolvendo a Eq. (14.37) para $X(s)$, resulta

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} = (s-a)^{-1}x(0)$$

A transformada inversa de Laplace desta última equação fornece a solução

$$x(t) = e^{at}x(0)$$

Esta abordagem para a solução da equação diferencial homogênea escalar pode ser estendida para a equação de estado homogênea:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (14.38)$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os lados da Eq. (14.38), resulta

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$$

onde $\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{x}]$. Portanto,

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0)$$

Pré-multiplicando ambos os lados desta última equação por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, resulta

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$$

A transformada inversa de Laplace de $\mathbf{X}(s)$ fornece a solução $\mathbf{x}(t)$. Portanto,

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}(0) \quad (14.39)$$

Note que

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \dots$$

Portanto, a transformada inversa de Laplace de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ fornece

$$\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \dots = e^{\mathbf{A}t} \quad (14.40)$$

(A transformada inversa de Laplace de uma matriz é a matriz que consiste nas transformadas inversas de Laplace de todos os elementos.) Das Eqs. (14.39) e (14.40), a solução da Eq. (14.38) é obtida como

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

A importância da Eq. (14.40) está no fato de que ela provê um meio conveniente de se achar a solução em forma fechada para a matriz exponencial.

Matriz de transição de estados. Podemos escrever a solução da equação de estado homogênea como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (14.41)$$

como

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) \quad (14.42)$$

onde $\Phi(t)$ é uma matriz $n \times n$ e a solução única de

$$\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A}\Phi(t), \quad \Phi(0) = \mathbf{I}$$

Para verificar isto, observe que

$$\mathbf{x}(0) = \Phi(0)\mathbf{x}(0) = \mathbf{I}\mathbf{x}(0)$$

e

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\Phi(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

Portanto confirmamos que a Eq. (14.42) é a solução da Eq. (14.41).

Das Eqs. (14.35), (14.39) e (14.42), obtemos

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

Note que

$$\Phi^{-1}(t) = e^{-\mathbf{A}t} = \Phi(-t)$$

Da Eq. (14.42), vemos que a solução da Eq. (14.41) é simplesmente uma transformação da condição inicial. Portanto a matriz única $\Phi(t)$ é chamada de matriz de transição de estados. A matriz de transição de estados contém toda a informação sobre movimentos livres do sistema definido pela Eq. (14.41).

Se os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ da matriz \mathbf{A} são distintos, então $\Phi(t)$ conterá as n exponenciais

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$$

Em particular, se a matriz A é diagonal, então

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (A: \text{diagonal})$$

Se houver multiplicidade nos autovalores, por exemplo, se os autovalores de A são

$$\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_4, \lambda_5, \dots, \lambda_n$$

então $\Phi(t)$ conterá, além das exponenciais $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$, termos como $te^{\lambda_1 t}$ e $t^2 e^{\lambda_1 t}$.

Propriedades de matrizes de transição de estado. Resumiremos agora as propriedades importantes da matriz de transição de estados $\Phi(t)$. Para o sistema invariante no tempo

$$\dot{x} = Ax$$

para o qual

$$\Phi(t) = e^{At}$$

temos

1. $\Phi(0) = e^{A0} = I$
2. $\Phi(t) = e^{At} = (e^{-At})^{-1} = [\Phi(-t)]^{-1}$

$$\text{ou } \Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$$

3. $\Phi(t_1 + t_2) = e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2} = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$
4. $[\Phi(t)]^n = \Phi(nt)$
5. $\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_1 - t_0)\Phi(t_2 - t_1)$

Exemplo 14.6 Obtenha a matriz de transição de estados $\Phi(t)$ do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Obtenha também a inversa da matriz de transição de estados, $\Phi^{-1}(t)$. Para este sistema,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

A matriz de transição de estado $\Phi(t)$ é dada por

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

como

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s-3 \end{bmatrix}$$

A inversa de $(sI - A)$ é dada por

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{bmatrix} s-3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s-1)(s+2)} & \frac{1}{(s-1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s-1)(s+2)} & \frac{s}{(s-1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \Phi(t) = e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Observando que $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$, obtemos a inversa da matriz de transição de estados como segue:

$$\Phi^{-1}(t) = e^{-At} = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

Solução das equações de estado não homogêneas. Iniciaremos considerando o caso escalar

$$\dot{x} = ax + bu \quad (14.43)$$

Vamos reescrever a Eq. (14.43) como

$$\dot{x} - ax = bu$$

Multiplicando ambos os lados desta equação por e^{-at} , obtemos

$$e^{-at}[\dot{x}(t) - ax(t)] = \frac{d}{dt} [e^{-at}x(t)] = e^{-at}bu(t)$$

Integrando esta equação entre 0 e t , resulta

$$e^{-at}x(t) = x(0) + \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau) d\tau$$

ou

$$x(t) = e^{at}x(0) + e^{at} \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau) d\tau$$

O primeiro termo do lado direito é a resposta a condições iniciais, e o segundo termo é a resposta à entrada $u(t)$.

Vamos agora considerar a equação de estados não homogênea descrita por

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{14.44}$$

- onde
- x = vetor n -dimensional
- u = vetor r -dimensional
- A = matriz constante $n \times n$
- B = matriz constante $n \times r$

Escrevendo a Eq. (14.44) como

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t)$$

e pré-multiplicando ambos os lados desta equação por e^{-At} , obtemos

$$e^{-At}[\dot{x}(t) - Ax(t)] = \frac{d}{dt} [e^{-At}x(t)] = e^{-At}Bu(t)$$

Integrando a equação anterior entre 0 e t , resulta

$$e^{-At}x(t) = x(0) + \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau) d\tau$$

ou

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau \tag{14.45}$$

A Eq. (14.45) pode também ser escrita como

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau) d\tau \tag{14.46}$$

onde

$$\Phi(t) = e^{At}$$

A Eq. (14.45) ou (14.46) é a solução da Eq. (14.44). A solução $x(t)$ é claramente a soma de um termo que consiste na transição do estado inicial e um termo proveniente do vetor de entrada.

Abordagem por transformada de Laplace para a solução de equações de estado não homogêneas. A solução da equação de estado não homogênea

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

pode também ser obtida pela abordagem por transformada de Laplace. A transformada de Laplace da Eq. (14.44) resulta

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

ou

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

Pré-multiplicando ambos os lados desta última equação por $(sI - A)^{-1}$, obtemos

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Usando esta relação dada pela Eq. (14.40), resulta

$$X(s) = \mathcal{L}[e^{At}]x(0) + \mathcal{L}[e^{At}]BU(s)$$

A transformada inversa de Laplace desta última equação pode ser obtida usando-se a integral de convolução como segue:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau$$

Solução em termos de $x(t_0)$. Até agora supusemos que o tempo inicial é zero. Entretanto, se o tempo inicial é dado por t_0 ao invés de 0, então a solução da Eq. (14.44) deve ser modificada para

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau \tag{14.47}$$

Exemplo 14.7 Obtenha a resposta temporal do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

onde $u(t)$ é a função degrau unitário ocorrendo em $t = 0$, ou

$$u(t) = 1(t)$$

Para este sistema,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de transição de estados $\Phi(t) = e^{At}$ foi obtida no Exemplo 14.6 como

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

A resposta à entrada degrau unitário é então obtida como

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau$$

ou

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Se o estado inicial é zero, ou $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, então $\mathbf{x}(t)$ pode ser simplificado para

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

14.4 MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA

Na Seção 4.6 definimos a matriz de transferência. Como o conceito da matriz de transferência é uma extensão da função de transferência, inicialmente obtemos funções de transferência de sistemas de uma entrada e uma saída e então matrizes de transferência de sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas a partir de equações de estado e de saída.

Funções de transferência. Derivaremos a função de transferência de um sistema de uma entrada e uma saída a partir da versão transformada segundo Laplace das equações de estado e de saída.

Vamos considerar o sistema cuja função de transferência é dada por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) \quad (14.48)$$

Na Seção 14.3, mostramos que a representação de espaço de estados deste sistema é dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (14.49)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du \quad (14.50)$$

onde \mathbf{x} é o vetor de estado, u é a entrada, e y é a saída. As transformadas de Laplace das Eqs. (14.49) e (14.50) são dadas por

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \quad (14.51)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + DU(s) \quad (14.52)$$

Como a função de transferência foi anteriormente definida como a razão da transformada de Laplace da saída para a transformada de Laplace da entrada quando as condições iniciais são zero, supomos que $\mathbf{x}(0)$ na Eq. (14.51) é zero.

Substituindo $\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)$ na Eq. (14.52), obtemos

$$Y(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D]U(s) \quad (14.53)$$

Comparando a Eq. (14.53) com a Eq. (14.48), vemos que

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D \quad (14.54)$$

Esta é a expressão da função de transferência em termos de \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e D .

Observe que o lado direito da Eq. (14.54) envolve $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. Portanto $G(s)$ pode ser escrito como

$$G(s) = \frac{Q(s)}{s\mathbf{I} - \mathbf{A}}$$

onde $Q(s)$ é um polinômio em s . Portanto, $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ é igual ao polinômio característico de $G(s)$. Em outras palavras, os autovalores de \mathbf{A} são idênticos aos pólos de $G(s)$.

Exemplo 14.8 Obtenha a função de transferência do sistema visto na Fig. 14.7. Do diagrama, obtemos as seguintes equações de estado e de saída:

$$\dot{x}_1 = -5x_1 - x_2 + 2u$$

$$\dot{x}_2 = 3x_1 - x_2 + 5u$$

$$y = x_1 + 2x_2$$

Na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} [u]$$

$$y = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

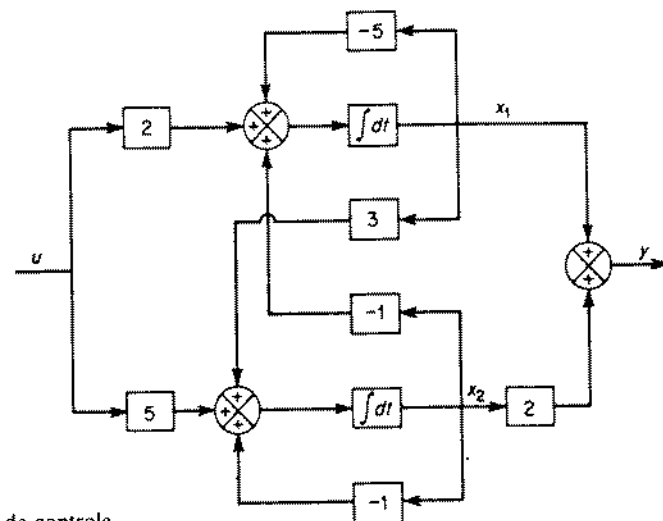


Fig. 14.7 Sistema de controle.

A função de transferência para o sistema é então

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= [1 \quad 2] \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -3 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= [1 \quad 2] \begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+2)(s-4)} & \frac{-1}{(s-2)(s-4)} \\ \frac{3}{(s+2)(s-4)} & \frac{s+5}{(s-2)(s-4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{12s+59}{(s+2)(s-4)} \end{aligned}$$

Matriz de transferência. A matriz de transferência $G(s)$ relaciona a saída $Y(s)$ com a entrada $U(s)$, ou

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (14.55)$$

Se o vetor de entrada u é r -dimensional e o vetor de saída y é m -dimensional, então a matriz de transferência é uma matriz $m \times r$. Em uma forma expandida, a Eq. (14.55) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1r}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \cdots & G_{mr}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

O elemento de ordem (i, j) $G_{ij}(s)$ de $G(s)$ é a função de transferência relacionando a i -ésima saída com a j -ésima entrada.

Seguindo os mesmos passos usados na derivação da Eq. (14.54), obtemos a matriz de transferência para sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas como segue:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Claramente, a expressão da função de transferência dada pela Eq. (14.54) é um caso especial desta expressão da matriz de transferência.

Matriz de transferência de sistemas a malha-fechada. Considere o sistema visto na Fig. 14.8. O sistema tem múltiplas entradas e múltiplas saídas. A matriz de transferência do elo direto é $G_0(s)$, e a do elo de realimentação é $H(s)$. A matriz de transferência entre o vetor de sinal de realimentação $B(s)$ e o vetor de erro $E(s)$ é obtida como segue: Como

$$\begin{aligned} B(s) &= H(s)Y(s) \\ &= H(s)G_0(s)E(s) \end{aligned}$$

obtemos a matriz de transferência entre $B(s)$ e $E(s)$ como $H(s)G_0(s)$. Portanto a

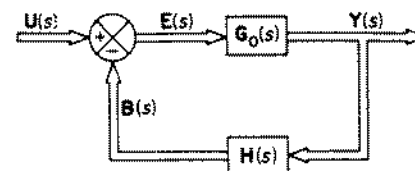


Fig. 14.8 Diagrama de blocos de um sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas.

matriz de transferência dos elementos em cascata é o produto das matrizes de transferência dos elementos individuais. (Note que a ordem da multiplicação matricial é muito importante, uma vez que em geral a multiplicação matricial não é comutativa.)

A matriz de transferência do sistema a malha-fechada é obtida como segue: Como

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_0(s)[U(s) - B(s)] \\ &= G_0(s)[U(s) - H(s)Y(s)] \end{aligned}$$

obtemos

$$[I - G_0(s)H(s)]Y(s) = G_0(s)U(s)$$

Pré-multiplicando ambos os lados desta última equação por $[I - G_0(s)H(s)]^{-1}$, obtemos

$$Y(s) = [I - G_0(s)H(s)]^{-1}G_0(s)U(s)$$

A matriz de transferência de malha-fechada $G(s)$ é então dada por

$$G(s) = [I - G_0(s)H(s)]^{-1}G_0(s) \quad (14.56)$$

Não-interação em sistemas de múltiplas entradas e saídas. Muitos sistemas de controle de processos têm múltiplas entradas e múltiplas saídas, e frequentemente se deseja que mudanças em uma entrada de referência afetem apenas uma saída. (Se podemos obter tal não-interação, é mais fácil manter cada valor de saída em um valor constante desejado na ausência de perturbações externas.)

Vamos considerar a matriz de transferência $G_p(s)$ (uma matriz $n \times n$) de um processo e projetar um compensador série $G_c(s)$ (também uma matriz $n \times n$) tal que as n entradas e n saídas são desacopladas. Se desejarmos a não-interação ou desacoplamento entre as n entradas e n saídas, a matriz de transferência de malha-fechada deve ser diagonal, ou

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & & 0 \\ & G_{22}(s) & \\ 0 & & G_{nn}(s) \end{bmatrix}$$

Consideraremos o caso em que a matriz de realimentação $\mathbf{H}(s)$ é a matriz identidade. Então, da Eq. (14.56), obtemos

$$\mathbf{G}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}_0(s)]^{-1} \mathbf{G}_0(s) \quad (14.57)$$

onde

$$\mathbf{G}_0(s) = \mathbf{G}_p(s) \mathbf{G}_c(s)$$

Da Eq. (14.57), obtemos

$$[\mathbf{I} + \mathbf{G}_0(s)] \mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_0(s)$$

ou

$$\mathbf{G}_0(s) [\mathbf{I} - \mathbf{G}(s)] = \mathbf{G}(s)$$

*Pós-multiplicando ambos os lados desta última equação por $[\mathbf{I} - \mathbf{G}(s)]^{-1}$, obtemos

$$\mathbf{G}_0(s) = \mathbf{G}(s) [\mathbf{I} - \mathbf{G}(s)]^{-1}$$

Como $\mathbf{G}(s)$ é uma matriz diagonal, $\mathbf{I} - \mathbf{G}(s)$ é também uma matriz diagonal. Então $\mathbf{G}_0(s)$, um produto de duas matrizes diagonais, também é uma matriz diagonal. Isto significa que, para se conseguir não-interação, devemos fazer $\mathbf{G}_0(s)$ uma matriz diagonal, contanto que a matriz de realimentação $\mathbf{H}(s)$ seja a matriz identidade.

Exemplo 14.9 Considere o sistema visto na Fig. 14.9. Determine a matriz de transferência do compensador série para que a matriz de transferência de malha-fechada seja

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s+1} \end{bmatrix}$$

como

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}(\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{5s+1}{5s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2s+1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{c11}(s) & G_{c12}(s) \\ G_{c21}(s) & G_{c22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) - Y_1(s) \\ R_2(s) - Y_2(s) \end{bmatrix}$$

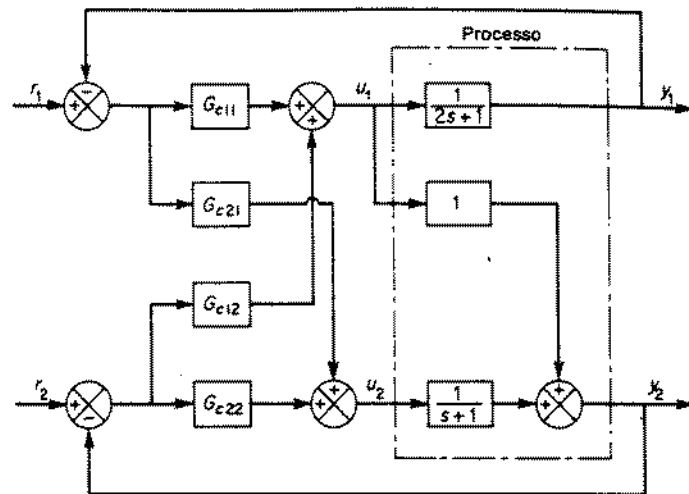


Fig. 14.9 Sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas.

obtemos

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2s+1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{c11}(s) & G_{c12}(s) \\ G_{c21}(s) & G_{c22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) - Y_1(s) \\ R_2(s) - Y_2(s) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) - Y_1(s) \\ R_2(s) - Y_2(s) \end{bmatrix}$$

Portanto

$$\mathbf{G}_c(s) = \begin{bmatrix} G_{c11}(s) & G_{c12}(s) \\ G_{c21}(s) & G_{c22}(s) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2s+1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2s+1}{s} & 0 \\ -\frac{(s+1)(2s+1)}{s} & \frac{s+1}{5s} \end{bmatrix} \quad (14.58)$$

A Eq. (14.58) nos dá a matriz de transferência do compensador série. Note que $G_{c11}(s)$ e $G_{c22}(s)$ são controladores do tipo proporcional-mais-integral e $G_{c21}(s)$ é um controlador do tipo proporcional-mais-integral-mais derivada.

É muito importante notar que na análise presente não consideramos perturbações externas. Em geral, na presente abordagem, há cancelamentos no numerador e denominador. Portanto, alguns dos autovalores serão perdidos em $G_e(s)G_c(s)$. Isto significa que embora a abordagem presente forneça o resultado desejado de não-interação nas respostas a entradas de referência na ausência de perturbações externas, caso o sistema seja perturbado por forças externas, então o sistema pode-se tornar incontrolável porque qualquer movimento causado pelo autovalor cancelado não pode ser controlado. (Discutiremos detalhes de controlabilidade de sistemas na Seção 16.2.)

14.5 SISTEMAS LINEARES VARIANTES NO TEMPO

Uma vantagem do método de espaço de estados na análise de sistemas de controle é que ele pode ser estendido a sistemas lineares variantes no tempo.

A maioria dos resultados obtidos na Seção 14.4 valem para sistemas lineares variantes no tempo modificando-se a matriz de transição $\Phi(t)$ para $\Phi(t, t_0)$. (Para sistemas variantes no tempo, a matriz de transição depende tanto de t como de t_0 e não da diferença $t - t_0$. Portanto, não podemos sempre fazer o tempo inicial igual a zero. Há, entretanto, casos em que t_0 é zero.) Entretanto, é importante compreender que a matriz de transição para um sistema variante no tempo não pode em geral ser dada como uma matriz exponencial.

Solução de equações de estado variantes no tempo. Para uma equação diferencial escalar

$$\dot{x} = a(t)x$$

a solução pode ser dada por

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} x(t_0)$$

e a função de transição de estados pode ser dada por

$$\phi(t, t_0) = \exp \left[\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right]$$

O mesmo resultado, entretanto, não se aplica para a equação diferencial matricial. Considere a equação de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (14.59)$$

onde

$\mathbf{x}(t)$ = vetor n -dimensional

$\mathbf{A}(t)$ = matriz $n \times n$ cujos elementos são funções contínuas por trechos em t no intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$

A solução da Eq. (14.59) é dada por

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) \quad (14.60)$$

onde $\Phi(t, t_0)$ é a matriz não singular $n \times n$ que satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I} \quad (14.61)$$

O fato de que a Eq. (14.60) é a solução da Eq. (14.61) pode ser verificado facilmente pois

$$\mathbf{x}(t_0) = \Phi(t_0, t_0)\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{I}\mathbf{x}(t_0)$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{d}{dt} [\Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0)] \\ &= \dot{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) \\ &= \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

Vemos que a solução da Eq. (14.59) é simplesmente uma transformação do estado inicial. A matriz $\Phi(t, t_0)$ é a matriz de transição de estados para o sistema variante no tempo descrito pela Eq. (14.59).

Matriz de transição de estado para o caso variante no tempo. É importante notar que a matriz de transição de estados $\Phi(t, t_0)$ é dada por uma matriz exponencial se e apenas se $\mathbf{A}(t)$ e $\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau$ comutam. Isto é,

$$\Phi(t, t_0) = \exp \left[\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right] \quad (\text{Se e apenas se } \mathbf{A}(t) \text{ e } \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \text{ comutam.})$$

Note que se $\mathbf{A}(t)$ é uma matriz constante ou uma matriz diagonal, $\mathbf{A}(t)$ e $\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau$ comutam. Se $\mathbf{A}(t)$ e $\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau$ não comutam, não há uma maneira simples de se computar a matriz de transição de estados.

Para computar $\Phi(t, t_0)$ numericamente, podemos usar a seguinte expansão em série para $\Phi(t, t_0)$:

$$\Phi(t, t_0) = \mathbf{I} + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau_1) \left[\int_{t_0}^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_2) d\tau_2 \right] d\tau_1 + \dots \quad (14.62)$$

Isto, em geral, não fornecerá $\Phi(t, t_0)$ em forma fechada.

Exemplo 14.10 Obtenha $\Phi(t, 0)$ para o sistema variante no tempo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Para computar $\Phi(t, 0)$, vamos usar a Eq. (14.62). Como

$$\int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \tau \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \tau_1 \end{bmatrix} \left\{ \int_0^{\tau_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \tau_2 \end{bmatrix} d\tau_2 \right\} d\tau_1 = \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \tau_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \tau_1 \\ 0 & \frac{\tau_1^2}{2} \end{bmatrix} d\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{t^3}{6} \\ 0 & \frac{t^4}{8} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{t^3}{6} \\ 0 & \frac{t^4}{8} \end{bmatrix} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t + \frac{t^3}{6} + \dots \\ 0 & 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \dots \end{bmatrix}$$

Propriedades da matriz de transição de estados $\Phi(t, t_0)$. A seguir alistaremos as propriedades da matriz de transição de estados $\Phi(t, t_0)$.

$$1. \quad \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0)$$

Para provar esta igualdade, note que

$$\mathbf{x}(t_1) = \Phi(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0)$$

$$\mathbf{x}(t_2) = \Phi(t_2, t_0)\mathbf{x}(t_0)$$

Também

$$\mathbf{x}(t_2) = \Phi(t_2, t_1)\mathbf{x}(t_1)$$

Portanto

$$\mathbf{x}(t_2) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0) = \Phi(t_2, t_0)\mathbf{x}(t_0)$$

Portanto

$$\Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0)$$

$$2. \quad \Phi(t_1, t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t_1)$$

Para provar isto, note que

$$\Phi(t_1, t_0) = \Phi^{-1}(t_2, t_1)\Phi(t_2, t_0)$$

Se fizermos $t_2 = t_0$ nesta última equação, então

$$\Phi(t_1, t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t_1)$$

Solução de equações de estado lineares variantes no tempo. Considere a seguinte equação de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}$$

onde

\mathbf{x} = vetor n -dimensional

\mathbf{u} = vetor r -dimensional

$\mathbf{A}(t)$ = matriz $n \times n$

$\mathbf{B}(t)$ = matriz $n \times r$

Supõe-se que os elementos de $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$ são funções contínuas por trechos de t no intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$.

Para se obter a solução da Eq. (14.63), vamos fazer

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\xi(t)$$

onde $\Phi(t, t_0)$ é a matriz única satisfazendo a seguinte equação:

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0),$$

$$\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}$$

Então

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{d}{dt} [\Phi(t, t_0)\xi(t)] \\ &= \dot{\Phi}(t, t_0)\xi(t) + \Phi(t, t_0)\dot{\xi}(t) \\ &= \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0)\xi(t) + \Phi(t, t_0)\dot{\xi}(t) \\ &= \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0)\xi(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

Portanto

$$\Phi(t, t_0)\dot{\xi}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

ou

$$\dot{\xi}(t) = \Phi^{-1}(t, t_0)\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

Portanto

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Como

$$\xi(t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t_0)\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$$

a solução da Eq. (14.63) é obtida como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (14.64)$$

O cálculo do lado direito da Eq. (14.64) para casos práticos requer um computador digital.

14.6 REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS DE TEMPO DISCRETO POR ESPAÇO DE ESTADOS

A abordagem de espaço de estados para a análise de sistemas dinâmicos pode ser estendida para o caso de tempo discreto. A forma discreta da representação de espaço de estados é bastante análoga à forma contínua.

A representação de espaço de estados mais geral para sistemas lineares de tempo discreto é

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k) \quad (14.65)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \quad (14.66)$$

onde $\mathbf{x}(k)$ é o vetor de estados, $\mathbf{u}(k)$ é o vetor de entrada, e $\mathbf{y}(k)$ é o vetor de saída, cada um especificado em $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$ e T é o período de amostragem. [Note que a menos que especifiquemos em contrário, usaremos a notação simplificada $\mathbf{x}(k)$ para indicar $\mathbf{x}(kT)$. Isto é, $\mathbf{x}(k)$ implica o vetor $\mathbf{x}(t)$ em $t = kT$. De forma similar, usamos a notação simplificada $\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k)$, $\mathbf{G}(k)$, $\mathbf{H}(k)$, $\mathbf{C}(k)$ e $\mathbf{D}(k)$.] As Eqs. (14.65) e (14.66) correspondem ao caso variante no tempo. A Fig. 14.10 mostra o diagrama de blocos do sistema de tempo discreto descrito pelas Eqs. (14.65) e (14.66). O elemento atraso unitário tem um tempo de atraso de T segundos.

Se o sistema linear de tempo discreto é invariante no tempo, então as Eqs. (14.65) e (14.66) são modificadas para

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (14.67)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (14.68)$$

Nesta seção, estaremos interessados principalmente com sistemas descritos pelas Eqs. (14.67) e (14.68).

Representação por espaço de estados de equações de diferenças escalares e invariantes no tempo onde a função de excitação é $bu(k)$. Considere a seguinte

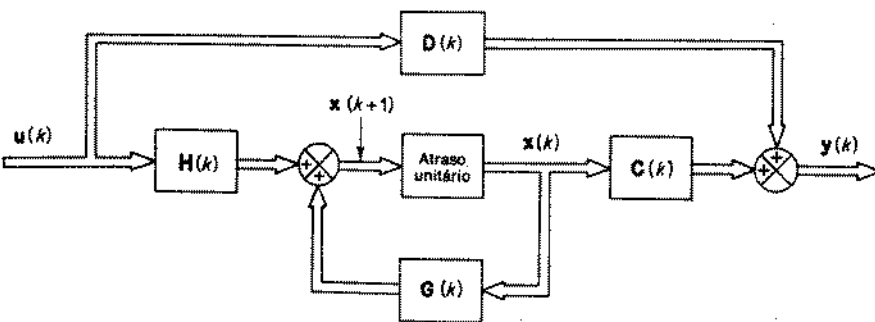


Fig. 14.10 Representação em diagrama de blocos do sistema de tempo discreto descrito pelas Eqs. (14.65) e (14.66).

equação de diferenças escalar:

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + a_2 y(k+n-2) + \dots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) = bu(k) \quad (14.69)$$

onde k denota o k -ésimo instante de amostragem, $y(k)$ é a saída do sistema no k -ésimo instante de amostragem, e $u(k)$ é a entrada no k -ésimo instante de amostragem. Vamos definir

$$x_1(k) = y(k)$$

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = x_3(k)$$

$$\dots$$

$$x_{n-1}(k+1) = x_n(k)$$

$$x_n(k+1) = -a_1 x_n(k) - a_2 x_{n-1}(k) - \dots - a_n x_1(k) + bu(k)$$

Então, a Eq. (14.69) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} [u(k)]$$

$$y(k) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

onde

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]$$

Representação de espaço de estados de equações de diferenças escalares invariantes no tempo quando a função de excitado envolve $u(k)$, $u(k + 1)$, $u(k + n)$. Considere em seguida a seguinte equação de diferenças escalar:

$$y(k + n) + a_1 y(k + n - 1) + a_2 y(k + n - 2) + \dots + a_{n-1} y(k + 1) + a_n y(k) = b_0 u(k + n) + b_1 u(k + n - 1) + b_2 u(k + n - 2) + \dots + b_{n-1} u(k + 1) + b_n u(k)$$

(14.70)

onde k denota o k -ésimo instante de amostragem, $y(k)$ é a saída do sistema no k -ésimo instante de amostragem, e $u(k)$ é a entrada no k -ésimo instante de amostragem.

De forma semelhante ao caso do sistema de equações diferenciais escalares dadas pela Eq. (14.24), definamos as variáveis de estado como segue:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= y(k) - h_0 u(k) \\ x_2(k) &= x_1(k + 1) - h_1 u(k) \\ x_3(k) &= x_2(k + 1) - h_2 u(k) \\ &\vdots \\ x_n(k) &= x_{n-1}(k + 1) - h_{n-1} u(k) \end{aligned}$$

onde $h_0, h_1, h_2, \dots, h_n$ são determinadas de

$$\begin{aligned} h_0 &= b_0 \\ h_1 &= b_1 - a_1 h_0 \\ h_2 &= b_2 - a_1 h_1 - a_2 h_0 \\ &\vdots \\ h_n &= b_n - a_1 h_{n-1} - \dots - a_{n-1} h_1 - a_n h_0 \end{aligned}$$

Com esta escolha das variáveis de estado, obtemos a seguinte equação de estado de tempo discreto e equação de saída para o sistema da Eq. (14.70):

$$\begin{bmatrix} x_1(k + 1) \\ x_2(k + 1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k + 1) \\ x_n(k + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \end{bmatrix} [u(k)]$$

$$y(k) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + h_0 u(k)$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k + 1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + Du(k) \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \quad D = h_0 = b_0$$

As condições iniciais $x_1(0)$, $x_2(0)$, ... $x_n(0)$ são determinadas de

$$x_1(0) = y(0) - h_0 u(0)$$

$$x_2(0) = y(1) - h_0 u(1) - h_1 u(0)$$

$$x_3(0) = y(2) - h_0 u(2) - h_1 u(1) - h_2 u(0)$$

$$x_n(0) = y(n-1) - h_0 u(n-1) - h_1 u(n-2) - \dots - h_{n-2} u(1) - h_{n-1} u(0)$$

Exemplo 14.11 Obtenha a representação de espaço de estados do sistema descrito por

$$y(k+2) + y(k+1) + 0,16y(k) = u(k+1) + 2u(k)$$

Definindo as variáveis de estados como segue,

$$x_1(k) = y(k)$$

$$x_2(k) = x_1(k+1) - u(k)$$

a equação de diferenças pode ser posta na representação padrão de espaço de estados:

$$x_1(k+1) = x_2(k) + u(k)$$

$$x_2(k+1) = -0,16x_1(k) - x_2(k) + u(k)$$

$$y(k) = x_1(k)$$

Reescrevendo

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [u(k)]$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

As condições iniciais são dadas por

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) - u(0) \end{bmatrix}$$

14.7 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADO DE TEMPO DISCRETO

Nesta seção, inicialmente apresentaremos a solução da equação de estado de tempo discreto:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (14.71)$$

usando um procedimento de recursão e, posteriormente, o método da transformada z. Então discutimos a discretização da equação de estado de tempo contínuo:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (14.72)$$

Isto é, derivamos a equação de estado de tempo discreto da forma dada pela Eq. (14.71) a partir da equação de estado de tempo contínuo, a Eq. (14.72).

Solução de equações de diferença. Em geral, equações de diferença são mais fáceis de resolver do que equações diferenciais porque podem ser resolvidas simplesmente através de um procedimento de recursão.

Como exemplo, considere a seguinte equação de diferenças:

$$x(k+1) + 0,2x(k) = 2u(k)$$

onde $x(0) = 0$ e $u(k) = 1$ para $k = 0, 1, 2, \dots$. A solução $x(1)$ pode ser achada por recursão.

$$x(1) = -0,2x(0) + 2u(0) = 2$$

Similarmente,

$$x(2) = -0,2x(1) + 2u(1) = 1,6$$

$$x(3) = -0,2x(2) + 2u(2) = 1,68$$

$$x(4) = -0,2x(3) + 2u(3) = 1,664$$

[Note que neste método $x(k+1)$ não pode ser computado a menos que $x(k)$ seja conhecido.] Este procedimento é bastante simples e conveniente para computação digital.

Solução de equações de estado de tempo discreto. O procedimento anterior de computar a solução de equações de diferenças escalares por recursão pode ser utilizado também para equação de diferenças matricial, ou a equação de estado de tempo discreto.

Considere a seguinte equação de estado e equação de saída:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (14.73)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (14.74)$$

A solução da Eq. (14.73) para qualquer $k > 0$ pode ser obtida diretamente por recursão como segue:

$$x(1) = Gx(0) + Hu(0)$$

$$x(2) = Gx(1) + Hu(1) = G^2x(0) + GHu(0) + Hu(1)$$

$$x(3) = Gx(2) + Hu(2) = G^3x(0) + G^2Hu(0) + GHu(1) + Hu(2)$$

Repetindo este procedimento, obtemos

$$x(k) = G^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} Hu(j) \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (14.75)$$

Claramente $x(k)$ consiste em duas partes, uma representando a contribuição do estado inicial $x(0)$, e a outra a contribuição da entrada $u(j)$, $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$.

Da Eq. (14.75), vemos que a matriz de transição de estado do sistema da Eq. (14.73) é

$$\Phi(k) = G^k \quad (14.76)$$

É uma matriz única satisfazendo

$$\Phi(k+1) = G\Phi(k), \quad \Phi(0) = I$$

Em termos da matriz de transição de estados $\Phi(k)$, a Eq. (14.75) pode ser escrita como

$$x(k) = \Phi(k)x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-j-1)Hu(j) \quad (14.77)$$

$$= \Phi(k)x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(j)Hu(k-j-1) \quad (14.78)$$

Substituindo a Eq. (14.77) [ou Eq. (14.78)] na Eq. (14.74), a equação de saída pode ser escrita como

$$y(k) = C\Phi(k)x(0) + C \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-j-1)Hu(j) + Du(k)$$

$$= C\Phi(k)x(0) + C \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(j)Hu(k-j-1) + Du(k)$$

Abordagem por transformada z para a solução de equações de estado de tempo discreto. Em seguida apresentamos a solução de equações de estado de tempo discreto usando o método da transformada z. Considere o sistema de tempo discreto descrito pela Eq. (14.73) reescrita como

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (14.79)$$

Tomando a transformada z em ambos os lados da Eq. (14.79), obtemos

$$zX(z) - zx(0) = GX(z) + HU(z)$$

onde $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)]$ e $U(z) = \mathcal{Z}[u(k)]$. Então,

$$(zI - G)X(z) = zx(0) + HU(z) \quad (14.80)$$

Pré-multiplicando ambos os lados da Eq. (14.80) por $(zI - G)^{-1}$, obtemos

$$X(z) = (zI - G)^{-1}zx(0) + (zI - G)^{-1}HU(z) \quad (14.81)$$

Tomando a transformada z em ambos os lados da Eq. (14.81), obtemos

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[(zI - G)^{-1}zx(0)] + \mathcal{Z}^{-1}[(zI - G)^{-1}HU(z)] \quad (14.82)$$

Comparando as Eqs. (14.75) e (14.82), obtemos

$$G^k = \mathcal{Z}^{-1}[(zI - G)^{-1}z] \quad (14.83)$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1}Hu(j) = \mathcal{Z}^{-1}[(zI - G)^{-1}HU(z)] \quad (14.84)$$

onde $k = 1, 2, 3, \dots$ [Para a Eq. (14.83), veja o Problema A.13.1.]

A Eq. (14.84) pode também ser obtida diretamente. Tomando a transformada z de

$$\sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1}Hu(j) \text{ onde } k = 1, 2, 3, \dots, \text{ obtemos}$$

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1}Hu(j)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1}Hu(j)z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k+j} \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1}Hu(j)z^{-j}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k+j} \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1}Hu(j)z^{-j}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} [G^{k-1}Hu(0)z^{-k} + G^{k-2}Hu(1)z^{-k} + G^{k-3}Hu(2)z^{-k} + \dots]$$

$$= (Hz^{-1} + GHZ^{-2} + G^2HZ^{-3} + \dots)$$

$$\times [u(0) + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \dots]$$

$$= (I + Gz^{-1} + G^2z^{-2} + \dots)Hz^{-1}$$

$$\times [u(0) + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \dots]$$

$$= (I - Gz^{-1})^{-1}Hz^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k}$$

$$= (zI - G)^{-1}HU(z)$$

Finalmente, note que da Eq. (14.81) podemos ver que a equação característica do sistema de tempo discreto é

$$|zI - G| = 0 \quad (14.85)$$

Referindo-se à Seção 13.6, sabemos que o sistema de tempo discreto é estável se e apenas se todas as raízes da equação característica, a Eq. (14.85), estão no círculo unitário centrado na origem do plano z.

Exemplo 14.12 Obtenha a matriz de transição de estado do seguinte sistema de tempo discreto:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

onde

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,16 & -1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Em seguida obtenha $x(k)$ quando $u(k) = 1$ para $k = 0, 1, 2, \dots$. Suponha que a condição inicial é dada por

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Das Eqs. (14.76) e (14.83), vemos que a matriz de transição de estado $\Phi(k)$ é

$$\Phi(k) = \mathbf{G}^k = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}z]$$

Portanto, primeiro obtemos $(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$.

$$\begin{aligned} (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} &= \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0,16 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{z+1}{(z+0,2)(z+0,8)} & \frac{1}{(z+0,2)(z+0,8)} \\ \frac{-0,16}{(z+0,2)(z+0,8)} & \frac{z}{(z+0,2)(z+0,8)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\frac{4}{3}}{z+0,2} + \frac{\frac{-1}{3}}{z+0,8} & \frac{\frac{5}{3}}{z+0,2} + \frac{\frac{-5}{3}}{z+0,8} \\ \frac{\frac{-0,8}{3}}{z+0,2} + \frac{\frac{0,8}{3}}{z+0,8} & \frac{\frac{-1}{3}}{z+0,2} + \frac{\frac{4}{3}}{z+0,8} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto $\Phi(k)$ é obtido como

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= \mathbf{G}^k = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}z] \\ &= \mathcal{Z}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \left(\frac{z}{z+0,2} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{z}{z+0,8} \right) & \frac{5}{3} \left(\frac{z}{z+0,2} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{z+0,8} \right) \\ -\frac{0,8}{3} \left(\frac{z}{z+0,2} \right) + \frac{0,8}{3} \left(\frac{z}{z+0,8} \right) & -\frac{1}{3} \left(\frac{z}{z+0,2} \right) + \frac{4}{3} \left(\frac{z}{z+0,8} \right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4}{3}(-0,2)^k - \frac{1}{3}(-0,8)^k & \frac{5}{3}(-0,2)^k - \frac{5}{3}(-0,8)^k \\ -\frac{0,8}{3}(-0,2)^k + \frac{0,8}{3}(-0,8)^k & -\frac{1}{3}(-0,2)^k + \frac{4}{3}(-0,8)^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Em seguida, calcule $\mathbf{x}(k)$. A transformada z de $\mathbf{x}(k)$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\mathbf{x}(k)] &= \mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H}U(z) \\ &= (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}[z\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}U(z)] \end{aligned}$$

Como

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

obtemos

$$z\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}U(z) = \begin{bmatrix} z \\ -z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{z}{z-1} \\ \frac{z}{z-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z^2}{z-1} \\ \frac{-z^2+2z}{z-1} \end{bmatrix}$$

Portanto

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}[z\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}U(z)]$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} \frac{(z^2+2)z}{(z+0,2)(z+0,8)(z-1)} \\ \frac{(-z^2+1,84z)z}{(z+0,2)(z+0,8)(z-1)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-\frac{17}{6}z}{z+0,2} + \frac{\frac{22}{9}z}{z+0,8} + \frac{\frac{25}{18}z}{z-1} \\ \frac{\frac{3,4}{6}z}{z+0,2} + \frac{\frac{-17,6}{9}z}{z+0,8} + \frac{\frac{7}{18}z}{z-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto

$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{X}(z)] = \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0,2)^k + \frac{22}{9}(-0,8)^k + \frac{25}{18} \\ \frac{3,4}{6}(-0,2)^k - \frac{17,6}{9}(-0,8)^k + \frac{7}{18} \end{bmatrix}$$

Discretização de equações de estado de tempo contínuo. Se desejamos computar o estado $\mathbf{x}(t)$ usando um computador digital, devemos converter uma equação de estado de tempo contínuo para uma equação de estado de tempo discreto. Em seguida, apresentaremos tal procedimento. Supomos que o vetor de entrada $\mathbf{u}(t)$ muda apenas nos instantes de amostragem igualmente espaçados. (A operação de amostragem feita aqui é fictícia. Derivaremos a equação de estado de tempo discreto que fornece valores exatos em $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$)

Considere a equação de estado de tempo contínuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (14.86)$$

A seguir, para tornar a análise mais clara, usaremos a notação kT e $(k+1)T$ em vez de k e $k+1$. A representação de tempo discreto da Eq. (14.86) tomará a forma

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}(T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(T)\mathbf{u}(kT) \quad (14.87)$$

Note que as matrizes \mathbf{G} e \mathbf{H} dependem do período de amostragem T . (Uma vez que este período é fixado, \mathbf{G} e \mathbf{H} são matrizes constantes.)

Para determinar $\mathbf{G}(T)$ e $\mathbf{H}(T)$, usamos a solução da Eq. (14.86), ou

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t} \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Supomos que todos os componentes de $\mathbf{u}(t)$ são constantes no intervalo entre

quaisquer dois instantes sucessivos de amostragem, ou $u(t) = u(kT)$ para o k -ésimo período de amostragem. Como

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}(k+1)T} \mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}(k+1)T} \int_0^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} u(\tau) d\tau \quad (14.88)$$

$$\mathbf{x}(kT) = e^{\mathbf{A}kT} \mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}kT} \int_0^{kT} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} u(\tau) d\tau \quad (14.89)$$

multiplicando a Eq. (14.89) por $e^{\mathbf{A}T}$ e subtraindo da Eq. (14.88), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}((k+1)T) &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + e^{\mathbf{A}(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} u(\tau) d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + e^{\mathbf{A}T} \int_0^T e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{B} u(kT) dt \\ &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \int_0^T e^{\mathbf{A}\lambda} \mathbf{B} u(kT) d\lambda \end{aligned} \quad (14.90)$$

onde $\lambda = T - t$. Se definirmos

$$\mathbf{G}(T) = e^{\mathbf{A}T} \quad (14.91)$$

$$\mathbf{H}(T) = \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}\lambda} d\lambda \right) \mathbf{B} \quad (14.92)$$

então a Eq. (14.90) se torna

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}(T) \mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(T) u(kT)$$

que é a Eq. (14.87). Portanto, as Eqs. (14.91) e (14.92) fornecem as matrizes $\mathbf{G}(T)$ e $\mathbf{H}(T)$ desejadas.

Exemplo 14.13 Obtenha uma representação por espaço de estados de tempo discreto do seguinte sistema de tempo contínuo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

A equação de estado de tempo discreto desejada será da seguinte forma:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}(T) \mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(T) u(kT)$$

As matrizes $\mathbf{G}(T)$ e $\mathbf{H}(T)$ podem ser obtidas das Eqs. (14.91) e (14.92) como

$$\mathbf{G}(T) = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(T) &= \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \right) \mathbf{B} \\ &= \left\{ \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2\tau}) \\ 0 & e^{-2\tau} \end{bmatrix} d\tau \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(T + \frac{e^{-2T} - 1}{2} \right) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{bmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(T + \frac{e^{-2T} - 1}{2} \right) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix} u(kT)$$

Se, por exemplo, o período de amostragem é de 1 segundo, ou $T = 1$, então a equação de estado de tempo discreto se torna

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,432 \\ 0 & 0,135 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,284 \\ 0,432 \end{bmatrix} [u(k)]$$

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS E SOLUÇÕES

Problema A.14.1 Obtenha a representação de espaço de estados do sistema visto na Fig. 14.11.

Solução. Neste problema, ilustraremos um método de derivação de uma representação por espaço de estados de sistemas dados na forma de diagrama de blocos.

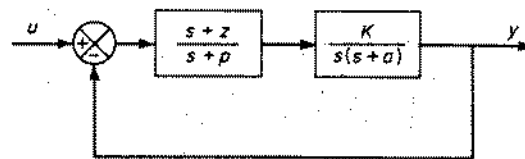


Fig. 14.11 Sistema de controle.

No presente problema, inicialmente expandiremos $(s+z)/(s+p)$ em frações parciais.

$$\frac{s+z}{s+p} = 1 + \frac{z-p}{s+p}$$

Em seguida convertemos $K/[s(s+a)]$ no produto de K/s e $1/(s+a)$. Em seguida redesenhamos o diagrama de blocos, como visto na Fig. 14.12. Definindo um conjunto de variáveis de

estado, como visto na Fig. 14.12, obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -ax_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -Kx_1 + Kx_3 + Ku \\ \dot{x}_3 &= -(z-p)x_1 - px_3 + (z-p)u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

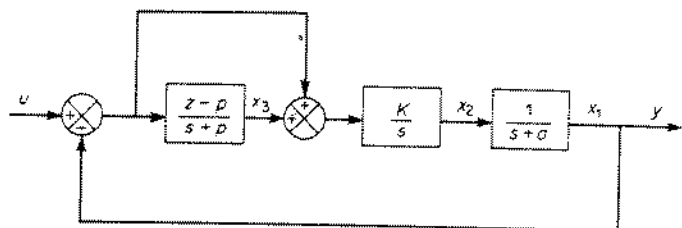


Fig. 14.12 Diagrama de blocos definindo as variáveis de estado para o sistema visto na Fig. 14.11.

Reescrevendo, obtemos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ -K & 0 & K \\ -(z-p) & 0 & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \\ z-p \end{bmatrix} [u]$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Problema A.14.2 Derive uma equação de estado para o sistema visto na Fig. 14.13. Seja x_1 a corrente pela indutância L , ou seja, $x_1 = i_1 - i_2$ e a tensão no capacitor x_2 . Suponha que $e(t)$ é a entrada do sistema. Considere x_1 e x_2 como as variáveis de estado para o sistema.

Solução. Da Fig. 14.13, obtemos as seguintes equações:

$$L \left(\frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt} \right) + R_1 i_1 = e(t)$$

$$\frac{1}{C} \int i_2 dt + R_2 i_2 + L \left(\frac{di_2}{dt} - \frac{di_1}{dt} \right) = 0$$

Em termos de x_1 e x_2 , podemos reescrever estas equações como

$$L \frac{dx_1}{dt} + R_1(x_1 + i_2) = e(t)$$

$$x_2 + R_2 i_2 + R_1(x_1 + i_2) = e(t)$$

$$x_2 = \frac{1}{C} \int i_2 dt$$

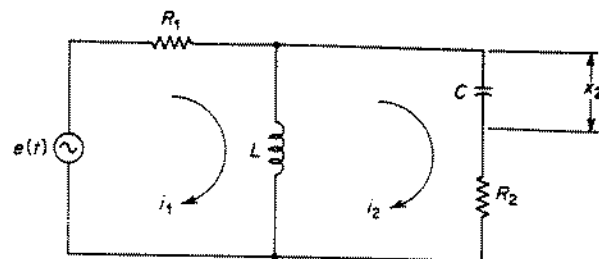


Fig. 14.13 Sistema composto por uma rede elétrica.

Para obter a equação de estado, devemos eliminar i_2 . Para tal, tomemos a transformada de Laplace destas equações:

$$L[sX_1(s) - x_1(0)] + R_1[X_1(s) + I_2(s)] = E(s)$$

$$X_2(s) + R_2 I_2(s) + R_1[X_1(s) + I_2(s)] = E(s)$$

$$sX_2(s) - x_2(0) = \frac{1}{C} I_2(s)$$

Eliminando $I_2(s)$ das últimas três equações, temos

$$L[sX_1(s) - x_1(0)] = \frac{-R_1 R_2}{R_1 + R_2} X_1(s) + \frac{R_1}{R_1 + R_2} X_2(s) + \frac{R_2}{R_1 + R_2} E(s)$$

$$sX_2(s) - x_2(0) = \frac{-R_1}{C(R_1 + R_2)} X_1(s) + \frac{-1}{C(R_1 + R_2)} X_2(s) + \frac{1}{C(R_1 + R_2)} E(s)$$

Tomando a transformada inversa de Laplace, obtém-se

$$\dot{x}_1(t) = \frac{-R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} x_1(t) + \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} x_2(t) + \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} e(t)$$

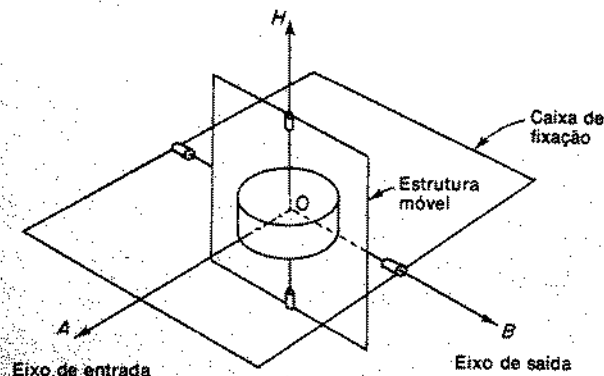
$$\dot{x}_2(t) = \frac{-R_1}{C(R_1 + R_2)} x_1(t) + \frac{-1}{C(R_1 + R_2)} x_2(t) + \frac{1}{C(R_1 + R_2)} e(t)$$

A equação de estado para o sistema é então dada por

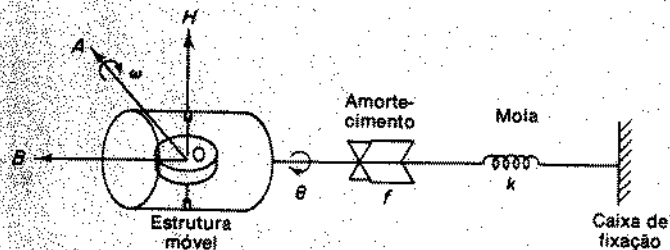
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} & \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} \\ \frac{-R_1}{C(R_1 + R_2)} & \frac{-1}{C(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} \\ \frac{1}{C(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} [e(t)]$$

Problema A.14.3 Giroscópios para medir movimento angular são comumente empregados em sistemas de navegação inercial, sistemas de autopiloto etc.

A Fig. 14.14(a) mostra um giroscópio com um único grau de liberdade. A roda que gira está montada em uma estrutura móvel que, por sua vez, está montada na caixa do giroscópio. A estrutura móvel pode-se mover livremente em relação à caixa, em torno do eixo de saída OB. Note que o eixo de saída é perpendicular ao eixo da roda que gira. O eixo de entrada em torno do qual uma velocidade de rotação, ou ângulo, é medida é perpendicular tanto ao eixo de



(a)



(b)

Fig. 14.14 (a) Diagrama esquemático de um giroscópio com um grau de liberdade; (b) diagrama funcional do giroscópio visto em (a).

saída como de rotação da roda. A informação sobre o sinal de entrada (a velocidade de rotação ou ângulo em torno do eixo de entrada) é obtida a partir do movimento resultante da estrutura móvel em torno do eixo de saída, relativamente à caixa.

A Fig. 14.14(b) mostra um diagrama funcional do sistema de giroscópio. A equação do movimento em torno do eixo de saída pode ser obtida equacionando-se a taxa de variação da quantidade de movimento angular com a soma dos torques externos.

A variação de quantidade de movimento angular em torno do eixo OB consiste em duas partes: $I\dot{\theta}$, a variação devida à aceleração da estrutura móvel em torno do eixo OB, e $-H\omega \cos \theta$, a variação devida ao vetor de quantidade de movimento angular da roda em rotação em torno do eixo OA. Os torques externos consistem em $-f\dot{\theta}$, o torque de amortecimento, e $-k\theta$, o torque da mola. Portanto a equação do sistema de giroscópio é

$$I\ddot{\theta} - H\omega \cos \theta = -f\dot{\theta} - k\theta$$

$$I\ddot{\theta} + f\dot{\theta} + k\theta = H\omega \cos \theta$$

(14.93)

Na prática, θ é um ângulo muito pequeno, normalmente não maior do que $\pm 2,5$ graus. Obtenha a representação de espaço de estados do sistema de giroscópio.

Solução. Neste sistema, θ e $\dot{\theta}$ podem ser escolhidos como variáveis de estado. A variável de entrada é ω . Vamos definir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad u = \omega$$

Então a Eq. (14.93) pode ser escrita como segue:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{I}x_1 - \frac{f}{I}x_2 + \frac{H}{I}u \cos x_1 \end{aligned}$$

ou

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$$

onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, u) \\ f_2(\mathbf{x}, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{I}x_1 - \frac{f}{I}x_2 + \frac{H}{I}u \cos x_1 \end{bmatrix}$$

Claramente $f_2(\mathbf{x}, u)$ envolve um termo não linear em x_1 e u . Expandindo $\cos x_1$ nesta representação em série,

$$\cos x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_1^2 + \dots$$

e observando que x_1 é um ângulo muito pequeno, podemos aproximar $\cos x_1$ como sendo 1, obtendo a seguinte equação de estado linearizada:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{I} & -\frac{f}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{H}{I} \end{bmatrix} u$$

Se θ é considerado como a saída y , então

$$y = \theta$$

ou

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Problema A.14.4 Considere o sistema descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

onde

\mathbf{x} = vetor n -dimensional

\mathbf{u} = vetor r -dimensional

\mathbf{A} = matriz constante $n \times n$

\mathbf{B} = matriz constante $n \times r$

Obtenha a resposta para cada uma das seguintes entradas:

1. Os r componentes de \mathbf{u} são funções impulsivas de várias amplitudes.

2. Os r componentes de \mathbf{u} são funções-degrau de várias amplitudes.

3. Os r componentes de \mathbf{u} são funções-rampa de várias amplitudes.

Suponha que cada entrada é aplicada em $t = 0$.

Solução. Substituindo $t_0 = 0^-$ na Eq. (14.47), podemos escrever a solução $\mathbf{x}(t)$ como segue:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0^-) + \int_{0^-}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

1. **Resposta ao impulso:** Vamos escrever a entrada impulsiva $\mathbf{u}(t)$ como

$$\mathbf{u}(t) = \delta(t)\mathbf{w}$$

onde \mathbf{w} é um vetor cujos componentes são as amplitudes das r funções impulsivas aplicadas em $t = 0$. A solução ao impulso dado em $t = 0$ é

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0^-) + \int_{0^-}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\delta(\tau)\mathbf{w} d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0^-) + e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{w}\end{aligned}$$

2. **Resposta ao degrau:** Vamos escrever a entrada em degrau $\mathbf{u}(t)$ como

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{k}$$

onde \mathbf{k} é um vetor cujos componentes são as amplitudes de r funções-degrau aplicadas em $t = 0$. A solução para a entrada em degrau em $t = 0$ é dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{k} d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t} \left[\int_0^t \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\tau + \frac{\mathbf{A}^2\tau^2}{2!} - \dots \right) d\tau \right] \mathbf{B}\mathbf{k} \\ &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t} \left(\mathbf{I}t - \frac{\mathbf{A}t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^2t^3}{3!} - \dots \right) \mathbf{B}\mathbf{k}\end{aligned}$$

Se \mathbf{A} é não singular, então esta última equação pode ser simplificada para resultar em

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}[-(\mathbf{A}^{-1})(e^{-\mathbf{A}t} - \mathbf{I})]\mathbf{B}\mathbf{k} \\ &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I})\mathbf{B}\mathbf{k}\end{aligned}$$

3. **Resposta à rampa:** Vamos escrever a entrada em rampa $\mathbf{u}(t)$ como

$$\mathbf{u}(t) = t\mathbf{v}$$

onde \mathbf{v} é um vetor cujos componentes são as amplitudes das funções em rampa aplicada em $t = 0$. A solução para uma entrada em rampa $t\mathbf{v}$ aplicada em $t = 0$ é

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}t\mathbf{v} d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t} \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\tau d\tau \mathbf{B}\mathbf{v} \\ &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t} \left(\frac{\mathbf{I}}{2}t^2 - \frac{2\mathbf{A}}{3!}t^3 + \frac{3\mathbf{A}^2}{4!}t^4 - \frac{4\mathbf{A}^3}{5!}t^5 + \dots \right) \mathbf{B}\mathbf{v}\end{aligned}$$

Se \mathbf{A} é não singular, então esta última equação pode ser simplificada para fornecer

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + (\mathbf{A}^{-2})(e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I} - \mathbf{A}t)\mathbf{B}\mathbf{v} \\ &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + [\mathbf{A}^{-2}(e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}) - \mathbf{A}^{-1}t]\mathbf{B}\mathbf{v}\end{aligned}$$

Problema A.14.5 Um método útil para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ é baseado no teorema de Cayley-Hamilton, que diz que uma matriz \mathbf{A} $n \times n$ satisfaz sua própria equação característica. Isto permite escrever todas as potências de \mathbf{A} em termos de um polinômio em \mathbf{A} de grau igual ou menor do que $n - 1$, isto é,

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \dots + \alpha_{n-1}(t)\mathbf{A}^{n-1} \quad (14.94)$$

Se \mathbf{A} tem autovalores distintos, então, para determinar os coeficientes $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$, substituímos cada um dos autovalores de \mathbf{A} na versão escalar da Eq. (14.94) obtendo n equações simultâneas. (Note que se os autovalores de \mathbf{A} são múltiplos, então o procedimento deve ser levemente modificado. Para detalhes, referir-se ao Cap. 6 da Referência O-1.)

Usando a presente abordagem, obtenha $e^{\mathbf{A}t}$, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Solução. Os autovalores de \mathbf{A} são obtidos de

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = 0$$

Portanto

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$$

$e^{\mathbf{A}t}$ pode ser expressa como

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} \quad (14.95)$$

A versão escalar desta equação é

$$e^{\lambda t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda \quad (14.96)$$

Substituindo $\lambda = \lambda_1 = -1$ na Eq. (14.96), obtém-se

$$e^{-t} = \alpha_0(t) - \alpha_1(t) \quad (14.97)$$

De forma semelhante, substituindo $\lambda = \lambda_2 = -2$ na Eq. (14.96), temos

$$e^{-2t} = \alpha_0(t) - 2\alpha_1(t) \quad (14.98)$$

Resolvendo as Eqs. (14.97) e (14.98) para obter $\alpha_d(t)$ e $\alpha_1(t)$, obtemos

$$\alpha_0(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\alpha_1(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Substituindo estes valores na Eq. (14.95), resulta

$$e^{At} = (2e^{-t} - e^{-2t})\mathbf{I} + (e^{-t} - e^{-2t})\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Problema A.14.6. Considere o sistema descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad a_{21} \neq 0$$

Supondo que os dois autovalores λ_1 e λ_2 da matriz de coeficientes são distintos, determine uma matriz de transformação \mathbf{P} que transforme a primeira matriz em diagonal. Ache \mathbf{P} em função de a_{11} , λ_1 e λ_2 .

Solução.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda_1 & a_{22} - \lambda_2 \\ -a_{21} & -a_{21} \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_2 - a_{11} & \lambda_1 - a_{11} \\ -a_{21} & -a_{21} \end{bmatrix}$$

Problema A.14.7 Obtenha uma representação de espaço de estados de tempo discreto do sistema visto na Fig. 14.15.

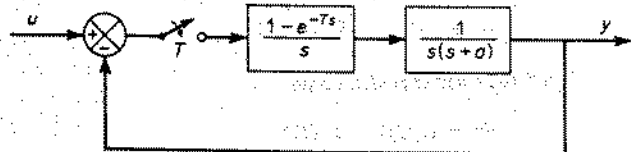


Fig. 14.15 Sistema de tempo discreto.

Solução. A função de transferência de malha-aberta do sistema é

$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{1}{s(s+a)}$$

A transformada z de $G(s)$ é dada por

$$G(z) = \frac{T}{a(z-1)} - \frac{1 - e^{-aT}}{a^2(z - e^{-aT})}$$

Em termos da função de transferência pulsada, a Fig. 14.15 pode ser modificada como visto na Fig. 14.16.

Vamos definir as variáveis de estado como visto na Fig. 14.16. Observando que $z\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k+1)$, obtemos a seguinte equação de estado de tempo discreto:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{T}{a} & -\frac{T}{a} \\ \frac{1 - e^{-aT}}{a^2} & \frac{1 + (a^2 - 1)e^{-aT}}{a^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T}{a} \\ \frac{-1 + a^{-aT}}{a^2} \end{bmatrix} u(k)$$

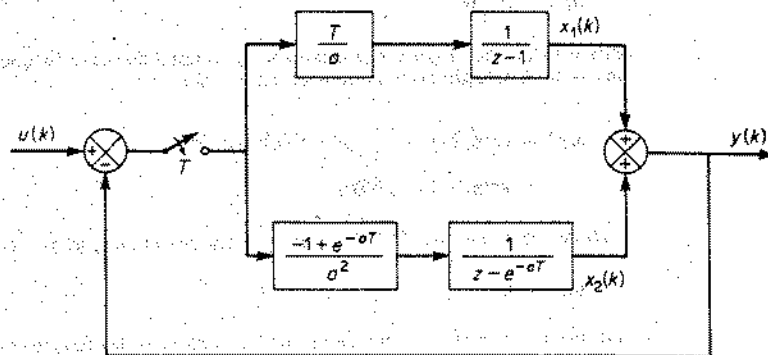


Fig. 14.16 Diagrama de blocos definindo as variáveis de estado para o sistema visto na Fig. 14.15.

Problema A.14.8 O país A tem uma população de 100 milhões em 1970. A população da cidade B no país A tem 10 milhões em 1970.

Suponha que a cada ano 4% da população do ano anterior da cidade B abandonam esta cidade, e que 2% da população do ano anterior do país fora da cidade B mudam para a cidade B.

Determine a população da cidade B no ano de 1980. Suponha que o aumento natural da população é de 1% ao ano.

Solução. Vamos chamar o ano 1970 de ano 0. Seja a população da cidade B no k -ésimo ano $x_1(k)$ e a população do país A, excetuando-se a cidade B, $x_2(k)$. Então obtemos as seguintes equações:

$$x_1(k+1) = 1,01[(1 - 0,04)x_1(k) + 0,02x_2(k)]$$

$$x_2(k+1) = 1,01[0,04x_1(k) + (1 - 0,02)x_2(k)]$$

com as condições iniciais

$$x_1(0) = 10 \times 10^6, \quad x_2(0) = 90 \times 10^6$$

Em termos de notação matricial,

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) \quad (14.99)$$

onde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} (1,01)(1-0,04) & (1,01)(0,02) \\ (1,01)(0,04) & (1,01)(1-0,02) \end{bmatrix}$$

A solução da Eq. (14.99) é dada por

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{G}^k \mathbf{x}(0)$$

Referindo-nos à Eq. (14.83), temos

$$\mathbf{G}^k = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}z]$$

Como

$$\begin{aligned} (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} &= \begin{bmatrix} z - (1,01)(0,96) & -(1,01)(0,02) \\ -(1,01)(0,04) & z - (1,01)(0,98) \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{z - (1,01)(0,98)}{(z - 1,01)(z - 0,9494)} & \frac{(1,01)(0,02)}{(z - 1,01)(z - 0,9494)} \\ \frac{(1,01)(0,04)}{(z - 1,01)(z - 0,9494)} & \frac{z - (1,01)(0,96)}{(z - 1,01)(z - 0,9494)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\frac{1}{3}}{z - 1,01} + \frac{\frac{2}{3}}{z - 0,9494} & \frac{\frac{1}{3}}{z - 1,01} + \frac{-\frac{1}{3}}{z - 0,9494} \\ \frac{\frac{2}{3}}{z - 1,01} + \frac{-\frac{2}{3}}{z - 0,9494} & \frac{\frac{2}{3}}{z - 1,01} + \frac{\frac{1}{3}}{z - 0,9494} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

\mathbf{G}^k pode ser obtido como

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^k &= \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}z] \\ &= \mathcal{Z}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \frac{z}{z - 1,01} + \frac{2}{3} \frac{z}{z - 0,9494} & \frac{1}{3} \frac{z}{z - 1,01} - \frac{1}{3} \frac{z}{z - 0,9494} \\ \frac{2}{3} \frac{z}{z - 1,01} - \frac{2}{3} \frac{z}{z - 0,9494} & \frac{2}{3} \frac{z}{z - 1,01} + \frac{1}{3} \frac{z}{z - 0,9494} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(1,01)^k + \frac{2}{3}(0,9494)^k & \frac{1}{3}(1,01)^k - \frac{1}{3}(0,9494)^k \\ \frac{2}{3}(1,01)^k - \frac{2}{3}(0,9494)^k & \frac{2}{3}(1,01)^k + \frac{1}{3}(0,9494)^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto $\mathbf{x}(k)$ é obtido como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{G}^k \mathbf{x}(0) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(1,01)^k(10^8) - \frac{2}{3}(0,9494)^k(10^8) \\ \frac{2}{3}(1,01)^k(10^8) + \frac{1}{3}(0,9494)^k(10^8) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para $k = 10$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(10) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(1,01)^{10}[1 - 0,7(0,94)^{10}](10^8) \\ \frac{2}{3}(1,01)^{10}[1 + \frac{0,7}{2}(0,94)^{10}](10^8) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 22,94 \times 10^6 \\ 87,46 \times 10^6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, a cidade B terá uma população de 22.94 milhões no ano $k = 10$. Note que quando k tende a infinito, $\lim_{k \rightarrow \infty} (0,9494)^k \rightarrow 0$. Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \lim_{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(1,01)^k(10^8) \\ \frac{2}{3}(1,01)^k(10^8) \end{bmatrix}$$

A razão da população da cidade B para a do resto do país A se torna 1 a 2, ou um terço da população do país A vai morar na cidade B.

PROBLEMAS

Problema B.14.1 Considere o sistema ou circuito visto na Fig. 14.17. Escolhendo v_c e i_L como as variáveis de estado, obtenha a equação de estado do sistema.

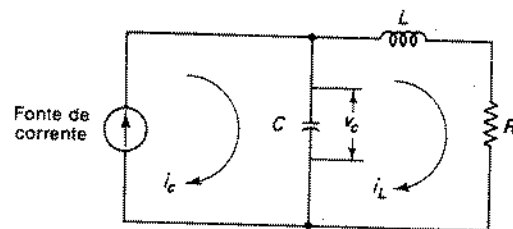


Fig. 14.17 Sistema elétrico.

Problema B.14.2 Considere o sistema descrito por

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = u$$

Determine uma representação de espaço de estados do sistema. Escolha as variáveis de estado de tal forma que a matriz de coeficientes do vetor de estado seja diagonal.

Problema B.14.3 Obtenha uma representação de espaço de estados para o seguinte sistema:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

Problema B.14.4 Determine uma representação de espaço de estados do sistema térmico visto na Fig. 14.18. Para simplificar a derivação, suponha o seguinte: A massa de metal do recipiente interno é pequena e sua capacitância térmica é desprezível, assim como a perda de

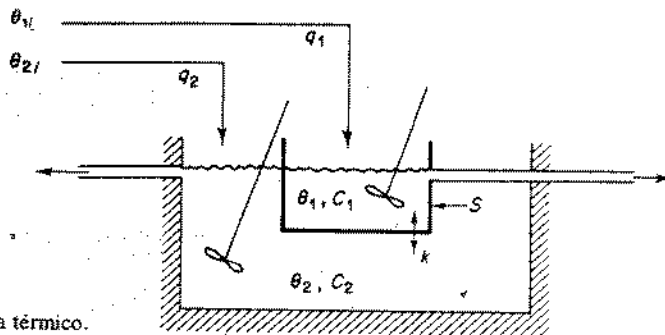


Fig. 14.18 Sistema térmico.

calor do recipiente externo. Além do mais, a perda de calor a partir da superfície livre também é desprezível. Supõe-se que o fluido no recipiente interno é bem misturado a todo instante. O mesmo é verdade para o fluido no recipiente externo. No diagrama

- θ_{1i} = temperatura do líquido que entra no recipiente interno, em $^{\circ}\text{F}$
- θ_{2i} = temperatura do líquido que entra no recipiente externo, em $^{\circ}\text{F}$
- θ_1 = temperatura do líquido no recipiente interno, em $^{\circ}\text{F}$
- θ_2 = temperatura do líquido no recipiente externo, em $^{\circ}\text{F}$
- C_1 = capacidade térmica do líquido no recipiente interno, em $\text{Btu}/^{\circ}\text{F}$
- C_2 = capacitância térmica do líquido no recipiente externo, em $\text{Btu}/^{\circ}\text{F}$
- q_1 = entrada de calor no recipiente interno, em $\text{Btu}/\text{min}^{\circ}\text{F}$
- q_2 = entrada de calor no recipiente externo, em $\text{Btu}/\text{min}^{\circ}\text{F}$
- S = área da superfície de transporte de calor, em in^2
- k = coeficiente de transferência de calor, em $\text{Btu}/\text{in}^2 \text{ min } ^{\circ}\text{F}$

Suponha que θ_1 e θ_2 são as variáveis de estado e que θ_{1i} e θ_{2i} as variáveis de entrada.

Problema B.14.5 Determine $x_1(t)$ e $x_2(t)$ do sistema descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

onde as condições iniciais são

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Problema B.14.6 Dada a equação de um sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Determine a solução em termos das condições iniciais $x_1(0)$, $x_2(0)$ e $x_3(0)$.

Problema B.14.7 Mostre que a solução da seguinte equação diferencial matricial:

$$\frac{dX}{dt} = AX + XB, \quad X(0) = C$$

é dada por

$$X = e^{At} C e^{Bt}$$

Problema B.14.8 Obtenha a resposta do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} [u], \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde

$$u(t) = 0 \quad \text{para } t < 0 \\ = e^{-t} \quad \text{para } t \geq 0$$

Problema B.14.9 Considere o sistema descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [u] \\ y = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Obtenha a função de transferência do sistema.

Problema B.14.10 Considere um sistema de tempo contínuo descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

Discretize a equação do sistema e derive uma equação de estado de tempo discreto. Suponha que o período de amostragem é de 2 s.

Problema B.14.11 Obtenha uma representação de espaço de estados do seguinte sistema:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z + 2}{z^2 + z + 0,16}$$

Problema B.14.12 Considere a equação de diferenças

$$x(k+2) = x(k+1) + x(k)$$

onde $x(0) = 0$, $x(1) = 1$. Note que $x(2) = 1$, $x(3) = 2$, $x(4) = 3$, ... A série 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... é conhecida como a série de Fibonacci.

Obtenha a solução geral $x(k)$. Mostre que o valor limite de $x(k+1)/x(k)$ quando k tende a infinito é $(\sqrt{5} + 1)/2$, ou aproximadamente 1,62.

Análise de Estabilidade de Liapunov

15.1 INTRODUÇÃO

Para um dado sistema de controle, a estabilidade é geralmente a coisa mais importante a ser determinada. Se o sistema é linear e invariante no tempo, temos à disposição vários critérios de estabilidade. Entre eles o critério de estabilidade de Nyquist, o critério de estabilidade de Routh etc. Se o sistema é não linear, ou linear mas variando no tempo, então tais critérios de estabilidade não se aplicam. Embora uma técnica que emprega o gráfico de estabilidade de Nyquist possa ser aplicada a um grupo especial de sistemas não lineares, como descrito no Cap. 11, o método da função descritiva para a determinação da estabilidade é apenas aproximado. A análise de estabilidade baseada no método do plano de fase apresentada no Cap. 12 se aplica apenas para sistemas de primeira e segunda-ordem.

O segundo método de Liapunov (que também é chamado método direto de Liapunov) a ser apresentado neste capítulo é o método mais geral para a determinação da estabilidade de sistemas não lineares e/ou sistemas variantes no tempo. O método se aplica para sistemas de qualquer ordem.

Usando o segundo método de Liapunov, podemos determinar a estabilidade de um sistema sem resolver as equações de estado. Isto é uma vantagem porque a solução de equações de estado não lineares e/ou variando no tempo é geralmente muito difícil.

Embora o segundo método de Liapunov requeira uma considerável experiência e engenhosidade, ele pode responder à pergunta sobre a estabilidade de sistemas não lineares quando outros métodos falham.

O objetivo deste capítulo é o de apresentar o segundo método de Liapunov e ilustrar suas aplicações na análise de estabilidade tanto de sistemas lineares quanto não lineares.

Resumo do capítulo. Na Seção 15.2 apresentamos tópicos preliminares como definições dos vários tipos de estabilidade de sistemas e os conceitos de funções escalares definidas. A Seção 15.3 apresenta o teorema principal de estabilidade do segundo método e introduz a função de Liapunov. A Seção 15.4 discute a aplicação

do segundo método de Liapunov para a análise de estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo. Em seguida, na Seção 15.5 apresentamos uma técnica útil baseada no segundo método para estimar o comportamento transitório de sistemas. A Seção 15.6 discute a análise de estabilidade de sistemas não lineares. Apresentamos dois métodos para construir funções de Liapunov para tais sistemas. Finalmente, a Seção 15.7 resume comentários conclusivos para o capítulo.

15.2 DEFINIÇÕES

Nesta seção, inicialmente apresentamos definições de um sistema, de um estado de equilíbrio, estabilidade, estabilidade assintótica, e instabilidade. Em seguida definimos a característica de definição, semidefinição e indefinição de funções escalares.

Sistema. O sistema considerado neste capítulo é definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (15-1)$$

onde \mathbf{x} é um vetor de estado (vetor n -dimensional) e $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ é um vetor n -dimensional cujos elementos são funções de x_1, x_2, \dots, x_n e t . Supomos que o sistema da Eq. (15.1) tem uma única solução começando em uma dada condição inicial.

Denotaremos a solução da Eq. (15.1) como $\phi(t; \mathbf{x}_0, t_0)$, onde $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ em $t = t_0$ e t é o tempo observado. Portanto,

$$\phi(t_0; \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{x}_0$$

Estado de equilíbrio. No sistema da Eq. (15.1), um estado \mathbf{x}_e , onde

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) = \mathbf{0} \quad \text{para todo } t \quad (15-2)$$

é chamado de um estado de equilíbrio do sistema. Se o sistema é linear invariante no tempo, ou seja, se $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, então há apenas um estado de equilíbrio se \mathbf{A} é não singular e um número infinito de estados de equilíbrio se \mathbf{A} é singular. Para sistemas não lineares, pode haver um ou mais estados de equilíbrio. Estes estados correspondem às soluções constantes do sistema ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_e$ para todo t). A determinação dos estados de equilíbrio não envolve a solução das equações diferenciais do sistema. Eq. (15.1), mas apenas a solução da Eq. (15.2).

Qualquer estado de equilíbrio isolado (isto é, isolado um do outro) pode ser deslocado para a origem das coordenadas, ou $\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$, através de uma translação de coordenadas. Neste capítulo, trataremos da análise de estabilidade apenas de tais estados.

Estabilidade no sentido de Liapunov. A seguir, denotaremos uma região esférica de raio k ao redor de um estado de equilíbrio \mathbf{x}_e como

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\| \leq k$$

onde $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\|$ é chamada de norma Euclidiana e definida por

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\| = [(x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \dots + (x_n - x_{ne})^2]^{1/2}$$

Façamos $S(\delta)$ consistir em todos os pontos tais que

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta$$

e seja $S(\epsilon)$ o conjunto de todos os pontos tais que

$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \epsilon \quad \text{para todo } t \geq t_0$$

Um estado de equilíbrio x_e do sistema da Eq. (15.1) é dito estável no sentido de Liapunov se, correspondendo a cada $S(\epsilon)$, há um $S(\delta)$ tal que trajetórias partindo de $S(\delta)$ não saem de $S(\epsilon)$ quando t aumenta indefinidamente. O número real δ depende de ϵ , em geral, também de t_0 . Se δ não depende de t_0 , o estado de equilíbrio é dito uniformemente estável.

O que foi especificado aqui é que primeiro se escolhe a região $S(\epsilon)$, e para cada $S(\epsilon)$ deve haver uma região $S(\delta)$ tal que trajetórias partindo dentro de $S(\delta)$ não abandonam $S(\epsilon)$ quando t aumenta indefinidamente.

Estabilidade assintótica. Um estado de equilíbrio x_e do sistema da Eq. (15.1) é dito assintoticamente estável se ele é estável no sentido de Liapunov e se toda solução partindo de dentro de $S(\delta)$ converge, sem sair de $S(\epsilon)$, para x_e quando t aumenta indefinidamente.

Na prática, a estabilidade assintótica é mais importante do que a mera estabilidade. Também, como estabilidade assintótica é um conceito local, a simples confirmação de estabilidade assintótica pode não significar que o sistema vai operar adequadamente. Algum conhecimento do tamanho da máxima região de estabilidade assintótica é geralmente necessário. Esta região é chamada o domínio de atração. Este domínio é a parte do espaço de estados em que se originam trajetórias assintoticamente estáveis. Em outras palavras, toda trajetória que se origina no domínio de atração é assintoticamente estável.

Estabilidade assintótica global. Se a estabilidade assintótica vale para todos os estados (todos os pontos do espaço de estados) a partir dos quais se originam trajetórias, o estado de equilíbrio é dito assintoticamente estável globalmente. Isto é, o estado de equilíbrio x_e do sistema dado pela Eq. (15.1) é dito assintoticamente estável globalmente se ele é estável e se toda solução converge para x_e quando t aumenta indefinidamente. Obviamente uma condição necessária para estabilidade assintótica global é que haja apenas um estado de equilíbrio em todo o espaço de estados.

Em problemas de engenharia de controle, uma característica desejável é a estabilidade assintótica global. Se o estado de equilíbrio não é assintoticamente estável globalmente, então o problema se torna o de determinar a maior região de estabilidade assintótica. Isto é geralmente muito difícil. Entretanto, para todos os fins práticos, é suficiente determinar uma região de estabilidade assintótica suficientemente grande tal que nenhuma perturbação a exceda.

Instabilidade. Um estado de equilíbrio x_e é dito instável se para algum número real $\epsilon > 0$ e qualquer número real $\delta > 0$, tão pequenos quanto se queira, sempre há um estado x_0 em $S(\delta)$ tal que a trajetória partindo deste estado abandona $S(\epsilon)$.

Representação gráfica de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade. Uma representação gráfica destas definições vistas esclarecerá seus significados.

Vamos considerar o caso bidimensional. As Figs. 15.1 (a), (b) e (c) mostram estados de equilíbrio e trajetórias típicas correspondendo à estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade, respectivamente. Na Fig. 15.1 (a), (b) ou (c) a região $S(\delta)$ contém o estado inicial x_0 e a região $S(\epsilon)$ corresponde à região contendo a trajetória

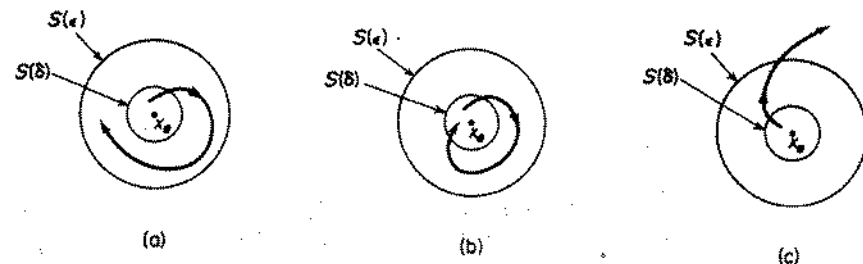


Fig. 15.1 (a) Estado de equilíbrio estável e uma trajetória representativa; (b) estado de equilíbrio assintoticamente estável e uma trajetória representativa; (c) estado de equilíbrio instável e uma trajetória representativa.

começando em x_0 .

Note que as definições dadas não especificam a região exata de condições iniciais permitidas. Portanto a definição se aplica à vizinhança do estado de equilíbrio, a não ser que $S(\epsilon)$ corresponda à totalidade do plano de estados.

Note que na Fig. 15.1(c), a trajetória sai de $S(\epsilon)$ e implica que o estado de equilíbrio é instável. Não podemos entretanto dizer que a trajetória irá para o infinito, pois ela pode tender a um ciclo limite fora da região $S(\epsilon)$. (Se um sistema linear invariante no tempo é instável, as trajetórias começando perto de um estado de equilíbrio instável se dirigem ao infinito. Mas no caso de sistemas não lineares, isto não é necessariamente verdade.)

O conhecimento destas definições é o requisito mínimo para o entendimento da análise de estabilidade de sistemas lineares e não lineares conforme apresentado neste capítulo. Note que estas definições não são as únicas que definem conceitos de estabilidade de um estado de equilíbrio. De fato, várias outras formas são encontradas na literatura. Por exemplo, na teoria de controle clássica, apenas os sistemas assintoticamente estáveis são chamados de sistemas estáveis, e aqueles que são estáveis no sentido de Liapunov, mas não assintoticamente estáveis, são chamados de instáveis.

Funções escalares positivas definidas. Uma função escalar $V(x)$ é dita *positiva definida* em uma região Ω (que inclui a origem do espaço de estados) se $V(x) > 0$ para todos os estados não nulos x na região Ω e $V(0) = 0$.

Uma função variando no tempo $V(x, t)$ é dita *positiva definida* em uma região Ω (que inclui a origem do espaço de estados) se é limitada inferiormente por uma função positiva definida $V(x)$ tal que

$$\begin{aligned} V(x, t) &> V(x) && \text{para todo } t \geq t_0 \\ V(0, t) &= 0 && \text{para todo } t \geq t_0 \end{aligned}$$

Funções escalares negativas definidas. Uma função escalar $V(x)$ é dita *negativa definida* se $-V(x)$ é positiva definida.

Funções escalares positivas semidefinidas. Uma função escalar $V(x)$ é dita *positiva semidefinida* se é positiva para todos os estados na região Ω , exceto na origem, e em certos outros estados, onde ela é nula.

Funções escalares negativas semidefinidas. Uma função escalar $V(x)$ é dita *negativa semidefinida* se $-V(x)$ é positiva semidefinida.

Funções escalares indefinidas. Uma função escalar é dita *indefinida* se na região Ω assume tanto valores positivos como negativos, independentemente de quão pequena é a região Ω .

Exemplo 15.1 Neste exemplo, damos várias funções escalares e suas classificações de acordo com as definições vistas. Aqui supomos que \mathbf{x} é um vetor bidimensional.

1. $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2$ positiva definida
2. $V(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^2$ positiva semidefinida
3. $-V(\mathbf{x}) = -x_1^2 - (3x_1 + 2x_2)^2$ negativa definida
4. $V(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2^2$ indefinida
5. $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + \frac{2x_2^2}{1+x_2^2}$ positiva definida

Formas quadráticas. Uma classe de funções escalares que têm um papel importante na análise de estabilidade baseada no segundo método de Liapunov é a forma quadrática. Um exemplo é

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x}$$

$$= [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Note que \mathbf{P} é real e simétrica.

Para determinar se a forma quadrática $V(\mathbf{x})$ é positiva definida pode-se utilizar o critério de Sylvester, o qual diz que as condições necessárias e suficientes para que a forma quadrática $V(\mathbf{x})$ seja positiva definida são que todos os menores principais* sucessivos de \mathbf{P} sejam positivos; isto é,

$$p_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots,$$

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \dots & p_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

*N. do T.: Nem todos os menores principais, mas apenas aqueles com a forma indicada no texto. Por exemplo:

$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{bmatrix}$ não nos interessa.

$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x}$ é positiva semidefinida se \mathbf{P} é singular e todos os menores principais são não negativos.

$V(\mathbf{x})$ é negativa definida se $-V(\mathbf{x})$ é positiva definida. De forma semelhante, $V(\mathbf{x})$ é negativa semidefinida se $-V(\mathbf{x})$ é positiva semidefinida.

Exemplo 15.2 Mostre que a seguinte forma quadrática é positiva definida:

$$V(\mathbf{x}) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3$$

A forma quadrática $V(\mathbf{x})$ pode ser escrita como

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Aplicando o critério de Sylvester, obtemos

$$10 > 0, \quad \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

Como todos os menores principais sucessivos da matriz \mathbf{P} são positivos, $V(\mathbf{x})$ é positiva definida.

15.3 O SEGUNDO MÉTODO DE LIAPUNOV

Em 1892, A. M. Liapunov apresentou dois métodos (chamados de primeiro e segundo métodos) para determinar a estabilidade de sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais ordinárias.

O primeiro método consiste em todos procedimentos em que a forma explícita das soluções das equações diferenciais é usada para a análise.

O segundo método, por outro lado, não requer as soluções das equações diferenciais. Portanto, é bastante conveniente para a análise de estabilidade de sistemas não lineares, para os quais soluções exatas podem não ser determináveis.

Segundo método de Liapunov. Da teoria clássica da mecânica, sabemos que um sistema vibratório é estável se sua energia total (uma função positiva definida) é continuamente decrescente (o que significa que a derivada temporal da energia total deve ser negativa definida) até que um estado de equilíbrio é alcançado.

O segundo método de Liapunov é baseado em uma generalização deste fato: se o sistema tem um estado de equilíbrio assintoticamente estável, então a energia armazenada do sistema deslocado dentro do domínio de atração decresce com o passar do tempo, até que finalmente assume um valor mínimo no estado de equilíbrio. Para sistemas puramente matemáticos, entretanto, não há uma maneira simples de definir uma "função de energia". Para contornar esta dificuldade, Liapunov introduziu a chamada função de Liapunov, uma função de energia fictícia. A ideia é, entretanto, mais geral que a de energia, e é aplicável de forma mais ampla. De fato, qualquer função escalar que satisfaz as hipóteses dos teoremas de estabilidade de Liapunov (veja Teoremas 15.1 e 15.2) pode servir como funções de Liapunov. (Para sistemas simples, podemos ser capazes de adivinhar

funções de Liapunov adequadas; mas, para um sistema complicado, achar uma função de Liapunov pode ser bastante difícil.)

As funções de Liapunov dependem de x_1, x_2, \dots, x_n , e de t . Denotamos estas por $V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ ou simplesmente por $V(x, t)$. Se as funções de Liapunov não incluírem o tempo t explicitamente, então denotamos por $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ou $V(x)$. No segundo método de Liapunov, o comportamento do sinal de $V(x, t)$ e o de sua derivada temporal $\dot{V}(x, t) = dV(x, t)/dt$ nos fornecem informação sobre a estabilidade, estabilidade assintótica, ou instabilidade de um estado de equilíbrio sem que haja a necessidade de se resolver diretamente as equações. (Isto se aplica tanto para sistemas lineares quanto não lineares.)

Teorema principal sobre estabilidade de Liapunov. Pode-se provar que, se uma função escalar $V(x)$, onde x é um vetor n -dimensional, é positiva definida, então os estados que satisfazem

$$V(x) = C$$

onde C é uma constante positiva, se localizam em uma hiper-superfície fechada no espaço de estados n -dimensional, pelo menos nas vizinhanças da origem. Se $V(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$, então tais superfícies fechadas se estendem sobre todo o espaço de estados. A hiper-superfície $V(x) = C_1$ está inteiramente dentro da hiper-superfície $V(x) = C_2$ se $C_1 < C_2$.

Para um dado sistema, caso se possa achar uma função escalar positiva definida tal que sua derivada temporal ao longo de uma trajetória é sempre negativa, então, quando o tempo aumenta, $V(x)$ assume valores cada vez mais baixos de C . Quando o tempo aumenta, $V(x)$ finalmente vai a zero, e portanto x também vai a zero. Isso implica que a origem do espaço de estados é assintoticamente estável. O teorema principal de Liapunov sobre estabilidade, que é uma generalização dos fatos agora descritos, fornece uma condição suficiente para estabilidade assintótica. Este teorema pode ser enunciado como segue:

Teorema 15.1 Suponha que um sistema é descrito por

$$\dot{x} = f(x, t)$$

onde

$$f(0, t) = 0 \quad \text{para todo } t$$

Se há uma função escalar $V(x, t)$ tendo primeiras derivadas parciais contínuas e satisfazendo as seguintes condições:

1. $V(x, t)$ é positiva definida
2. $\dot{V}(x, t)$ é negativa definida

então o estado de equilíbrio na origem é assintoticamente estável uniformemente.

Se, além disso, $V(x, t) \rightarrow \infty$ para $\|x\| \rightarrow \infty$, então o estado de equilíbrio na origem é assintoticamente estável uniformemente e de forma global.

Não forneceremos detalhes da prova do teorema. (A prova segue diretamente da definição de estabilidade assintótica. Para detalhes, veja, por exemplo, o Cap. 8 da Referência O-1.)

Exemplo 15.3 Considere o sistema descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

É claro que a origem ($x_1 = 0, x_2 = 0$) é o único estado de equilíbrio. Determine a sua estabilidade.

Se definirmos uma função escalar $V(x)$ como

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

que é positiva definida, então a derivada temporal de $V(x)$ ao longo de qualquer trajetória é

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= -2(x_1^2 + x_2^2)^2\end{aligned}$$

que é negativa definida. Isto mostra que $V(x)$ é continuamente decrescente ao longo de qualquer trajetória; portanto $V(x)$ é uma função de Liapunov. E como $V(x)$ se torna infinito para um desvio infinito a partir do estado de equilíbrio, pelo Teorema 15.1, o estado de equilíbrio na origem do sistema é assintoticamente estável globalmente.

Note que se fizermos $V(x)$ assumir valores constantes, $0, C_1, C_2, \dots$ ($0 < C_1 < C_2 < \dots$), então $V(x) = 0$ corresponde à origem do plano de estados e $V(x) = C_1, V(x) = C_2, \dots$ descrevem círculos que não se interceptam, contendo a origem do plano de estados, como visto na Fig. 15.2. Note também que como $V(x)$ não é limitada radialmente, ou $V(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$, os círculos se estendem sobre todo o plano de estados.

Como o círculo $V(x) = C_k$ fica completamente dentro do círculo $V(x) = C_{k+1}$, uma trajetória representativa cruza o limite dos contornos de V de fora para dentro. Daí, a interpretação geométrica de uma função de Liapunov pode ser enunciada como segue: $V(x)$ é uma medida da distância do estado x a partir da origem do espaço de estados. Se a distância entre a origem e o estado instantâneo $x(t)$ é continuamente decrescente quando t aumenta (isto é, $V(x(t)) < 0$), então $x(t) \rightarrow 0$. Como uma função de Liapunov $V(x)$ é interpretada como definindo uma distância a partir da origem do espaço de estados, sua derivada pode ser utilizada para fornecer uma estimativa quantitativa da velocidade com que a origem está sendo alcançada. (Para detalhes, veja Seção 15.5.)

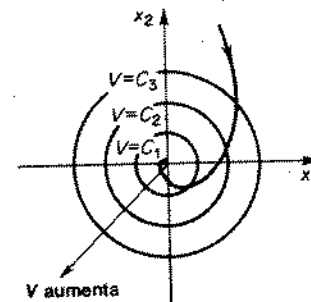


Fig. 15.2 Curvas de contorno de V constante e uma trajetória representativa.

Comentário. Embora o Teorema 15.1 seja um teorema básico do segundo método, ele é um tanto restritivo porque $\dot{V}(x, t)$ deve ser negativa definida. Se, entretanto, uma restrição adicional é imposta sobre $V(x, t)$, que ela não se anule ao longo de qualquer trajetória exceto na origem, então é possível substituir a condição de $V(x, t)$ negativa definida pela condição de $V(x, t)$ negativa semidefinida.

Teorema 15.2 Suponha que um sistema é descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

onde

$$\mathbf{f}(0, t) = \mathbf{0} \text{ para todo } t \geq t_0$$

Se há uma função escalar $V(\mathbf{x}, t)$ tendo primeiras derivadas parciais contínuas e satisfazendo as seguintes condições:

1. $V(\mathbf{x}, t)$ é positiva definida
2. $V(\mathbf{x}, t)$ é negativa semidefinida
3. $V(\phi(t; \mathbf{x}_0, t_0), t)$ não se anulando em $t \geq t_0$ para qualquer t_0 e qualquer $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$, onde $\phi(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ denota a trajetória ou solução partindo de \mathbf{x}_0 em t_0 .

então o estado de equilíbrio na origem do sistema é uniforme e assintoticamente estável globalmente.

Note que se $V(\mathbf{x}, t)$ não é negativa definida, mas apenas negativa semidefinida, então a trajetória de um ponto representativo pode-se tornar tangente a alguma superfície particular $V(\mathbf{x}, t) = C$. Entretanto, como $\dot{V}(\phi(t; \mathbf{x}_0, t_0), t)$ não se anula em $t \geq t_0$ para qualquer t_0 e qualquer $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$, o ponto representativo não pode permanecer no ponto tangente (o ponto que corresponde a $V(\mathbf{x}, t) = 0$) e portanto deve-se mover em direção à origem.

Se, entretanto, há uma função escalar positiva definida $V(\mathbf{x}, t)$ tal que $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ é identicamente zero, então o sistema pode permanecer em um ciclo limite. O estado de equilíbrio na origem, neste caso, é dito estável no sentido de Liapunov.

Exemplo 15.4 Considere o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

É claro que o único estado de equilíbrio é a origem, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Determine a estabilidade deste estado.

Vamos escolher a seguinte função escalar como uma possível função de Liapunov:

$$V(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 = \text{positiva definida}$$

Então $\dot{V}(\mathbf{x})$ se torna

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 4x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

$V(\mathbf{x})$ é indefinida. Isto implica que este particular $V(\mathbf{x})$ não é uma função de Liapunov, e portanto a estabilidade não pode ser determinada através do seu uso. (Como os autovalores da matriz dos coeficientes são $(-1 + j\sqrt{3})/2$ e $(-1 - j\sqrt{3})/2$, é claro que a origem do sistema é estável. Isto significa que não escolhemos uma função de Liapunov adequada.)

Se escolhermos a seguinte função escalar como uma possível função de Liapunov.

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 = \text{positiva definida}$$

então

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2x_2^2$$

que é negativa semidefinida. Se $V(\mathbf{x})$ deve se anular para todo $t \geq t_1$, então x_2 deve ser zero para todo $t \geq t_1$. Isto requer que $\dot{x}_2 = 0$ para $t \geq t_1$. Como

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2$$

x_1 deve também ser igual a zero para $t \geq t_1$. Isto significa que $V(\mathbf{x})$ se anula apenas na origem. Portanto, pelo Teorema 15.2, o estado de equilíbrio na origem é assintoticamente estável globalmente.

Para mostrar que uma escolha diferente de uma função de Liapunov fornece a mesma informação de estabilidade, vamos escolher a seguinte função escalar como outra possível função de Liapunov:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}[(x_1 + x_2)^2 + 2x_1^2 + x_2^2] = \text{positiva definida}$$

então $\dot{V}(\mathbf{x})$ se torna

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + 2x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = -(x_1^2 + x_2^2)$$

que é negativa definida. Como $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ quando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, pelo Teorema 15.1, o estado de equilíbrio na origem é assintoticamente estável globalmente.

Note que como os teoremas de estabilidade do segundo método requerem $V(\mathbf{x})$ positiva definida, frequentemente (mas não sempre) escolhemos $V(\mathbf{x})$ como uma forma quadrática em \mathbf{x} . (Note que a função positiva definida mais simples é uma forma quadrática.) Em seguida examinamos se $V(\mathbf{x})$ é pelo menos negativa semidefinida.

Instabilidade. Se um estado de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de um sistema é instável, então existe uma função escalar $W(\mathbf{x}, t)$ que determina a instabilidade do estado de equilíbrio. Apresentaremos um teorema sobre instabilidade sem uma demonstração.

Teorema 15.3 Suponha que um sistema é descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

onde

$$\mathbf{f}(0, t) = \mathbf{0} \text{ para todo } t \geq t_0$$

Se há uma função escalar $W(\mathbf{x}, t)$, tendo primeiras derivadas parciais contínuas e satisfazendo as seguintes condições:

1. $W(\mathbf{x}, t)$ é positiva definida em uma certa região ao redor da origem
2. $\dot{W}(\mathbf{x}, t)$ é positiva definida na mesma região

então o estado de equilíbrio na origem é instável.

15.4 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES

Há muitas abordagens para a investigação da estabilidade assintótica de sistemas lineares invariantes no tempo. Por exemplo, para um sistema de tempo contínuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

a condição necessária e suficiente para a estabilidade assintótica da origem do sistema pode ser enunciada como todos os autovalores de \mathbf{A} tendo partes reais

negativas, ou os zeros do polinômio característico

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

tendo partes reais negativas. De modo semelhante, para um sistema de tempo discreto

$$x(k+1) = Gx(k)$$

a condição necessária e suficiente para a estabilidade assintótica da origem pode ser enunciada como todos os autovalores de G tendo módulo menor que a unidade, ou que os zeros do polinômio característico

$$|zI - G| = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

estão dentro do círculo unitário centrado na origem do plano z .

A determinação dos autovalores se torna difícil ou impossível no caso de sistemas de ordem alta ou se alguns dos coeficientes do polinômio característico são não-numéricos. Neste caso, o critério de estabilidade de Routh pode ser aplicado convenientemente. Uma alternativa para este método é baseada no segundo método de Liapunov. A abordagem de Liapunov é algébrica e não requer a fatoração do polinômio característico. Além do mais este método pode ser usado para estimar o comportamento de resposta transitória do sistema (veja Seção 15.5) e pode ser aplicado no projeto do sistema (veja Seção 16.6). A finalidade desta seção é apresentar a abordagem de Liapunov na análise de estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo.

Análise de estabilidade de Liapunov para sistemas lineares invariantes no tempo. Considere o seguinte sistema linear invariante no tempo:

$$\dot{x} = Ax \quad (15-3)$$

onde x é um vetor de estado (vetor n -dimensional) e A é uma matriz constante $n \times n$. Supomos que A é não singular. Então o único estado de equilíbrio é a origem $x = 0$. A estabilidade do estado de equilíbrio do sistema linear invariante no tempo pode ser investigada facilmente usando-se o segundo método de Liapunov.

Para o sistema definido pela Eq. (15.3), vamos escolher uma possível função de Liapunov como

$$V(x) = x^* P x$$

onde P é uma matriz positiva definida Hermitiana. (Se x é um vetor real, então P pode ser escolhida como uma matriz real simétrica positiva definida.) A derivada de $V(x)$ em relação ao tempo ao longo de qualquer trajetória é

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^* P x + x^* P \dot{x} \\ &= (Ax)^* P x + x^* P Ax \\ &= x^* A^* P x + x^* P A x \\ &= x^* (A^* P + P A) x \end{aligned}$$

Como $V(x)$ foi escolhido positivo definido, requeremos, para estabilidade assintó-

tica, que $\dot{V}(x)$ seja negativa definida. Portanto, requeremos que

$$\dot{V} = -x^* Q x$$

onde

$$Q = -(A^* P + P A) = \text{positiva definida}$$

Portanto, para a estabilidade assintótica do sistema da Eq. (15.3), é suficiente que Q seja positiva definida. Para um teste para determinar se uma matriz $n \times n$ é positiva definida, aplicamos a condição de Sylvester, que diz que uma condição necessária e suficiente para que a matriz seja positiva definida é que os determinantes de todos os menores principais sucessivos da matriz sejam positivos.

Ao invés de especificar uma matriz positiva definida P e examinar se Q é ou não positiva definida, é conveniente especificar inicialmente uma matriz positiva definida Q e então examinar se P determinada de

$$A^* P + P A = -Q$$

é positiva definida. Note que P , sendo positiva definida, é uma condição necessária e suficiente. Resumiremos o que acabamos de ver na forma de um teorema.

Teorema 15.4 Considere o sistema descrito por

$$\dot{x} = Ax$$

onde x é um vetor de estado (vetor n -dimensional) e A uma matriz constante $n \times n$ não singular. Uma condição necessária e suficiente para que o estado de equilíbrio $x = 0$ seja assintoticamente estável globalmente é que, dada uma matriz positiva definida Hermitiana (ou simétrica real) Q , exista uma matriz positiva definida Hermitiana (ou real simétrica) P tal que

$$A^* P + P A = -Q$$

A função escalar $x^* P x$ é uma função de Liapunov para este sistema. (Note que no sistema linear em consideração, se o estado de equilíbrio (a origem) é assintoticamente estável, então ele é assintoticamente estável globalmente.)

Ao aplicar este teorema, várias observações importantes são necessárias.

1. Se $\dot{V}(x) = -x^* Q x$ não se anula ao longo de qualquer trajetória, então Q pode ser escolhida positiva semidefinida.
2. Se escolhermos uma matriz arbitrária Q positiva definida [ou uma matriz arbitrária Q positiva semidefinida se $\dot{V}(x)$ não se anula ao longo de qualquer trajetória] e resolvermos a equação matricial

$$A^* P + P A = -Q$$

para determinar P , então P positiva definida é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade assintótica do estado de equilíbrio $x = 0$.

3. O resultado final não depende da matriz Q escolhida em particular, contanto que ela seja positiva definida (ou positiva semidefinida, conforme o caso).

4. Para determinar os elementos da matriz P , equacionamos as matrizes $A^* P + P A$ e $-Q$ elemento por elemento. Isto resulta em $n(n+1)/2$ equações

lineares para a determinação dos elementos $p_{ij} = \bar{p}_{ji}$ de \mathbf{P} . Se chamarmos os autovalores de \mathbf{A} de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, cada um repetido tantas vezes quanto for sua multiplicidade como uma raiz da equação característica, e se para cada soma de duas raízes

$$\lambda_j + \lambda_k \neq 0$$

então os elementos de \mathbf{P} são univocamente determinados. Note que se a matriz \mathbf{A} representa um sistema estável, então as somas $\lambda_j + \lambda_k$ são sempre não nulas.

5. Ao se determinar se existe ou não uma matriz Hermitiana positiva definida ou uma matriz \mathbf{P} real e simétrica, é conveniente escolher $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, onde \mathbf{I} é a matriz identidade. Então os elementos de \mathbf{P} são determinados de

$$\mathbf{A}^* \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{I}$$

e a matriz \mathbf{P} é testada para ver se é positiva definida.

Exemplo 15.5 Considere o sistema de segunda-ordem descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

É claro que o estado de equilíbrio é a origem. Determine a estabilidade deste estado. Vamos supor uma função de Liapunov como tentativa

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

onde \mathbf{P} será determinado de

$$\mathbf{A}^* \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{I}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Expandindo esta equação matricial, obtemos três equações simultâneas como segue:

$$-2p_{12} = -1$$

$$p_{11} - p_{12} - p_{22} = 0$$

$$2p_{12} - 2p_{22} = -1$$

Resolvendo para determinar p_{11}, p_{12}, p_{22} , obtemos

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Para testar se \mathbf{P} é positiva definida, conferimos os determinantes dos menores principais sucessivos:

$$p_{11} = \frac{3}{2} > 0, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} > 0$$

Claramente, \mathbf{P} é positiva definida. Portanto, o estado de equilíbrio na origem é assintoticamente estável globalmente, e uma função de Liapunov é

$$V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \frac{1}{2}(3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2)$$

e

$$\dot{V} = -(x_1^2 + x_2^2)$$

Exemplo 15.6 Determine a gama de estabilidade para o ganho K do sistema visto na Fig. 15.3.

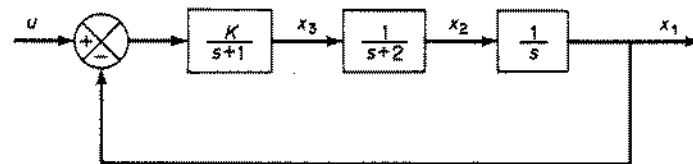


Fig. 15.3 Sistema de controle.

A equação de estado do sistema é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} [u] \quad (15-4)$$

Ao determinar a gama de estabilidade para K , supomos que a entrada u é nula. Então a Eq. (15.4) pode ser escrita como

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (15-5)$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + x_3 \quad (15-6)$$

$$\dot{x}_3 = -Kx_1 - x_3 \quad (15-7)$$

Das Eqs. (15.5) a (15.7) determinamos que a origem é o estado de equilíbrio. Vamos escolher a matriz \mathbf{Q} positiva semidefinida real simétrica

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15-8)$$

Esta escolha de Q é permitida pois $\dot{V}(x) = -x'Qx$ não pode ser identicamente zero exceto na origem. Para verificar isto, note que

$$\dot{V}(x) = -x'Qx = -x_3^2$$

$V(x)$, sendo identicamente nulo, implica que x_3 é identicamente zero. Se x_3 é zero, então x_1 deve ser zero, pois, da Eq. (15.7), obtemos

$$0 = -Kx_1 - 0$$

Se x_1 é zero, então x_2 também deve ser zero, pois, da Eq. (15.5),

$$0 = x_2$$

Portanto, $V(x)$ é identicamente zero apenas na origem. Desta forma, podemos usar a matriz Q definida pela Eq. (15.8) para a análise de estabilidade.

Vamos resolver

$$AP + PA = -Q$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -K \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

para os elementos de P . O resultado é

$$P = \begin{bmatrix} \frac{K^2 + 12K}{12 - 2K} & \frac{6K}{12 - 2K} & 0 \\ \frac{6K}{12 - 2K} & \frac{3K}{12 - 2K} & \frac{K}{12 - 2K} \\ 0 & \frac{K}{12 - 2K} & \frac{6}{12 - 2K} \end{bmatrix}$$

Para que P seja positiva definida, é necessário e suficiente que

$$12 - 2K > 0 \quad \text{e} \quad K > 0$$

ou

$$0 < K < 6$$

Portanto, para $0 < K < 6$, o sistema é estável no sentido convencional, isto é, a origem é assintoticamente estável globalmente.

Análise de estabilidade de Liapunov de sistemas de tempo discreto. Considere o sistema de tempo discreto descrito por

$$x(k+1) = Gx(k) \quad (15-9)$$

onde x é um vetor de estado (vetor n -dimensional) e G é uma matriz constante $n \times n$. A origem $x = 0$ é o estado de equilíbrio. Investigaremos a estabilidade deste estado pelo uso do segundo método de Liapunov.

Vamos escolher uma possível função de Liapunov como

$$V(x(k)) = x^*(k)Px(k)$$

onde P é uma matriz Hermitiana positiva definida (ou simétrica real). Observando que para sistemas discretos, ao invés de $V(x)$, usamos a diferença entre $V(x(k+1))$ e $V(x(k))$, ou

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k))$$

que é análogo à derivada de $V(x)$. Então,

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k)) &= V(x(k+1)) - V(x(k)) \\ &= x^*(k+1)Px(k+1) - x^*(k)Px(k) \\ &= [Gx(k)]^*P[Gx(k)] - x^*(k)Px(k) \\ &= x^*(k)G^*PGx(k) - x^*(k)Px(k) \\ &= x^*(k)[G^*PG - P]x(k) \end{aligned}$$

Como $V(x(k))$ foi escolhido positivo definido, impomos, para estabilidade assintótica, que $\Delta V(x(k))$ seja negativo definido. Portanto,

$$\Delta V(x(k)) = -x^*(k)Qx(k)$$

onde

$$Q = -(G^*PG - P) = \text{positiva definida}$$

Portanto, para a estabilidade assintótica do sistema discreto da Eq. (15.9), é suficiente que Q seja positiva definida.

De modo similar ao caso de sistemas lineares de tempo contínuo, é conveniente especificar uma matriz positiva definida Hermitiana Q (ou simétrica real) e então verificar se a matriz P determinada de

$$G^*PG - P = -Q$$

é positiva definida. Note que o fato de P ser positiva definida é uma condição necessária e suficiente. Resumiremos o que dissemos através de um teorema.

Teorema 15.5 Considere o sistema de tempo discreto

$$x(k+1) = Gx(k)$$

onde x é um vetor de estado (vetor n -dimensional) e G uma matriz $n \times n$ constante

não singular. Uma condição necessária e suficiente para que o estado de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ seja assintoticamente estável é que, dada uma matriz Hermitiana positiva definida (ou simétrica real) \mathbf{Q} , existe uma matriz positiva Hermitiana (ou simétrica real) \mathbf{P} tal que

$$\mathbf{G}^* \mathbf{P} \mathbf{G} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$$

A função escalar $\mathbf{x}^* \mathbf{P} \mathbf{x}$ é uma função de Liapunov para este sistema.

Se $\Delta V(\mathbf{x}(k)) = -\mathbf{x}^*(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k)$ não se anula identicamente ao longo de qualquer série solução, então \mathbf{Q} pode ser escolhida positiva semidefinida.

15.5 ESTIMANDO O COMPORTAMENTO DE RESPOSTA TRANSITÓRIA DE SISTEMAS DINÂMICOS

A aplicabilidade do segundo método de Liapunov para teoria de controle não está limitada à análise de estabilidade. Ele pode ser aplicado ao estudo do comportamento de resposta transitória de sistemas lineares e não lineares. Nesta seção discutiremos a relação entre funções de Liapunov e o comportamento de resposta transitória de sistemas dinâmicos.

Como mencionado anteriormente neste capítulo, as funções de Liapunov fornecem uma medida de distância no espaço de estados. Portanto, para um sistema assintoticamente estável para o qual obtivemos uma função de Liapunov, este pode ser usado para estimar a rapidez da resposta transitória.

Vamos supor que o estado de equilíbrio é a origem do espaço de estados e definamos

$$\eta = -\frac{\dot{V}(\mathbf{x}, t)}{V(\mathbf{x}, t)} \quad (15-10)$$

em alguma região do espaço de estados excluindo a origem.

Para sistemas assintoticamente estáveis uniformemente, podemos achar uma função de Liapunov negativa definida V , pelo menos em princípio. Na análise presente, excluiremos portanto o caso em que $\dot{V}(\mathbf{x}, t) = 0$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Então o valor de η é sempre positivo uma vez que V é positivo definido e \dot{V} é negativo definido. A Eq. (15.10) fornece uma indicação de quão rapidamente o sistema se dirige ao seu estado de equilíbrio.

Se fizermos o valor mínimo da relação $-\dot{V}(\mathbf{x}, t)/V(\mathbf{x}, t)$ igual a um certo η_{\min} ,

$$\eta_{\min} = \min \left[-\frac{\dot{V}(\mathbf{x}, t)}{V(\mathbf{x}, t)} \right] \quad (15-11)$$

então

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq -\eta_{\min} V(\mathbf{x}, t)$$

e

$$V(\mathbf{x}, t) \leq V(\mathbf{x}_0, t_0) e^{-\eta_{\min}(t-t_0)} \quad (15-12)$$

onde $V(\mathbf{x}_0, t_0)$ corresponde ao valor inicial de V começando no estado $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ no instante $t = t_0$.

Interpretando V como a distância a partir da origem, é claro que a Eq. (15.12) fornece uma estimativa de quão rapidamente estamos tendendo ao equilíbrio. Em

outras palavras, dado o estado inicial \mathbf{x}_0 e o valor inicial $V(\mathbf{x}_0, t_0)$, o sistema alcança a região

$$V(\mathbf{x}, t) = V(\mathbf{x}_0, t_0) e^{-\eta_{\min}(t-t_0)}$$

em $t - t_0$ segundos.

Da Eq. (15.11), vemos que $1/\eta_{\min}$ corresponde à maior constante de tempo relativa a variações na função de Liapunov V . Como $V(\mathbf{x})$ pode ser expandida em uma série começando com um termo quadrático em \mathbf{x} , esta constante de tempo $1/\eta_{\min}$ é cerca da metade da constante de tempo convencional definida para o sistema. Valores maiores de η_{\min} correspondem a uma resposta mais rápida.

Como podem existir várias funções de Liapunov para um dado sistema, podemos obter vários diferentes valores de η_{\min} . O maior valor de η_{\min} representa a figura de mérito. Entretanto, normalmente não sabemos como construir a função de Liapunov que fornece o maior valor de η_{\min} .

Para um sistema não linear, η_{\min} pode depender do estado do sistema. Este método só é útil se a função de Liapunov disponível tem forma suficientemente simples.

Cálculo de η para sistemas lineares invariantes no tempo. Considere o sistema linear invariante no tempo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

onde

\mathbf{x} = vetor n -dimensional

\mathbf{A} = matriz $n \times n$ não singular

Suponha que os autovalores de \mathbf{A} tenham partes reais negativas. Então uma função de Liapunov e sua derivada temporal são

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^* \mathbf{P} \mathbf{x}, \quad \dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^* \mathbf{Q} \mathbf{x}$$

onde

\mathbf{P} = matriz positiva definida Hermitiana (ou simétrica real)

$\mathbf{Q} = -(\mathbf{A}^* \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A})$

Uma definição de η_{\min} , equivalente à Eq. (15.11) é

$$\eta_{\min} = \min_{\mathbf{x}} \{ \mathbf{x}^* \mathbf{Q} \mathbf{x} ; \mathbf{x}^* \mathbf{P} \mathbf{x} = 1 \}$$

O membro direito desta equação significa que tomamos o valor mínimo de $\mathbf{x}^* \mathbf{Q} \mathbf{x}$ quando \mathbf{x} varia, satisfazendo a condição de que $\mathbf{x}^* \mathbf{P} \mathbf{x} = 1$. Isto é o mesmo que considerar o mínimo valor da razão

$$-\frac{\dot{V}(\mathbf{x}, t)}{V(\mathbf{x}, t)} = \frac{\mathbf{x}^* \mathbf{Q} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{P} \mathbf{x}}$$

ao longo de uma superfície particular $V(\mathbf{x}) = 1$, ou $\mathbf{x}^* \mathbf{P} \mathbf{x} = 1$.

A minimização requerida pode ser feita através do uso da técnica de multiplicadores de Lagrange. Seja μ o multiplicador de Lagrange. Então, a minimização de $\mathbf{x}^* \mathbf{Q} \mathbf{x}$ com a condição de $\mathbf{x}^* \mathbf{P} \mathbf{x} = 1$ é o mesmo que a minimização de $\mathbf{x}^* \mathbf{Q} \mathbf{x} - \mu \mathbf{x}^* \mathbf{P} \mathbf{x}$

com relação a \mathbf{x} . O valor mínimo de $\mathbf{x}^* \mathbf{Q} \mathbf{x} - \mu \mathbf{x}^* \mathbf{P} \mathbf{x}$ ocorre em um valor \mathbf{x}_{\min} de \mathbf{x} tal que

$$(\mathbf{Q} - \mu \mathbf{P}) \mathbf{x}_{\min} = \mathbf{0} \quad (15-13)$$

Portanto, obtemos

$$\mathbf{x}_{\min}^* (\mathbf{Q} - \mu \mathbf{P}) \mathbf{x}_{\min} = 0$$

ou

$$\mathbf{x}_{\min}^* \mathbf{Q} \mathbf{x}_{\min} = \mu \mathbf{x}_{\min}^* \mathbf{P} \mathbf{x}_{\min} = \mu > 0$$

que é um mínimo se μ é mínimo. Mas, pela Eq. (15.13), μ é um autovalor da matriz $\mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1}$. Portanto η_{\min} é igual ao autovalor mínimo λ_{\min} de $\mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1}$.

Exemplo 15.7 Considere o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ache uma função de Liapunov para o sistema. Em seguida obtenha um limite superior para o tempo de resposta que o sistema leva para ir de um ponto na borda da curva fechada

$$V(\mathbf{x}) = 150$$

para um ponto dentro da curva fechada

$$V(\mathbf{x}) = 0,06$$

Vamos supor que $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ e determinemos \mathbf{P} , resolvendo

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O resultado é

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto obtemos uma função de Liapunov como segue:

$$V = \mathbf{x}^* \mathbf{P} \mathbf{x} = \frac{1}{2}(3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2)$$

Observando que

$$\dot{V} = -\mathbf{x}^* \mathbf{x} = -(x_1^2 + x_2^2)$$

obtemos o valor de η como

$$\eta = -\frac{\dot{V}}{V} = \frac{2(x_1^2 + x_2^2)}{3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2}$$

O valor mínimo de η pode ser obtido como o autovalor mínimo de $\mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1}$. Como supusemos que $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, obtemos

$$|\mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1} - \lambda \mathbf{I}| = |\mathbf{P}^{-1} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

A determinação dos autovalores de \mathbf{P}^{-1} equivale a resolver

$$|\mathbf{I} - \mathbf{P} \lambda| = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{3}{2}\lambda & -\frac{1}{2}\lambda \\ -\frac{1}{2}\lambda & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Os dois autovalores são

$$\lambda_1 = 1,447, \quad \lambda_2 = 0,553$$

Portanto

$$\eta_{\min} = \lambda_2 = 0,553$$

Da Eq. (15.12),

$$V(\mathbf{x}, t) \leq V(\mathbf{x}_0, t_0) e^{-\eta_{\min}(t-t_0)}$$

ou

$$-\frac{1}{\eta_{\min}} \ln \left[\frac{V(\mathbf{x}, t)}{V(\mathbf{x}_0, t_0)} \right] \geq t - t_0 \quad (15-14)$$

Para computar $t - t_0$, usamos o valor de η_{\min} que acabamos de encontrar. A substituição de $\eta_{\min} = 0,553$, $V(\mathbf{x}, t) = 0,06$, e $V(\mathbf{x}_0, t_0) = 150$ na Eq. (15.14) nos fornece

$$-\frac{1}{0,553} \ln \left(\frac{0,06}{150} \right) \geq t - t_0$$

ou

$$14,1 \geq t - t_0$$

Qualquer trajetória começando na curva $V(\mathbf{x}_0, t_0) = 150$ estará dentro da região circundada pela curva $V(\mathbf{x}, t) = 0,06$ dentro de 14,1 unidades de tempo. (Note que este intervalo de tempo depende da escolha das matrizes \mathbf{P} e \mathbf{Q} . Se escolhermos matrizes \mathbf{P} e \mathbf{Q} apropriadas, poderemos ter um número menor que 14,1 como um limite superior para $t - t_0$.)

15.6 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Em um sistema linear, se o estado de equilíbrio é localmente e assintoticamente estável, então também é assintoticamente estável globalmente. Entretanto, em um sistema não linear, um estado de equilíbrio pode ser assintoticamente estável localmente sem ser assintoticamente estável globalmente. Portanto, as implicações de estabilidade assintótica de estados de equilíbrio de sistemas lineares são bastante diferentes daquelas de sistemas não lineares. Por exemplo, considere o sistema não linear discutido no Exemplo 12.7, reescrito abaixo como

$$\ddot{x} + 0,5\dot{x} + 2x + x^2 = 0$$

A Fig. 15.4 mostra o diagrama do plano de fase para este sistema. Neste caso, a origem é assintoticamente estável. Mas trajetórias partindo de pontos fora da região hachurada vão para o infinito, como mostrado. O fato de que a estabilidade assintótica é uma propriedade local pode ser claramente visto neste exemplo.

Como a estabilidade de sistemas não lineares tem uma natureza local, geralmente estamos interessados em determinar uma função de Liapunov que satisfaz condições de estabilidade na maior região em torno da origem.

Vários métodos baseados no segundo método de Liapunov são disponíveis para testar a estabilidade de sistemas não lineares. Esta seção apresenta dois dos métodos: o primeiro é o método de Krasovskii para testar condições suficientes para estabilidade assintótica, e o segundo é o método de Schultz-Gibson, ou do gradiente variável, para gerar funções de Liapunov.

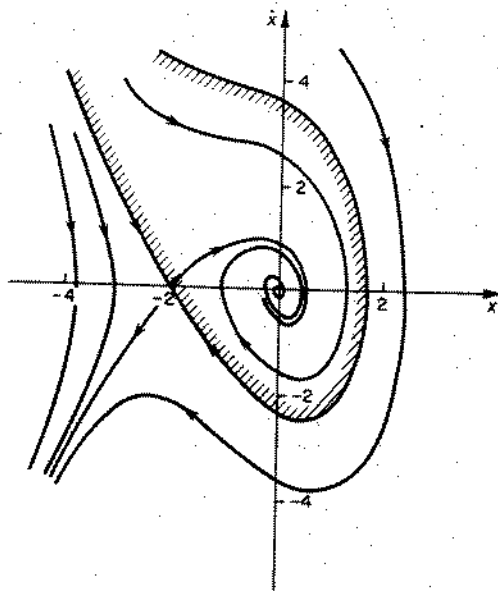


Fig. 15.4 Diagrama de plano de fase do sistema descrito por $\ddot{x} + 0,5\dot{x} + 2x + x^2 = 0$.

Método de Krasovskii. Para certos sistemas não lineares, uma possível função de Liapunov pode ser escolhida em termos de \dot{x} ao invés das variáveis de estado. Krasovskii sugeriu uma possível função de Liapunov como sendo a norma Euclidiana de \dot{x} , ou $V = \|\dot{x}\|^2$.

O teorema de Krasovskii, a ser apresentado em seguida, não é limitado a pequenos deslocamentos do estado de equilíbrio. Ele difere essencialmente dos métodos de linearização usuais. O teorema de Krasovskii para estabilidade assintótica global fornece condições suficientes para sistemas não lineares e condições necessárias e suficientes* para sistemas lineares. (Um estado de equilíbrio de um sistema não linear pode ser estável mesmo que as condições especificadas neste teorema não sejam satisfeitas. Portanto, ao usar o teorema de Krasovskii, devemos ter cuidado para não tirar conclusões erradas sobre a estabilidade do estado de equilíbrio do dado sistema não linear.)

Em um sistema não linear, pode haver mais de um estado de equilíbrio. Entretanto, é possível transferir um estado de equilíbrio isolado para a origem do espaço de estados por uma transformação adequada de coordenadas. Portanto, consideraremos o estado de equilíbrio em estudo como a origem.

Apresentaremos agora o teorema de Krasovskii.

Teorema 15.6. (Teorema de Krasovskii). Considere o sistema definido por

$$\dot{x} = f(x)$$

onde x é um vetor n -dimensional. Suponha que $f(0) = 0$ e que $f(x)$ é diferenciável com respeito a x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. A matriz Jacobiana $F(x)$ para o sistema é

$$F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Vamos definir

$$\hat{F}(x) = F^*(x) + F(x)$$

onde $F^*(x)$ é a transposta conjugada de $F(x)$. Se a matriz Hermitiana $\hat{F}(x)$ é negativa definida, então o estado de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável. Uma função de Liapunov para este sistema é

$$V(x) = f^*(x)f(x)$$

*N. do T.: Mesmo para sistemas lineares as condições são apenas suficientes. Por exemplo,

em $\dot{x} = Ax$ com $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ ou $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$, temos \hat{F} não negativa definida.

Se, adicionalmente, $f^*(x)f(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$, então o estado de equilíbrio é assintoticamente estável globalmente.

DEMONSTRAÇÃO: Se $\hat{F}(x)$ é negativa definida para todo $x \neq 0$, o determinante de F é não nulo em todo espaço exceto em $x = 0$. (Referir-se aos Problemas A.15.5 e A.15.7.) Não há outro estado de equilíbrio além de $x = 0$ em todo espaço de estados. Como $f(0) = 0$, $f(x) \neq 0$ para $x \neq 0$, e $V(x) = f^*(x)f(x)$, $V(x)$ é positiva definida. Observando que

$$\dot{f}(x) = F(x)\dot{x} = F(x)f(x)$$

podemos obter \dot{V} como

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{f}^*(x)f(x) + f^*(x)\dot{f}(x) \\ &= [F(x)f(x)]^*f(x) + f^*(x)F(x)f(x) \\ &= f^*(x)[F^*(x) + F(x)]f(x) \\ &= f^*(x)\hat{F}(x)f(x)\end{aligned}$$

Se $\hat{F}(x)$ é negativa definida, vemos que $\dot{V}(x)$ é negativa definida. Portanto $V(x)$ é uma função de Liapunov. Desta forma, a origem é assintoticamente estável. Se $V(x) = f^*(x)f(x)$ tende a infinito quando $\|x\| \rightarrow \infty$, então, pelo Teorema 15.1, o estado de equilíbrio é assintoticamente estável globalmente.

Note que $\hat{F}(x)$, sendo negativa definida, requer que $F(x)$ tenha elementos não nulos em sua diagonal principal. Portanto, se $f_i(x)$ não é função de x_i , então $\hat{F}(x)$ não pode ser negativa definida.

Exemplo 15.8 Usando o teorema de Krasovskii, examine a estabilidade do estado de equilíbrio $x = 0$ do seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_2^2\end{aligned}$$

Para este sistema

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 - x_2 - x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\hat{F}(x) &= F^*(x) + F(x) \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 - 6x_2^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Como $\hat{F}(x)$ é negativa definida para todo $x \neq 0$, o estado de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável. Além do mais,

$$f^*(x)f(x) = x_1^2 + (x_1 - x_2 - x_2^2)^2 \rightarrow \infty$$

quando $\|x\| \rightarrow \infty$. O estado de equilíbrio $x = 0$ é, portanto, assintoticamente estável globalmente.

Método do gradiente variável. O método do gradiente variável é baseado no fato de que, se existe uma função particular de Liapunov, que é capaz de provar a estabilidade de um dado sistema, então também existe um gradiente único desta função V .

Considere o sistema descrito pela seguinte equação:

$$\dot{x} = f(x, t)$$

Supomos que o estado de equilíbrio em questão é a origem do espaço de estados. (Como dito antes, sempre podemos transferir qualquer estado de equilíbrio isolado para a origem.) Vamos denotar uma função de Liapunov de tentativa como V . Nesta função, supomos que V é uma função explícita de x mas não de t . Então,

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n$$

que pode ser escrita

$$\dot{V} = (\nabla V)' \dot{x}$$

onde $(\nabla V)'$ é a transposta de $\nabla V = \nabla V$, o gradiente de V , é

$$\nabla V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla V_1 \\ \vdots \\ \nabla V_n \end{bmatrix}$$

V é obtido como uma integral de linha de ∇V como

$$V = \int_0^x (\nabla V)' dx \quad (15-15)$$

O limite superior de integração nesta equação não implica que V é uma quantidade vetorial, mas sim que a integral é uma integral de linha para um ponto arbitrário (x_1, x_2, \dots, x_n) no espaço de estados. Esta integral pode ser feita independente do caminho de integração. O caminho mais simples é indicado pela forma expandida da Eq. (15.15):

$$\begin{aligned}V &= \int_0^{x_1, (x_2=x_3=\dots=x_n=0)} \nabla V_1 dx_1 + \int_0^{x_2, (x_1=x_3=x_4=\dots=x_n=0)} \nabla V_2 dx_2 + \dots \\ &+ \int_0^{x_n, (x_1=x_2=x_3=\dots=x_{n-1}=x_{n+1})} \nabla V_n dx_n\end{aligned} \quad (15-16)$$

onde ∇V_i é a componente de ∇V na direção x_i .
Vamos definir

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

A integral dada pela Eq. (15.16) diz que o caminho parte da origem e se move ao longo do vetor e_1 para x_1 . Deste ponto, o caminho se move na direção do vetor e_2 para x_2 . Em seguida, o caminho se move na direção do vetor e_3 para x_3 . Desta forma o caminho finalmente alcança o ponto (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Para uma função escalar V ser obtida de forma única a partir de uma integral de linha de uma função vetorial ∇V , a matriz F seguinte, formada tomando-se $\partial \nabla V_i / \partial x_j$,

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \nabla V_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \nabla V_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \nabla V_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

deve ser simétrica. Portanto, impomos que

$$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

O número total de tais equações é $n(n-1)/2$. Por exemplo, no caso de $n = 3$, temos três equações:

$$\frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \nabla V_3}{\partial x_1} = \frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial \nabla V_3}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_3}$$

A condição na matriz F é portanto uma condição de rotacional generalizado para o caso n -dimensional. O problema de determinar uma função V que satisfaz o teorema de Liapunov é então transformado no problema de determinar um ∇V tal que o rotacional n -dimensional de ∇V é igual a zero. Além do mais, V e ∇V determinados a partir de ∇V devem ser suficientes para provar a estabilidade: isto é, devem satisfazer o teorema de Liapunov. Inicialmente fazemos ∇V igual a um vetor coluna arbitrário

$$\nabla V = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} \quad (15-17)$$

Os a_{ij} são quantidades totalmente indeterminadas. Os a_{ij} podem ser constantes ou funções do tempo t e/ou funções das variáveis de estado. Entretanto, é conveniente escolher a_{nn} como uma constante ou uma função do tempo t . Vários dos a_{ij} podem ser escolhidos nulos, ou eles são óbvios a partir das condições em V impostas pelo investigador, ou podem ser determinados das equações do rotacional.

Se o estado de equilíbrio $x = 0$ de um sistema não linear é assintoticamente estável, então poderemos obter uma função de Liapunov seguindo o procedimento:

1. Suponha ∇V da forma da Eq. (15.17).
2. De ∇V , determine V .
3. Imponha que V seja negativa definida ou pelo menos negativa semidefinida.
4. Use as $n(n-1)/2$ equações do rotacional, obtidas da imposição de simetria de F , para determinar os coeficientes desconhecidos restantes em ∇V .
5. Reteste V , pois a adição de termos requeridos como um resultado do Passo 4 pode alterar V .
6. Determine V da Eq. (15.16).
7. Examine a região de estabilidade assintótica.

Note que o fato de não conseguir obter uma função de Liapunov adequada através deste método não implica a instabilidade do estado de equilíbrio. (Não se pode tirar conclusões sobre a estabilidade.)

Exemplo 15.9 Vamos construir uma função de Liapunov para o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_1^2x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned}$$

usando o método do gradiente variável.

Seja o gradiente de V

$$\nabla V = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

A derivada de V é então

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \nabla V \cdot \dot{x} \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\dot{x}_1 + (a_{21}x_1 + 2x_2)\dot{x}_2 \\ &= -a_{11}x_1^2 + 2a_{11}x_1^2x_2 - a_{12}x_1x_2 + 2a_{12}x_1^2x_2^2 - a_{21}x_1x_2 - 2x_2^2 \end{aligned} \quad (15-18)$$

Façamos como uma tentativa

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = a_{21} = 0$$

então a Eq. (15.18) se torna

$$\dot{V} = -x_1^2(1 - 2x_1x_2) - 2x_2^2$$

V é negativa definida se

$$1 - 2x_1x_2 > 0$$

(15-19)

Portanto, a Eq. (15.19) é uma condição em x_1 e x_2 . O gradiente ∇V é

$$\nabla V = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$$

Note que

$$\frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} = 0$$

Vemos que a equação do rotacional é satisfeita. V é

$$V = \int_0^{x_1, (x_2=0)} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2, (x_1=x_1)} 2x_2 dx_2 \\ = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2$$

(15-20)

Desta função de Liapunov, podemos dizer que o sistema é assintoticamente estável na região

$$1 > 2x_1x_2$$

Para mostrar que a função de Liapunov dada pela Eq. (15.20) não é a única possível, vamos escolher

$$a_{11} = \frac{2}{(1 - x_1x_2)^2}, \quad a_{12} = \frac{-x_1^2}{(1 - x_1x_2)^2}, \quad a_{21} = \frac{x_1^2}{(1 - x_1x_2)^2}$$

Então

$$\dot{V} = -2x_1^2 - 2x_2^2$$

V é negativa definida em todo o plano de estados. ∇V se torna

$$\nabla V = \begin{bmatrix} \frac{2x_1}{(1 - x_1x_2)^2} - \frac{x_1^2x_2}{(1 - x_1x_2)^3} \\ \frac{x_1^2}{(1 - x_1x_2)^2} + 2x_2 \end{bmatrix}$$

Como

$$\frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{3x_1^2 - x_1^2x_2}{(1 - x_1x_2)^3} \\ \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} = \frac{3x_1^2 - x_1^2x_2}{(1 - x_1x_2)^3}$$

a equação do rotacional é satisfeita. V é

$$V = \int_0^{x_1, (x_2=0)} \left[\frac{2x_1}{(1 - x_1x_2)^2} - \frac{x_1^2x_2}{(1 - x_1x_2)^3} \right] dx_1 +$$

$$\int_0^{x_2, (x_1=x_1)} \left[\frac{x_1^2}{(1 - x_1x_2)^2} + 2x_2 \right] dx_2 = x_1^2 + \frac{x_1^2}{1 - x_1x_2} \quad (15-21)$$

Desta função de Liapunov, vemos que a origem do sistema é assintoticamente estável na região

$$1 > x_1x_2$$

É claro que a função de Liapunov definida pela Eq. (15.20) fornece uma região de estabilidade assintótica menor do que a função de Liapunov dada pela Eq. (15.21). Portanto esta última função é uma escolha melhor do que a anterior.

15.7 COMENTÁRIOS CONCLUSIVOS

Ao concluir este capítulo, resumiremos pontos importantes para serem lembrados:

1. Uma função de Liapunov tem as seguintes propriedades:
 - (a) É uma função escalar.
 - (b) É uma função positiva definida, pelo menos nas vizinhanças da origem.
 - (c) Sua derivada temporal é não-positiva.
 - (d) Não é uma função única para um dado sistema.
2. Uma vantagem do segundo método de Liapunov está na sua habilidade de fornecer informação sobre estabilidade global tanto para sistemas lineares quanto não lineares.
3. Se uma função de Liapunov pode ser achada em uma região Ω incluindo a origem do espaço de estados, então a estabilidade ou a estabilidade assintótica da origem está verificada. Isto, entretanto, não significa necessariamente que as trajetórias, partindo de um estado da região Ω , tendem a infinito, pois o segundo método apenas estabelece condições suficientes para estabilidade. (Lembre-se de que o fato de não conseguir determinar uma função de Liapunov para mostrar estabilidade, estabilidade assintótica, ou instabilidade de um estado de equilíbrio não significa nada.) Note também que para sistemas não lineares certas funções de Liapunov são superiores a outras, significando que a região de estabilidade assintótica é maior, ou V é negativa definida ao invés de negativa semidefinida etc.
4. Se a origem do sistema é estável ou assintoticamente estável, então funções de Liapunov com as propriedades requeridas sempre existem, embora a sua determinação possa ser um tanto difícil. Esta dificuldade é a principal desvantagem da análise de estabilidade baseada no segundo método de Liapunov.
5. Além de prover um critério de estabilidade, as funções de Liapunov podem ser usadas para a análise de resposta transitória de sistemas simples. (Veja a Seção 15.5.) As funções de Liapunov também podem ser usadas para resolver problemas de otimização baseados nos índices de desempenho quadráticos. (Veja a Seção 16.5.)

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS E SOLUÇÕES

Problema A.15.1 Determine se a seguinte forma quadrática é negativa definida.

$$Q = -x_1^2 - 3x_2^2 - 11x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 2x_1x_3$$

Solução. A forma quadrática fornecida Q pode ser escrita como

$$Q = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Aplicando o critério de Sylvester, achamos

$$-1 < 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -11 \end{vmatrix} < 0$$

A forma quadrática é negativa definida.

Problema A.15.2 Considere o sistema

$$\dot{x} = Ax$$

onde os autovalores de A são distintos e têm partes reais negativas. Suponha que a transformação

$$x = Py$$

transforma a matriz dos coeficientes na forma diagonal:

$$\dot{y} = P^{-1}APy = Dy$$

Obtenha uma função de Liapunov para este sistema.

Solução. Considere o seguinte $V(y)$:

$$V(y) = y^*y = \text{positiva definida}$$

A derivada em relação ao tempo de $V(y)$ é

$$\begin{aligned} \dot{V}(y) &= \dot{y}^*y + y^*\dot{y} \\ &= y^*D^*y + y^*Dy \\ &= 2y^*Dy \end{aligned}$$

Como os autovalores de D e aqueles de A são idênticos e os autovalores de A têm partes reais negativas, $V(y)$ é negativo definido. Portanto, a função $V(y)$ considerada aqui é uma função de Liapunov.

Problema A.15.3 Considere o sistema de segunda-ordem

$$\ddot{x} = Ax$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (a_{ij} = \text{real})$$

Determine a matriz real simétrica P que satisfaz

$$A^*P + PA = -I$$

Em seguida ache a condição para que P seja positiva definida. (Note que a condição de P ser positiva definida implica que a origem $x = 0$ é assintoticamente estável globalmente.)

Solução. A equação

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

fornece as três equações simultâneas seguintes:

$$2(a_{11}p_{11} + a_{21}p_{12}) = -1$$

$$a_{11}p_{12} + a_{21}p_{22} + a_{12}p_{11} + a_{22}p_{12} = 0$$

$$2(a_{12}p_{12} + a_{22}p_{22}) = -1$$

Resolvendo para obter os p_{ij} , obtemos

$$P = \frac{1}{2(a_{11} + a_{22})|A|} \begin{bmatrix} -(|A| + a_{11}^2 + a_{22}^2) & a_{12}a_{22} + a_{21}a_{11} \\ a_{12}a_{22} + a_{21}a_{11} & -(|A| + a_{11}^2 + a_{22}^2) \end{bmatrix}$$

P é positiva definida se

$$p_{11} = \frac{|A| + a_{11}^2 + a_{22}^2}{2(a_{11} + a_{22})|A|} > 0$$

$$|P| = \frac{(a_{11} + a_{22})^2 + (a_{12} - a_{21})^2}{4(a_{11} + a_{22})^2|A|} > 0$$

do que obtemos

$$|A| > 0, \quad a_{11} + a_{22} < 0$$

como as condições para que P seja positiva definida.

Problema A.15.4 Considere o movimento de uma nave espacial em torno dos eixos principais de inércia. As equações de Euler são

$$A\dot{\omega}_x - (B - C)\omega_y\omega_z = T_x$$

$$B\dot{\omega}_y - (C - A)\omega_x\omega_z = T_y$$

$$C\dot{\omega}_z - (A - B)\omega_x\omega_y = T_z$$

onde A , B e C denotam os momentos de inércia em torno dos eixos principais; ω_x , ω_y e ω_z denotam as velocidades angulares em torno dos eixos principais; e T_x , T_y e T_z são os torques de controle.

Suponha que a nave espacial está com movimentos de rotação anormais em sua órbita. Deseja-se parar estas rotações anormais aplicando torques de controle que se supõe serem

$$T_x = k_1 A \omega_x$$

$$T_y = k_2 B \omega_y$$

$$T_z = k_3 C \omega_z$$

Determine condições suficientes para operação assintoticamente estável do sistema.

Solução. Vamos escolher as variáveis de estado como

$$x_1 = \omega_x, \quad x_2 = \omega_y, \quad x_3 = \omega_z$$

Então as equações do sistema se tornam

$$\dot{x}_1 - \left(\frac{B}{A} - \frac{C}{A}\right)x_2x_3 = k_1x_1$$

$$\dot{x}_2 - \left(\frac{C}{B} - \frac{A}{B}\right)x_3x_1 = k_2x_2$$

$$\dot{x}_3 - \left(\frac{A}{C} - \frac{B}{C}\right)x_1x_2 = k_3x_3$$

ou

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & \frac{B}{A}x_3 & -\frac{C}{A}x_2 \\ -\frac{A}{B}x_3 & k_2 & \frac{C}{B}x_1 \\ \frac{A}{C}x_2 & -\frac{B}{C}x_1 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

O estado de equilíbrio é a origem, ou $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Se escolhermos

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{x}' \begin{bmatrix} A^2 & 0 & 0 \\ 0 & B^2 & 0 \\ 0 & 0 & C^2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ &= A^2x_1^2 + B^2x_2^2 + C^2x_3^2 \\ &= \text{positiva definida} \end{aligned}$$

então a derivada temporal de $V(\mathbf{x})$ é

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}'\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}'\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{x}' \begin{bmatrix} k_1 & -\frac{A}{B}x_3 & \frac{A}{C}x_2 \\ \frac{B}{A}x_3 & k_2 & -\frac{B}{C}x_1 \\ -\frac{C}{A}x_2 & \frac{C}{B}x_1 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^2 & 0 & 0 \\ 0 & B^2 & 0 \\ 0 & 0 & C^2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ &+ \mathbf{x}' \begin{bmatrix} A^2 & 0 & 0 \\ 0 & B^2 & 0 \\ 0 & 0 & C^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & \frac{B}{A}x_3 & -\frac{C}{A}x_2 \\ -\frac{A}{B}x_3 & k_2 & \frac{C}{B}x_1 \\ \frac{A}{C}x_2 & -\frac{B}{C}x_1 & k_3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}' \begin{bmatrix} 2k_1A^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2k_2B^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2k_3C^2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = -\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} \end{aligned}$$

Para estabilidade assintótica, a condição suficiente é que \mathbf{Q} seja positiva definida. Portanto, requeremos que

$$k_1 < 0, \quad k_2 < 0, \quad k_3 < 0$$

Se os k_i são negativos, então, observando que $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ quando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, vemos que o estado de equilíbrio é assintoticamente estável globalmente.

Problema A.15.5 Para sistemas físicos, variáveis de estado complexas devem ocorrer em pares conjugados. Considere o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Suponha que as variáveis de estado x_1 e x_2 são pares complexos conjugados. Então $\partial f_1 / \partial x_1$ é o complexo de $\partial f_2 / \partial x_2$ ou

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \overline{\frac{\partial f_2}{\partial x_2}}$$

e também

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \overline{\frac{\partial f_2}{\partial x_1}}$$

Usando este fato, mostre que

$$[\mathbf{x}^*\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{x}]^* = \mathbf{x}^*\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{x}$$

Supondo que \mathbf{x} é um vetor bidimensional.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x} &= [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2] \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2] \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} x_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} x_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \bar{x}_1 x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \bar{x}_1 x_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \bar{x}_2 x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \bar{x}_2 x_2 \end{aligned} \quad (15-22)$$

A transposta conjugada de $\mathbf{x}^* \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x}$ é

$$[\mathbf{x}^* \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x}]^* = \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial x_1} x_1 \bar{x}_1 + \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial x_2} x_1 \bar{x}_2 + \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial x_1} x_2 \bar{x}_1 + \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial x_2} x_2 \bar{x}_2$$

Observando que

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{x}_2, & x_2 &= \bar{x}_1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial x_1} \end{aligned}$$

obtemos

$$[\mathbf{x}^* \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x}]^* = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \bar{x}_2 x_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \bar{x}_2 x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \bar{x}_1 x_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \bar{x}_1 x_1 \quad (15-23)$$

Comparando as Eqs (15.22) e (15.23), obtemos

$$[\mathbf{x}^* \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x}]^* = \mathbf{x}^* \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x}$$

Problema A.15.6 Considere o sistema

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4}{(s+2)(s^2+2s+2)}$$

que pode ser reescrito como

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s+2} \left[\frac{j}{s+1+j} + \frac{-j}{s+1-j} \right]$$

A representação em diagrama de blocos deste sistema é vista na Fig. 15.5. Vamos escolher as variáveis de estado como mostrado na figura. Supondo que $u = 0$, mostre que

$$[\mathbf{x}^* \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x}]^* = \mathbf{x}^* \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x}$$

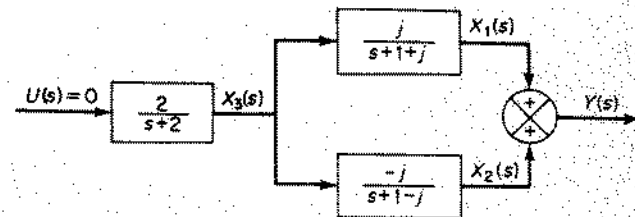


Fig. 15.5 Sistema de controle.

Solução. Do diagrama de blocos, obtemos

$$\frac{X_1}{X_3} = \frac{j}{s+1+j}$$

$$\frac{X_2}{X_3} = \frac{-j}{s+1-j}$$

$$\frac{X_3}{U} = \frac{2}{s+2}$$

ou

$$\dot{x}_1 = -(1+j)x_1 + jx_3$$

$$\dot{x}_2 = -(1-j)x_2 - jx_3$$

$$\dot{x}_3 = -2x_3 + 2u$$

Como u é suposto nulo, obtemos

$$\dot{x}_1 = -(1+j)x_1 + jx_3 = f_1(\mathbf{x})$$

$$\dot{x}_2 = -(1-j)x_2 - jx_3 = f_2(\mathbf{x})$$

$$\dot{x}_3 = -2x_3 = f_3(\mathbf{x})$$

A matriz Jacobiana para este sistema é

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -(1+j) & 0 & j \\ 0 & -(1-j) & -j \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Observe que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(x_3 é uma variável de estado real ou $\bar{x}_3 = x_3$). Agora calcule $\mathbf{x}^* \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x} &= [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} -(1+j) & 0 & j \\ 0 & -(1-j) & -j \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} -(1+j)x_1 + jx_3 \\ -(1-j)x_2 - jx_3 \\ -2x_3 \end{bmatrix} \\ &= -(1+j)\bar{x}_1 x_1 + j\bar{x}_1 x_3 - (1-j)\bar{x}_2 x_2 - j\bar{x}_2 x_3 - 2x_3^2 \end{aligned} \quad (15-24)$$

Agora tome o complexo conjugado de $\mathbf{x}^* \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x}$. Da Eq. (15.24),

$$[\mathbf{x}^* \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x}]^* = -(1-j)\bar{x}_1 \bar{x}_1 - j\bar{x}_1 x_3 - (1+j)\bar{x}_2 \bar{x}_2 + j\bar{x}_2 x_3 - 2x_3^2$$

Observando que $x_1 = \bar{x}_2$, $x_2 = \bar{x}_1$, obtemos

$$[\mathbf{x}^* \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x}]^* = -(1-j)\bar{x}_2 x_2 - j\bar{x}_2 x_3 - (1+j)\bar{x}_1 x_1 + j\bar{x}_1 x_3 - 2x_3^2 \quad (15-25)$$

Comparando as Eqs. (15.24) e (15.25), vemos que

$$[\mathbf{x}^* \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x}]^* = \mathbf{x}^* \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x}$$

Problema A.15.7 Mostre que se

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^*(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

onde

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

e negativa definida, então o determinante de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ é não nulo para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, ou

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x})| \neq 0 \quad \text{para } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Solução. Usando a relação

$$[\mathbf{x}^* \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x}]^* = \mathbf{x}^* \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x}$$

temos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \mathbf{x} &= \mathbf{x}^* [\mathbf{F}^*(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x})] \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^* \mathbf{F}^*(\mathbf{x}) \mathbf{x} + \mathbf{x}^* \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x} \\ &= [\mathbf{x}^* \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x}]^* + \mathbf{x}^* \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x} \\ &= 2\mathbf{x}^* \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x} \end{aligned}$$

Como $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ é negativa definida, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ também é negativa definida. Portanto,*

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x})| \neq 0 \quad \text{para } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}^*$$

Problema A.15.8 Determine a estabilidade da origem do sistema linear variante no tempo descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$$

onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{t+1} & -10 \end{bmatrix} \quad (t \geq 0)$$

Utilize o método do gradiente variável.

Solução. Definamos o gradiente de V como

$$\nabla V = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

Então a derivada de V é

$$\begin{aligned} V' &= (\nabla V)' \dot{\mathbf{x}} \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)x_2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\left(-\frac{1}{t+1}x_1 - 10x_2\right) \end{aligned}$$

*N. do T.: Como o critério de Sylvester é para matrizes simétricas, esta demonstração pode ser melhor finalizada observando-se as colunas da matriz $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ e notando que são linearmente independentes, e portanto, o determinante de \mathbf{F} é não nulo para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$; ou seja,

$$\mathbf{x}^* \mathbf{F} \mathbf{x} = \mathbf{x}^* [\mathbf{F} \text{col}_1 \quad \mathbf{F} \text{col}_2 \quad \dots \quad \mathbf{F} \text{col}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}^* [x_1 \mathbf{F} \text{col}_1 + x_2 \mathbf{F} \text{col}_2 + \dots + x_n \mathbf{F} \text{col}_n]$$

e como para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ esta expressão é não nula (pois $\mathbf{x}^* \hat{\mathbf{F}} \mathbf{x} = 2\mathbf{x}^* \mathbf{F} \mathbf{x} \neq 0$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$), as colunas de \mathbf{F} devem ser linearmente independentes.

Vamos escolher $a_{12} = a_{21} = 0$; então,

$$\dot{V} = a_{11}x_1x_2 + a_{22}x_2\left(-\frac{1}{t+1}x_1 - 10x_2\right)$$

Escolhendo $a_{11} = 1$ e $a_{22} = t + 1$, ∇V pode ser escrito como

$$\nabla V = \begin{bmatrix} x_1 \\ (t+1)x_2 \end{bmatrix}$$

Como

$$\int_0^{x_1, (x_2=0)} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2, (x_1=x_1)} (t+1)x_2 dx_2 = \frac{1}{2}[x_1^2 + (t+1)x_2^2]$$

Vamos escolher

$$V = \frac{1}{2}[x_1^2 + (t+1)x_2^2]$$

Então

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x_1\dot{x}_1 + \frac{x_2^2}{2} + (t+1)x_2\dot{x}_2 \\ &= -(10t+9,5)x_2^2 \end{aligned}$$

Portanto \dot{V} é negativa semidefinida. Observando que \dot{V} é identicamente nula apenas na origem $x_1 = x_2 = 0$, pelo Teorema 15.2, concluímos que o estado de equilíbrio na origem $x = 0$ é assintoticamente estável globalmente.

PROBLEMAS

Problema B.15.1 Determine se as seguintes formas quadráticas são positivas definidas.

$$Q = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_2x_3 - 2x_1x_3$$

Problema B.15.2 Determine uma função de Liapunov para o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Problema B.15.3 Determine a estabilidade do estado de equilíbrio do seguinte sistema:

$$x_1(k+1) = x_1(k) + 3x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = -3x_1(k) - 2x_2(k) - 3x_3(k)$$

$$x_3(k+1) = x_1(k)$$

Problema B.15.4 Determine a estabilidade da origem do seguinte sistema:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -g(x_1) + x_2$$

onde $g(x_1)/x_1 > 0$ para $x_1 \neq 0$.

Problema B.15.5 Considere o sistema descrito por

$$\dot{x}_1 = -g_1(x_1) + g_2(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = g_3(x_2)$$

onde $g_1(0) = g_2(0) = 0$, $g_2(0, x_2) = 0$. Obtenha condições suficientes para a estabilidade da origem do sistema.

Problema B.15.6 Determine a estabilidade da origem do seguinte sistema:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2$$

Problema B.15.7 Determine a estabilidade da origem do seguinte sistema:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

Problema B.15.8 Determine a estabilidade da origem do seguinte sistema:

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1^3$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2^3$$

Sistemas de Controle Ótimo e Adaptativos

16.1 INTRODUÇÃO

Sistemas de controle ótimo. Problemas de controle ótimo receberam grande atenção durante a década passada devido à crescente demanda de sistemas de grande desempenho e à pronta disponibilidade do computador digital.

O conceito de otimização de sistemas de controle engloba uma seleção de um índice de desempenho e de um projeto que fornece o sistema de controle ótimo dentro de limites impostos por condições limitantes de ordem física. Tal sistema de controle ótimo difere de um sistema ideal, em que o primeiro é o melhor que se pode conseguir na presença de limitações físicas, enquanto que o segundo pode bem ser um objetivo inalcançável.

Índices de desempenho. Ao resolver problemas de sistemas de controle ótimo, podemos ter o objetivo de achar uma regra para a determinação da decisão de controle presente, sujeita a certas limitações, que minimizará alguma medida de um desvio do comportamento ideal. Tal medida é normalmente provida por um critério de otimização, ou índice de desempenho. O índice de desempenho, que foi definido no Cap. 7, é uma função cujo valor indica quão bem o desempenho atual do sistema se compara com o desempenho desejado. Na maioria dos casos particulares, o comportamento do sistema é otimizado escolhendo-se o vetor de controle de tal forma que o índice de desempenho é minimizado (ou maximizado).

O índice de desempenho é importante porque determina, em grande parte, a natureza do controle ótimo resultante. Isto é, o controle resultante pode ser linear, não-linear, estacionário ou variante no tempo, dependendo da forma do índice de desempenho. O engenheiro de controle formula este índice baseado nos requerimentos do problema. Portanto, ele influencia a natureza do sistema resultante. Os requisitos do problema normalmente incluem não apenas requisitos de desempenho mas também restrições na forma do controle para assegurar realizabilidade física.

O processo de otimização deve prover não apenas leis de controle, configurações de parâmetros que são ótimas, mas também uma medida da degradação no desempenho pelo afastamento da função índice de desempenho do seu valor mínimo (ou máximo) que resulta do uso de leis de controle não ótimas.

Em um grau considerável, o uso da teoria de otimização no projeto de sistemas é dificultado pelo conflito entre tratabilidade analítica e utilidade prática na seleção do índice de desempenho. É desejável que os critérios para controle ótimo se originem não de um ponto de vista matemático mas de um ponto de vista de aplicação. Entretanto, em geral, a escolha de um índice de desempenho envolve um compromisso entre uma avaliação significativa do desempenho do sistema e um problema matemático tratável.

A escolha do índice de desempenho mais apropriado para um dado problema é muito difícil, especialmente em sistemas complicados. Por exemplo, considere o problema da maximização da carga útil de uma nave espacial. A carga útil pode ser considerada como a diferença entre o peso do veículo após terminada a missão e os componentes residuais do veículo, tais como estruturas de suporte, equipamentos de comunicações, de potência e de controle de altitude. A maximização da carga útil, portanto, envolverá uma otimização tanto do programa de propulsão e projeto da missão para mínimos gastos de combustível, como um projeto ótimo dos componentes do veículo. Em aplicações espaciais, outras especificações de desempenho podem ser o gasto mínimo de combustível, erro mínimo de atingir um alvo, tempo mínimo etc. Em aplicações civis de controle, as considerações principais normalmente são de ordem econômica.

Formulação de problemas de otimização. As quantidades que aparecem em problemas de otimização de sistemas de controle são variáveis de estado, variáveis de controle, e parâmetros de sistema. Considere, por exemplo, um veículo que é assimilado a uma massa pontual que se locomove no espaço. As variáveis de estado deste sistema podem ser as três coordenadas de posição do veículo, as três coordenadas de velocidade, e a massa instantânea do veículo. Estas variáveis de estado são geradas de um conjunto de equações diferenciais, que, neste exemplo, podem ser simplesmente as equações de Newton para o movimento e uma equação de continuidade relacionando o fluxo de combustível com a taxa de perda de massa do veículo. As variáveis de controle, para este exemplo, podem ser a magnitude da força vertical do veículo e um conjunto de ângulos que definem a direção da força. Os parâmetros do sistema são as constantes que descrevem certas propriedades do problema. Tais parâmetros podem ser a velocidade de exaustão do sistema de propulsão ou um tempo pré-especificado de término da força vertical. Para sistemas que utilizam propulsão iônica, estes parâmetros podem ser os valores da velocidade de exaustão e o tamanho da unidade geradora de potência a bordo do veículo.

Em geral, o problema de otimização de sistemas de controle pode ser formulado se as seguintes informações são dadas:

1. equações de estado e de saída
2. vetor de controle
3. restrições do problema
4. índice de desempenho
5. parâmetros do sistema

Um problema de controle ótimo é a determinação do vetor de controle ótimo $u(t)$ dentro da classe de vetores de controle admissíveis. Este vetor $u(t)$ normalmente depende de

1. estado inicial ou saída inicial
2. estado desejado ou saída desejada
3. natureza das restrições
4. natureza do índice de desempenho

Exceto para casos especiais, o problema pode ser tão complicado para solução analítica que se deve obter uma solução por computador.

Neste capítulo, discutiremos sistemas de controle de tempo ótimo e sistemas de controle baseados em índices de desempenho quadráticos.

Sistemas de controle de tempo ótimo. Na Seção 16.4, discutiremos dois problemas de controle de tempo ótimo. Um é, dado o sistema de tempo discreto,

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}(T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(T)\mathbf{u}(kT)$$

onde a norma de $\mathbf{u}(kT)$ não é limitada, determinar o vetor de controle $\mathbf{u}(kT)$ que trará qualquer estado inicial para a origem do espaço de estado no número mínimo de períodos de amostragem.

O outro problema de controle de tempo ótimo é, dado o processo descrito por

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u$$

determinar a função de controle u que transferirá a saída y do sistema de uma dada condição inicial para zero em um tempo mínimo T . A função de controle u deve satisfazer uma restrição de magnitude e a saída e suas derivadas devem permanecer nulas para tempo $t \geq T$ se não se aplicam subseqüentes perturbações.

A obtenção da solução explícita para o controle de tempo ótimo de um processo de ordem n é extremamente difícil. Portanto, discutiremos apenas um caso simples onde o processo é descrito por

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = bu$$

Isto é, a função de transferência do processo apresenta dois pólos e nenhum zero.

Sistemas de controle ótimo baseados em índices de desempenho quadráticos. Em muitos sistemas de controle, na prática, queremos minimizar algo na função do sinal de erro. Por exemplo, dado o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

podemos desejar minimizar uma função de erro generalizado tal como

$$J = \int_0^T [\xi(t) - \mathbf{x}(t)]^* \mathbf{Q} [\xi(t) - \mathbf{x}(t)] dt$$

onde $\xi(t)$ representa o estado desejado, $\mathbf{x}(t)$ o estado atual [portanto, $\xi(t) - \mathbf{x}(t)$ é o vetor de erro], \mathbf{Q} uma matriz positiva-definida (ou positiva semidefinida), e o intervalo de tempo $0 \leq t \leq T$ ou é finito ou infinito.

Além de considerar erros como uma medida do desempenho do sistema, entretanto, devemos normalmente dar atenção à energia requerida para a ação de controle. Como $u(t)$ pode ter dimensões de força ou torque, a energia de controle é proporcional à integral de $[u(t)]^2$. Se os erros são minimizados sem levar em conta a energia requerida, então pode resultar um projeto que requer valores extremamente grandes de $u(t)$. Isto é indesejável uma vez que todos os sistemas físicos estão sujeitos a saturação. Portanto, considerações práticas impõem uma restrição ao vetor de controle; por exemplo,

$$\int_0^T \mathbf{u}^*(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt = K$$

onde \mathbf{R} é uma matriz positiva-definida e K é uma constante positiva. O índice de desempenho de um sistema de controle no intervalo de tempo $0 \leq t \leq T$ pode ser escrito, usando-se um multiplicador de Lagrange λ , como segue:

$$J = \int_0^T [\xi(t) - \mathbf{x}(t)]^* \mathbf{Q} [\xi(t) - \mathbf{x}(t)] dt + \lambda \int_0^T \mathbf{u}^*(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt \quad (0 \leq t \leq T) \quad (16.1)$$

O multiplicador de Lagrange λ é uma constante positiva indicando o peso do custo de controle com relação aos erros minimizantes.

A determinação da lei de controle ótimo para o sistema,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

sujeita ao índice de desempenho dado pela Eq. (16.1), tem um significado prático de que o sistema resultante estabelece um compromisso entre a minimização do erro integral e a minimização da energia de controle. Na Seção 16.5, consideramos um caso especial onde $T = \infty$, o estado desejado ξ é a origem, ou $\xi = 0$, e o vetor de estado é real. Nestas condições, o índice de desempenho quadrático dado pela Eq. (16.1) pode ser expresso como

$$J = \int_0^\infty [\mathbf{x}'(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}'(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt$$

onde incluímos λ na matriz positiva definida \mathbf{R} . Note que neste problema $\mathbf{u}(t)$ não tem restrições. Veremos adiante que tal índice de desempenho quadrático resulta em operações matemáticas convenientes na solução de problemas de controle ótimo.

Comentários sobre sistemas de controle ótimo. O sistema que minimiza (ou maximiza) o índice de desempenho selecionado é, por definição, ótimo. É evidente que o índice de desempenho na realidade determina a configuração do sistema. É importante ressaltar que um sistema de controle ótimo sob um certo índice de desempenho é, em geral, não ótimo sob outros índices de desempenho. Além do mais, a realização física de uma particular lei de controle ótimo pode ser um tanto difícil e cara. Portanto pode não ter sentido fazer grandes gastos em implementar um controlador ótimo que é o melhor em algum sentido restrito ou individual. Um sistema de controle raramente é projetado para realizar uma única tarefa especificada totalmente *a priori*. Ao invés disto, ele é projetado para realizar uma tarefa selecionada ao acaso de um repertório completo de possíveis tarefas. Em sistemas práticos, pode então ser mais aconselhável procurar leis de controle ótimo aproximadas que não estão rigidamente ligadas com um índice de desempenho único.

Devemos notar que um sistema de controle ótimo, obtido matematicamente, nos dá, na maioria das aplicações práticas, a limitação de desempenho fundamental sob o índice de desempenho dado e serve mais como uma medida do que como um objetivo prático. Portanto, antes de decidir implementar o sistema de controle ótimo ou algo inferior, porém mais simples, devemos avaliar com cuidado uma medida do grau em que o desempenho do sistema de controle ótimo complexo excede o do sistema mais simples subótimo. A não ser que o sistema de controle ótimo possa ser justificado, não construiremos sistemas de controle ótimo extremamente complicados.

Uma vez que a limitação de desempenho fundamental é determinada usando-se a teoria de controle ótimo, devemos fazer esforços para projetar um sistema simples que está perto do ótimo. Mantendo isto em mente, construímos um protó-

tipo do sistema físico, o testamos e modificamos até que seja obtido um sistema satisfatório, que tem características de desempenho perto das do sistema de controle ótimo obtido usando-se a teoria de controle ótimo.

Perguntas relativas à existência da solução dos problemas de controle ótimo. Como já dissemos, o problema de controle ótimo, dado qualquer estado inicial $x(t_0)$, é o de determinar um vetor de controle admissível $u(t)$ que transfere o estado para a região desejada do espaço de estados e para o qual o índice de desempenho é minimizado.

É importante mencionar que, em alguns casos, uma combinação particular de processo, estado desejado, índice de desempenho, e restrições pode tornar um controle ótimo impossível. Isto se relaciona com o desejo de obter um desempenho além das capacidades físicas do sistema.

Perguntas relativas à existência de um sistema de controle ótimo são importantes uma vez que servem para informar ao projetista se um dado índice de desempenho é ou não realista para um dado sistema e conjunto de restrições. Duas das perguntas mais importantes são as de controlabilidade e observabilidade. Em seguida, explicaremos brevemente o que significa controlabilidade e observabilidade.

Controlabilidade e observabilidade. Um sistema é dito controlável no instante t_0 se é possível, usando-se um vetor de controle arbitrário (sem restrições), transferir o sistema de qualquer estado inicial $x(t_0)$ para qualquer outro estado em um intervalo finito de tempo.

Um sistema é dito observável no instante t_0 se, com o sistema no estado $x(t_0)$, é possível determinar este estado a partir da observação da saída durante um intervalo de tempo finito.

Os conceitos de controlabilidade e observabilidade foram introduzidos por Kalman. Eles têm papel importante no controle ótimo de sistemas multivariáveis. De fato, as condições de controlabilidade e observabilidade podem definir a existência de uma solução completa para o problema de controle ótimo.

Resumo do capítulo. Este capítulo encaminha o leitor a alguns dos sistemas de controle ótimo e adaptativo mais importantes. A Seção 16.2 apresenta as condições para controlabilidade completa e a Seção 16.3 nos dá as condições para observabilidade completa. A Seção 16.4 discute o controle de tempo ótimo de sistemas de tempo discreto e de tempo contínuo.

Os sistemas de controle ótimo baseados em índices de desempenho quadrático são apresentados na Seção 16.5. Aqui é apresentado o método de Liapunov. A Seção 16.6 discute brevemente sistemas de controle de referência-modelo. As duas seções finais, Seções 16.7 e 16.8, apresentam discussões introdutórias sobre sistemas de controle adaptativos. Tais sistemas medem continuamente o desempenho do sistema e ajustam seus parâmetros para manter um desempenho quase-ótimo.

16.2 CONTROLABILIDADE

A solução para um problema de controle ótimo pode não existir se o sistema considerado não é controlável. Embora a maioria dos sistemas físicos sejam controláveis e observáveis, os correspondentes modelos matemáticos podem não ter a propriedade de controlabilidade e observabilidade. Então é necessário saber as condições em que um sistema é controlável e observável.

Nesta seção, primeiro definiremos a independência linear de vetores e então derivaremos as condições para a controlabilidade completa de estado. Iniciaremos

nossa discussão com sistemas de tempo discreto uma vez que são mais simples de serem analisados que os de tempo contínuo. Então derivaremos as condições para controlabilidade completa de estado para sistemas de tempo contínuo. Finalmente, discutiremos a controlabilidade completa de saída.

Independência linear de vetores. Os vetores x_1, x_2, \dots, x_n são ditos linearmente independentes se

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0$$

onde c_1, c_2, \dots, c_n são constantes, implica

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

Por outro lado, os vetores x_1, x_2, \dots, x_n são ditos linearmente dependentes se e somente se x_i podem ser representados como uma combinação linear de x_j ($j = 1, 2, \dots, n; j \neq i$), ou

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j x_j$$

para algum conjunto de constantes c_j . Isto significa que se x_i pode ser expresso como uma combinação linear dos outros vetores do conjunto, ele é linearmente dependente deles ou não é um membro independente do conjunto.

Exemplo 16.1 Os vetores

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

são linearmente dependentes uma vez que

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

Os vetores

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

são linearmente independentes uma vez que

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = 0$$

implica

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

Note que se uma matriz $n \times n$ é não-singular (isto é, a matriz tem característica n ou o determinante é não nulo), então n colunas (ou linhas) são linearmente independentes. Se a matriz $n \times n$ é singular (isto é, a característica da matriz é menor do que n ou o determinante é zero), então n colunas (ou linhas) são linearmente dependentes. Para demonstrar isto, note que

$$[x_1 | x_2 | x_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \text{singular}$$

$$[y_1 | y_2 | y_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \text{não singular}$$

Controlabilidade completa de estado de sistemas de tempo discreto. Considere o sistema de tempo discreto descrito por

$$x((k+1)T) = Gx(kT) - Hu(kT) \quad (16.2)$$

onde

$x(kT)$ = vetor de estado (vetor n -dimensional)

$u(kT)$ = sinal de controle

G = matriz $n \times n$

H = matriz $n \times 1$

T = período de amostragem

Note que $u(kT)$ é constante para $kT \leq t < (k+1)T$. Sem perda de generalidade, podemos supor que o estado inicial é arbitrário e que o estado final é a origem do espaço de estados.

O sistema de tempo discreto dado pela Eq. (16.2) é de estado controlável se existe um sinal de controle constante por trechos $u(kT)$ definido sobre um intervalo finito de amostragem $0 \leq kT < nT$ tal que, começando de qualquer estado inicial, o estado $x(kT)$ pode ser feito nulo para $kT \geq nT$. Se todo estado é controlável, então o sistema é dito de estado completamente controlável.

Derivaremos a condição para a controlabilidade completa de estado usando o fato de que, se um sistema é de estado completamente controlável, então existe um sinal de controle contínuo por trechos que transferirá qualquer estado inicial para a origem em um número finito de períodos de amostragem.

A solução da Eq. (16.2) é

$$x(kT) = G^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} H u(jT)$$

Se o sistema é controlável, então, partindo de um $x(0)$ arbitrário, podemos levar o estado para a origem, ou $x(kT) = 0$ para $k \geq n$ pela aplicação de algum $u(0), u(T), \dots, u((n-1)T)$. Portanto,

$$G^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} G^{n-j-1} H u(jT) = 0$$

ou

$$x(0) = - \sum_{j=0}^{n-1} G^{-(j+1)} H u(jT) = - [G^{-1} H u(0) + G^{-2} H u(T) + \dots + G^{-n} H u((n-1)T)] \quad (16.3)$$

Como G é uma matriz $n \times n$ não-singular e H uma matriz $n \times 1$, claramente $G^{-1}H, G^{-2}H, \dots, G^{-n}H$ são matrizes $n \times 1$ ou vetores-coluna. Vamos definir

$$G^{-1}H = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad G^{-2}H = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad G^{-n}H = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

Então a Eq. (16.3) pode ser reescrita como as seguintes n equações algébricas simultâneas:

$$x_1(0) = -a_{11}u(0) - a_{12}u(T) - \dots - a_{1n}u((n-1)T)$$

$$x_2(0) = -a_{21}u(0) - a_{22}u(T) - \dots - a_{2n}u((n-1)T)$$

$$x_n(0) = -a_{n1}u(0) - a_{n2}u(T) - \dots - a_{nn}u((n-1)T)$$

Se estas equações devem fornecer uma solução para qualquer conjunto de valores $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$, então imporemos que a matriz $n \times n (a_{ij})$ seja não-singular. (Em caso contrário a solução pode não existir.) A condição de que a matriz $n \times n (a_{ij})$ seja não-singular implica que cada coluna da matriz (a_{ij}) é linearmente independente, ou a matriz (a_{ij}) tem característica n .

Da análise anterior, podemos enunciar as condições para a controlabilidade completa de estado do sistema da Eq. (16.2) como segue: O sistema é de estado completamente controlável se e apenas se os vetores $G^{-1}H, G^{-2}H, \dots, G^{-n}H$ são linearmente independentes ou a matriz $n \times n$

$$[G^{-1}H | G^{-2}H | \dots | G^{-n}H]$$

tem característica n . Como G é não-singular, esta condição pode ser formulada como a característica da matriz

$$[H | G^{-1}H | \dots | G^{-(n-1)}H]$$

é n . Esta condição também pode ser formulada com a característica da matriz

$$[H | GH | \dots | G^{n-1}H]$$

sendo n .

Note que se o sistema da Eq. (16.2) é de estado completamente controlável, então podemos transferir qualquer estado inicial para a origem no máximo em n períodos de amostragem. (Lembrar que isto é verdade se e apenas se a magnitude de $u(kT)$ é não-limitada. Se a magnitude de $u(kT)$ é limitada, o controle para a origem

pode tomar mais do que n períodos de amostragem.)

Se o sistema é descrito por

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}\mathbf{u}(kT)$$

onde $\mathbf{u}(kT)$ é um vetor de dimensão r , então pode-se provar que a condição para controlabilidade completa de estado é que a seguinte matriz $n \times nr$

$$[\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} \mid \mathbf{G}^{-2}\mathbf{H} \mid \dots \mid \mathbf{G}^{-n}\mathbf{H}]$$

tem característica n . Esta condição é a mesma que a condição de a característica da matriz

$$[\mathbf{H} \mid \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} \mid \dots \mid \mathbf{G}^{-(n-1)}\mathbf{H}]$$

ser n , ou a característica da matriz

$$[\mathbf{H} \mid \mathbf{G}\mathbf{H} \mid \dots \mid \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]$$

ser n .

Controlabilidade completa de estado de sistema de tempo contínuo. Considere o sistema de tempo contínuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (16.4)$$

onde

\mathbf{x} = vetor de estado (vetor de dimensão n)

u = sinal de controle

\mathbf{A} = matriz $n \times n$

\mathbf{B} = matriz $n \times 1$

O sistema descrito pela Eq. (16.4) é dito de estado controlável em $t = t_0$ se é possível construir um sinal de controle não-limitado que transferirá um estado inicial para qualquer estado final em um intervalo de tempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$. Se todo estado é controlável, então o sistema é dito de estado completamente controlável.

Derivaremos agora a condição para controlabilidade completa de estado. Sem perda de generalidade, podemos supor que o estado final é a origem do espaço de estados e que o tempo inicial é zero, ou $t_0 = 0$.

A solução da Eq. (16.4) é

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Aplicando a definição de controlabilidade completa de estado que acabamos de dar, temos

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0} = e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

ou

$$\mathbf{x}(0) = -\int_0^{t_1} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (16.5)$$

Note que $e^{-\mathbf{A}\tau}$ pode ser escrita como

$$e^{-\mathbf{A}\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)\mathbf{A}^k \quad (16.6)$$

Substituindo a Eq. (16.6) na Eq. (16.5), temos

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau \quad (16.7)$$

Vamos fazer

$$\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau = \beta_k$$

Então a Eq. (16.7) se torna

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= -\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \beta_k \\ &= -[\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16.8)$$

Se o sistema é de estado completamente controlável, então, dado qualquer estado inicial $\mathbf{x}(0)$, a Eq. (16.8) deve ser satisfeita. Isto requer que a característica da matriz $n \times n$

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

seja n .

Desta análise, podemos formular a condição para controlabilidade completa de estado como segue: O sistema dado pela Eq. (16.4) é de estado completamente controlável se e somente se os vetores \mathbf{B} , $\mathbf{A}\mathbf{B}$, ..., $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$ são linearmente independentes ou a matriz $n \times n$

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

tem característica n .

O resultado que acabamos de obter pode ser estendido para o caso onde o vetor de controle \mathbf{u} é r -dimensional. Se o sistema é descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

onde \mathbf{u} é um vetor r -dimensional, então pode-se provar que a condição para controlabilidade completa de estado é que a seguinte matriz $n \times nr$

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

deve ter característica n , ou que ela contém n vetores-coluna linearmente independentes.

Exemplo 16.2 Considere o sistema dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

Como

$$[B \mid AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{singular}$$

o sistema não é de estado completamente controlável.

Exemplo 16.3 Considere o sistema dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

Para este caso,

$$[B \mid AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \text{não singular}$$

O sistema é portanto de estado completamente controlável.

Forma alternativa da condição para controlabilidade completa de estado. Considere o sistema definido por

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (16.9)$$

onde

x = vetor de estado (vetor n -dimensional)
 u = vetor de controle (vetor r -dimensional)
 A = matriz $n \times n$
 B = matriz $n \times r$

Se os autovalores de A são distintos, então é possível achar uma matriz de transformação P tal que

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Note que se os autovalores de A são distintos, então os autovetores de A também o são,† entretanto, a inversa é verdadeira. Por exemplo, uma matriz real simétrica $n \times n$ com autovalores múltiplos tem n autovetores distintos. Note também que cada coluna da matriz P é um autovetor de A associado com λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$).
 Vamos definir

$$x = Pz \quad (16.10)$$

Substituindo a Eq. (16.10) na Eq. (16.9), obtemos

$$\dot{z} = P^{-1}APz + P^{-1}Bu \quad (16.11)$$

Definindo

$$P^{-1}B = F = (f_{ij})$$

podemos reescrever a Eq. (16.11) como

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + f_{11}u_1 + f_{12}u_2 + \dots + f_{1r}u_r$$

$$\dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 + f_{21}u_1 + f_{22}u_2 + \dots + f_{2r}u_r$$

$$\dot{z}_n = \lambda_n z_n + f_{n1}u_1 + f_{n2}u_2 + \dots + f_{nr}u_r$$

Se os elementos de qualquer linha da matriz $n \times r$ F são todos nulos, então a correspondente variável de estado não pode ser controlada por nenhum dos u_i . Portanto, a condição de controlabilidade completa de estado é que se os autovetores de A são distintos, então o sistema é de estado completamente controlável se e apenas se nenhuma linha de $P^{-1}B$ tem elementos todos nulos. É importante notar que para aplicar esta condição para controlabilidade completa de estado, devemos colocar a matriz $P^{-1}AP$ na Eq. (16.11) na forma diagonal.

Se a matriz A na Eq. (16.9) não tem autovetores distintos, então a diagonalização é impossível. Em tal caso, podemos transformar A na forma canônica de Jordan. Se, por exemplo, A tem autovalores $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_4, \lambda_4, \lambda_6, \dots, \lambda_n$ e tem $n - 3$ autovetores distintos, então a forma canônica de Jordan de A é

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_4 & 1 & & \\ & & & & \lambda_4 & & \\ & & & & & \lambda_6 & \\ & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

†N.T.: Para maior clareza, onde se lê autovetores distintos de A , deve-se entender que A tem n autovetores (não generalizados) linearmente independentes.

As submatrizes 3×3 e 2×2 na diagonal principal são chamadas de blocos de Jordan.

Suponha que podemos achar uma matriz de transformação S tal que

$$S^{-1}AS = J$$

Se definimos o novo vetor de estado z por

$$x = Sz \quad (16.12)$$

então a substituição da Eq. (16.12) na Eq. (16.9) nos dá

$$\begin{aligned} \dot{z} &= S^{-1}ASz + S^{-1}Bu \\ &= Jz + S^{-1}Bu \end{aligned} \quad (16.13)$$

A condição para controlabilidade completa de estado do sistema da Eq. (16.9) pode ser formulada como segue: O sistema é de estado completamente controlável se e apenas se: (1) não há dois blocos de Jordan em J da Eq. (16.13) associados com os mesmos autovalores, (2) os elementos da qualquer linha de $S^{-1}B$ que correspondem à última linha de cada bloco de Jordan não são todos nulos, e (3) os elementos de cada linha de $S^{-1}B$ que correspondem a autovalores distintos não são todos nulos.

Exemplo 16.4 Os seguintes sistemas são de estado completamente controlável:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & -2 & & \\ & & & -5 & 1 \\ 0 & & & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Os seguintes sistemas não são de estado completamente controlável:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & -2 & & \\ & & & -5 & 1 \\ 0 & & & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

Condição para controlabilidade completa de estado no plano s . A condição para controlabilidade completa de estado pode ser formulada em termos de funções de transferência ou matrizes de transferência.

Uma condição necessária e suficiente para controlabilidade completa de estado é que não haja cancelamento na função de transferência ou matriz de transferência. Se houver cancelamento, o sistema não pode ser controlado na direção do modo cancelado.

Exemplo 16.5 Considere a seguinte função de transferência:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{s + 2.5}{(s + 2.5)(s - 1)}$$

Claramente ocorre cancelamento do fator $(s + 2.5)$ no numerador e denominador desta função de transferência. (Portanto um grau de liberdade é perdido.) Em virtude deste cancelamento, este sistema não é de estado completamente controlável.

A mesma conclusão pode ser obtida escrevendo-se esta função de transferência na forma de equações de estado. Uma representação por espaço de estados é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2.5 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

Como

$$[B \mid AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a característica da matriz $[B \mid AB]$ é um. Portanto, chegamos à mesma conclusão: O sistema não é de estado completamente controlável.

Controlabilidade de saída. No projeto prático de um sistema de controle, podemos desejar controlar a saída e não o estado do sistema. A controlabilidade completa de estado não é uma condição necessária nem suficiente para controlar a saída do sistema. Por esta razão, é desejável definir separadamente a controlabilidade completa de saída.

Considere o sistema descrito por

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (16.14)$$

$$y = Cx + Du \quad (16.15)$$

onde

x = vetor de estado (vetor n -dimensional)

u = vetor de controle (vetor r -dimensional)
 y = vetor de saída (vetor m -dimensional)
 A = matriz $n \times n$
 B = matriz $n \times r$
 C = matriz $m \times n$
 D = matriz $m \times r$

O sistema descrito pelas Eqs. (16.14) e (16.15) é dito de saída completamente controlável se é possível construir um vetor de controle não-limitado $u(t)$ que transferirá qualquer saída inicial $y(t_0)$ para qualquer saída $y(t_1)$ em um intervalo de tempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$.

Pode-se provar que a condição para controlabilidade completa de saída é como segue: O sistema descrito pelas Eqs. (16.14) e (16.15) é de saída completamente controlável se e apenas se a matriz $m \times (n+1)r$

$$[CB \mid CAB \mid CA^2B \mid \dots \mid CA^{n-1}B \mid D]$$

tem característica igual a m .

16.3 OBSERVABILIDADE

Nesta seção discutimos a observabilidade de sistemas lineares. Considere o sistema não excitado descrito pelas seguintes equações:

$$\dot{x} = Ax \quad (16.16)$$

$$y = Cx \quad (16.17)$$

onde

x = vetor de estado (vetor n -dimensional)

y = vetor de saída (vetor m -dimensional)

A = matriz $n \times n$

C = matriz $m \times n$

O sistema é dito ser completamente observável se todo estado inicial $x(0)$ pode ser determinado a partir da observação de $y(t)$ durante um intervalo de tempo finito. O sistema portanto é completamente observável se toda transição do estado afeta cada elemento do vetor de saída. O conceito de observabilidade é útil para resolver o problema de reconstruir variáveis de estado não mensuráveis a partir das mensuráveis no mínimo espaço de tempo possível. (Note que, na prática, a dificuldade encontrada com sistemas de controle ótimo é que algumas das variáveis de estado não são acessíveis para medição direta. Então é necessário estimar as variáveis de estado não mensuráveis para construir os sinais de controle ótimo.)

A razão pela qual consideramos o sistema não excitado é a seguinte: Se o sistema é descrito por

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

então

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau$$

e $y(t)$ é

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau$$

Como as matrizes A , B e C são conhecidas e $u(t)$ também é conhecida, o termo em integral no lado direito desta última equação é uma grandeza conhecida. Portanto, ela pode ser subtraída do valor observado de $y(t)$. Portanto, para investigar uma condição necessária e suficiente para observabilidade completa, é suficiente considerar o sistema descrito pelas Eqs. (16.16) e (16.17).

Observabilidade completa de sistemas de tempo discreto. Considere o sistema descrito por

$$x((k+1)T) = Gx(kT) \quad (16.18)$$

$$y(kT) = Cx(kT) \quad (16.19)$$

onde

$x(kT)$ = vetor de estado (vetor n -dimensional)

$y(kT)$ = vetor de saída (vetor m -dimensional)

G = matriz $n \times n$

C = matriz $m \times n$

T = período de amostragem

Este sistema é completamente observável se, dada a saída $y(kT)$ para períodos de amostragem finitos, é possível determinar o vetor de estado inicial $x(0)$.

A seguir, derivaremos a condição para observabilidade completa do sistema de tempo discreto descrito pelas Eqs. (16.18) e (16.19). Como a solução $x(kT)$ é

$$x(kT) = G^k x(0)$$

obtemos

$$y(kT) = CG^k x(0)$$

A observabilidade completa significa que, dados $y(0)$, $y(T)$, ..., $y(NT)$, podemos determinar $x_1(0)$, $x_2(0)$, ..., $x_n(0)$. Para determinar n incógnitas, necessitamos apenas de n valores de $y(kT)$. Portanto, $N = n - 1$. Para um sistema completamente observável, dado

$$y(0) = Cx(0)$$

$$y(T) = CGx(0)$$

$$y((n-1)T) = CG^{n-1}x(0)$$

devemos poder determinar $x_1(0)$, $x_2(0)$, ..., $x_n(0)$. Observando que y é um vetor de dimensão m , as n equações simultâneas anteriores fornecem nm equações, todas

envolvendo $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$. Para obter um conjunto único de soluções $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$ destas nm equações, devemos ser capazes de obter exatamente n equações linearmente independentes entre elas. Isto requer que a matriz $nm \times n$

$$\begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}$$

tenha característica n .

Notando que a característica de uma matriz e aquela da transposta conjugada da matriz são iguais, podemos formular a condição para observabilidade completa como segue: O sistema descrito pelas Eqs. (16.18) e (16.19) é completamente observável se e apenas se a matriz $n \times nm$

$$[C^* | G^*C^* | \dots | (G^*)^{n-1}C^*]$$

tem característica n , ou tem n vetores-coluna linearmente independentes.

Observabilidade completa de sistemas de tempo contínuo. Considere o sistema descrito pelas Eqs. (16.16) e (16.17), reescritas como

$$\dot{x} = Ax$$

$$y = Cx$$

O vetor de saída $y(t)$ é

$$y(t) = Ce^{At}x(0)$$

Observando que

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k$$

obtemos

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) CA^k x(0)$$

ou

$$y(t) = \alpha_0(t)Cx(0) + \alpha_1(t)CAx(0) + \dots + \alpha_{n-1}(t)CA^{n-1}x(0) \quad (16.20)$$

Se o sistema é completamente observável, então, dada uma saída $y(t)$ durante um intervalo de tempo $0 \leq t \leq t_1$, $x(0)$ é unicamente determinado a partir da Eq. (16.20). Pode-se mostrar que isto requer que a característica da matriz $nm \times n$

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

seja n .

Desta análise, podemos formular a condição para observabilidade completa como segue: O sistema descrito pelas Eqs. (16.16) e (16.17) é completamente observável se e apenas se a matriz $n \times nm$

$$[C^* | A^*C^* | \dots | (A^*)^{n-1}C^*]$$

tem característica n , ou tem n vetores-coluna linearmente independentes.

Exemplo 16.6 Considere o sistema descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Este sistema é controlável e observável?

Como a característica da matriz

$$[B | AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

é dois, o sistema é de estado completamente controlável.

Para controlabilidade de saída, vamos achar a característica da matriz $[CB | CAB]$. Como

$$[CB | CAB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a característica desta matriz é um. Portanto o sistema é de saída completamente controlável.

Para testar a condição de observabilidade, examine a característica de $[C' | A'C']$. Como

$$[C' | A'C'] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a característica de $[C' | A'C']$ é dois. Portanto o sistema é completamente observável.

Condições para observabilidade completa no plano s . As condições para observabilidade completa podem também ser formuladas em termos de funções de transferência ou matrizes de transferência. A condição necessária e suficiente para observabilidade completa é que não haja cancelamento na função de transferência ou matriz de transferência. Se houver cancelamento, o modo cancelado não pode ser observado na saída.

Exemplo 16.7 Mostre que o sistema seguinte não é completamente observável:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [4 \quad 5 \quad 1]$$

Note que a função de controle u não afeta a observabilidade completa do sistema. Para examinar a observabilidade completa, podemos simplesmente fazer $u = 0$. Para este sistema, temos

$$[\mathbf{C} \mid \mathbf{A}'\mathbf{C}' \mid (\mathbf{A}')^2\mathbf{C}'] = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 5 & -7 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Note que

$$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 5 & -7 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Portanto a característica da matriz $[\mathbf{C} \mid \mathbf{A}'\mathbf{C}' \mid (\mathbf{A}')^2\mathbf{C}']$ é menor do que três. Desta forma, o sistema não é completamente observável.

De fato, neste sistema, ocorre cancelamento na função de transferência do sistema. A função de transferência entre $X_1(s)$ e $U(s)$ é

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

e a função de transferência entre $Y(s)$ e $X_1(s)$ é

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} = (s+1)(s+4)$$

Portanto a função de transferência entre a saída $Y(s)$ e a entrada $U(s)$ é

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+1)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Claramente, os dois fatores $(s+1)$ se cancelam. Isto significa que há estados iniciais $\mathbf{x}(0)$ que não podem ser determinados a partir de medições de $y(t)$.

Relações entre controlabilidade, observabilidade e funções de transferência. A função de transferência não tem cancelamento se e apenas se o sistema é de estado completamente controlável e completamente observável. Isto significa que a fun-

ção de transferência cancelada não contém toda a informação que caracteriza o sistema dinâmico.

Forma alternativa da condição de observabilidade completa. Considere o sistema descrito pelas Eqs. (16.16) e (16.17), reescritas como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (16.21)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (16.22)$$

Suponha que a matriz de transformação \mathbf{P} transforma \mathbf{A} para a matriz diagonal, ou

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$$

onde \mathbf{D} é uma matriz diagonal. Vamos definir

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z}$$

Então as Eqs. (16.21) e (16.22) podem ser escritas como

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} = \mathbf{D}\mathbf{z}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{z}$$

Portanto,

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{z}(0)$$

ou

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{z}(0) = \mathbf{C}\mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} z_1(0) \\ e^{\lambda_2 t} z_2(0) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} z_n(0) \end{bmatrix}$$

O sistema é completamente observável se nenhuma das colunas da matriz $m \times n$ $\mathbf{C}\mathbf{P}$ consiste em elementos todos nulos. Isto acontece porque, se a i -ésima coluna de $\mathbf{C}\mathbf{P}$ consiste em todos os elementos nulos, então a variável de estado $z_i(0)$ não aparecerá na equação de saída e portanto não pode ser determinada a partir da observação de $y(t)$. Assim, $\mathbf{x}(0)$, que está relacionado com $\mathbf{z}(0)$ através da matriz não-singular \mathbf{P} , não pode ser determinada. (Lembrar que este teste se aplica apenas se a matriz $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ está na forma diagonal.)

Se a matriz \mathbf{A} não pode ser transformada na forma diagonal, então, usando uma matriz de transformação adequada \mathbf{S} , podemos transformar \mathbf{A} para a forma canônica de Jordan, ou

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{J}$$

onde \mathbf{J} está na forma canônica de Jordan.

Vamos definir

$$\dot{x} = Sz$$

Então as Eqs. (16.21) e (16.22) podem ser escritas como

$$\dot{z} = S^{-1}ASz = Jz$$

$$y = CSz$$

Portanto

$$y(t) = CSe^{Jt}z(0)$$

O sistema é completamente observável se: (1) não há dois blocos de Jordan associados com os mesmos autovalores, (2) não há colunas de CS que correspondem à primeira linha de cada bloco de Jordan contendo elementos todos nulos, e (3) não há colunas de CS que correspondem a autovalores distintos com elementos todos nulos.

Para esclarecer a condição (2) acima, no Exemplo 16.8, enquadrámos com linhas pontilhadas as colunas de CS que correspondem à primeira linha de cada bloco de Jordan.

Exemplo 16.8 Os seguintes sistemas são completamente observáveis:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y = [1 \quad 3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ & & & -3 & 1 \\ 0 & & & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Os seguintes sistemas não são completamente observáveis:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ & & & -3 & 1 \\ 0 & & & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Princípio da dualidade. Discutiremos agora a relação entre controlabilidade e observabilidade. Introduziremos o princípio da dualidade, devido a Kalman, para esclarecer as analogias aparentes entre controlabilidade e observabilidade.

Considere o sistema S_1 descrito por

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

onde

x = vetor de estado (vetor n -dimensional)

u = vetor de controle (vetor r -dimensional)

y = vetor de saída (vetor m -dimensional)

A = matriz $n \times n$

B = matriz $n \times r$

C = matriz $m \times n$

e o sistema dual S_2 definido por

$$\dot{z} = A^*z + C^*v$$

$$n = B^*z$$

onde

z = vetor de estado (vetor n -dimensional)

v = vetor de controle (vetor m -dimensional)

n = vetor de saída (vetor r -dimensional)

A^* = transposta conjugada de A

B^* = transposta conjugada de B

C^* = transposta conjugada de C

O princípio da dualidade diz que o sistema S_1 é de estado completamente controlável (observável) se e apenas se o sistema S_2 é completamente observável (de estado controlável).

Para verificar este princípio, vamos escrever as condições necessárias e suficientes para controlabilidade completa de estado e observabilidade completa dos sistemas S_1 e S_2 .

Para o sistema S_1 :

1. Uma condição necessária e suficiente para controlabilidade completa de estado é que a característica da matriz $n \times nr$

$$[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]$$

seja n .

2. Uma condição necessária e suficiente para observabilidade completa é que a característica da matriz $n \times nm$

$$[C^* | A^*C^* | \dots | (A^*)^{n-1}C^*]$$

seja n .

Para o sistema S_2 :

1. Uma condição necessária e suficiente para controlabilidade completa de estado é que a característica da matriz $n \times nm$

$$[C^* | A^*C^* | \dots | (A^*)^{n-1}C^*]$$

seja n .

2. Uma condição necessária e suficiente para observabilidade completa é que a característica da matriz $n \times nr$

$$[B | AB | \dots | A^{n-1}B]$$

seja n .

Comparando estas condições, fica aparente que este princípio é verdadeiro. Este princípio, naturalmente, se aplica igualmente para sistemas de tempo discreto. Usando este princípio, a observabilidade de um dado sistema pode ser testada verificando-se a controlabilidade de estado de seu dual.

16.4 SISTEMAS DE CONTROLE DE TEMPO ÓTIMO

Nesta seção, consideraremos primeiro o controle de tempo ótimo de sistemas de tempo discreto e, em seguida, o controle de tempo ótimo de sistemas de tempo contínuo.

Controle de tempo ótimo de sistemas de tempo discreto. Se o sistema de ordem n é de tempo discreto, então um estado inicial arbitrário pode ser levado a um estado desejado no máximo em n períodos de amostragem se o sistema é de estado completamente controlável e a norma do vetor de controle é não-limitada.

Considere o seguinte sistema de tempo discreto:

$$x((k+1)T) = G(T)x(kT) + H(T)u(kT), \quad \|u(kT)\| \leq \infty$$

onde

x = vetor de estado (vetor n -dimensional)

u = vetor de controle (vetor r -dimensional)

$G(T)$ = matriz constante $n \times n$

$H(T)$ = matriz constante $n \times r$

(Note que o período de amostragem T é uma constante.) Se este sistema é de estado completamente controlável, então podemos transferir um estado inicial arbitrário $x(0)$ para a origem em n passos, ou

$$x(nT) = G^n(T)x(0) + \sum_{k=0}^{n-1} G^{n-k-1}(T)H(T)u(kT) = 0$$

O vetor de controle desejado $u(kT)$ pode ser determinado resolvendo-se as seguintes n equações matriciais simultâneas:

$$x(T) = G(T)x(0) + H(T)u(0)$$

$$x(2T) = G(T)x(T) + H(T)u(T)$$

$$x(nT) = G(T)x((n-1)T) + H(T)u((n-1)T) = 0$$

Para ser uma solução prática, o vetor de controle $u(kT)$ deve ser determinado como uma função do vetor de estado $x(kT)$.

Note que uma vez que supus-mos a norma de $u(kT)$ não-limitada, podemos obter o tempo de resposta menor fazendo o tempo de amostragem mais curto. Note também que se o sinal de controle é limitado, então o número de períodos de amostragem necessário para transferir o estado inicial arbitrário para a origem pode aumentar.

Ilustraremos a determinação do $u(kT)$ requerido usando um exemplo.

Exemplo 16.9 Considere o seguinte sistema de tempo discreto:

$$\begin{bmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-T} + T - 1 \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix} u(kT) \quad (16.23)$$

Note que esta é a versão discreta do sistema de tempo contínuo descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Vamos reescrever a Eq. (16.23) como

$$x((k+1)T) = G(T)x(kT) + H(T)u(kT)$$

Supomos que $u(kT)$ é não-limitada, ou

$$-\infty \leq u(kT) \leq \infty$$

Naturalmente, este sistema é de estado completamente controlável. Resolveremos o problema de transferir um estado inicial arbitrário para a origem usando um sinal de controle constante por trechos.

Como o sistema dado é de segunda-ordem, necessitamos no máximo de dois períodos de amostragem para transferir qualquer estado inicial $x(0)$ para a origem. Observando que

$$x(T) = G(T)x(0) + H(T)u(0)$$

$$x(2T) = 0 = G(T)x(T) + H(T)u(T)$$

$$= G^2(T)x(0) + G(T)H(T)u(0) + H(T)u(T) \quad (16.24)$$

obtemos

$$x(0) = -G^{-1}(T)H(T)u(0) - G^{-2}(T)H(T)u(T) \quad (16.25)$$

Substituindo a Eq. (16.25) na Eq. (16.24), obtemos

$$\mathbf{x}(T) = -\mathbf{G}^{-1}(T)\mathbf{H}(T)\mathbf{u}(T) \quad (16.26)$$

Observando que

$$\mathbf{G}^{-1}(T)\mathbf{H}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^T \\ 0 & e^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-T} + T - 1 \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T - e^T + 1 \\ e^T - 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}^{-2}(T)\mathbf{H}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{2T} \\ 0 & e^{2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-T} + T - 1 \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T + e^T - e^{2T} \\ e^{2T} - e^T \end{bmatrix}$$

obtemos das Eqs. (16.25) e (16.26)

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} T - e^T + 1 \\ e^T - 1 \end{bmatrix} [u(0)] - \begin{bmatrix} T + e^T - e^{2T} \\ e^{2T} - e^T \end{bmatrix} [u(T)] \quad (16.27)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} T - e^T + 1 \\ e^T - 1 \end{bmatrix} [u(T)] \quad (16.28)$$

Combinando as Eqs. (16.27) e (16.28), temos

$$\begin{bmatrix} x_1(0) & x_1(T) \\ x_2(0) & x_2(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T + e^T - 1 & -T - e^T + e^{2T} \\ -e^T + 1 & -e^{2T} + e^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) & u(T) \\ u(T) & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$\begin{bmatrix} u(0) & u(T) \\ u(T) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T + e^T - 1 & -T - e^T + e^{2T} \\ -e^T + 1 & -e^{2T} + e^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) & x_1(T) \\ x_2(0) & x_2(T) \end{bmatrix} \quad (16.29)$$

A Eq. (16.29) define a sequência de controle ótimo $u(0)$ e $u(T)$. Note que $u(T)$ pode ser expresso em termos de $\mathbf{x}(0)$ apenas ou $\mathbf{x}(T)$ apenas.

Para ilustrar a solução $u(kT)$ em termos de $\mathbf{x}(kT)$, vamos supor que T é igual a 1 segundo. Então,

$$\begin{bmatrix} u(0) & u(1) \\ u(1) & u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,58 & -1,24 \\ 0,58 & 0,24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) & x_1(1) \\ x_2(0) & x_2(1) \end{bmatrix} \quad (16.30)$$

do que obtemos

$$u(k) = -1,58x_1(k) - 1,24x_2(k) \quad (k = 0, 1)$$

Com esta lei de controle, qualquer estado inicial $\mathbf{x}(0)$ pode ser transferido para a origem em 2 segundos. A Fig. 16.1 é o diagrama de blocos do sistema de controle ótimo.

Vamos agora determinar os estados iniciais a partir dos quais podemos transferir o sistema para a origem em um período de amostragem. Para tal, fazemos $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$ na Eq. (16.24). Então,

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{G}(T)\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}(T)\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$$

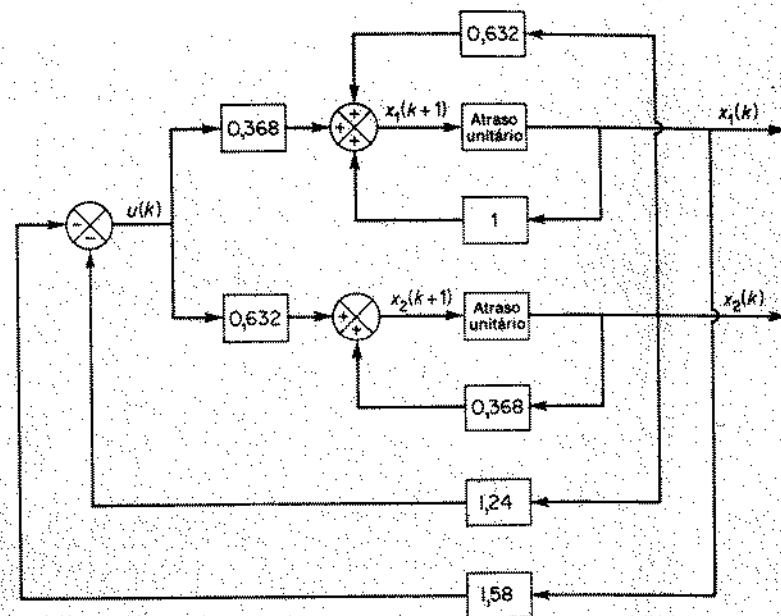


Fig. 16.1 Diagrama de blocos do sistema de controle ótimo considerado no Exemplo 16.9.

do qual obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= -\mathbf{G}^{-1}(T)\mathbf{H}(T)\mathbf{u}(0) \\ &= -\begin{bmatrix} T - e^T + 1 \\ e^T - 1 \end{bmatrix} u(0) \end{aligned}$$

Para $T = 1$,

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,72 \\ -1,72 \end{bmatrix} [u(0)] \quad (16.31)$$

Da Eq. (16.31), achamos que se o estado inicial está na reta

$$1,72x_1(0) + 0,72x_2(0) = 0$$

então ele pode ser transferido para a origem em um período de amostragem, ou 1 segundo. Alternativamente, impomos que o estado inicial seja transferido para a origem em dois períodos de amostragem, ou 2 segundos.

Finalmente, note que se queremos reduzir o tempo de resposta para no máximo 0,5 segundo, isto pode ser feito escolhendo-se $T = 0,25$ segundo. Entretanto, isto aumentará a amplitude do sinal de controle.

Controle de tempo ótimo de sistemas de tempo contínuo com sinais de controle limitados. Usando argumentos plausíveis e experimentação, acreditava-se no passado que se um sistema de controle está sendo operado sob potência limitada, então

podia ser levado de um estado para outro no mínimo tempo utilizando-se sempre toda a potência disponível. Esta hipótese é o chamado princípio "banguê-banguê". Embora muitos sistemas de controle de tempo ótimo com potência de controle limitada sejam do tipo banguê-banguê, não é verdade que todos os sistemas são deste tipo. (Por exemplo, se a função de transferência de um processo inclui zeros, pode-se mostrar que a solução estrita de banguê-banguê em que o sinal de controle chaveia entre valores constantes $+u_0$ e $-u_0$ não é ótimo.)

Considere um processo descrito por

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = bu \quad (16.32)$$

ou

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

onde a amplitude de u é limitada, ou

$$-u_0 \leq u \leq u_0$$

Pode-se provar (Referências B-2 e L-4) que, para o controle de tempo ótimo do processo dado pela Eq. (16.32), a lei de controle é do tipo banguê-banguê; isto é, o sinal de controle toma o valor máximo, cujo sinal é chaveado no máximo $n - 1$ vezes.

Na análise que se segue, limitaremos nossa discussão a processos descritos pelas Eq. (16.32). Não provaremos o princípio do banguê-banguê aqui. Em vez disso, usaremos o fato já provado de que o controle de tempo ótimo de sistemas descritos pela Eq. (16.32) é do tipo banguê-banguê e utilizaremos isto na solução do problema específico onde $n = 2$.

Para sistemas de segunda-ordem, a abordagem por plano de fase é o mais conveniente para a determinação da curva de chaveamento em que o sinal do sinal de controle deve ser modificado. Para sistemas de ordem superior, entretanto, qualquer que seja a abordagem, é bastante difícil determinar as superfícies de chaveamento no espaço de estados n -dimensional. Na maioria dos casos, a construção explícita das superfícies de chaveamento no espaço de estados n -dimensional é praticamente impossível.

Exemplo 16.10 Considere o controle de tempo ótimo do processo descrito por $1/s^2$. O controlador ótimo é do tipo banguê-banguê ou de máximo esforço. Isto é, o controlador age no motor para fornecer o máximo torque positivo para acelerar a carga ou o máximo torque negativo para desacelerar a carga, dependendo de o erro ser positivo ou negativo. Supondo que o sistema está sujeito apenas a mudanças nas condições iniciais, determine a curva de chaveamento no plano de fase.

Referindo-se à Fig. 16.2, vemos que a equação para o sistema é

$$J\ddot{e} = u = \pm T \quad (16.33)$$

Como o sistema está sujeito apenas a mudanças nas condições iniciais, fazemos $r = 0$ para $t > 0$. Então obtemos $\dot{e} = -\dot{e}$, e a Eq. (16.33) se torna

$$\ddot{e} = -\frac{u}{J} = \mp \frac{T}{J}$$

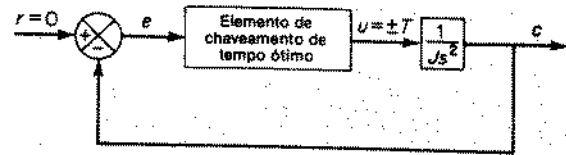


Fig. 16.2 Diagrama de blocos de um sistema de controle de tempo ótimo.

Esta última equação pode ser reescrita como

$$\ddot{e} = \mp \frac{T}{J}$$

da qual obtemos

$$\dot{e}^2 = \mp 2 \frac{T}{J} e + K$$

onde K é uma constante. Esta equação descreve duas famílias de parábolas no plano $e - \dot{e}$, dependendo de $u = T$ ou $u = -T$.

Uma vez que colocamos $u = T$ ou $u = -T$, a parábola particular é determinada pelo valor de K , que depende das condições iniciais $e(0)$ e $\dot{e}(0)$. As únicas parábolas que passam pela origem são as parábolas AOA' e a parábola BOB' , vistas na Fig. 16.3.

Referindo-se à Fig. 16.3 vemos que, para alcançar a origem, um ponto representativo do plano $e - \dot{e}$ deve seguir a trajetória AO ou BO . Isto significa que, dado o estado inicial representado pelo ponto P na Fig. 16.4, devemos usar $u = T$ até que o ponto representativo, seguindo a trajetória parabólica, alcance o ponto Q , onde o sinal de controle deve ser chaveado para $u = -T$. Então o ponto representativo se move ao longo da trajetória QO . Isto dará o menor tempo de resposta, ou a resposta de tempo ótimo.

Para ver isto graficamente, refira-se à Fig. 16.5. Vamos comparar as duas trajetórias PQO e $PQRSTUO$. Notando que o tempo requerido para ir do ponto Q ao ponto O é o mesmo para ir do ponto S ao ponto T , vemos que

$$(t_f - t_i)_{PQO} < (t_f - t_i)_{PQRSTUO}$$

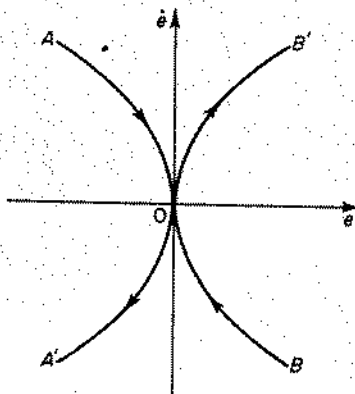


Fig. 16.3 Diagrama de plano de fase mostrando trajetórias passando através da origem.

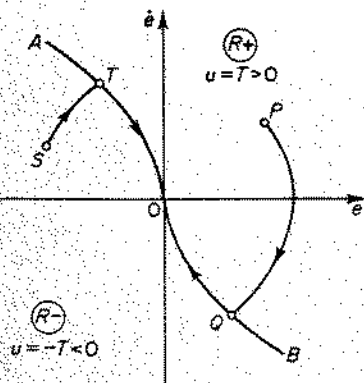


Fig. 16.4 Diagrama de plano de fase mostrando trajetórias de tempo ótimo.

onde $t_f - t_i$ é o tempo necessário para ir do ponto P à origem.

De forma semelhante, comparando as duas trajetórias PQO e $PRSTO$ na Fig. 16.6, vemos que leva mais tempo para se ir do ponto R ao ponto T através do ponto S do que através do

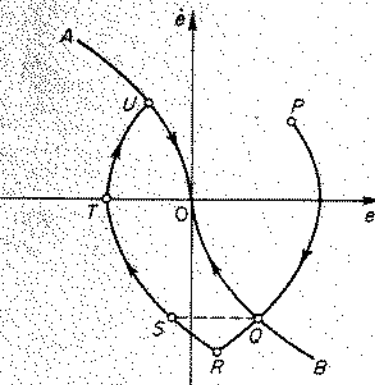


Fig. 16.5 Diagrama de plano de fase mostrando trajetórias ótimas e não-ótimas.

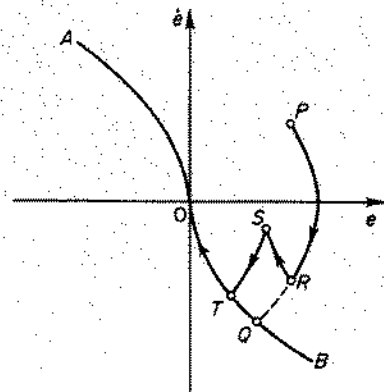


Fig. 16.6 Diagrama de plano de fase mostrando trajetórias ótimas e não-ótimas.

ponto Q , porque a velocidade média é maior para trajetória RQT do que para a trajetória RST . Portanto,

$$(t_f - t_i)_{PQO} < (t_f - t_i)_{PRSTO}$$

Portanto, se o chaveamento ocorre em pontos outros que os da parábola AOB , a trajetória requer um tempo extra para se alcançar a origem e não pode ser de tempo ótimo.

De forma semelhante, se o estado inicial é o ponto S na Fig. 16.4, então a trajetória ótima é STO . Portanto, para a resposta de tempo ótimo, um ponto representativo deve permanecer na sua parábola inicial até que alcance a parábola AO ou a parábola BO . O sinal de controle, então, tem seu sinal chaveado, e o ponto representativo segue a trajetória ao longo da parábola AO ou parábola BO até que a origem é alcançada.

Resumindo, o controle de tempo ótimo do processo cuja função de transferência é dada por $1/s^2$ foi analisado. Determinamos que a curva de chaveamento separa o plano $e-\dot{e}$ em regiões R_+ e R_- , como visto na Fig. 16.4, onde R_+ é o conjunto de pontos para a direita e R_- é o conjunto de pontos para a esquerda da curva de chaveamento AOB . Uma formalização da lei de controle para este problema pode ser dada como segue: A lei de controle de tempo ótimo em função do estado é dada por

$$\begin{aligned} u(t) &= T \quad \text{para } (x_1, x_2) \text{ na região } R_+ \text{ ou sobre a curva de chaveamento } AO \\ u(t) &= -T \quad \text{para } (x_1, x_2) \text{ na região } R_- \text{ ou sobre a curva de chaveamento } BO \end{aligned}$$

É importante observar que, independente do estado inicial, impomos no máximo um chaveamento do sinal de controle.

Finalmente, do ponto de vista prático, notamos o seguinte:

1. Efeitos como atrito podem modificar a curva de chaveamento, e chaveamentos imprecisos podem levar a uma trajetória que não se aproxima da origem do plano de fase. Por esta razão, uma região de operação linear pode ser provida nas vizinhanças da origem. Um sistema como este é frequentemente chamado de um sistema de controle de tempo ótimo de modo dual.
2. Para simplificar o problema de implementação do controlador ótimo, podemos aproximar a curva de chaveamento parabólica por uma série de segmentos de reta. O sistema resultante não é de tempo ótimo, mas estará perto do ótimo. (Veja Problema A.16.5.)

Alguns comentários sobre o controle de tempo ótimo de sistemas de ordem elevada com sinais de controle limitados. Considere o seguinte sistema de ordem elevada com sinal de controle limitado:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = bu$$

ou na representação por espaço de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{bmatrix} [u]$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

O problema de controle de tempo ótimo deste sistema é o de transferir o estado a partir de um certo ponto do espaço de estados para a origem (ou algum outro ponto especificado) no tempo mínimo que é consistente com as dadas restrições. Como as condições iniciais podem ser arbitrárias, qualquer ponto no espaço de estados pode ser um ponto inicial. Portanto, é necessário determinar a lei de controle que minimiza o tempo de resposta como uma função das variáveis de estado. Isto requer a determinação do lugar geométrico dos pontos no espaço de estados em que o sinal de controle deve ser chaveado para a direção oposta.

O uso de um método matricial fornecerá a solução do problema de chaveamento de tais sistemas de ordem elevada em termos gerais. Deve-se mencionar que, na prática, o problema real não é o de achar a solução em forma matricial geral, mas encontrar um método para resolver várias equações simultâneas envolvendo termos transcendentais em um tempo razoável. Quando se trabalha com sistemas de ordem elevada, notamos que as computações envolvidas se tornam bastante trabalhosas à medida que o número de variáveis ou a ordem do sistema aumenta. (O método matricial não oferece nenhum auxílio para resolver este problema real.)

16.5 SISTEMAS DE CONTROLE ÓTIMO BASEADOS NOS ÍNDICES DE DESEMPENHO QUADRÁTICO

Nesta seção consideraremos o projeto de sistemas de controle ótimo baseados nos índices de desempenho quadráticos. O sistema de controle que vamos considerar pode ser representado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

onde

- \mathbf{x} = vetor de estado (vetor real n -dimensional)
- \mathbf{u} = vetor de controle (vetor real r -dimensional)
- \mathbf{A} = matriz constante $n \times n$
- \mathbf{B} = matriz constante $n \times r$

Ao projetar sistemas de controle, estamos muitas vezes interessados em escolher o vetor de controle $\mathbf{u}(t)$ de tal forma que um dado índice de desempenho é minimizado. Pode-se provar que os índices de desempenho quadráticos onde os limites de integração são 0 e ∞ , tais como

$$J = \int_0^{\infty} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt$$

onde $L(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ é uma função quadrática de \mathbf{x} e \mathbf{u} , fornecerão leis de controle lineares, isto é.

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{Kx}(t)$$

onde \mathbf{K} é uma matriz $r \times n$, ou

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{r1} & k_{r2} & \dots & k_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Portanto, o projeto de sistemas de controle ótimo baseados em tais índices de desempenho quadráticos se resume na determinação dos elementos da matriz \mathbf{K} .

A seguir, discutiremos inicialmente o problema de otimização de parâmetros, isto é, a determinação dos valores ótimos dos parâmetros do sistema. Especificamente, consideramos um sistema com estado inicialmente fora da origem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$$

onde \mathbf{A} tem um ou mais parâmetros ajustáveis. Deseja-se transferir qualquer estado inicial para a origem enquanto minimizamos o índice de desempenho quadrático

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}' \mathbf{Q} \mathbf{x} dt$$

onde \mathbf{Q} é uma matriz positiva-definida (ou positiva-semidefinida) real e simétrica. O problema então se torna o de determinar o(s) valor(es) do(s) parâmetro(s) ajustável(is) de tal forma a minimizar o índice de desempenho.

A seguir consideraremos o problema de controle ótimo baseado em índices de desempenho quadráticos e determinaremos a lei de controle. Isto é, consideramos o problema de determinar o vetor de controle ótimo $\mathbf{u}(t)$ para o sistema descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

e o índice de desempenho dado por

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}' \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}' \mathbf{R} \mathbf{u}) dt$$

onde \mathbf{Q} é uma matriz positiva-definida (ou positiva-semidefinida) real e simétrica, \mathbf{R} é uma matriz positiva-definida real e simétrica, e \mathbf{u} não sofre restrições.

Há várias abordagens diferentes para a solução destes dois tipos de problemas. Nesta seção, apresentamos uma baseada no segundo método de Liapunov. (Lembrar que no Cap. 7 discutimos uma abordagem clássica para a solução de problemas semelhantes de otimização.)

Otimização de sistemas de controle através do segundo método de Liapunov. Classicamente, sistemas de controle são inicialmente projetados e então sua estabilidade é examinada. Uma abordagem diferente desta é onde as condições para estabilidade são formuladas em primeiro lugar e então o sistema é projetado dentro destas limitações. Para uma grande classe de sistemas de controle, pode-se mostrar uma relação direta entre funções de Liapunov e os índices de desempenho quadráticos generalizados usados na síntese de sistemas de controle ótimo. Se o segundo

método de Liapunov é utilizado para formar a base do projeto de um controlador ótimo, então estamos seguros de que o sistema funcionará, isto é, que a saída do sistema será continuamente levada em direção do seu valor desejado. Portanto o sistema projetado tem uma configuração com características inerentes de estabilidade.

Problemas de otimização de parâmetros resolvidos usando-se o segundo método de Liapunov. Em seguida, discutiremos uma relação direta entre funções de Liapunov e índices de desempenho quadráticos generalizados e resolveremos o problema de otimização de parâmetros usando esta relação. Vamos considerar o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

onde todos os autovalores de \mathbf{A} têm partes reais negativas, ou a origem $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é assintoticamente estável. (Chamaremos uma matriz como esta \mathbf{A} de uma matriz *estável*.) Queremos minimizar o índice de desempenho quadrático definido por

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}' \mathbf{Q} \mathbf{x} dt$$

onde \mathbf{Q} é uma matriz positiva-definida (ou positiva-semidefinida) real e simétrica.

Mostraremos agora que uma função de Liapunov pode realmente ser usada na solução deste problema. Vamos supor que

$$\mathbf{x}' \mathbf{Q} \mathbf{x} = -\frac{d}{dt} (\mathbf{x}' \mathbf{P} \mathbf{x})$$

onde \mathbf{P} é uma matriz positiva-definida real e simétrica. Então, obtemos

$$\mathbf{x}' \mathbf{Q} \mathbf{x} = -\dot{\mathbf{x}}' \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}' \dot{\mathbf{P}} \mathbf{x} = -\mathbf{x}' \mathbf{A}' \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}' \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} = -\mathbf{x}' (\mathbf{A}' \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x}$$

Pelo segundo método de Liapunov, sabemos que para um dado \mathbf{Q} há uma matriz \mathbf{P} , se \mathbf{A} for estável, tal que

$$\mathbf{A}' \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (16.34)$$

Portanto podemos determinar os elementos de \mathbf{P} desta equação.

O índice de desempenho J pode ser calculado como

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}' \mathbf{Q} \mathbf{x} dt = -\mathbf{x}' \mathbf{P} \mathbf{x} \Big|_0^{\infty} = -\mathbf{x}'(\infty) \mathbf{P} \mathbf{x}(\infty) + \mathbf{x}'(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0)$$

Como todos os autovalores de \mathbf{A} têm partes reais negativas, temos $\mathbf{x}(\infty) \rightarrow \mathbf{0}$. Portanto, obtemos

$$J = \mathbf{x}'(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0)$$

Portanto o índice de desempenho J pode ser obtido em termos da condição inicial $\mathbf{x}(0)$ e de \mathbf{P} , que está relacionado com \mathbf{A} e \mathbf{Q} pela Eq. (16.34). Se, por exemplo, um parâmetro do sistema deve ser ajustado para minimizar o índice de desempenho J , então isto pode ser conseguido minimizando-se $\mathbf{x}'(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0)$ com relação ao parâmetro em questão. Como $\mathbf{x}(0)$ é a dada condição inicial e \mathbf{Q} também é dada, \mathbf{P} é uma função dos elementos de \mathbf{A} . Portanto este processo de minimização resultará no

valor ótimo do parâmetro ajustável.

É importante notar que o valor ótimo deste parâmetro depende, em geral, da condição inicial $\mathbf{x}(0)$. Entretanto, se $\mathbf{x}(0)$ envolve apenas um componente não nulo, isto é, $x_1(0) \neq 0$, e outras condições iniciais são nulas, então o valor ótimo do parâmetro não depende do valor numérico de $x_1(0)$. (Veja o exemplo seguinte.)

Exemplo 16.11 Considere o sistema visto na Fig. 16.7. Determine o valor do coeficiente de amortecimento $\zeta > 0$ de tal forma que, quando o sistema é sujeito a uma entrada degrau unitário $r(t) = 1(t)$, o seguinte índice de desempenho é minimizado:

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}'(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) dt$$

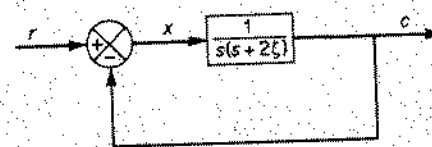


Fig. 16.7 Sistema de controle.

onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (\mu > 0)$$

Supõe-se que o sistema está inicialmente em repouso.

Da Fig. 16.7, obtemos a seguinte equação para o sistema:

$$\ddot{c} + 2\zeta\dot{c} + c = r$$

Notando que $x = r - c$, $r(t) = 1(t)$, e que as condições iniciais são nulas, temos

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x = 0 \quad (t > 0)$$

A representação de espaço de estados desta última equação se torna

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix}$$

Como \mathbf{A} é uma matriz estável, o valor de J é dado por

$$J = \mathbf{x}'(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0)$$

onde \mathbf{P} é determinado de

$$\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

Esta equação resulta nas seguintes três equações:

$$\begin{aligned} -2p_{12} &= -1 \\ p_{11} - 2\zeta p_{12} - p_{22} &= 0 \\ 2p_{12} - 4\zeta p_{22} &= -\mu \end{aligned}$$

Resolvendo estas três equações para obter os p_{ij} , obtemos

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta + \frac{1+\mu}{4\zeta} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1+\mu}{4\zeta} \end{bmatrix}$$

Portanto o índice de desempenho J se torna

$$\begin{aligned} J &= \mathbf{x}'(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0) \\ &= \left(\zeta + \frac{1+\mu}{4\zeta}\right)x_1^2(0) + x_1(0)x_2(0) + \frac{1+\mu}{4\zeta}x_2^2(0) \end{aligned}$$

Substituindo as condições iniciais $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ nesta última equação, obtemos

$$J = \zeta + \frac{1+\mu}{4\zeta}$$

Para minimizar J com relação a ζ , fazemos $\partial J / \partial \zeta = 0$, ou

$$\frac{\partial J}{\partial \zeta} = 1 - \frac{1+\mu}{4\zeta^2} = 0$$

Isto nos dá

$$\zeta = \frac{\sqrt{1+\mu}}{2}$$

Portanto o valor ótimo de ζ é $\sqrt{1+\mu}/2$. Por exemplo, se $\mu = 1$, então o valor ótimo de ζ é $\sqrt{2}/2$ ou 0,707.

Sistemas de controle ótimo baseados em índices de desempenho quadráticos. Dada a equação do sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (16.35)$$

consideraremos o problema de controle ótimo de determinar a matriz \mathbf{K} do vetor de controle ótimo

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (16.36)$$

de tal modo a minimizar o índice de desempenho

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}'\mathbf{R}\mathbf{u}) dt \quad (16.37)$$

onde \mathbf{Q} é uma matriz positiva-definida (ou positiva-semidefinida) real e simétrica e \mathbf{R} uma matriz positiva-definida real e simétrica. Note que o segundo termo do lado direito da Eq. (16.37) se relaciona com o gasto de energia dos sinais de controle. As matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} determinam a importância relativa do erro e o gasto desta energia. Neste problema, supomos que o vetor de controle $\mathbf{u}(t)$ não sofre restrições.

Como mencionado anteriormente, sem demonstração, a lei de controle dada pela Eq. (16.36) é a lei de controle ótimo. Portanto, se os elementos desconhecidos da matriz \mathbf{K} são determinados de tal forma a minimizar o índice de desempenho, então $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ é ótimo para qualquer estado inicial $\mathbf{x}(0)$. O diagrama de bloco mostrando a configuração ótima é visto na Fig. 16.8.

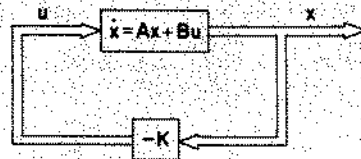


Fig. 16.8 Sistema de controle ótimo.

Vamos agora resolver o problema de otimização. Substituindo a Eq. (16.36) na Eq. (16.35), obtemos

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}$$

Nas derivações seguintes, suporemos que a matriz $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ é estável, ou que os autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ têm partes reais negativas.

Substituindo a Eq. (16.36) na Eq. (16.37), obtemos

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{x}'\mathbf{K}'\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{x}) dt \\ &= \int_0^\infty \mathbf{x}'(\mathbf{Q} + \mathbf{K}'\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x} dt \end{aligned}$$

Seguindo a discussão dada para resolver o problema de otimização de parâmetros, fazemos

$$\mathbf{x}'(\mathbf{Q} + \mathbf{K}'\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x} = -\frac{d}{dt}(\mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x})$$

Então, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x}'(Q + K'RK)x &= -\dot{x}'Px - x'P\dot{x} \\ &= -x'[(A - BK)'P + P(A - BK)]x \end{aligned}$$

Comparando ambos os lados desta última equação e notando que esta equação deve ser verdadeira para qualquer x , impomos que

$$(A - BK)'P + P(A - BK) = -(Q + K'RK) \quad (16.38)$$

Pelo segundo método de Liapunov, se $A - BK$ é uma matriz estável, então existe uma matriz positiva definida P que satisfaz a Eq. (16.38). Então, notando que $x(\infty) = 0$, o índice de desempenho pode ser escrito como

$$J = x'(0)Px(0) \quad (16.39)$$

As etapas de projeto podem ser escritas como:

1. Determinar a matriz P que satisfaz a Eq. (16.38) como uma função de K .
2. Substituir a matriz P na Eq. (16.39). Então o índice de desempenho se torna uma função de K .
3. Determinar os elementos da matriz K de tal forma que o índice de desempenho J seja minimizado. A minimização de J em relação aos elementos k_{ij} de K pode ser obtida fazendo-se $\partial J / \partial k_{ij}$ igual a zero e resolvendo as equações, determinando os valores ótimos de k_{ij} .

Para detalhes deste método de projeto, veja o Problema A.16.8. Quando o número de elementos k_{ij} não é pequeno, este método não é conveniente.

Dispõe-se de um método melhor para o projeto do sistema de controle ótimo. Como se supôs que R é uma matriz positiva definida real e simétrica, podemos escrever

$$R = T'T$$

onde T é uma matriz não-singular. Então a Eq. (16.38) pode ser escrita como

$$(A' - K'B')P + P(A - BK) + Q + K'T'TK = 0$$

que pode ser reescrita como

$$A'P + PA + [TK - (T')^{-1}B'P]'[TK - (T')^{-1}B'P] - PBR^{-1}B'P + Q = 0$$

A minimização de J com relação a K requer a minimização de

$$x'[TK - (T')^{-1}B'P]'[TK - (T')^{-1}B'P]x$$

com relação a K . Como este valor é não-negativo, o mínimo ocorre quando este se anula, ou quando

$$TK = (T')^{-1}B'P$$

Portanto

$$K = T^{-1}(T')^{-1}B'P = R^{-1}B'P \quad (16.40)$$

A Eq. (16.40) nos dá a matriz ótima K . A matriz P na Eq. (16.40) deve satisfazer a Eq. (16.38) ou a seguinte equação reduzida:

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \quad (16.41)$$

A Eq. (16.41) é chamada a equação de Riccati de matriz reduzida. As etapas de projeto podem ser escritas como:

1. Resolver a Eq. (16.41), a equação de Riccati de matriz reduzida, para a matriz P .

2. Substituir esta matriz P na Eq. (16.40). A matriz resultante K é a ótima. Um exemplo de projeto baseado nesta última abordagem é dado no Exemplo 16.12.

Se a matriz $A - BK$ é estável, o método presente sempre nos dá o resultado correto. Kalman mostrou que a imposição de a matriz $A - BK$ ser estável equivale a de que a característica da matriz

$$[S' | A'S' | \dots | (A')^{n-1}S'] \quad (16.42)$$

seja igual a n , onde a matriz S é definida por

$$S'S = Q$$

Esta condição na característica pode ser aplicada convenientemente para testar se a matriz $A - BK$ é estável.

Entretanto é importante notar que, mesmo que $A - BK$ não seja uma matriz estável, o método presente ainda nos dará resultados corretos em um caso especial em que a matriz P determinada da Eq. (16.41) se torna positiva semidefinida; não obstante ela nos fornece $x'(\infty)Px(\infty) = 0$.

Finalmente, note que se o índice de desempenho é dado em termos do vetor de saída ao invés do vetor de estado, isto é,

$$J = \int_0^\infty (y'Qy + u'Ru) dt$$

então o índice pode ser modificado usando-se a equação de saída

$$y = Cx$$

para

$$J = \int_0^\infty (x'C'QCx + u'Ru) dt$$

e o mesmo procedimento que discutimos aqui pode ser aplicado para se obter a matriz ótima K .

Exemplo 16.12 Considere o sistema visto na Fig. 16.9. Supondo que o sinal de controle seja

$$u(t) = -Kx(t)$$

projete a matriz de ganho de realimentação ótima K de tal forma que o seguinte índice de desempenho seja minimizado:

$$J = \int_0^\infty (x'Qx + u'u) dt$$

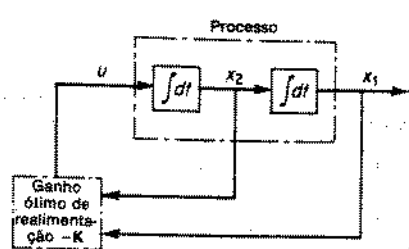


Fig. 16.9 Sistema de controle.

onde

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (\mu \geq 0)$$

Da Fig. 16.9, vemos que a equação para o processo é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

Observando que

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \end{bmatrix} = S'S$$

determinamos a característica da matriz dada por (16.42), ou

$$[S' | A'S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

igual a dois. Portanto $A - BK$ é uma matriz estável, e a abordagem por Liapunov apresentada nesta seção fornece o resultado correto.

Demonstraremos o uso da equação de Riccati de matriz reduzida no projeto do sistema de controle ótimo. Vamos resolver a Eq. (16.41), reescrita como

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1] [0 \quad 1] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta equação pode ser simplificada para

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p_{11} \\ 0 & p_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{22} & p_{22}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de que obtemos as seguintes três equações:

$$\begin{aligned} 1 - p_{12}^2 &= 0 \\ p_{11} - p_{12}p_{22} &= 0 \\ \mu + 2p_{12} - p_{22}^2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo estas três equações simultâneas para p_{11} , p_{12} e p_{22} , impondo que P seja positiva definida, obtemos

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu+2} & 1 \\ 1 & \sqrt{\mu+2} \end{bmatrix}$$

A matriz de ganho de realimentação ótima K é então obtida de

$$\begin{aligned} K &= R^{-1}B'P \\ &= [1] [0 \quad 1] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \\ &= [p_{12} \quad p_{22}] \\ &= [1 \quad \sqrt{\mu+2}] \end{aligned}$$

Portanto o sinal de controle ótimo é

$$u = -Kx = -x_1 - \sqrt{\mu+2}x_2 \quad (16.43)$$

Note que a lei de controle dada pela Eq. (16.43) fornece um resultado ótimo para qualquer estado inicial sob o dado índice de desempenho. A Fig. 16.10 é o diagrama de bloco para este sistema.

Comentários conclusivos

1. A característica de uma lei de controle ótimo baseada em um índice de desempenho quadrático é que ela é uma função linear das variáveis de estado, que implica que necessitamos realimentar todas as variáveis de estado. Isto requer que todas estas variáveis estejam disponíveis para a realimentação. Portanto é desejável representar o sistema em termos de variáveis de estado.

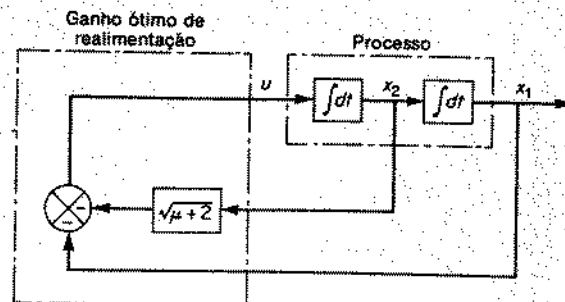


Fig. 16.10 Controle ótimo do processo visto na Fig. 16.9.

mensuráveis. (Em sistemas complicados, é pouco provável que possamos medir todas as variáveis de estado. Então devemos estimar as não mensuráveis e usar estes valores estimados para gerar sinais de controle ótimo.) É importante notar que devemos evitar diferenciar uma variável de estado para gerar outra. A diferenciação de um sinal sempre diminui a relação sinal-ruído porque o ruído em geral tem flutuações mais rápidas do que o sinal de comando. Às vezes a relação sinal-ruído pode ser diminuída substancialmente usando-se apenas um processo de diferenciação. Geralmente é desejável evitar processos de diferenciação; por exemplo, se a aceleração do deslocamento de saída é desejada, é melhor medir a aceleração diretamente usando um acelerômetro ao invés de diferenciar o sinal de velocidade.

2. Quando o sistema de controle ótimo é projetado no domínio do tempo, é desejável investigar as características de resposta em frequência para compensar efeitos de ruído. As características de resposta em frequência do sistema devem ser tais que o sistema atenuie bastante na gama de frequências em que ruído e ressonância de componentes são esperados. (Para compensar efeitos de ruído devemos, em alguns casos, ou modificar a configuração ótima e aceitar um desempenho subótimo ou modificar o índice de desempenho.)

3. Se o limite superior de integração do índice de desempenho J dado pela Eq. (16.37) é finito, então pode-se mostrar que o vetor de controle ótimo ainda é uma função linear das variáveis de estado e as entradas de referência, mas com coeficientes variantes no tempo. (Portanto, a determinação do vetor de controle ótimo envolve a de matrizes variantes no tempo ótimas.)

16.6 SISTEMAS DE CONTROLE DE REFERÊNCIA-MODELO

No Cap. 10, apresentamos técnicas de projeto e compensação de sistemas de controle lineares e invariantes no tempo. Como todos os processos físicos têm certo grau de não-linearidade, o sistema projetado se comportará satisfatoriamente apenas em uma gama limitada de operação.

Se a suposição de linearidade na equação do processo é eliminada, as técnicas de projeto do Cap. 10 não são aplicáveis. Em tal caso o método de referência-modelo para o projeto de sistemas apresentado nesta seção pode ser útil.

Sistemas de controle de referência-modelo. Um dos métodos úteis para especificar o desempenho de um sistema é através de um modelo que produzirá a saída desejada para uma dada entrada. O modelo não necessita ser em *hardware*. Ele pode ser apenas um modelo matemático simulado em um computador. Em um sistema de controle de referência-modelo, a saída do modelo e a do processo são comparadas e a diferença é utilizada para gerar os sinais de controle.

O controle por referência-modelo tem sido usado para se obter desempenhos aceitáveis em algumas situações muito difíceis de controle envolvendo não-linearidades e/ou parâmetros variantes no tempo.

Projeto de um controlador.* Suporemos que o processo é caracterizado pela seguinte equação de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (16.44)$$

* Referências M-8 e V-1.

onde

\mathbf{x} = vetor de estado (vetor real n -dimensional)
 \mathbf{u} = vetor de controle (vetor real r -dimensional)
 \mathbf{f} = função vetorial

Deseja-se que o sistema de controle siga de perto algum sistema-modelo. Nosso problema de projeto é o de sintetizar um controlador que sempre gera um sinal que força o estado do processo sempre em direção ao estado do modelo. A Fig. 16.11 é o diagrama de blocos mostrando a configuração do sistema.

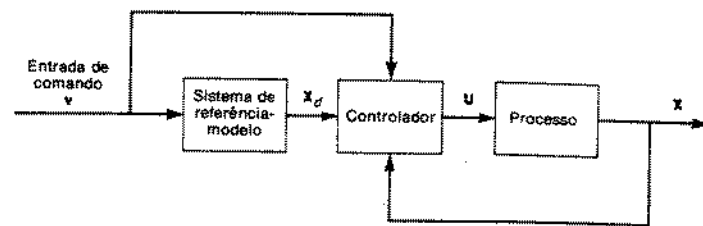


Fig. 16.11 Sistema de controle de referência-modelo.

Suporemos que o sistema de referência-modelo é linear e descrito por

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{A}\mathbf{x}_d + \mathbf{B}\mathbf{v} \quad (16.45)$$

onde

\mathbf{x}_d = vetor de estado do modelo (vetor real n -dimensional)
 \mathbf{v} = vetor de entrada (vetor real r -dimensional)
 \mathbf{A} = matriz constante $n \times n$
 \mathbf{B} = matriz constante $n \times r$

Supomos que os autovalores de \mathbf{A} têm partes reais negativas, de tal forma que o sistema referência-modelo tem um estado de equilíbrio assintoticamente estável.

Vamos definir o vetor de erro e por

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x} \quad (16.46)$$

No problema presente, queremos reduzir o vetor de erro para zero usando um vetor de controle adequado \mathbf{u} . Das Eqs. (16.44), (16.45) e (16.46), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}_d + \mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{B}\mathbf{v} \end{aligned} \quad (16.47)$$

A Eq. (16.47) é uma equação diferencial para o vetor de erro.

Agora projetaremos um controlador tal que no estado estacionário $\mathbf{x} = \mathbf{x}_d$ e $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_d$, ou $\mathbf{e} = \dot{\mathbf{e}} = 0$. Portanto a origem $\mathbf{e} = 0$ será um estado de equilíbrio.

Um ponto de partida conveniente na síntese do vetor de controle \mathbf{u} é a

construção de uma função de Liapunov para o sistema dada pela Eq. (16.47).

Vamos supor que a forma da função de Liapunov é

$$V(e) = e'Pe$$

onde P é uma matriz positiva-definida real e simétrica. Tomando a derivada de $V(e)$ com relação ao tempo, obtemos

$$\begin{aligned}\dot{V}(e) &= \dot{e}'Pe + e'P\dot{e} \\ &= [e'A' + x'A' - f'(x, u, t) + v'B']Pe - e'P[Ae + Ax - f(x, u, t) \\ &\quad + Bv] = e'(A'P + PA)e + 2M\end{aligned}\quad (16.48)$$

onde

$$M = e'P[Ax - f(x, u, t) + Bv] = \text{grandeza escalar}$$

A função suposta $V(e)$ é uma função de Liapunov se

1. $A'P + PA = -Q$ é uma matriz negativa-definida.
2. O vetor de controle u pode ser escolhido para tornar a grandeza escalar M não positiva.

Então, notando que $V(e) \rightarrow \infty$ quando $\|e\| \rightarrow \infty$, vemos que o estado de equilíbrio $e = 0$ é assintoticamente estável globalmente. A Condição 1 pode sempre ser satisfeita através de uma escolha adequada de P , uma vez que se supõe os autovalores de A têm partes reais negativas. O problema aqui é o de escolher um vetor de controle u tal que M seja zero ou negativo.

Ilustraremos a aplicação do método presente para o projeto de um controlador não-linear usando um exemplo.

Exemplo 16.13 Considere um processo não-linear variante no tempo descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a(t)x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

onde $a(t)$ é variante no tempo e b uma constante positiva. Supondo que a equação da referência-modelo é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{d1} \\ \dot{x}_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{d1} \\ x_{d2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} [v] \quad (16.49)$$

projete um controlador não-linear que resultará em uma operação estável do sistema.

Defina o vetor de erro por

$$e = x_d - x$$

e uma função de Liapunov por

$$V(e) = e'Pe$$

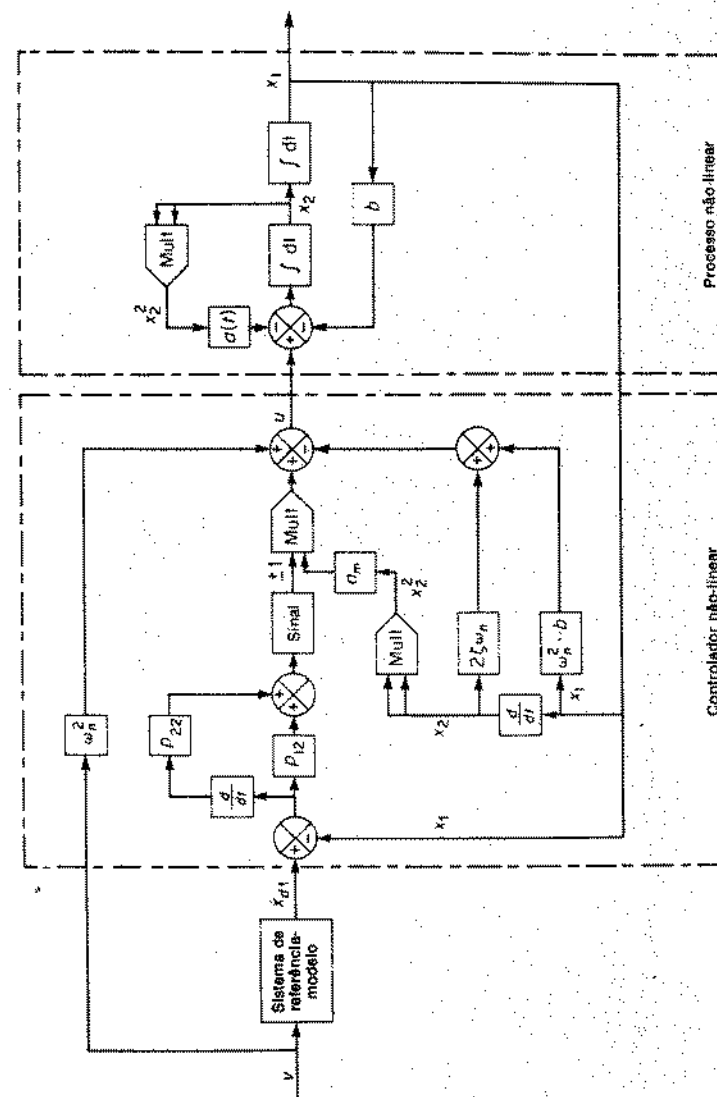


Fig. 16.12 Controle de referência-modelo de um processo não-linear

onde P é uma matriz positiva-definida real e simétrica. Então, referindo-se à Eq. (16.48), obtemos $\dot{V}(e)$ como

$$\dot{V}(e) = e'(A'P + PA)e + 2M$$

onde

$$M = e'P[Ax - f(x, u, t) + Bv]$$

Identificando as matrizes A e B da Eq. (16.49) e escolhendo a matriz Q como

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix} = \text{positiva definida}$$

obtemos

$$\dot{V}(e) = -(q_{11}e_1^2 + q_{22}e_2^2) + 2M$$

onde

$$\begin{aligned} M &= [e_1 \quad e_2] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a(t)x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 v \end{bmatrix} \right\} \\ &= (e_1 p_{12} + e_2 p_{22})[-(\omega_n^2 - b)x_1 - 2\zeta\omega_n x_2 + a(t)x_2^2 - \omega_n^2 v - u] \end{aligned}$$

Se escolhermos u tal que

$$u = -(\omega_n^2 - b)x_1 - 2\zeta\omega_n x_2 - \omega_n^2 v + a_m x_2^2 \text{ sinal}(e_1 p_{12} + e_2 p_{22}) \quad (16.50)$$

onde

$$a_m = \max_t |a(t)|$$

então

$$M = (e_1 p_{12} + e_2 p_{22})[a(t) - a_m \text{ sinal}(e_1 p_{12} + e_2 p_{22})]x_2^2 = \text{não positiva}$$

Com a função de controle u dada pela Eq. (16.50), o estado de equilíbrio $e = 0$ é assintoticamente estável globalmente. Portanto a Eq. (16.50) define uma lei de controle não linear que fornecerá uma operação assintoticamente estável. O diagrama em blocos para o sistema de controle presente é visto na Fig. 16.12.

Note que a taxa de convergência da resposta transitória depende da matriz P , que por sua vez depende da matriz Q escolhida no início do projeto.

16.7 SISTEMAS DE CONTROLE ADAPTATIVO

Em anos recentes, o interesse em sistemas de controle adaptativos aumentou rapidamente, juntamente com o interesse e progresso em tópicos de controle em geral. O termo *sistema adaptativo* tem uma variedade de significados específicos.

mas normalmente implica que o sistema é capaz de se acomodar a mudanças imprevisíveis no meio ambiente, venham estas mudanças de dentro do sistema ou de fora. Este conceito é de muito interesse para o projetista de sistema, pois, um sistema altamente adaptativo, além de se acomodar para mudanças ambientais, também se acomodaria para erros de projeto de engenharia e compensaria por falhas ou incertezas moderadas de componentes secundários do sistema, aumentando portanto a confiabilidade do sistema.

Inicialmente apresentaremos alguns conceitos básicos de sistemas de controle adaptativo e explicaremos o que tais sistemas representam. Então discutiremos as funções necessárias que um controlador deve desempenhar para que seja chamado adaptativo. Finalmente, introduziremos alguns conceitos de sistemas com aprendizado.

Introdução. Na maioria de sistemas de controle e realimentação, pequenos desvios nos valores de parâmetros dos seus valores projetados não causarão quaisquer problemas na operação normal do sistema, desde que estes parâmetros estejam dentro da malha. Entretanto, se os parâmetros do processo variam muito com mudanças ambientais, então o sistema de controle pode apresentar uma resposta satisfatória para uma condição ambiental mas deixar de ter um desempenho satisfatório sob outras condições. Em certos casos, grandes variações de parâmetros de processo podem até causar instabilidade.

Na análise mais simples, podem-se considerar diferentes conjuntos de valores dos parâmetros do processo. É então desejável projetar um sistema de controle que funcione bem para todos os conjuntos. Tão logo esta imposição é formulada, o problema de controle ótimo estrito perde sua importância. Impondo um bom desempenho em uma certa gama, abandonamos o melhor desempenho para um conjunto de parâmetros.

Se a função de transferência do processo pode ser identificada continuamente, então podemos compensar variações na função de transferência do processo simplesmente variando parâmetros ajustáveis do controlador, e desta forma obter um desempenho satisfatório do sistema continuamente sob várias condições ambientais. Tal abordagem adaptativa é bastante útil para lidar com um problema onde o processo é normalmente exposto a ambientes variáveis de tal forma que parâmetros do processo mudam de tempo em tempo. (Como não são previsíveis mudanças na maioria dos casos práticos, um controlador de parâmetro fixo ou um controlador variante no tempo pré-programado não pode resolver o problema.)

Definição de sistemas de controle adaptativo. A adaptação é uma característica fundamental de organismos vivos pois eles tentam manter o equilíbrio fisiológico diante de condições ambientais variantes. Uma abordagem para o projeto de sistemas adaptativos é então considerar os aspectos adaptativos do comportamento humano ou animal e desenvolver sistemas que se comportam aproximadamente de forma análoga.

Há diferentes definições de sistemas de controle adaptativo atualmente em uso na literatura. O caráter um tanto vago da maioria das definições e classificações de sistemas adaptativos é devido à grande variedade de mecanismos através dos quais a adaptação pode ser conseguida, e também devido a uma falha em diferenciar entre as manifestações externas do comportamento adaptativo e os mecanismos internos usados para consegui-lo. As diferentes definições acontecem primordialmente por causa das várias classificações e delineações que dividem os sistemas de controle em adaptativos e não-adaptativos. (O pequeno grau de adaptabilidade necessária pela maioria das especificações de sistemas poderia ser obtido usando-se técnicas familiares de realimentação com ganhos fixos, compensadores e, em alguns casos,

não linearidades.)

Acharemos necessário definir características de sistemas adaptativos que são fundamentalmente diferentes daquelas de sistemas convencionais de realimentação, de tal forma que podemos restringir nossa atenção apenas àqueles aspectos específicos do comportamento e projeto de sistemas adaptativos. Neste livro definiremos sistemas de controle adaptativos como segue:

Definição. Um sistema de controle adaptativo é aquele que mede, de forma contínua e automática, as características dinâmicas (tal como a função de transferência) do processo, as compara com as características dinâmicas desejadas, e usa a diferença para variar parâmetros ajustáveis do sistema (normalmente características do controlador) ou para gerar um sinal atuante de tal forma que o desempenho ótimo pode ser mantido independentemente das mudanças ambientais; alternativamente, tal sistema pode continuamente medir seu próprio desempenho de acordo com um dado índice de desempenho e modificar, se necessário, seus próprios parâmetros, de tal forma a manter desempenho ótimo independentemente de mudanças ambientais.

Para usarmos o termo sistema adaptativo, devem existir características de auto-organização. Se o ajuste dos parâmetros do sistema é feito apenas por medição direta do ambiente, o sistema não é adaptativo.

Um sistema aparentemente adaptativo é o exemplo do autopiloto de um avião, que é projetado para ajustar seus ganhos de malha em função da altitude a fim de compensar as correspondentes mudanças nos parâmetros do avião. O ajuste é baseado diretamente na informação sobre o ambiente (neste caso, a pressão atmosférica) e não em um esquema de auto-organização. Estes sistemas não possuem quaisquer características de auto-organização, e portanto são essencialmente sistemas convencionais a malha-fechada.

Um outro exemplo de sistemas que podem parecer adaptativos, mas na realidade não o são, se encontra no campo dos sistemas de referência-modelo. Alguns destes sistemas (tal como o considerado no Exemplo 16.13) meramente usam a diferença entre a resposta do modelo e a resposta do processo como um sinal de entrada para o processo, como visto na Fig. 16.13(a). Estes sistemas não podem ser

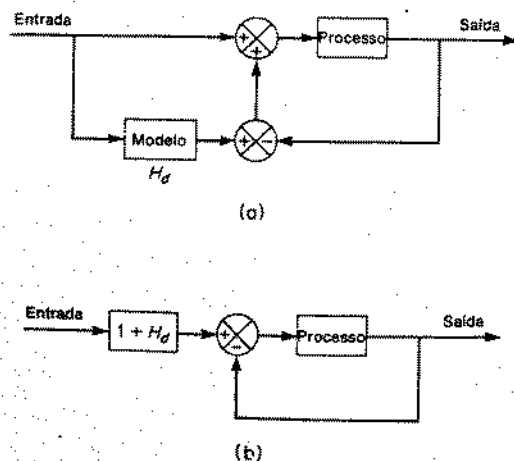


Fig. 16.13 (a) Sistema de referência-modelo; (b) diagrama de bloco simplificado.

considerados como verdadeiramente adaptativos uma vez que, através de manipulação de diagramas de blocos, reduzimos esta configuração para aquela da Fig. 16.13(b), que é simplesmente a de uma malha de realimentação básica com um filtro antes da malha. (Note que alguns autores chamam este tipo de controle de *adaptação a modelo*. O modelo ou é um modelo físico ou um sistema simulado no computador. O modelo não tem parâmetros variáveis.)

Índices de desempenho. A base do controle adaptativo está na premissa de que há alguma condição de operação ou desempenho para o sistema melhor que qualquer outra. Portanto se torna necessário definir o que constitui um desempenho ótimo. Em sistemas de controle adaptativo, tal desempenho é definido em termos do índice de desempenho, que devemos escolher após definir nossos objetivos. Estes objetivos são tão diversos como os sistemas para os quais são aplicados, mas geralmente é possível generalizar o objetivo da otimização como o de minimização do custo de operação, ou a maximização do lucro.

Algumas características gerais geralmente consideradas desejáveis são

1. confiabilidade
2. seletividade
3. aplicabilidade

Portanto, o índice de desempenho deve ser confiável, ou deve ser uma medida uniforme de "qualidade" para sistemas de todas as ordens. Ele deve ter seletividade, ou envolver um ótimo definido com precisão em função dos parâmetros do sistema. Não deve ter ótimos locais ou pontos de sela. O índice de desempenho deve ser facilmente aplicável para sistemas práticos e facilmente mensurável.

Se o índice de desempenho toma o valor zero na condição de operação ótima, ao invés de um máximo ou mínimo, então pode ser usado como o sinal de erro da malha adaptativa e para realimentação diretamente em alguns sistemas.

Note que, em geral, todos os índices de desempenho matematicamente tratáveis têm uma séria desvantagem em comum; embora especifiquem o custo de operação do sistema em termos de erro e energia, não nos dão informação sobre as características de resposta transitória do sistema. Portanto, um sistema que é projetado para operar de forma ótima do ponto de vista de máximo "lucro" pode ter características transitórias indesejáveis, ou mesmo ser instável. Desta forma, para assegurar características de resposta satisfatórias, podemos precisar de critérios secundários relacionados a características de resposta para poder influenciar na escolha dos elementos de ponderação do custo.

Finalmente, deve-se lembrar que o índice de desempenho usado em um sistema de controle adaptativo define um desempenho ótimo para aquele sistema. Isto significa que o índice de desempenho essencialmente nos dá o limite superior do desempenho do sistema. Portanto, a seleção de um índice de desempenho adequado é de fundamental importância.

Controladores adaptativos. Um controlador adaptativo pode consistir nas seguintes três funções:

1. Identificação das características dinâmicas do processo.
2. Ato de decisão baseado na identificação do processo.
3. Modificação ou atuação baseada na decisão tomada.

Se o processo é conhecido apenas imperfeitamente, talvez por causa de parâmetros aleatórios variando no tempo ou em virtude dos efeitos de mudanças ambientais nas características dinâmicas do processo, então a identificação inicial, a decisão, e os procedimentos de modificação não serão suficientes para minimizar (ou maximizar) o índice de desempenho. Então se torna necessário realizar estes procedimentos continuamente ou em intervalos de tempo, dependendo de quão

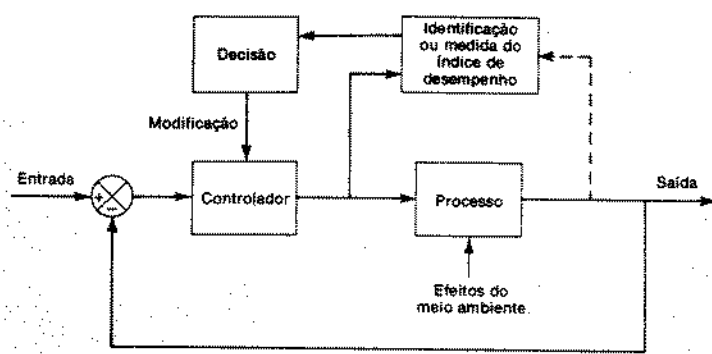


Fig. 16.14 Representação em diagrama em blocos de um sistema de controle adaptativo.

rapidamente os parâmetros do processo estão mudando. Este constante "reprojatamento" ou auto-organização do sistema para compensar as mudanças imprevisíveis no processo é o aspecto do desempenho normalmente considerado ao se definir um sistema de controle adaptativo.

Uma representação em diagramas em bloco de um sistema de controle adaptativo é vista na Fig. 16.14. Neste sistema, o processo é identificado e o índice de desempenho medido continuamente ou periodicamente. Uma vez que isto foi feito, o índice de desempenho é comparado com o ótimo e uma decisão é tomada com base nos achados de como modificar o sinal atuante. Como o processo é identificado dentro do sistema em si, o ajuste dos parâmetros é uma operação a malha-fechada. Note que usando esta adaptação a malha-fechada, o problema da estabilidade pode surgir.

A seguir, explicaremos em algum detalhe as três funções: identificação, decisão, e modificação.

Identificação das características dinâmicas do processo. As características dinâmicas do processo devem ser medidas e identificadas continuamente ou, pelo menos, muito frequentemente. Isto deve ser conseguido sem afetar a operação normal do sistema. Para identificar as características de um sistema, devemos fazer um teste e analisar os resultados. (Para um sistema de controle, isto implica a imposição de um sinal de controle no processo e a análise da resposta do sistema.) A identificação pode ser feita a partir de dados de operação normal do processo ou pelo uso de sinais de teste, tais como os sinais senoidais de baixa amplitude ou de vários sinais estocásticos de pequena amplitude. Na prática, a aplicação direta de entradas em degrau ou impulsivas não pode ser feita. (Exceto em certos casos especiais, o processo estará em operação normal durante o teste de tal forma que os sinais de teste impostos não devem perturbar as saídas normais; além do mais, entradas normais e ruído no sistema não devem perturbar e confundir o teste.) As entradas normais são ideais como sinais de teste uma vez que não encontramos as dificuldades de saídas não desejadas ou entradas perturbadas. Entretanto, a identificação com entradas normais só é possível quando elas têm características de sinal convenientes (banda, amplitude etc.) para a identificação adequada.

Os sinais de teste estocásticos são bastante convenientes em certas aplicações. Usando técnicas de correlação cruzada, podemos analisar a saída como uma função da entrada estocástica para determinar as características de resposta. Com uma

entrada aleatória, a energia de excitação se espalha sobre uma banda de frequências fazendo o efeito tolerável. Além do mais, o dispositivo de cálculo da correlação cruzada pode ser projetado para manter o nível do sinal de teste baixo.

A identificação não pode demorar muito pois, caso contrário, podem ocorrer novas variações dos parâmetros do processo. O tempo de identificação deve ser suficientemente curto comparado com a taxa de mudanças ambientais. Com o tempo de identificação limitado, geralmente é impossível identificar o processo completamente; o melhor que se pode esperar é apenas uma identificação parcial.

É importante notar que nem todos os sistemas adaptativos requerem uma identificação de forma explícita. Alguns sistemas já foram identificados a ponto de a medida do valor do índice de desempenho poder indicar que parâmetros do controlador devem ser modificados. Isto é, o sistema é muito bem conhecido, de tal forma que uma medida do índice de desempenho completa a identificação.

Por outro lado, se a identificação do processo é muito difícil, devemos medir diretamente o índice de desempenho e construir um controlador adaptativo baseado nele. Se não se necessita a identificação e a adaptabilidade é baseada apenas em medidas do índice de desempenho, o sistema de controle é chamado de um sistema de controle otimizante. Como é obtida uma auto-organização usando-se este método, consideraremos tais sistemas como adaptativos.

A dificuldade de fazer uma identificação realística dependerá de quanta informação requeremos sobre o processo e da quantidade de conhecimento prévio deste. Em geral, estes são também os fatores que determinarão se devemos usar uma abordagem de identificação ou uma busca direta no espaço de parâmetros do controlador em função do índice de desempenho, que é discutido mais tarde sob o título de sistemas de controle otimizantes.

Decisão baseada na identificação do processo. Decisão se refere aqui a uma decisão baseada nas características do processo que foram identificadas e no valor calculado do índice de desempenho.

Uma vez que o processo foi identificado, ele é comparado com as características ótimas (ou desempenho ótimo), e então uma decisão deve ser tomada de como os parâmetros ajustáveis (características do controlador) devem ser variados para manter um desempenho ótimo. A decisão é tomada por um computador.

Modificação baseada na decisão tomada. Modificação se refere à modificação de sinais de controle de acordo com os resultados da identificação e da decisão. Na maioria dos casos, a decisão e a modificação são conceitualmente uma única operação, com a modificação consistindo em um meio de mecanizar a transformação de um sinal de saída de decisão em um sinal de controle (a entrada do processo).

Este sinal de controle, o sinal de entrada para o processo, pode ser modificado de duas formas. O primeiro método é o de ajustar os parâmetros do controlador para compensar as mudanças na dinâmica do processo. Isto é chamado de modificação de parâmetro do controlador. O segundo método é o de sintetizar o sinal de controle ótimo, baseado na função de transferência do processo, no índice de desempenho e na resposta transitória desejada. Isto é chamado de síntese de sinal de controle.

A escolha entre a modificação de parâmetros do controlador e a síntese de sinal de controle é primordialmente de *hardware*, uma vez que os dois métodos são conceitualmente equivalentes. Quando a confiabilidade é muito importante, como em aplicações aeroespaciais, o uso da adaptação por mudança de parâmetros é frequentemente favorecido ao invés da síntese de sinal de controle. (Isto acontece porque o sistema pode operar mesmo após a falha da malha adaptativa se o sinal de controle não é inteiramente dependente da porção adaptativa do sistema.) A perfei-

coamentos em componentes, especialmente em equipamentos eletrônicos complexos, podem fazer a preferência passar para a síntese de sinais.

Sistemas de controle otimizantes. Os sistemas de controle otimizantes se apoiam bastante em técnicas de otimização. De forma geral, a otimização consiste na busca no espaço de parâmetros variáveis do controlador em função de algum índice de desempenho para determinar onde este é maximizado ou minimizado. Está implícito na afirmação anterior o fato de que um índice de desempenho escalar, que é uma função das saídas do sistema, pode ser definido de tal forma que seu extremo representa o melhor desempenho possível do sistema. Isto é geralmente possível e necessário para qualquer sistema de controle adaptativo.

Os métodos de achar o ponto de operação ótimo são basicamente procedimentos de tentativa e erro. No método de "descida mais abrupta" (*steepest-descent*), o gradiente da superfície do índice de desempenho é medido observando-se os efeitos de pequenas mudanças nos parâmetros variáveis. (Isto pode ser chamado de método de sentir a derivada.) O vetor de parâmetros é então movido em direção à máxima inclinação, ou de uma quantidade fixa, ou de uma quantidade determinada pelo gradiente da superfície. Nos locais onde os parâmetros variam lentamente, o gradiente pode ser calculado relativamente com pouca frequência. Em condições de variações mais rápidas dos parâmetros, entretanto, um procedimento conhecido como polarização alternada é superior ao método de sentir a derivada. Com polarização alternada, o sistema nunca é operado na condição ótima, mas operado alternadamente a uma distância fixa em ambos os lados do ótimo calculado, e um novo ótimo é calculado a partir da diferença nos valores do índice de desempenho.

Provavelmente a maior vantagem do método do controle otimizante é que não se colocam restrições no processo. O processo pode ser não-linear, de múltipla entrada e múltipla saída, variante no tempo etc. Uma grande dificuldade deste método de otimização é que não se determinou nenhum método satisfatório para discriminar entre extremos locais e extremos globais. Portanto, esta abordagem é útil para qualquer processo físico cuja superfície de desempenho tem um único ótimo e cujas variações são lentas o suficiente para que o sistema de controle se acomode a elas.

Sistemas com aprendizado. Uma diferença significativa entre um operador humano treinado e um controlador adaptativo discutido acima é que o operador humano reconhece entradas familiares e pode usar suas experiências passadas aprendidas para reagir de uma forma ótima. Sistemas de controle adaptativo são projetados para modificar o sinal de controle à medida que o meio externo ao sistema muda de tal forma a manter um desempenho ótimo.

Um sistema que é capaz de reconhecer características e padrões familiares de uma situação e que usa suas experiências passadas aprendidas para se comportar de uma forma ótima é chamado de um *sistema com aprendizado*.

Um sistema com aprendizado é um sistema de nível superior ao dos sistemas adaptativos. Gibson divide o espaço de todos os sistemas de controle em quatro níveis básicos de hierarquia:

1. malha aberta
2. malha fechada
3. malha adaptativa
4. malha de aprendizado

onde cada nível é sensível a um índice de desempenho ou erro de controle medido no próximo nível mais baixo e onde existirão níveis mais altos do que o quarto para ambientes mais complexos.

Um sistema com aprendizado respondendo a uma situação familiar não vai requerer a identificação do sistema. A abordagem para o projeto de tal sistema é a de "ensinar" ao sistema qual a melhor escolha para cada situação. Uma vez que o sistema aprendeu a lei de controle ótimo para cada situação possível, ele pode operar perto da condição ótima independentemente de mudanças ambientais.

Um sistema com aprendizado, quando sujeito a uma nova situação, aprende como se comportar através de um método adaptativo. Se o sistema é sujeito a uma mesma situação que aprendeu antes, ele reconhecerá isto e se comportará de forma ótima sem ter que passar pelo mesmo método adaptativo. Modelos de comportamento humano que estão sendo desenvolvidos por muitos pesquisadores provarão, sem dúvida, resultados úteis para aplicações em sistemas com aprendizado.

Comentários conclusivos. Desenvolvimentos recentes de veículos aeroespaciais de grande desempenho e processos de alta eficiência impõem restrições cada vez maiores nos seus sistemas de controle associados. Ao projetar tais sistemas de controle, nos preocupamos com o projeto de sistemas que satisfarão as especificações impostas pelos usuários sob as condições antecipadas de operação. A maioria dos sistemas de controle que exigem grande desempenho para uma grande gama de condições de operação, serão necessariamente adaptativos até um certo grau. Quando um alto grau de adaptabilidade é claramente requerido, a maioria das especificações atuais serão obedecidas por um sistema do tipo identificação-decisão-modificação com modificação sequencial ou contínua, dependendo da taxa de variação dos parâmetros variantes.

Os desenvolvimentos mais fascinantes em sistemas de controle adaptativo estão na área de reconhecimento de padrões e de sistemas com aprendizado. As técnicas de reconhecimento de padrões poderão algum dia responder à necessidade de uma técnica geral de identificação. Quando acopladas com abordagens de aprendizado, eles podem reduzir consideravelmente a "barreira de tempo" que no momento atrapalha muitos sistemas de controle adaptativos.

Esta seção apresentou apenas um esboço de sistemas de controle adaptativo. O leitor interessado em tais sistemas deve-se referir a resultados recentes de pesquisa disponível na literatura.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS E SOLUÇÕES

Problema A.16.1 Mostre que o seguinte sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 1 \quad 0]$$

é de estado completamente controlável e completamente observável.

Solução. Para controlabilidade completa de estado, os vetores \mathbf{B} , \mathbf{AB} e $\mathbf{A}^2\mathbf{B}$ devem ser linearmente independentes. Para este sistema, obtemos

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A^2B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Como

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -10$$

a característica da matriz $[B|AB|A^2B]$ é 3, e o sistema é de estado completamente controlável.

Para observabilidade completa, os vetores C' , $A'C'$, e $(A')^2C'$ devem ser linearmente independentes. Para este sistema,

$$C' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A'C' = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (A')^2C' = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

note que

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 5$$

Portanto a característica da matriz $[C'|A'C'|A'^2C']$ é três, e o sistema é completamente observável.

Problema A.16.2 Mostre que o sistema de tempo contínuo descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (16.51)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (16.52)$$

é de estado completamente controlável e completamente observável.

O sistema de tempo discreto, que é equivalente ao sistema de tempo contínuo das Eqs. (16.51) e (16.52), é dado por

$$\begin{bmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - \cos T \\ \sin T \end{bmatrix} [u(kT)]$$

$$y(kT) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$$

onde T é o período de amostragem. Mostre que o sistema de tempo discreto é de estado completamente controlável e completamente observável se e apenas se $T \neq n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Solução. Para o sistema de tempo contínuo descrito pelas Eqs. (16.51) e (16.52),

$$[B|AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A característica de $[B|AB]$ é 2 e o sistema é de estado completamente controlável. Agora,

$$[C'|A'C'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A característica de $[C'|A'C']$ também é 2 e o sistema é completamente observável.

Para o sistema de tempo discreto, temos

$$[H|GH] = \begin{bmatrix} 1 - \cos T & 1 + \cos T - 2 \cos^2 T \\ \sin T & -\sin T + 2 \cos T \sin T \end{bmatrix}$$

A característica da matriz $[H|GH]$ é 2 se e apenas se $T \neq n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). A característica de

$$[C'|G'C'] = \begin{bmatrix} 1 & \cos T \\ 0 & \sin T \end{bmatrix}$$

é 2 se e apenas se $T \neq n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Portanto, o sistema de tempo discreto é de estado completamente controlável e completamente observável se e apenas se $T \neq n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

É importante ressaltar que o processo de amostragem piora a controlabilidade e a observabilidade. (Fisicamente, no caso presente o sinal de saída contínuo é um sinal senoidal, mas o sinal de saída amostrado é zero se $T = n\pi$.) Note que podemos evitar sempre a perda da controlabilidade e observabilidade pela escolha de períodos de amostragem suficientemente pequenos quando comparados com a menor constante de tempo do sistema.

Problema A.16.3 Considere o sistema de tempo discreto discutido no Exemplo 16.9. Vimos que qualquer estado inicial pode ser conduzido à origem no máximo em dois períodos de amostragem se a amplitude de $u(kT)$ não for limitada. Entretanto, se a amplitude de $u(kT)$ é limitada, então alguns estados iniciais não podem ser transferidos para a origem em dois períodos de amostragem. Eles podem requerer três, quatro ou mais períodos de amostragem.

Suponha que a amplitude de $u(kT)$ é limitada, ou

$$|u(kT)| \leq 1$$

Determine as regiões de estados iniciais no plano x_1 e x_2 que podem ser transferidas para a origem em um período de amostragem e dois períodos de amostragem, respectivamente. Suponha que $T = 1$ s.

Solução. Se impusermos $x(T) = 0$, então, da Eq. (16.31), temos

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,72 \\ -1,72 \end{bmatrix} [u(0)]$$

Como $|u(0)| \leq 1$, obtemos

$$|x_1(0)| \leq 0,72, \quad |x_2(0)| \leq 1,72$$

Portanto, se o estado inicial estiver sobre o segmento de reta

$$1,72x_1(0) + 0,72x_2(0) = 0, \quad -0,72 \leq x_1(0) \leq 0,72$$

ele pode ser levado para a origem em um período de amostragem, ou 1 s. Este segmento de reta é visto na Fig. 16.15.

Se impusermos $x(2) = 0$, então, da Eq. (16.30), obtemos

$$u(0) = -1,58x_1(0) - 1,24x_2(0)$$

$$u(1) = 0,58x_1(0) + 0,24x_2(0)$$

Como $|u(0)| \leq 1$ e $|u(1)| \leq 1$, obtemos as seguintes quatro relações:

$$1,58x_1(0) + 1,24x_2(0) \leq 1 \quad (16.53)$$

$$1,58x_1(0) + 1,24x_2(0) \geq -1 \quad (16.54)$$

$$0,58x_1(0) + 0,24x_2(0) \leq 1 \quad (16.55)$$

$$0,58x_1(0) + 0,24x_2(0) \geq -1 \quad (16.56)$$

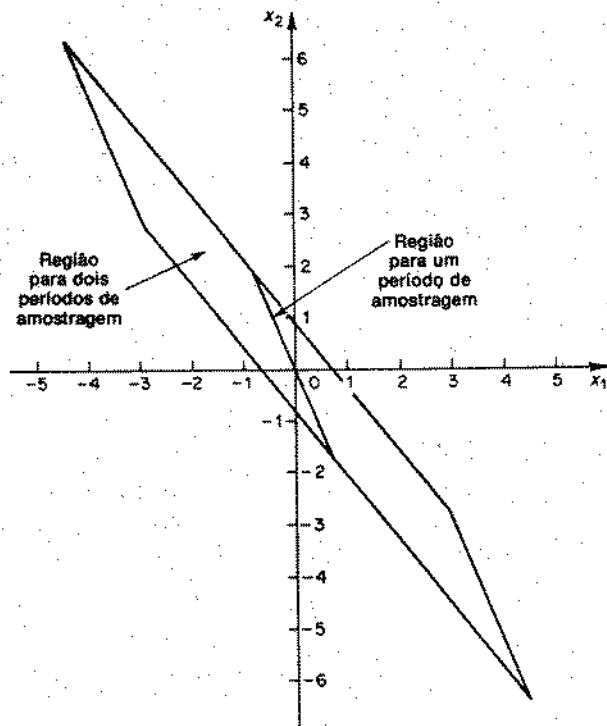


Fig. 16.15 Regiões a partir das quais estados iniciais podem ser levados à origem em um ou dois períodos de amostragem.

A região limitada pelas Eqs. (16.53) a (16.56) é vista na Fig. 16.15. Se o estado inicial está dentro desta região, então ele pode ser transferido para a origem em dois períodos de amostragem, ou 2 s.

Problema A.16.4 Considere o sistema de controle de tempo ótimo visto na Fig. 16.2. Referindo-se à Fig. 16.4, obtenha a equação para a curva de chaveamento AOB. Se o torque máximo é aumentado, como se altera a forma da curva de chaveamento?

Supondo que $T/J = 2$ e que a condição inicial está no primeiro quadrante do plano $e-\dot{e}$, faça um gráfico de curvas típicas de e versus t , e u versus t .

Solução. A equação da curva AO na Fig. 16.4 é

$$\dot{e}^2 + 2\frac{T}{J}e = 0$$

A equação da curva BO é

$$\dot{e}^2 - 2\frac{T}{J}e = 0$$

A equação da curva de chaveamento pode ser escrita combinando-se as duas equações anteriores, como segue:

$$|\dot{e}| \dot{e} + 2\frac{T}{J}e = 0$$

A mudança na forma da curva de chaveamento quando o torque máximo é aumentado pode ser descrita como segue: Quanto maior o torque máximo, mais perto está a curva de chaveamento do eixo de ordenada no plano de fase. A Fig. 16.16 mostra duas curvas de chaveamento para dois valores de T .

Finalmente, a Fig. 16.17 mostra uma trajetória típica de tempo ótimo no plano $e-\dot{e}$ e as correspondentes curvas de e versus t e u versus t .

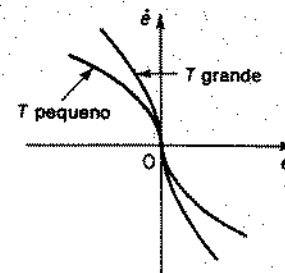


Fig. 16.16 Curvas de chaveamento para dois valores do torque máximo T .

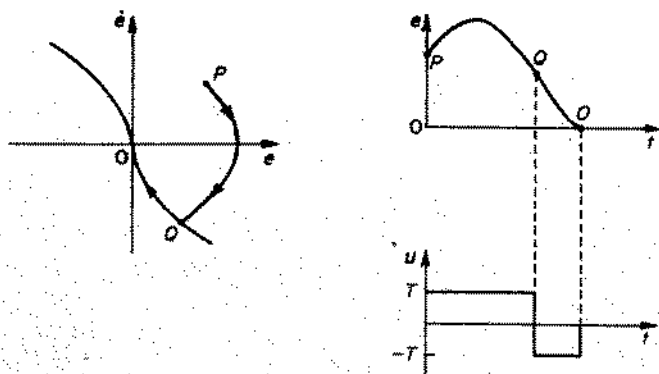


Fig. 16.17 Trajetória típica de tempo ótimo no plano $e-\dot{e}$ e as correspondentes curvas de e versus t e u versus t .

Problema A.16.5. A curva de chaveamento para o sistema de controle ótimo visto na Fig. 16.2 é a parábola AOB , como visto na Fig. 16.4. O chaveamento de torque positivo para negativo pode ser conseguido através de um computador especializado. Entretanto, uma aproximação linear para a curva de chaveamento dá, em muitos casos, um resultado tão bom que não há muita justificativa para complicar o controlador introduzindo dispositivos de computação a fim de determinar o chaveamento ótimo. Portanto, em muitos casos práticos, pode ser suficiente se ter chaveamentos ocorrendo ao longo de uma linha reta ao invés de uma parábola.

Considere o sistema visto na Fig. 16.18. Faça o gráfico da curva de chaveamento e de uma trajetória típica.

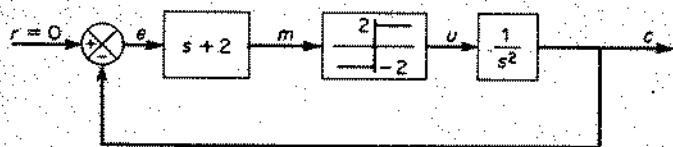


Fig. 16.18 Sistema de controle.

Solução. Do diagrama de bloco, a equação da linha de chaveamento AOB pode ser escrita como

$$\dot{e} + 2e = 0$$

A equação que descreve o processo é

$$\begin{aligned} \ddot{e} &= u = 2 & \text{para } \dot{e} + 2e > 0 \\ &= -2 & \text{para } \dot{e} + 2e < 0 \end{aligned}$$

Notando que $r = 0$, temos $c = -e$. Portanto,

$$\begin{aligned} \ddot{e} &= -2 & \text{para } \dot{e} + 2e > 0 \\ &= 2 & \text{para } \dot{e} + 2e < 0 \end{aligned}$$

A equação para as trajetórias é

$$\dot{e}^2 = \pm 4e + K$$

onde K é uma constante. Esta equação descreve duas famílias de parábolas no plano $e-\dot{e}$. A Fig. 16.19 mostra a linha de chaveamento e uma trajetória típica. Note que alguém poderia pensar que a trajetória para o ponto P . Na prática, entretanto, devido à existência de pequenos atrasos de tempo no chaveamento, ocorrem desvios na linha de chaveamento, e a trajetória converge para a origem do plano de fase como visto na Fig. 16.19. (Um sistema com tal linha reta de chaveamento não é de tempo ótimo. Mas o tempo de resposta é razoavelmente curto e adequado para as finalidades práticas.)

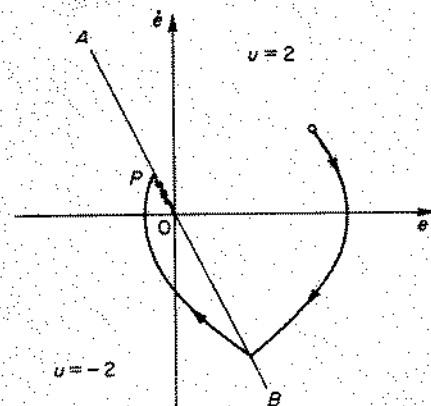


Fig. 16.19 Linha de chaveamento e uma trajetória típica.

Problema A.16.16 Considere o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

onde \mathbf{x} e \mathbf{u} são vetores reais e \mathbf{A} e \mathbf{B} matrizes reais. Mostre que se o vetor de controle \mathbf{u} é dado por

$$\mathbf{u} = -\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (16.57)$$

onde \mathbf{P} é uma matriz simétrica real positiva definida satisfazendo a condição de que

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{I}$$

então a origem do sistema é assintoticamente estável globalmente.

Solução. Vamos escolher o seguinte V como uma possível função de Liapunov:

$$V = \mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x}$$

Então

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{\mathbf{x}}'\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}'\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{x}'(\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{u}'\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{u} \\ &= -\mathbf{x}'\mathbf{I}\mathbf{x} + 2\mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{u}\end{aligned}\quad (16.58)$$

Se a Eq. (16.57) é substituída na Eq. (16.58), vemos que

$$\dot{V} = -\mathbf{x}'\mathbf{I}\mathbf{x} - 2\mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{x}$$

Como $\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{P}$ sempre é positiva definida ou positiva semidefinida, \dot{V} sempre é negativa definida. Como V é positiva definida, \dot{V} é negativa definida, e $\dot{V} \rightarrow \infty$ para $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, a origem do sistema é assintoticamente estável globalmente.

Problema A.16.7 Considere o sistema de controle descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (15.59)$$

onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Supondo uma lei de controle linear

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -k_1x_1 - k_2x_2 \quad (16.60)$$

determine as constantes k_1 e k_2 de tal forma que o seguinte índice de desempenho é minimizado:

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}'\mathbf{x} \, dt$$

Considere apenas o caso onde a condição inicial é

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$$

Escolha a frequência natural não amortecida como 2 rad/s.

Solução. Substituindo a Eq. (16.60) na Eq. (16.59), obtemos

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}$$

ou

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-k_1x_1 - k_2x_2] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (16.61)$$

Portanto

$$\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

A eliminação de x_2 da Eq. (16.61) nos dá

$$\ddot{x}_1 + k_2\dot{x}_1 + k_1x_1 = 0$$

Como a frequência natural não amortecida é especificada como 2 rad/s, obtemos

$$k_1 = 4$$

Portanto

$$\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ é uma matriz estável se $k_2 > 0$. Nosso problema agora é o de determinar o valor de k_2 de tal forma que o índice de desempenho

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}'\mathbf{x} \, dt = \mathbf{x}'(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0)$$

é minimizado, onde a matriz \mathbf{P} é determinada de

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})'\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) = -\mathbf{I}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo para a matriz \mathbf{P} , obtemos

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2k_2} + \frac{k_2}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8k_2} \end{bmatrix}$$

O índice de desempenho é então

$$\begin{aligned}J &= \mathbf{x}'(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0) \\ &= [c \ 0] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} = p_{11}c^2 \\ &= \left(\frac{5}{2k_2} + \frac{k_2}{8} \right) c^2\end{aligned}\quad (16.62)$$

Para minimizar J , diferenciamos J com respeito a k_2 e o igualamos a zero como segue:

$$\frac{\partial J}{\partial k_2} = \left(\frac{-5}{2k_2^2} + \frac{1}{8} \right) c^2 = 0$$

Portanto

$$k_2 = \sqrt{20}$$

Com este valor de k_2 , temos $\partial^2 J / \partial k_2^2 > 0$. Portanto o valor mínimo de J é obtido substituindo-se $k_2 = \sqrt{20}$ na Eq. (16.62), ou

$$J_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{2} c^2$$

O sistema projetado tem a lei de controle

$$u = -4x_1 - \sqrt{20}x_2$$

O sistema projetado é ótimo no sentido de que ele resulta em um valor mínimo para o índice de desempenho J sob a condição inicial suposta.

Problema A.16.8 Considere o sistema de controle visto na Fig. 16.9. A equação para o processo é

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (16.63)$$

onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Supondo a lei de controle linear

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -k_1x_1 - k_2x_2 \quad (16.64)$$

determine as constantes k_1 e k_2 de tal forma que o seguinte índice de desempenho é minimizado:

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}'\mathbf{x} + u'u) dt$$

Solução. Substituindo a Eq. (16.64) na Eq. (16.63), obtemos

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Se supusermos k_1 e k_2 constantes positivas, então $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ se torna uma matriz estável e $\mathbf{x}(\infty) = 0$. Portanto o índice de desempenho pode ser escrito como

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (\mathbf{x}'\mathbf{x} + \mathbf{x}'\mathbf{K}'\mathbf{K}\mathbf{x}) dt \\ &= \int_0^\infty \mathbf{x}'(\mathbf{I} + \mathbf{K}'\mathbf{K})\mathbf{x} dt \\ &= \mathbf{x}'(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0) \end{aligned}$$

onde \mathbf{P} é determinada de

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})'\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) = -(\mathbf{I} + \mathbf{K}'\mathbf{K})$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0 & -k_1 \\ 1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1^2 & k_1k_2 \\ k_1k_2 & k_2^2 \end{bmatrix}$$

Esta equação matricial resulta nas seguintes três equações em p_{ij} :

$$\begin{aligned} -2k_1p_{12} &= -1 - k_1^2 \\ p_{11} - k_2p_{12} - k_1p_{22} &= -k_1k_2 \\ 2p_{12} - 2k_2p_{22} &= -1 - k_2^2 \end{aligned}$$

Resolvendo estas três equações para obter os p_{ij} , temos

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} \right) + \frac{k_1}{2k_2} \left(\frac{1}{k_1} + k_1 \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_1} + k_1 \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_1} + k_1 \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_2} + k_2 \right) + \frac{1}{2k_2} \left(\frac{1}{k_1} + k_1 \right) \end{bmatrix}$$

Agora

$$\begin{aligned} J &= \mathbf{x}'(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0) \\ &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} \right) + \frac{k_1}{2k_2} \left(\frac{1}{k_1} + k_1 \right) \right] x_1^2(0) + \left(\frac{1}{k_1} + k_1 \right) x_1(0)x_2(0) \\ &\quad + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_2} + k_2 \right) + \frac{1}{2k_2} \left(\frac{1}{k_1} + k_1 \right) \right] x_2^2(0) \end{aligned}$$

Para minimizar J , fazemos $\partial J / \partial k_1 = 0$ e $\partial J / \partial k_2 = 0$, ou

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial k_1} &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{-k_2}{k_1^2} + \frac{1}{k_2} \right) + \frac{k_1}{2k_2} \right] x_1^2(0) + \left(\frac{-1}{k_1^2} + 1 \right) x_1(0)x_2(0) + \\ &\quad + \left[\frac{1}{2k_2} \left(\frac{-1}{k_1^2} + 1 \right) \right] x_2^2(0) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial k_2} &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_1} - \frac{k_1}{k_2^2} \right) + \frac{-k_1}{2k_2^2} \left(\frac{1}{k_1} + k_1 \right) \right] x_1^2(0) + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{-1}{k_2^2} + 1 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2k_2^2} \left(\frac{1}{k_1} + k_1 \right) \right] x_2^2(0) = 0 \end{aligned}$$

Para quaisquer condições iniciais $x_1(0)$ e $x_2(0)$, o valor de J se torna mínimo quando

$$k_1 = 1, \quad k_2 = \sqrt{3}$$

Note que k_1 e k_2 são constantes positivas como supusemos na solução. Portanto, para a lei de controle ótimo,

$$K = [k_1 \quad k_2] = [1 \quad \sqrt{3}]$$

O diagrama de bloco deste sistema de controle ótimo é visto na Fig. 16.10 com $\mu = 1$.

Problema A.16.9 Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x, u)$$

que pode ser linear ou não-linear. Deseja-se determinar a lei de controle ótimo $u = g(x)$ tal que o seguinte índice de desempenho,

$$J = \int_0^\infty L(x, u) dt$$

é minimizado, onde u não é limitado.

Se a origem do sistema descrito por

$$\dot{x} = f(x, g(x))$$

é assintoticamente estável, e portanto existe uma função de Liapunov $V(x)$ tal que $V(x)$ é negativa definida, então mostre que uma condição suficiente para um vetor de controle u_1 ser ótimo é que $H(x, u)$, onde

$$H(x, u) = \frac{dV}{dt} + L(x, u) \quad (16.65)$$

é mínimo com $u = u_1$, ou

$$\begin{aligned} \min_u H(x, u) &= \min_u \left[\frac{dV}{dt} + L(x, u) \right] \\ &= \frac{dV}{dt} \Big|_{u=u_1} + L(x, u_1) \end{aligned} \quad (16.66)$$

e

$$\frac{dV}{dt} \Big|_{u=u_1} = -L(x, u_1) \quad (16.67)$$

Solução. Vamos integrar ambos os lados da Eq. (16.67). Então,

$$V(x(\infty)) - V(x(0)) = - \int_0^\infty L(x(t), u_1(t)) dt \quad (16.68)$$

Como a origem do sistema é assintoticamente estável, $x(\infty) = 0$ e $V(x(\infty)) = 0$. Então a Eq. (16.68) se torna

$$V(x(0)) = \int_0^\infty L(x(t), u_1(t)) dt \quad (16.69)$$

Para provar que $u_1(t)$ é ótimo, suponha que $u_2(t)$ não é ótimo e que o vetor de controle $u_2(t)$ nos dará um valor pequeno de J . Então,

$$\int_0^\infty L(x(t), u_2(t)) dt < \int_0^\infty L(x(t), u_1(t)) dt$$

Note que da Eq. (16.66), o valor mínimo de $H(x, u)$ ocorre em $u = u_1$. Note também que, da Eq. (16.67), este valor mínimo é igual a zero. Portanto,

$$H(x, u) \geq 0$$

para todo u . Assim,

$$H(x, u_2) = \frac{dV}{dt} \Big|_{u=u_2} + L(x, u_2) \geq 0$$

Integrando ambos os lados desta desigualdade de 0 a ∞ , obtemos

$$V(x(\infty)) - V(x(0)) \geq - \int_0^\infty L(x(t), u_2(t)) dt$$

Como $V(x(\infty)) = 0$, temos

$$V(x(0)) \leq \int_0^\infty L(x(t), u_2(t)) dt \quad (16.70)$$

Então, das Eqs. (16.69) e (16.70),

$$\int_0^\infty L(x(t), u_1(t)) dt \leq \int_0^\infty L(x(t), u_2(t)) dt$$

Isto é uma contradição. Portanto $u_1(t)$ é o vetor de controle ótimo.

Problema A.16.10 Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Deseja-se achar a função de controle ótimo u tal que o seguinte índice de desempenho,

$$J = \int_0^\infty (x' Q x + u' u) dt, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

seja minimizado.

Referindo-se à condição suficiente para o vetor de controle ótimo apresentada no Problema A.16.9, determine o sinal de controle ótimo $u(t)$.

Solução. Vamos definir

$$V = x' P x$$

onde

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

Então

$$V = p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2$$

$$\dot{V} = 2p_{11}x_1x_2 + 2p_{12}x_1^2 + (2p_{12}x_1 + 2p_{22}x_2)u$$

A Eq. (16.65) se torna

$$H(x, u) = \frac{dV}{dt} + L(x, u) \quad (16.71)$$

$$= 2p_{11}x_1x_2 + 2p_{12}x_1^2 + (2p_{12}x_1 + 2p_{22}x_2)u + x_1^2 + \mu x_2^2 + u^2$$

O sinal de controle ótimo $u(t)$ é aquele que minimiza $H(x, u)$. Portanto, diferenciamos $H(x, u)$ com relação a u e igualamos a zero, ou

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2p_{12}x_1 + 2p_{22}x_2 + 2u = 0$$

de que obtemos

$$u = -p_{12}x_1 - p_{22}x_2 \quad (16.72)$$

Substituindo a Eq. (16.72) na Eq. (16.71) e igualando o resultado a zero, obtemos

$$x_1^2(1 - p_{12}^2) + x_1x_2(2p_{11} - 2p_{12}p_{22}) + x_2^2(\mu + 2p_{12} - p_{22}^2) = 0$$

Esta última equação deve valer para qualquer x_1 e x_2 . Portanto, impomos

$$1 - p_{12}^2 = 0$$

$$p_{11} - p_{12}p_{22} = 0$$

$$\mu + 2p_{12} - p_{22}^2 = 0$$

(Note que estas três equações em p_{ij} são idênticas àsquelas obtidas no Exemplo 16.12.) Resolvendo estas três equações simultâneas para p_{11} , p_{12} e p_{22} , impondo que P seja positiva definida, obtemos

$$p_{11} = \sqrt{\mu + 2}, \quad p_{12} = 1, \quad p_{22} = \sqrt{\mu + 2}$$

A lei de controle ótimo é então dada por

$$u = -x_1 - \sqrt{\mu + 2}x_2$$

Com esta lei, a equação de estado do sistema se torna

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-x_1 - \sqrt{\mu + 2}x_2]$$

ou

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{\mu + 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

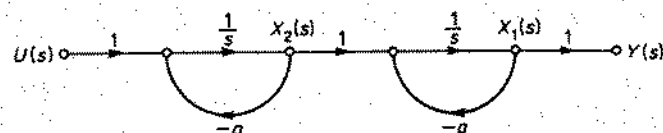
Note que a matriz de coeficientes nesta última equação é estável. Portanto a origem do sistema é assintoticamente estável e a presente abordagem para a solução é válida.

PROBLEMAS

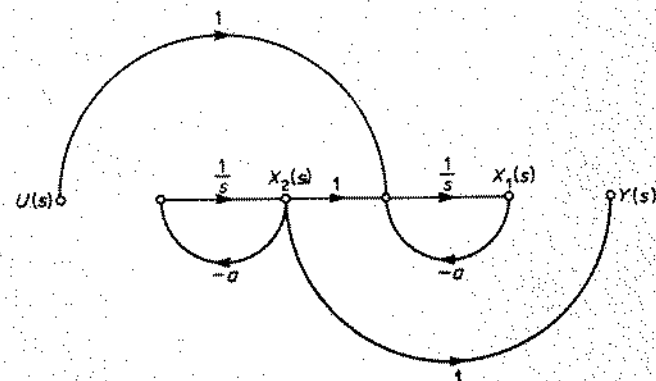
Problema B.16.1 Determine a controlabilidade de estado e a observabilidade do sistema descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

$$y = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



(a)



(b)

Fig. 16.20 Diagramas de fluxo de sinais de sistemas.

Problema B.16.2 São os sistemas vistos nas Figs. 16.20(a) e (b) controláveis e observáveis?

Problema B.16.3 Considere o sistema descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} [u]$$

Determine as condições em a , b , c e d para controlabilidade completa de estado.

Problema B.16.4 Considere o sistema descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Determine as condições em a , b , c e d para controlabilidade completa de estado e observabilidade completa.

Problema B.16.5 Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} [u]$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Mostre que a saída y é independente da função de controle u .

Problema B.16.6 Suponha que um sistema mecânico vibratório é descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

onde

\mathbf{x} = vetor de estado (vetor n -dimensional).
 u = vetor de entrada (vetor r -dimensional).
 \mathbf{A} = matriz constante $n \times n$
 \mathbf{B} = matriz constante $n \times r$

Determine a condição em \mathbf{A} e \mathbf{B} de tal forma que todos os modos de oscilação podem ser excitados.

Problema B.16.7 Considere o sistema de controle de tempo ótimo visto na Fig. 16.21. Obtenha a equação da curva de chaveamento. Faça um gráfico da curva de chaveamento no plano e - \dot{e} e mostre algumas trajetórias de tempo ótimo típicas.

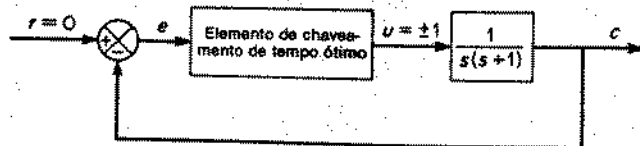


Fig. 16.21 Sistema de controle de tempo ótimo.

Problema B.16.8 Faça um gráfico de plano de fase do sistema visto na Fig. 16.22.

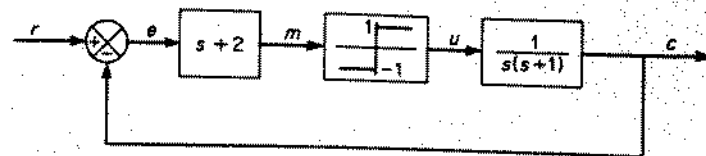


Fig. 16.22 Sistema de controle.

Problema B.16.9 Considere o sistema descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$$

onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a = parâmetro ajustável > 0

Determine o valor do parâmetro a de tal forma que minimize o seguinte índice de desempenho:

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T \mathbf{x} dt$$

Problema B.16.10 Considere o sistema visto na Fig. 16.23. Determine o valor do ganho K de tal forma que o coeficiente de amortecimento ζ do sistema a malha-fechada seja igual a 0,5. Em seguida calcule a frequência natural não-amortecida ω_n do sistema a malha-fechada. Supondo que $e(0) = 1$ e que $\dot{e}(0) = 0$, calcule

$$\int_0^{\infty} e^2(t) dt$$

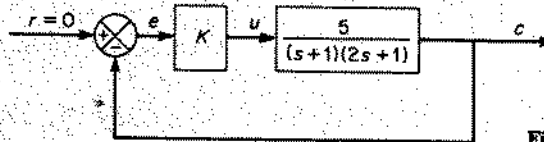


Fig. 16.23 Sistema de controle.

Problema B.16.11 Determine a função de controle ótimo u para o sistema descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tal que o seguinte índice de desempenho seja minimizado:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{x} + u^T u) dt$$

Referências

- A-1 Andronow, A. A., and C. E. Cbaikin, *Theory of Oscillations*, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1949.
- A-2 Aseltine, J. A., *Transform Methods in Linear System Analysis*, New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1958.
- A-3 Athanassiades, M., and P. L. Falb, "Time Optimal Control for Plants with Numerator Dynamics," *IRE Trans. Automatic Control* (1962), pp. 46-7.
- A-4 Athans, M., and P. L. Falb, *Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications*, New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1965.
- B-1 Bayliss, L. E., *Living Control Systems*, London, England: English Universities Press Limited, 1966.
- B-2 Bellman, R., I. Glicksberg, and O. Gross, "On the Bang-Bang Control Problem," *Quart. Appl. Math.*, 14 (1956), pp. 11-8.
- B-3 Brown, G. S., and D. P. Campbell, *Principles of Servomechanisms*, New York, N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1955.
- B-4 Buland, R. N., "Analysis of Nonlinear Servos by Phase Plane-Delta Method," *J. Franklin Inst.*, 257 (1954), pp. 37-48.
- B-5 Bushaw, D. W., "Differential Equations with a Discontinuous Forcing Term," *Stevens Inst. Tech. Experimental Towing Tank Report 469*, Hoboken, N.J., Jan., 1953.
- B-6 Bushaw, D. W., "Optimal Discontinuous Forcing Terms," in S. Lefschetz (ed.), *Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations*, 4, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1958, pp. 29-52.
- B-7 Butman, S., and R. Sivan (Sussman), "On Cancellations, Controllability and Observability," *IEEE Trans. Automatic Control* (1964), pp. 317-8.
- C-1 Campbell, D. P., *Process Dynamics*, New York, N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1958.

- C-2 Chandaket, P., C. T. Leondes, and E. C. Deland, "Optimum Non-linear Bang-Bang Control Systems with Complex Roots," *AIEE Trans. Part II*, 80 (1961), pp. 82-102.
- C-3 Chang, S. S. L., *Synthesis of Optimum Control Systems*, New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1961.
- C-4 Cheng, D. K., *Analysis of Linear Systems*, Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1959.
- C-5 Chestnut, H., and R. W. Mayer, *Servomechanisms and Regulating System Design*, vol. 1, New York, N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1959.
- C-6 Coddington, E. A., and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1955.
- C-7 Cosgriff, R. L., *Nonlinear Control Systems*, New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1958.
- C-8 Cunningham, W. J., *Introduction to Nonlinear Analysis*, New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1958.
- D-1 D'Azzo, J. J., and C. H. Houpis, *Feedback Control System Analysis and Synthesis*, 2nd ed., New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1966.
- D-2 Del Toro, V., and S. R. Parker, *Principles of Control System Engineering*, New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1960.
- D-3 DeRusso, P. M., R. J. Roy, and C. M. Close, *State Variables for Engineers*, New York, N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1965.
- D-4 Dorf, R., *Time Domain Analysis and Design of Control Systems*, Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1965.
- E-1 Eckman, D. P., *Automatic Process Control*, New York, N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1958.
- E-2 Enns, M., J. R. Greenwood, III, J. E. Matheson, and F. T. Thompson, "Practical Aspects of State-Space Methods Part I: System Formulation and Reduction," *IEEE Trans. Military Electronics* (1964), pp. 81-93.
- E-3 Evans, W. R., "Graphical Analysis of Control Systems," *AIEE Trans. Part II*, 67 (1948), pp. 547-51.
- E-4 Evans, W. R., "Control System Synthesis by Root Locus Method," *AIEE Trans. Part II*, 69 (1950), pp. 66-9.
- E-5 Evans, W. R., "The Use of Zeros and Poles for Frequency Response or Transient Response," *ASME Trans.*, 76 (1954), pp. 1335-44.
- F-1 Flügge-Lotz, I., "Synthesis of Third-order Contactor Control Systems," *Proc. First Intern. Cong. IFAC*, Moscow, 1960; *Automatic and Remote*

- Control, London, England: Butterworths & Company, Ltd., 1961, pp. 390-7.
- F-2 Flügge-Lotz, I., and T. Ishikawa, "Investigation of Third-order Contactor Control Systems with Two Complex Poles without Zeros," *NASA Tech. Note D248*, 1960.
- F-3 Freeman, H., *Discrete-Time Systems*, New York, N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1965.
- F-4 Friedland, B., "The Structure of Optimum Control Systems," *ASME J. Basic Engineering*, ser. O, 84 (1962), pp. 1-12.
- F-5 Fuller, A. T., "Phase Space in the Theory of Optimum Control," *J. Elec. Control*, ser. 1 VIII (1960), pp. 381-400.
- G-1 Gardener, M. F., and J. L. Barnes, *Transients in Linear Systems*, vol. 1, New York, N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1942.
- G-2 Gibson, J. E., *Nonlinear Automatic Control*, New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1963.
- G-3 Gilbert, E. G., "Controllability and Observability in Multivariable Control Systems," *J. SIAM Control*, ser. A, 1 (1963), pp. 128-51.
- G-4 Gille, J. C., M. J. Pelegrin, and P. Ocaulne, *Feedback Control Systems*, New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Company, 1959.
- G-5 Graham, D., and R. C. Lathrop, "The Synthesis of Optimum Response: Criteria and Standard Forms," *AIEE Trans. Part II*, 72 (1953), pp. 273-88.
- G-6 Graham, D., and O. McRuer, *Analysis of Nonlinear Control Systems*, New York, N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1961.
- G-7 Gupta, S. C., *Transform and State Variable Methods in Linear Systems*, New York, N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1966.
- H-1 Hahn, W., *Theory and Application of Liapunov's Direct Method*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1963.
- H-2 Harrison, H. L., and J. G. Bollinger, *Introduction to Automatic Controls*, Scranton, Pa.: International Textbook Company, Inc., 1963.
- H-3 Harvey, C. A., "Determining the Switching Criterion for Time Optimal Control," *J. Math. Anal. Appl.*, 5 (1962), pp. 245-57.
- H-4 Harvey, C. A., and E. B. Lee, "On the Uniqueness of Time-optimal Control for Linear Processes," *J. Math. Anal. Appl.*, 5 (1962), pp. 258-68.
- H-5 Henke, R. W., "Oigital Fluidics Works Now," *Control Engineering*, 14, no. 1, Jan., 1967, pp. 100-4.
- H-6 Higdon, D. T., and R. H. Cannon, Jr., "On the Control of Unstable Multiple Output Mechanical Systems," *ASME Paper no. 63-WA-148*, 1963.
- J-1 Jury, E. I., *Sampled-Data Control Systems*, New York, N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1958.
- J-2 Jury, E. I., "A Simplified Stability Criterion for Linear Discrete Systems," *Proc. IRE*, 50 (1962), pp. 1493-500.
- J-3 Jury, E. I., *Theory and Applications of z-Transform Method*, New York, N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1964.
- K-1 Kalman, R. E., "Analysis and Design Principles of Second and Higher Order Saturating Servomechanisms," *AIEE Trans. Part II*, 74 (1955), pp. 294-310.
- K-2 Kalman, R. E., "Contributions to the Theory of Optimal Control," *Bull. Soc. Mat. Mex.*, 5 (1960), pp. 102-19.
- K-3 Kalman, R. E., "On the General Theory of Control Systems," *Proc. First Intern. Cong. IFAC*, Moscow, 1960; *Automatic and Remote Control*, London, England: Butterworths & Company, Ltd., 1961, pp. 481-92.
- K-4 Kalman, R. E., "Canonical Structure of Linear Dynamical Systems," *Proc. Natl. Acad. Sci., USA* 48 (1962), pp. 596-600.
- K-5 Kalman, R. E., "When Is a Linear Control System Optimal?" *ASME J. Basic Engineering*, ser. D, 86 (1964), pp. 51-60.
- K-6 Kalman, R. E., and J. E. Bertram, "Control System Analysis and Design Via the Second Method of Lyapunov: I Continuous-Time Systems," *ASME J. Basic Engineering*, ser. D, 82 (1960), pp. 371-93.
- K-7 Kalman, R. E., Y. C. Ho, and K. S. Narendra, "Controllability of Linear Dynamic Systems," in *Contributions to Differential Equations*, vol. 1, New York, N.Y.: Interscience Publishers, Inc., 1962.
- K-8 Korn, G. A., and T. M. Korn, *Electronic Analog Computers*, New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1956.
- K-9 Kreindler, E., "Contributions to the Theory of Time Optimal Control," *J. Franklin Inst.*, 275 (1963), pp. 314-44.
- K-10 Kreindler, E., and P. E. Sarachick, "On the Concepts of Controllability and Observability of Linear Systems," *IEEE Trans. Automatic Control* (1964), pp. 129-36.
- K-11 Kuo, B. C., *Automatic Control Systems*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1962.

- K-12 Kuo, B. C., *Analysis and Synthesis of Sampled-Data Control Systems*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1963.
- L-1 Lago, G., and L. M. Benningfield, *Control System Theory*, New York, N.Y.: Ronald Press Company, 1962.
- L-2 LaSalle, J. P., "Time Optimal Control Systems," *Proc. Natl. Acad. Sci., USA*, 45 (1959), pp. 573-7.
- L-3 LaSalle, J. P., "Time Optimal Control," *Bol. Soc. Mat. Mex.*, 5 (1960), pp. 120-4.
- L-4 LaSalle, J. P., "The Time-optimal Control Problem," in *Contributions to Differential Equations*, vol. 5, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1960, pp. 1-24.
- L-5 LaSalle, J. P., "The Bang-Bang Principle," *Proc. First Intern. Cong. IFAC*, Moscow, 1960; *Automatic and Remote Control*, London, England: Butterworths & Company, Ltd., 1961, pp. 493-7.
- L-6 LaSalle, J. P., and S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*, New York, N.Y.: Academic Press, Inc., 1961.
- L-7 Lefschetz, S., *Differential Equations: Geometric Theory*, New York, N.Y.: Interscience Publishers, Inc., 1957.
- L-8 Lewis, J. B., "The Use of Nonlinear Feedback to Improve the Transient Response of a Servomechanism," *AIEE Trans. Part II*, 71 (1952), pp. 449-53.
- L-9 Lindorff, D. P., *Theory of Sampled Data Control Systems*, New York, N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1965.
- M-1 Mason, S. J., "Feedback Theory: Some Properties of Signal Flow Graphs," *Proc. IRE*, 41 (1953), pp. 1144-56.
- M-2 Mason, S. J., "Feedback Theory: Further Properties of Signal Flow Graphs," *Proc. IRE*, 44 (1956), pp. 920-6.
- M-3 Mason, S. J., and H. J. Zimmerman, *Electronic Circuits, Signals, and Systems*, New York, N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1960.
- M-4 Melbourne, W. G., "Three Dimensional Optimum Thrust Trajectories for Power-Limited Propulsion Systems," *ARS J.*, 31 (1961), pp. 1723-8.
- M-5 Melbourne, W. G., and C. G. Sauer, Jr., "Optimum Interplanetary Rendezvous with Power-Limited Vehicles," *AIAA J.*, 1 (1963), pp. 54-60.
- M-6 Minorsky, N., *Nonlinear Oscillations*, Princeton, N.J.: D. Van Nostrand Company, Inc., 1962.
- M-7 Mirsky, L., *An Introduction to Linear Algebra*, Oxford, England: Clarendon Press, Ltd., 1955.

- M-8 Monopoli, R. V., "Controller Design for Nonlinear and Time-Varying Plants," *NASA CR-152*, Jan., 1965.
- N-1 Nyquist, H., "Regeneration Theory," *Bell System Tech. J.*, 11 (1932), pp. 126-47.
- O-1 Ogata, K., *State Space Analysis of Control Systems*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1967.
- P-1 Peschon, J., "Learning in Automatic Systems," *Proc. Allerton Conference on Circuit and System Theory*, Univ. of Illinois, Sept., 1964.
- P-2 Pipes, L. A., *Matrix Methods for Engineers*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1963.
- R-1 Ragazzini, J. R., and G. F. Franklin, *Sampled Data Control Systems*, New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1958.
- R-2 Reid, W. T., "A Matrix Differential Equation of Riccati Type," *Amer. J. Math.*, 68 (1946), pp. 237-46.
- R-3 Rekasius, Z. V., "A General Performance Index for Analytical Design of Control Systems," *IRE Trans. Automatic Control* (1961), pp. 217-22.
- S-1 Schultz, D. G., and J. E. Gibson, "The Variable Gradient Method for Generating Liapunov Functions," *AIEE Trans. Part II*, 81 (1962), pp. 203-9.
- S-2 Schultz, W. C., and V. C. Rideout, "Control System Performance Measures: Past, Present, and Future," *IRE Trans., Automatic Control* (1961), pp. 22-35.
- S-3 Shannon, C. E., "Communication in the Presence of Noise," *Proc. IRE*, 37 (1949), pp. 10-21.
- S-4 Smith, O. J. M., *Feedback Control Systems*, New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1958.
- S-5 Staats, P. F., "A Survey of Adaptive Control Topics," *Plan B paper*, Dept. of Mech. Eng., Univ. of Minn., Mar., 1966.
- S-6 Stallard, D. V., "A Series Method of Calculating Control System Transient Responses from the Frequency Response," *AIEE Trans., Part II*, 74 (1955), pp. 61-4.
- T-1 Thaler, G. J., and R. G. Brown, *Analysis and Design of Feedback Control Systems*, New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1960.
- T-2 Thaler, G. J., and M. P. Pastel, *Nonlinear Control Systems*, New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1962.
- T-3 Tou, J. T., *Digital and Sampled-data Control Systems*, New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1959.

- T-4 Tou, J. T., *Modern Control Theory*, New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1964.
- T-5 Tsien, H. S., *Engineering Cybernetics*, New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1958.
- T-6 Turnbull, H. W., and A. C. Aitken, *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices*, London, England: Blackie and Son, Ltd., 1932.
- V-1 Van Landingham, H. F., and W. A. Blackwell, "Controller Design for Non-linear and Time-Varying Plants," *Educational Monograph*, College of Engineering, Oklahoma State Univ., 1967.
- W-1 Wadel, L. B., "Describing Function as Power Series," *IRE Trans. Automatic Control* (1962), p. 50.
- W-2 Waltz, M. D., and K. S. Fu, "A Learning Control System," *Proc. Joint Automatic Control Conference*, 1964, pp. 1-5.
- W-3 Wilcox, R. B., "Analysis and Synthesis of Dynamic Performance of Industrial Organizations—The Application of Feedback Control Techniques to Organizational Systems," *IRE Trans. Automatic Control* (1962), pp. 55-67.
- W-4 Wojcik, C. K., "Analytical Representation of the Root Locus," *ASME J. Basic Engineering*, ser. D, 86 (1964), pp. 37-43.
- Z-1 Zadeh, L. A., and C. A. Desoer, *Linear System Theory: The State Space Approach*, New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1963.

Índice Alfabético

Os números em *itálico* referem-se a localizações fora do texto (legendas, quadros, dísticos, notas, etc.).

A

Abertura diferencial. 627
 Abscissa de convergência, 26
 Ação de controle. 169
 - de duas posições, 172
 - derivativa, 177
 - - adicionada a um controlador proporcional, 213
 - integral, 174, 208
 - liga-desliga, 172
 - proporcional, 174
 - - mais-derivativa, 176
 - - - mais-integral, 178
 - - mais integral, 175
 Acelerômetro
 - diagrama esquemático de, 142
 Adaptação a modelo. 895
 Adição
 - de matrizes, 62
 - de pólos, 545
 - de zeros, 545
 Amortecedores viscosos. 203
 Amplificador(es)
 - biestáveis a fluidos, 220
 - digitais, 221
 - em cascata, 223
 - operacionais, 292
 - integração, 295
 - inversão de sinal, 293
 - soma, 294
 - pneumáticos boca-haste, 180
 - proporcional (is), 221
 - - por aderência de parede, 222
 Analogia força
 - - corrente, 86, 88
 - - tensão elétrica, 85
 Atraso
 - de fase, 427
 - de transporte, 394, 446
 - - ângulo de fase de, 446, 447
 - - aproximação de, 398
 Autovalores
 - de uma matriz, 755
 - invariância dos, 757
 Avanço de fase, 427

B

Banda proporcional, 225

Bloco funcional. 96
 Bode, diagrama(s) de. 430, 509
 C
 Caminho
 - aberto, 134
 - de Nyquist, 468
 - - modificado(s), 483
 - - para análise de estabilidade relativa, 482
 - direto, 134
 - fechado, 134
 Campo
 - de controle, 107
 - fixo, 107
 Cancelamento de pólos
 - complexos conjugados indesejáveis, 590
 - de G(s) com zeros de H(s), 384
 - indesejáveis, 589
 Capacitância de sistemas
 - de nível de líquido, 116
 - de pressão, 122
 - térmicos, 125
 Carta de Nichols. 508, 508
 - na determinação do ganho K, 513
 - para a resposta em frequência de malha-fechada, 509
 Cauchy-Riemann, condições de, 22
 Centro, 662
 Chattering, 679
 Ciclo(s)-limite, 608
 - em um sistema não linear, 662
 - estável, 662
 - instável, 664
 - no gráfico de plano de fase, 662
 - semi-estável, 665
 Circunferência(s)
 - M, 503
 - - na determinação do ganho K, 513
 - N, 504
 Coeficiente(s)
 - de erro
 - - de aceleração estático K_a ,

325
 - - de posição estático K_p , 323
 - - de velocidade
 - - - dinâmico, 335
 - - - estático, K_v , 324
 - - dinâmico, 332
 - - vantagem dos, 334
 - - estático, 321-331
 Compensação, 540
 - avanço-atraso, 575
 - com realimentação, 541, 542
 - comparação dos tipos de, 588
 - em atraso, 562
 - - técnicas de, baseadas na abordagem do lugar das raízes, 565
 - em avanço, 548-562
 - - técnicas de, baseadas na abordagem
 - - - de resposta em frequência, 557
 - - - do lugar das raízes, 552
 - paralela, 541
 - por realimentação, 591
 - série, 541, 542
 Compensador(es), 541
 - avanço-atraso, 543
 - em atraso, 543
 - em avanço, 543
 Complexo conjugado, 21
 Componentes
 - complementares, 721
 - primária, 721
 Computador(es)
 - analógico(s), 292-305, 705
 - - amplificadores operacionais, 292
 - - - digitais, 705
 - - fatores de escala
 - - - de magnitude, 298
 - - de tempo, 300
 - - geração de funções senoidais, 297
 - - integração, 295
 - - inversão de sinal, 293
 - - multiplicação por uma fração, 296
 - - resolvendo equações diferenciais, 296
 - - simulação de sistemas fisi-

- cos em, 302
- soma, 294
 - controle de sistemas complexos por, 705
 - digitais, 705
- Condições de Cauchy-Riemann, 22
- Contornos de raízes, 398
- Controlabilidade, 852-862
- completa de estado
 - de sistemas de tempo
 - contínuo, 856
 - discreto, 854
 - em funções de transferência, 861
 - em matrizes de transferência, 861
 - forma alternativa da condição para, 858
 - de saída, 861
 - independência linear de vetores, 853
- Controlador(es)
- adaptativos, 895
 - analógico(s), 705
 - -- digitais, 705
 - auto-operados, 171, 177
 - automáticos industriais
 - classificação de, 170
 - elementos de, 170
 - de duas posições pneumáticas, 172
 - digitais, 705
 - vantagens sobre controladores analógicos, 705
- força-balanço, 191
- híbridos, 705
- pneumático de duas posições, 196
- projeto, 888
- proporcional(is), 180-195
- de banda-estreita, 196
 - eletrônicos, 195
 - hidráulicos, 193
 - pneumáticos, 183, 185
 - de tipo força-balanço, 183
 - do tipo força-distância, 183
- Controle
- automático, 1
 - trabalhos em, 1
 - de taxa, 177
 - de tempo ótimo de sistemas
 - de ordem elevada com sinais de controle limitados, 877
 - de tempo contínuo com sinais de controle limitados, 873
 - direto
 - de em processo, 592
 - versus indireto, 7
 - no ramo direto
 - eliminação de efeitos indesejáveis de distúrbios por, 591
 - numérico, 9, 10
 - proporcional
 - de um sistema de primeira ordem, 189
 - mais-derivativo de um sistema com carga de inércia, 213
 - realimentado, 3
 - restabelecimento, 174
- Convolação, 39
- Crítério(s)
- da integral do erro
 - absoluto, 339
 - multiplicado pelo tempo, 339
 - quadrático, 338
 - multiplicado pelo tempo, 339
 - de erro
 - comparação dos, 340
 - de estabilidade
 - de Nyquist, 424, 465-475
 - aplicado a gráficos polares inversos, 480
 - para sistemas de controle, 475
 - teorema do mapeamento, 468
 - de Routh, 286-292
 - de Schur-Cohn, 734
 - de Sylvester, 814
 - ITAE
 - forma ótima da função de transferência de malha-fechada, 342
 - para sistemas de ordem n , 341
- Curva
- mostrando quantização, 703
 - solução, 641
 - torque-velocidade, 149
- D
- Década, em relações de frequências, 433
- Decibel, na representação do módulo logarítmico, 431
- Deltas de Kronecker, 58
- Dependência
- de condições iniciais, 607
 - frequência-amplitude, 604
- Detector de erro, 96
- Diagonalização de matrizes $n \times n$, 757
- Diagrama(s)
- de blocos, 4, 96
 - de sistemas de controle automático, 178
 - de um controlador integral, 175
 - de um sistema de malha-fechada, 97, 97
 - procedimentos para construir, 100
 - redução de, 101
 - regras de álgebra de, 101
 - de Bode, 430, 509
 - determinação de funções de transferência de mínima fase a partir de, 515
 - para o compensador, 372
 - para o sistema
 - -- compensado, 572
 - -- não compensado, 572
 - de lugar das raízes, 358-365
 - condições de ângulo e amplitude, 358
 - lugares de ganho constante, 362
 - de Vazsonyi, 483
 - polar de uma rede em atraso, 564
 - Dial, 5
 - Dirac, função delta de, 31
 - Discretização de equações de estado de tempo contínuo, 795
 - Dispositivo
 - a fluidos, 219
 - amostrador, 706
 - biestável, 220, 220
 - digitais com fluidos, 223
 - segurador(es), 706
 - de ordem zero, 721
 - características de resposta em frequência de, 721
 - Distúrbio(s)
 - de torque
 - resposta para, 210
 - externo, 3
 - interno, 3
 - Domínio de atração, 812
 - Duffing, equação de, 604
- E
- Efeito de parede, 219
- Elemento(s)
- ativo, 84
 - de controladores automáticos industriais, 170
 - de um diagrama de bloco, 96
 - passivos, 84
- Entradas senoidais
- obtenção de soluções em regime estacionário para, 425
- Equação(ões)
- autônomas, 640
 - de competição de Volterra, 12
 - de diferença, solução, 791
 - de Duffing, 604
 - de estado, 752
 - de tempo discreto
 - resolução, 790
 - transformada z para a solução de, 792
 - homogêneas, 766
 - invariante no tempo, solução, 766-776
 - lineares variantes no tempo, 784
 - não homogêneas, 773
 - variantes no tempo, 782
 - de Riccati de matriz reduzida, 885
 - de saída, 754
 - de Van der Pol, 608
 - diferencial
 - linear, 77
 - não linear, 78
 - para sistemas térmicos, 128
 - para a assíntota de alta frequência, 439
- Erro(s)
- de aceleração, 327
 - de posição, 327
 - de velocidade, 324, 327
 - estacionário(s), 247, 322
 - para resposta(s) a rampa, 273
 - correlação com a integral do erro na resposta a degrau, 328
 - estático
 - coeficientes de, 321
 - Espaços de estados, 751
 - análise de sistemas de controle
 - funções de transferência, 776
 - matriz de transferência, 778
 - de sistemas a malha-fechada, 778-779
 - sistemas lineares variantes no tempo, 782
 - representação de sistemas, 752-766
 - de tempo discreto, 786-790
 - Espécula, 383
 - Estabilidade
 - absoluta, 247
 - análise de, no plano complexo, 284
 - assintótica, 812
 - global, 812
 - de Liapunov, para sistemas lineares invariantes no tempo, 820
 - de um ciclo limite, 622
 - no sentido de Liapunov, 811
 - relativa, 247, 484-501
 - análise, via mapeamento conforme, 485
 - margens de fase e de ganho, 489
 - Estabilização de sinal, 609
 - Estado de equilíbrio do sistema, 811
 - estável, 812
 - uniformemente estável, 812
- F
- Fatores básicos, em uma função de transferência arbitrária, 431
- Fenômeno de aderência de parede, 219
- Flapper, 180
- Flip-flop, 220
- Fluidos
- leis de fluxo de, 116
- Foco
- estável, 662
 - instável, 662
- Fonte, 133
- Forma de Jordan canônica, 759
- Fórmula de ganho de Mason, 133
- para gráficos de fluxo de sinal, 137
- Formulação de problemas de otimização, 849
- Frequência
- de canto, 434
 - do fator quadrático, 439
 - de corte, 499
 - de mudança de inclinação, 434
 - de ressonância, 441
- Função(ões)
- complexa, 20
 - analítica, 22
 - de Liapunov, 815
 - de quantização, 703
 - de resposta ao impulso, 248
 - de tempo discreto, 704
 - de transferência, 79
 - analogia
 - -- força-corrente, 86
 - -- força-tensão, 84
 - -- circuito L-R-C, 82-83
 - -- de elementos em cascata, 88
 - -- sem carregamento, 89
 - -- de fase não-mínima, 444, 516
 - -- de malha-aberta, 98
 - -- de malha-fechada, 98
 - -- de mínima fase, 444
 - -- de sistemas físicos, dedução, 103-129
 - -- de um servomotor bifásico, 107
 - -- de um sistema de uma entrada e uma saída, 776
 - -- determinação experimental de, 514
 - -- do ramo direto, 98
 - -- impedância complexas, 83
 - -- nos sistemas
 - -- de nível de líquido, 119
 - -- térmicos, 128
 - -- pulsada, 719-731
 - -- de elementos em cascata, 727
 - -- de sistemas a malha-fechada, 728
 - -- procedimento para obtenção de, 724
 - -- soma de convolução, 722
 - -- teorema da amostragem, 720
 - -- degrau unitário, 28
 - -- delta de Dirac, 31
 - -- descritiva
 - -- análise de sistemas de controle não lineares por, 603-638
 - -- da não linearidade tipo ligadesliga, 615
 - -- de entradas duais, 627
 - -- de um elemento não linear, 611
 - -- doublet unitária, 51
 - -- escalar
 - -- forma quadrática, 814
 - -- indefinida, 814
 - -- negativa
 - -- definida, 813
 - -- semidefinida, 813
 - -- positiva
 - -- definida, 813
 - -- semidefinida, 813
 - -- excitação, 79
 - -- impulso unitário, 31
 - -- peso do sistema, 248
 - -- resposta, 79
- G
- Ganho, 174
- da válvula de controle, 189
 - de laço, 134
 - do caminho direto, 134
 - do controlador, 189
 - K , 431
 - na região de baixa frequência, 547
- Geração de funções senoidais, 297
- Geradores de sinais senoidais, 514
- Gráfico(s)
- de fluxo de sinal, 133, 134
 - -- álgebra de, 135
 - -- fórmula de ganho de Mason para, 137
 - -- para sistemas
 - -- de controle, 137
 - -- lineares, 137
 - -- propriedades dos, 134
 - -- de Nichols, 462
 - -- de Nyquist, 471, 477
 - -- de plano de fase, 641
 - -- de uma função de transferência senoidal, 451
 - -- de soluções temporais, 655-660
 - -- simetria nos, 644
 - -- do log-módulo versus fase, 462
 - -- de funções de transferência simples, 463, 464
 - -- vantagens, 462
 - -- de lugar das raízes
 - -- do sistema compensado, 556, 581
 - -- logarítmicos, 430
 - -- para sistemas de segunda ordem, 359
 - -- polares, 451-462, 451
 - -- do atraso de transporte, 457, 458
 - -- fatores
 - -- de primeira-ordem, 453
 - -- integral e derivativo, 453
 - -- quadráticos, 454
 - -- formas gerais de, 459
 - -- na faixa de alta-frequência, 461
- Grandezas análogas, 85
- na analogia força
 - -- corrente, 88
 - -- tensão, 85

- Hard spring. 604
- I**
- Impedância. 222
 - Índice(s) de desempenho. 337
 - características necessárias para. 337
 - de erro. 337
 - ISE
 - computação direta dos. 342
 - técnica da transformada de Laplace para a computação de. 345
 - Instabilidade. 812, 819
 - Integral(is)
 - de convolução
 - aproximação para. 249
 - de Laplace, 26
 - Interação de jato. 219
 - Intervalo diferencial. 172
 - Inversão de matriz. 65-70
 - Isoclina. 647
- K**
- Krasovskii, método de. 831
 - Kronecker. deltas de. 58
- L**
- Laplace. transformada de. 20, 25-29
 - Largura de faixa do sistema. 500
 - Lei(s)
 - de controle. 13
 - ótimo. 883
 - de fluxo de fluidos. 116
 - de Kirchhoff
 - para correntes. 87
 - para o sistema rotacional mecânico. 83
 - de Newton. 80
 - dos gases ideais. 123
 - Liapunov. análise de estabilidade de. 810-847
 - Lugar(es)
 - das raízes
 - e configurações de pólos e zeros. 402
 - e técnicas de compensação
 - de avanço-atraso. 578
 - em atraso. 565
 - em avanço. 552
 - regras para construções dos. 377-385
 - de ganho constante
 - ortogonalidade entre os lugares das raízes e os. 362
 - geométricos
 - de ângulos de fase cons-
- tante. 504
- de módulo constante. 503
- M**
- Mapeamento conforme. 24
 - Margem de ganho de um sistema
 - de primeira-ordem. 492
 - de segunda-ordem. 492
 - Mason. fórmula de ganho de. 133
 - Matriz(es)
 - adição de. 62
 - adjunta. 66
 - anti-Hermitiana. 61, 62
 - anti-simétrica. 60
 - cancelamento de. 70
 - característica de. 65
 - cofator. A_{ij} . 66
 - complexa. 61
 - conjugada. 60
 - de ordem n . 58
 - de transferência. 129
 - de transição de estados. 771
 - para o caso variante no tempo. 783
 - propriedades. 772, 784
 - de Vandermonde. 72
 - definição. 57
 - derivada de. 70
 - determinante de. 59
 - diagonal. 58
 - diferenciação de. 70
 - exponencial. 768
 - propriedade. 769
 - Hermitiana. 61
 - identidade. 59
 - igualdade de duas. 58
 - integração de. 70
 - inversa de. 67
 - fórmulas. 69
 - menor M_{ij} da. 66
 - multiplicação de
 - lei
 - associativa. 63
 - distributiva. 63
 - por um escalar. 62
 - por uma matriz. 63
 - não singular. 59
 - nula. 59
 - outras propriedades de. 64
 - potência de. 64
 - quadrada. 58
 - simétrica. 60
 - singular. 59
 - subtração de. 62
 - transposta da. 59
 - triangular. 74
 - unidade. 59
 - zero. 59
 - Método(s)
 - da transformada de Laplace. 20
 - vantagem do. 20
 - da transformada z
 - na resolução de equações de diferença. 713
- teorema do valor
- final. 715
- inicial. 715
- das isoclina. 646
- de gradiente variável. 833
- de Krasovskii. 831
- de resposta em frequência. 424-539
- de Schultz-Gibson. 830
- delta. 651
- determinação do coeficiente de erro
- de aceleração estático. 450
- de posição estático. 448
- de velocidade estático. 448
- fatores
- de primeira-ordem. 434
- integral e derivativo. 432
- quadráticos. 437
- relação entre o tipo do sistema e a curva do log-módulo. 448
- direto de Liapunov. 810
- do lugar das raízes. 357
- análise de sistemas de controle pelo. 385-402
- do plano de fase. 640
- para análise de sistemas não lineares. 666-671
- resposta a degrau. 667
- resposta em rampa. 660
- para construir trajetórias. 643-655
- Modelo matemático. 76
- precisão. 77
- simplicidade. 77
- Mola
- dura. 604
- macia. 604
- Motor(es) c.c. controlado(s)
- por armadura. 109
- desempenho. 116
- por campo. 113
- desempenho. 116
- N**
- Não linearidade(s)
 - de duas posições. 613
 - de limiar. 616
 - inerentes. 609
 - intencionais. 609
 - tipo
 - liga-desliga. 613
 - com histerese. 614
 - saturação. 618
 - zona morta. 616
 - Nichols, carta de. 508, 508
 - Nó
 - de entrada. 133
 - de saída. 134
 - estável. 662
 - instável. 662
 - misto. 134
 - misturado. 134
 - Norma Euclidiana. 811
 - Nozzle. 180
 - Nozzle-flapper. 180
- O**
- Observabilidade. 852
 - completa
 - de sistemas de tempo
 - contínuo. 864
 - discreto. 863
 - em funções de transferência. 865
 - em matrizes de transferência. 865
 - forma alternativa da condição de. 867
 - Obtenção da ação de controle
 - derivativa e integral em controladores eletrônicos. 206
 - proporcional
 - mais-derivativa-mais-integral pneumática. 200
 - mais-integral
 - hidráulica. 205
 - pneumática. 199
 - Oitava. em relações de frequências. 433
 - Oscilação(ões)
 - auto-excitada. 608
 - sub-harmônicas. 607
 - super-harmônicas. 606
 - tudo-ou-nada. 679
- P**
- Phase-plane portrait. 641
 - Plano
 - de estados. 640
 - de fase. 640
 - análise por. 639-701
 - gráficos de. 641
 - método de. 640
 - Planta. 2
 - Plantas. 2
 - Pólo(s). 23
 - adição de, na função de transferência de malha-aberta. 545
 - de malha
 - aberta. 399
 - fechada
 - dominantes. 284
 - efeitos de variações de parâmetros nos. 398
 - de ordem n . 24
 - de segunda ordem. 24
 - de terceira ordem. 24
 - simples. 24
 - Ponto(s)
 - de ajuste. 5
 - de sela. 662
 - isolado. 640
 - ordinário(s). 23, 640
 - singular(es). 23, 640, 660, 663
 - classificação de. 661
 - real. 671
 - virtual. 671
 - Portas lógicas com fluidos. 223
 - e respectivas tabelas-verdade. 224
 - Posicionador de válvula. 188.
- Potência de uma matriz. 64**
- Primeiro método de Liapunov. 815**
- Princípio**
- bague-bague. 874
 - da dualidade. 869
- Processo. 2, 3**
- Q**
- Quantização. 703
- R**
- Raízes características. 755
 - Ramo. 133
 - Realimentação
 - em sistemas de controle. 215
 - modificações de constante de tempo pelo uso de. 217
 - por tacômetro. 275
 - positiva
 - aumento de ganhos de malha pelo uso de. 217
 - redução de variações de parâmetros pelo uso de. 215
 - eliminação de integração. 218
 - uso de malhas de. 218
 - Rede(s)
 - avanço-atraso. 575
 - características da. 576
 - elétrica de atraso. 563
 - em atraso. 562
 - em avanço. 549
 - características de. 550
 - mecânica de atraso. 563
 - Relé(s)
 - de ação reversa. 181
 - pneumáticos. 181
 - tipo
 - sangria. 182
 - sem sangria. 182
 - Representação de plano de fase da dinâmica do sistema. 639
 - Resíduo. 43
 - Resistência de sistemas
 - de nível de líquido. 116
 - de pressão. 122
 - térmicos. 125
 - Resposta
 - em frequência. 424
 - a partir de diagramas de pólos e zeros. 428
 - de malha-aberta
 - informação obtível. 547
 - requisitos. 547
 - de malha-fechada. 501-514
 - ajustes de ganho. 511
 - carta de Nichols. 508
 - de sistemas com realimentação unitária. 501
 - lugares geométricos
 - de ângulos de fase constante. 504
 - de módulo constante. 503
 - para sistemas com reali-
- mentação não unitária. 509
- e compensação em avanço-atraso. 585
 - e técnicas de compensação
 - em atraso. 570
 - em avanço. 557
 - procedimento para construção das curvas logarítmicas de. 442
 - estacionária. 247
 - para distúrbios de torque
 - em controle proporcional. 210
 - mais-integral. 211
 - transitória. 247
 - especificações. 263, 265
 - Ressonância com saltos. 607
 - Reta de conversão-número-decibel. 432
 - Rotação em sentido anti-horário. 21
 - Routh, critério de estabilidade de. 286-292
- S**
- Schultz-Gibson, método de. 830
 - Schur-Cohn, critério de estabilidade de. 734
 - Segundo método de Liapunov. 810, 815
 - e o comportamento de resposta transitória de sistemas dinâmicos. 826
 - otimização de sistemas de controle através do. 879
 - problemas de otimização de parâmetros resolvidos usando-se o. 880
 - Sensibilidade proporcional. 174
 - Separatrizes. 662
 - Servomecanismo(s). 1, 3
 - com realimentação de velocidade. 277
 - de posição. 112
 - controle derivativo no desempenho de. 387
 - realimentação de velocidade no desempenho de. 387
 - Servomotor(es)
 - bifásicos. 106, 107
 - efeito de carga na dinâmica de servomotores. 106
 - hidráulico. 92, 193
 - diagrama esquemático de. 92
 - linearizado. curvas características. 94
 - Shannon, teorema da amostragem de. 720
 - Simetria nos gráficos de plano de fase. 644
 - Sinal(is)
 - analógicos. 9
 - digitais. 9
 - elétricos. 9

- erro atuante, 4
Sincronismo de frequência, 608
Sismógrafo, 104
- diagrama esquemático de, 105
Sistema(s) de controle
- a dados amostrados, 702
- abordagem
- básica em projetos de, 14
- de tentativa-e-erro para projeto de, 541
- do lugar das raízes para projetos de, 544
- adaptativo(s), 7, 8, 892-899
- decisão baseada na identificação do processo, 897
- definição, 894
- identificação das características dinâmicas do processo, 896
- índices de desempenho, 895
- modificação baseada na decisão tomada, 897
- análise, 14
- pelo método do lugar das raízes, 385-402
- por espaço de estados, 749-809
- análogos, 85, 86, 88
- auto-organização do, 896
- auto-oscilatório, 665
- biológicos, 12
- classificação de, 321
- com aprendizado, 898
- com armazenamento de energia, 263
- com atraso de transporte, 394
- com coeficiente de erro estático idênticos, 331
- com erros dinâmicos diferentes, 331
- com fluido, aplicação, 223
- com ganhos não lineares, 671
- para entradas
- em degrau, 673
- em rampa, 675
- com tempo morto, 394
- com um distúrbio de torque, 210
- comerciais, 12
- compensação de, 541
- completamente observável, 862, 868
- complexos, projeto, 543
- condicionalmente estáveis, 392, 478
- gráfico polar de, 479
- controlável, 852
- de aceleração, 3
- de aprendizado, 8
- de equações consistente, 75
- de estado
- completamente controlável, 854
- controlável, 856
- de estoque, 12
- de fase
- mínima, 444
- ângulo de fase, 445
- não mínima, 393, 444
- de laços múltiplos, 139
- de múltiplas
- entradas e saídas
- não-interação em, 779
- malhas, 479, 480
- de nível de líquido, 116, 188, 189
- capacitância de, 116
- com interação, 120, 120
- controle integral de, 208
- resistência de, 116
- de ordem superior, 280
- resposta
- não-oscilatória de, 284
- transitória de, 281
- de posição, 3
- de pressão, 8, 9, 122
- capacitância de, 122
- resistência de, 122
- de primeira-ordem, 251-255
- resposta
- a degrau unitário de, 251
- a rampa unitária, 253
- ao impulso unitário de, 254
- de processo, 4
- de referência-modelo, 888-892
- de segunda-ordem, 255-280, 259
- atenuação, 259
- coeficiente de amortecimento, 259
- controle proporcional-mais-derivada de, 274
- e especificações de resposta transitória, 266-271
- efeitos de um zero nos lugares das raízes de, 386
- equações diferenciais de primeira-ordem a partir de, 641
- frequência natural amortecida, 259
- gráficos de lugar das raízes para, 359
- relações entre a resposta transitória ao degrau e a resposta em frequência, 493
- resposta
- a degrau de, 258
- impulsiva, 271
- servomecanismo, 255
- de tempo
- discreto, 702
- amostrador, 706
- análise
- de estabilidade, no plano z , 732
- pela transformada z , 706
- por espaço de estados, 706
- controle de tempo ótimo de, 870
- ótimo, 850
- de terceira-ordem
- resposta a degrau unitário de, 280
- de tráfego, 11
- de transmissão por engrenagens, 143
- de velocidade, 3, 8, 9
- diagrama de blocos de um, 96
- dinâmico
- estado de um, 750
- variáveis de estado, 750
- efeito(s)
- de não linearidades inerentes na precisão estática, 610
- do elemento de medida no desempenho do, 178
- eletromecânicos, 104
- em cascata
- função de transferência global da combinação, 452
- em malha
- aberta, 6, 7
- fechada, 4, 4
- com realimentação manual, 5
- manuais, 5
- sujeito a um distúrbio, 99
- versus malha-aberta, 7
- erro estacionário, 247
- especificações de desempenho, 540
- estabilidade
- absoluta, 247
- relativa, 247
- estado de equilíbrio do, 811
- físicos
- dedução de funções de transferência de, 103-129
- gráficos de fluxo de sinal para, 137
- índice de desempenho, 337
- lineares, 77
- análise
- de estabilidade de, 819-826
- de plano de fase de, 666-671
- equivalentes, 78
- gráfico de fluxo de sinal para, 137
- invariáveis no tempo, 77
- princípio da superposição, 77
- variáveis no tempo, 77
- malhas de realimentação nos, 219
- margem
- de fase, 492
- de ganho, 492
- mecânicos, 104
- modificação na dinâmica da planta, 541
- monoestável, 684
- multivariável, 129
- não lineares, 78
- abordagens usadas na análise e projeto de, 610
- análise de, através da função descritiva, 620-625
- aproximação linear de, 91

- dependência frequência-amplitude, 604
- estabilidade de, análise, 830-837
- respostas com múltiplos valores, 606
- ressonâncias com saltos, 606
- soluções em computador, 611
- não linearidades
- inerentes, 609
- intencionais, 609
- níveis básicos de hierarquia, segundo Gibson, 898
- numéricos, 9
- observável, 852
- operação estacionária do, 679
- otimizantes, 898
- otimização de, 342-347
- ótimo, 848
- baseados em índices de desempenho quadráticos, 850, 882-887
- índices de desempenho, 848
- passivo, 84
- pneumáticos, 180
- por computador, 10
- potência nos, 610
- problemas básicos no projeto de, 13
- projeto, 14
- proporcional com carga de inércia, 213
- realimentado, 3
- regulador automático, 3
- reprojetoamento do, 896
- requisitos gerais, 13
- resposta
- em frequência para projeto de, 545
- transitória do, 247
- rotacional mecânico, 81, 81
- lei
- de Kirchhoff, 83
- de Newton para, 82
- sinais de teste típicos, 246
- sumário dos métodos de compensação de, 587-593
- teoria de controle moderno, 750
- térmicos, 125
- resistência de, 125
- translacional mecânico, 80
- equação diferencial linear invariante no tempo, 80
- função de transferência, 80
- lei de Newton, 80
- Soma de convolução, 722
- Sorvedouro, 134, 134
- Steepest-descent, 898
- Subtração de matrizes, 62
- Supressão assíncrona, 609
- Sylvester, critério de, 814
T
Tacômetro(s), 275
- AC, 276
- DC, 275
Taxa
- de corte, 500
- de restabelecimento, 176
Tempo morto, 394
- aproximação de, 398
Teorema
- da diferenciação complexa, 346
- da integração real, 344
- de Cauchy
- e transformada z inversa, 719
- de extensão analítica, 27
- de Krasovskii, 831
- do mapeamento, 468
- aplicação na análise de estabilidade de sistemas de malha-fechada, 468
- principal sobre estabilidade de Liapunov, 816
Teoria
- de controle, 12
- convencional, limitações, 749
- moderno versus teoria de controle convencional, 750
- de sistemas
- fluidos, 219
- digitais fluidos, 223
Trajetória(s), 639
- circular, 658
- e pontos singulares, 660
- método(s)
- analíticos para construir, 645
- gráfico, 646
- no plano de fase, 640
Transdutor, 5, 704
- a dados amostrados, 704
- analógico, 704
- digital, 704
- analógico, 705
Transferência de calor
- por condução, 125
- por convecção, 125
- por radiação, 126
Transformação inversa, 42
Transformada(s)
- de Laplace, 25-29
- função
- de degrau, 27
- unitário, 251
- exponencial, 25
- impulso, 30
- pulso, 30
- rampa, 28
- senoidal, 28
- translada, 29
- integral de convolução, 38
- mudança de escala de tempo, 32
- na resolução de equações diferenciais lineares, 49-50
- para solução de equações de

- homogêneas, 770
- não homogêneas, 774
- para a computação de índices de desempenho
- ISE, 345
- ITSE, 346
- pares da, 40
- propriedades das, 41
- teorema(s) da, 29-42
- da diferenciação, 33
- da integração, 37
- do valor
- final, 36
- inicial, 37
- inversa(s) de Laplace
- de uma matriz, 771
- método da expansão em frações parciais, 42
- pólos
- complexos conjugados, 45
- distintos, 43
- múltiplos, 47
- para sistema de segunda-ordem, 259
- z , 706, 710
- inversa, 716-719
- expansão
- em frações parciais, 717
- em uma série infinita de potências, 716
- integral de inversão, 718
- propriedades da, 711, 712
Transmitância, 133
Transposta
- conjugada, 61
- da matriz, 59
V
Valor do pico de ressonância, 441
Válvulas atuantes pneumáticas, 186
- diagrama esquemático de, 187
Van der Pol, equação de, 66
Variável(is)
- complexa, 20
- de estado, 750
- não-unicidade do conjunto de, 755
Vazsonyi, diagrama de, 483
Vetor
- coluna, 58
- de estados, 751
- linha, 58
- n , 58
Volterra, equações de condição de, 12
Z
Zero(s), 24
- adição de, na função de transferência de malha-aberta, 545
Zona de sincronismo, 608