

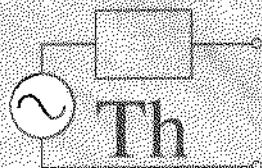
DISPOSITIVOS ELETRÔNICOS

e teoria de circuitos

Parte 5

8^a Edição

Robert L. Boylestad
Louis Nashelsky



Teoremas sobre Circuitos (Corrente Alternada)

18.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo será para os circuitos ac o que foi o Cap. 9 para os circuitos dc. Antes de começar a estudá-lo, talvez seja uma boa idéia rever todos os teoremas discutidos no Cap. 9, já que muitos dos comentários apresentados ali não serão repetidos aqui.

Devido à necessidade de ganharmos confiança na aplicação dos vários teoremas a circuitos com fontes controladas (dependentes), algumas seções foram divididas em duas partes, uma para fontes independentes e outra para fontes dependentes.

Os teoremas que serão analisados detalhadamente incluem o da superposição, o de Thévenin, o de Norton e o da potência máxima. Não vamos apresentar neste capítulo uma discussão dos teoremas da reciprocidade e de Millman, pois após uma revisão do Cap. 9 você poderá aplicá-los a circuitos ac senoidais sem grandes dificuldades.

18.2 TEOREMA DA SUPERPOSIÇÃO

O leitor deve se lembrar de que o teorema da superposição, estudado no Cap. 9, elimina a necessidade de resolver um sistema de equações lineares simultâneas, pois permite considerar separadamente os efeitos de cada uma das fontes. Para isto é preciso manter apenas uma fonte de cada vez e remover as outras, o que é conseguido anulando as fontes de tensão (substituindo-as por curto-circuitos) e as fontes de corrente (substituindo-as por circuitos abertos). Para obter a tensão entre os terminais de uma parte do circuito ou a corrente que a atravessa adicionamos algebricamente as contribuições de todas as fontes.

Quando aplicamos este método à análise de circuitos ac com fontes independentes, a única diferença é que estamos agora trabalhando com impedâncias e fasores em vez de resistores e números reais.

Não podemos usar o teorema da superposição para calcular a potência em circuitos de corrente alternada, pois, do mesmo modo que nos circuitos de corrente contínua, este cálculo envolve relações não-lineares. O teorema pode ser aplicado a circuitos com fontes de freqüências diferentes somente se determinarmos a resposta para *cada uma* das freqüências de modo independente e combinarmos os resultados, dando origem a uma forma de onda não-senoidal, como veremos no Cap. 24.

O teorema da superposição é aplicado freqüentemente a circuitos eletrônicos, nos quais os sinais contínuos e alternados são tratados separadamente e a solução total é a soma dos dois. Trata-se de uma aplicação importante do teorema, porque os elementos reativos podem se comportar de forma muito diferente na presença dos dois tipos de sinais. Além disso, a análise da resposta de um circuito eletrônico a um sinal contínuo pode definir parâmetros importantes para a análise da resposta do mesmo circuito a sinais alternados, como será visto no Exemplo 18.4.

Vamos considerar inicialmente circuitos que contêm apenas fontes independentes, para manter a analogia com o tratamento do Cap. 9.

Fontes Independentes

EXEMPLO 18.1 Encontre, utilizando o teorema da superposição, a corrente I na reatância de 4 V (X_{L_1}) na Fig. 18.1.

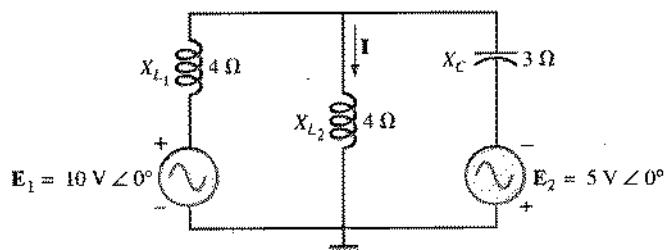


Fig. 18.1 Exemplo 18.1.

Solução: Para o circuito redesenhado (Fig. 18.2),

$$Z_1 = +jX_{L_1} = j4\Omega$$

$$Z_2 = +jX_{L_2} = j4\Omega$$

$$Z_3 = -jX_C = -j3\Omega$$

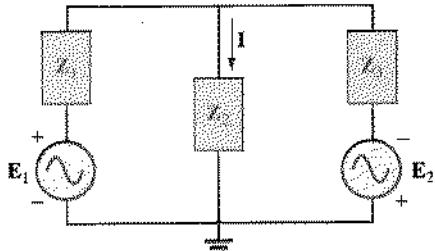


Fig. 18.2 Definição dos blocos de impedâncias para o circuito da Fig. 18.1.

Considerando o efeito da fonte de tensão E_1 (Fig. 18.3), temos

$$Z_{2||3} = \frac{Z_2Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{(j4\Omega)(-j3\Omega)}{j4\Omega - j3\Omega} = \frac{12\Omega}{j} = -j12\Omega$$

$$= 12\Omega \angle -90^\circ$$

$$I_{s1} = \frac{E_1}{Z_{2||3} + Z_1} = \frac{10\text{ V} \angle 0^\circ}{-j12\Omega + j4\Omega} = \frac{10\text{ V} \angle 0^\circ}{8\Omega \angle -90^\circ}$$

$$= 1,25\text{ A} \angle 90^\circ$$

e

$$I' = \frac{Z_3 I_{s1}}{Z_2 + Z_3} \quad (\text{regra dos divisores de tensão})$$

$$= \frac{(-j3\Omega)(j1,25\text{ A})}{j4\Omega - j3\Omega} = \frac{3,75\text{ A}}{j1} = 3,75\text{ A} \angle -90^\circ$$

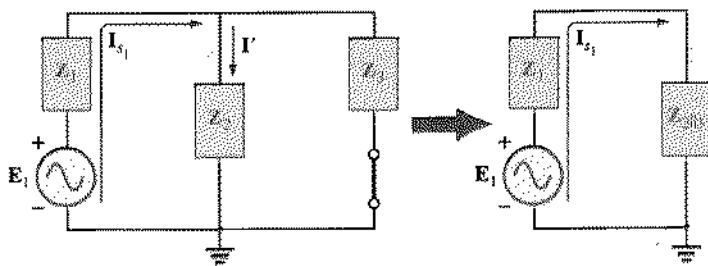


Fig. 18.3 Determinação do efeito da fonte de tensão E_1 sobre a corrente I no circuito da Fig. 18.1.

Considerando os efeitos da fonte de tensão E_2 (Fig. 18.4), temos

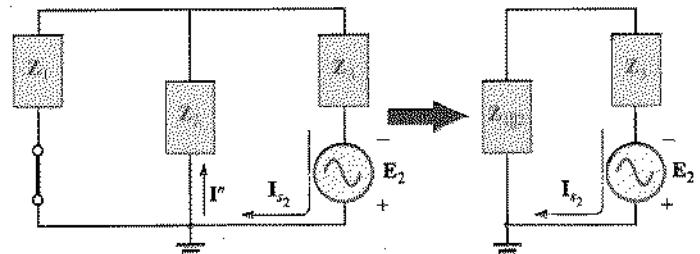


Fig. 18.4 Determinação do efeito da fonte de tensão E_2 sobre a corrente I no circuito da Fig. 18.1.

$$Z_{1||2} = \frac{Z_1}{N} = \frac{j4\Omega}{2} = j2\Omega$$

$$I_{s2} = \frac{E_2}{Z_{1||2} + Z_3} = \frac{5\text{ V} \angle 0^\circ}{j2\Omega - j3\Omega} = \frac{5\text{ V} \angle 0^\circ}{1\Omega \angle -90^\circ} = 5\text{ A} \angle 90^\circ$$

$$\text{e} \quad I'' = \frac{I_{s2}}{2} = 2,5\text{ A} \angle 90^\circ$$

A corrente total na reatância X_{L_1} (Fig. 18.5) é

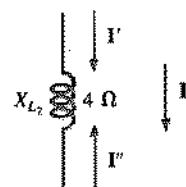


Fig. 18.5 Determinação da corrente total no circuito da Fig. 18.1.

$$I = I' - I''$$

$$= 3,75\text{ A} \angle -90^\circ - 2,50\text{ A} \angle 90^\circ = -j3,75\text{ A} - j2,50\text{ A}$$

$$= -j6,25\text{ A}$$

$$I = 6,25\text{ A} \angle -90^\circ$$

EXEMPLO 18.2 Utilizando o teorema da superposição, encontre a corrente I no resistor de 6Ω da Fig. 18.6.

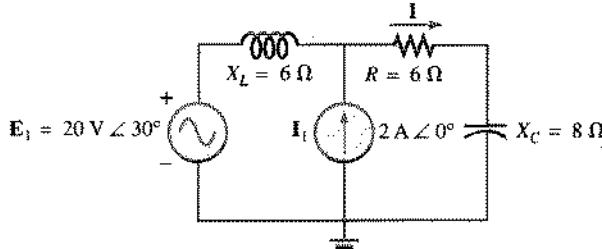


Fig. 18.8 Exemplo 18.2.

Solução: Redesenhando o circuito do modo indicado na Fig. 18.7, podemos escrever

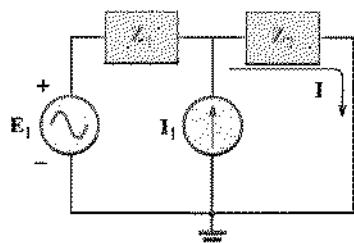


Fig. 18.7 Definição dos blocos de impedâncias para o circuito da Fig. 18.6.

$$Z_1 = j6 \Omega \quad Z_2 = 6 - j8 \Omega$$

Vamos considerar o efeito da fonte de corrente (Fig. 18.8). Aplicando a regra dos divisores de corrente, temos

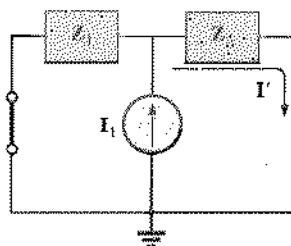


Fig. 18.8 Determinação do efeito da fonte de corrente I_1 sobre a corrente I no circuito da Fig. 18.6.

$$\begin{aligned} I' &= \frac{Z_1 I_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{(j6\Omega)(2A)}{j6\Omega + 6\Omega - j8\Omega} = \frac{j12A}{6-j2} \\ &= \frac{12A \angle 90^\circ}{6,32 \angle -18,43^\circ} \\ I' &= 1,9A \angle 108,43^\circ \end{aligned}$$

Consideremos agora o efeito da fonte de tensão (Fig. 18.9). Aplicando a definição de resistência generalizada, temos

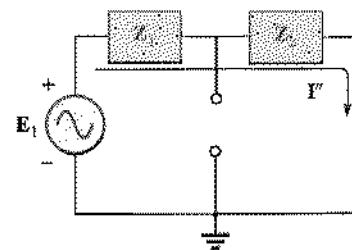


Fig. 18.9 Determinação do efeito da fonte de tensão E_1 sobre a corrente I no circuito da Fig. 18.6.

$$\begin{aligned} I'' &= \frac{E_1}{Z_T} = \frac{E_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{20V \angle 30^\circ}{6,32\Omega \angle -18,43^\circ} \\ &= 3,16A \angle 48,43^\circ \end{aligned}$$

A corrente total no resistor de 6Ω (Fig. 18.10) é

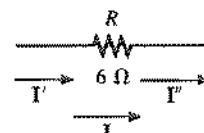


Fig. 18.10 Determinação da corrente I total para o circuito da Fig. 18.6.

$$\begin{aligned} I &= I' + I'' \\ &= 1,9A \angle 108,43^\circ + 3,16A \angle 48,43^\circ \\ &= (-0,60A + j1,80A) + (2,10A + j2,36A) \\ &= 1,50A + j4,16A \\ I &= 4,42A \angle 70,2^\circ \end{aligned}$$

EXEMPLO 18.3 Encontre a tensão entre os terminais do resistor de 6Ω da Fig. 18.6 usando o teorema da superposição. Compare o resultado com $V_{6\Omega} = I(6 \Omega)$, em que I é a corrente neste resistor, calculada no exemplo anterior.

Solução: Para a fonte de corrente,

$$V'_{6\Omega} = I'(6\Omega) = (1,9A \angle 108,43^\circ)(6\Omega) = 11,4V \angle 108,43^\circ$$

Para a fonte de tensão,

$$V''_{6\Omega} = I''(6\Omega) = (3,16A \angle 48,43^\circ)(6\Omega) = 18,96V \angle 48,43^\circ$$

A tensão total entre os terminais do resistor de 6Ω (Fig. 18.11) é portanto

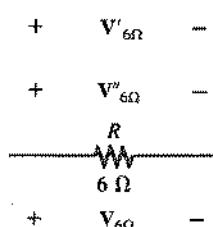


Fig. 18.11 Determinação da tensão total $V_{6\Omega}$ no circuito da Fig. 18.6.



$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{6\Omega} &= \mathbf{V}'_{6\Omega} + \mathbf{V}''_{6\Omega} \\ &= 11,4 \text{ V} \angle 108,43^\circ + 18,96 \text{ V} \angle 48,43^\circ \\ &= (-3,60 \text{ V} + j 10,82 \text{ V}) + (12,58 \text{ V} + j 14,18 \text{ V}) \\ &= 8,98 \text{ V} + j 25,0 \text{ V} \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_{6\Omega} = 26,5 \text{ V} \angle 70,2^\circ$$

De acordo com o resultado do exemplo anterior, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{6\Omega} &= \mathbf{I}(6 \Omega) = (4,42 \text{ A} \angle 70,2^\circ)(6 \Omega) \\ &= 26,5 \text{ V} \angle 70,2^\circ \quad (\text{confere}) \end{aligned}$$

EXEMPLO 18.4 Determine, utilizando o teorema da superposição, uma expressão senoidal para a tensão v_3 no circuito da Fig. 18.12.

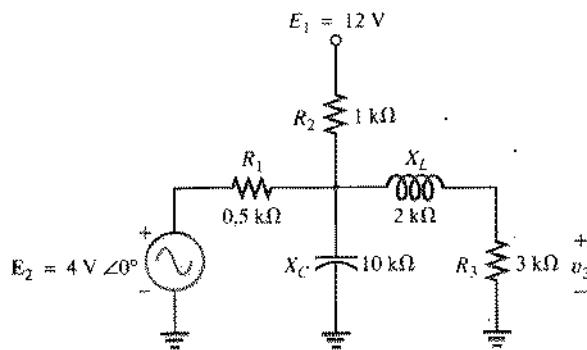


Fig. 18.12 Exemplo 18.4.

Solução: Vamos analisar primeiro o efeito de corrente contínua (dc). O leitor deve se lembrar de que neste caso, uma vez alcançado o regime estacionário, o capacitor é equivalente a um circuito aberto e o indutor pode ser substituído por um curto-círcuito. O resultado é o circuito da Fig. 18.13.

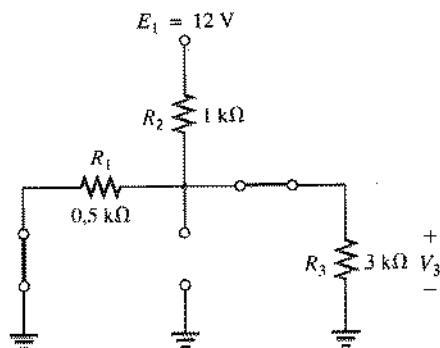


Fig. 18.13 Determinação do efeito da fonte de tensão dc E_1 sobre a tensão v_3 no circuito da Fig. 18.12.

Vemos portanto que os resistores R_1 e R_3 estão em paralelo e a tensão V_3 pode ser obtida com o auxílio da regra dos divisores de tensão:

$$R' = R_1 \parallel R_3 = 0,5 \text{ k}\Omega \parallel 3 \text{ k}\Omega = 0,429 \text{ k}\Omega$$

$$\begin{aligned} \text{e} \quad V_3 &= \frac{R'E_1}{R' + R_2} \\ &= \frac{(0,429 \text{ k}\Omega)(12 \text{ V})}{0,429 \text{ k}\Omega + 1 \text{ k}\Omega} = \frac{5,148 \text{ V}}{1,429} \end{aligned}$$

$$V_3 \approx 3,6 \text{ V}$$

Para analisarmos o efeito da fonte de ac, anulamos a fonte de dc, obtendo assim o circuito da Fig. 18.14.

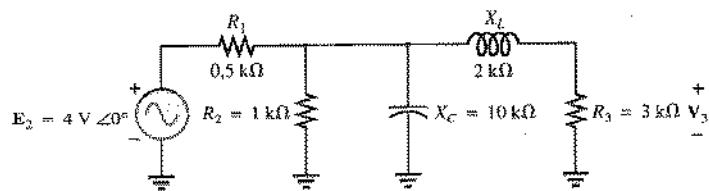


Fig. 18.14 Circuito da Fig. 18.12 redesenhado para determinar o efeito da fonte de tensão ac E_2 .

Depois de definidos os blocos de impedâncias (Fig. 18.15), obtemos um circuito série-paralelo que pode ser facilmente resolvido:

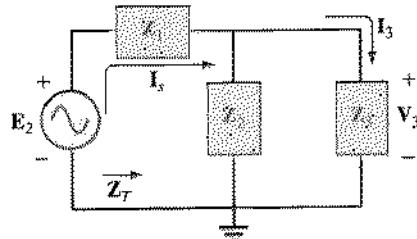


Fig. 18.15 Definição dos blocos de impedâncias para o circuito da Fig. 18.14.

$$Z_1 = 0,5 \text{ k}\Omega \angle 0^\circ$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= (R_2 \angle 0^\circ \parallel (X_C \angle -90^\circ)) \\ &= \frac{(1 \text{ k}\Omega \angle 0^\circ)(10 \text{ k}\Omega \angle -90^\circ)}{1 \text{ k}\Omega - j 10 \text{ k}\Omega} = \frac{10 \text{ k}\Omega \angle -90^\circ}{10,05 \angle -84,29^\circ} \\ &= 0,995 \text{ k}\Omega \angle -5,71^\circ \end{aligned}$$

$$Z_3 = R_3 + j X_L = 3 \text{ k}\Omega + j 2 \text{ k}\Omega = 3,61 \text{ k}\Omega \angle 33,69^\circ$$

e

$$\begin{aligned} Z_T &= Z_1 + Z_2 \parallel Z_3 \\ &= 0,5 \text{ k}\Omega + (0,995 \text{ k}\Omega \angle -5,71^\circ) \parallel (3,61 \text{ k}\Omega \angle 33,69^\circ) \\ &= 1,312 \text{ k}\Omega \angle 1,57^\circ \end{aligned}$$

Calculadora Efetuando os cálculos acima na calculadora TI-85, temos:

```
(0.5,0)+((0.995∠-5.71)*(3.61∠33.69))/((0.995∠-5.71)+(3.61∠33.69)) (Enter)
(1.311E0,3.373E-3)
Ans & Pol
(1.312E0,-1.545E-3)
```

$$I_s = \frac{E_2}{Z_T} = \frac{4 \text{ V} \angle 0^\circ}{1,312 \text{ k}\Omega \angle 1,57^\circ} = 3,05 \text{ mA} \angle -1,57^\circ$$

A regra dos divisores de corrente nos dá:

$$I_3 = \frac{Z_2 I_s}{Z_2 + Z_3} = \frac{(0,995 \text{ k}\Omega \angle -5,71^\circ)(3,05 \text{ mA} \angle -1,57^\circ)}{0,995 \text{ k}\Omega \angle -5,71^\circ + 3,61 \text{ k}\Omega \angle 33,69^\circ} \\ = 0,686 \text{ mA} \angle -32,74^\circ$$

e também

$$V_3 = (I_3 \angle \theta)(R_3 \angle 0^\circ) \\ = (0,686 \text{ mA} \angle -32,74^\circ)(3 \text{ k}\Omega \angle 0^\circ) \\ = 2,06 \text{ V} \angle -32,74^\circ$$

A solução total será:

$$v_3 = v_3(\text{dc}) + v_3(\text{ac}) \\ = 3,6 \text{ V} + 2,06 \text{ V} \angle -32,74^\circ \\ = 3,6 + 2,91 \text{ sen}(\omega t - 32,74^\circ)$$

O resultado é uma tensão senoidal cuja amplitude vale 2,91 V, oscilando em torno de um valor médio igual a 3,6 V, como ilustra a Fig. 18.16.

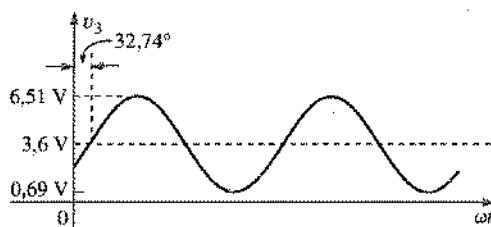


Fig. 18.16 Tensão v_3 resultante para o circuito da Fig. 18.12.

Fontes Dependentes

No caso de fontes dependentes para as quais a variável de controle não é determinada pelo circuito ao qual será aplicado o teorema da superposição, o teorema pode ser usado como se a fonte fosse independente; a única diferença é que a solução será obtida em função da variável de controle.

EXEMPLO 18.5 Obtenha a corrente I_2 no circuito da Fig. 18.17 empregando o teorema da superposição e supondo que μ e h são duas constantes arbitrárias. Em seguida, calcule o valor de I_2 para $V = 10 \text{ V} \angle 0^\circ$, $I = 20 \text{ mA} \angle 0^\circ$, $\mu = 20$ e $h = 100$.

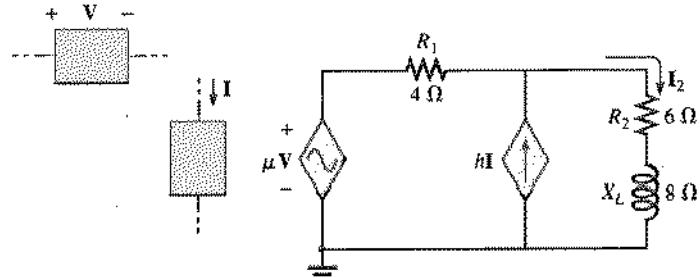


Fig. 18.17 Exemplo 18.5.

Solução: Redesenhando uma parte do circuito (Fig. 18.18), temos:

$$Z_1 = R_1 = 4 \Omega \quad Z_2 = R_2 + jX_L = 6 + j8 \Omega$$

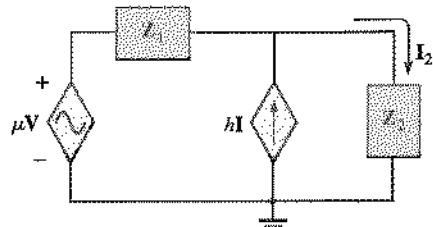


Fig. 18.18 Definição dos blocos de impedâncias para o circuito da Fig. 18.17.

Para a fonte de tensão (Fig. 18.19),

$$I' = \frac{\mu V}{Z_1 + Z_2} = \frac{\mu V}{4 \Omega + 6 \Omega + j8 \Omega} = \frac{\mu V}{10 \Omega + j8 \Omega} \\ = \frac{\mu V}{12,8 \Omega \angle 38,66^\circ} = 0,078 \mu V \angle -38,66^\circ$$

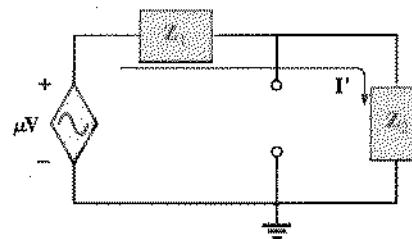


Fig. 18.19 Cálculo do efeito da fonte de tensão controlada por tensão sobre a corrente I_2 no circuito da Fig. 18.17.

Para a fonte de corrente (Fig. 18.20),

$$\begin{aligned} \mathbf{I}' &= \frac{\mathbf{Z}_1(h\mathbf{I})}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{(4 \Omega)(h\mathbf{I})}{12.8 \Omega \angle -38.66^\circ} = 4(0.078)h\mathbf{I} \angle -38.66^\circ \\ &= 0.312h\mathbf{I} \angle -38.66^\circ \end{aligned}$$

A corrente \mathbf{I}_2 será portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 &= \mathbf{I}' + \mathbf{I}'' \\ &= 0.078 \mu\mathbf{V} \angle -38.66^\circ + 0.312h\mathbf{I} \angle -38.66^\circ \end{aligned}$$

Para $\mathbf{V} = 10 \text{ V} \angle 0^\circ$, $\mathbf{I} = 20 \text{ mA} \angle 0^\circ$, $\mu = 20$ e $h = 100$,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 &= 0.078(20)(10 \text{ V} \angle 0^\circ)/\Omega \angle -38.66^\circ \\ &\quad + 0.312(100)(20 \text{ mA} \angle 0^\circ) \angle -38.66^\circ \\ &= 15.60 \text{ A} \angle -38.66^\circ + 0.62 \text{ A} \angle -38.66^\circ \\ \mathbf{I}_2 &= 16.22 \text{ A} \angle -38.66^\circ \end{aligned}$$

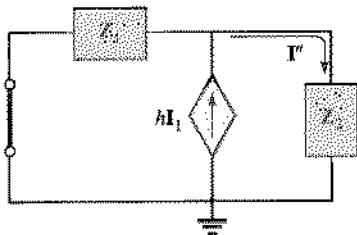


Fig. 18.20 Determinação do efeito da fonte de corrente controlada por corrente sobre a corrente \mathbf{I}_2 no circuito da Fig. 18.17.

No caso de uma fonte dependente para a qual a variável de controle é determinada pelo circuito ao qual o teorema será aplicado, esta fonte não pode ser considerada nula, a menos que a variável de controle tenha o valor zero. Para circuitos que incluem fontes dependentes como os do Exemplo 18.5 e fontes dependentes do tipo que acabamos de mencionar, o teorema da superposição deve ser aplicado a cada fonte independente e a cada uma das fontes dependentes que não tenham uma variável de controle nas regiões do circuito que estiverem sendo investigadas. Devemos enfatizar que fontes dependentes não são fontes de energia no sentido de que, ao retirarmos todas as fontes independentes de um circuito, todas as correntes e voltagens devem cair a zero.

EXEMPLO 18.6 Determine a corrente \mathbf{I}_C no resistor R_C da Fig. 18.21.

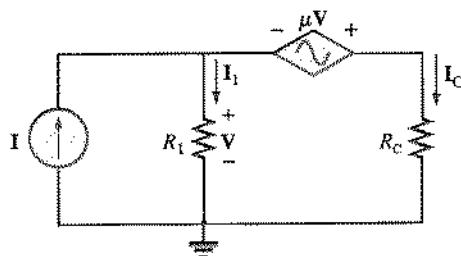


Fig. 18.21 Exemplo 18.6.

Solução: Observe que a variável de controle \mathbf{V} é determinada pelo circuito a ser analisado. Como mencionamos anteriormente, não podemos anular a fonte dependente a menos que \mathbf{V} seja zero. Se fizermos $\mathbf{I} = 0$, não existirá nenhuma fonte de tensão no circuito e teremos $\mathbf{V} = 0$ (e portanto $\mu\mathbf{V} = 0$). Nestas condições, \mathbf{I}_C também será nula. É óbvio, portanto, que o circuito deve ser analisado exatamente como aparece na Fig. 18.21; não podemos eliminar nenhuma das fontes, como normalmente fazemos quando empregamos o teorema da superposição.

Aplicando a lei de Kirchhoff para tensões, temos:

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V} + \mu\mathbf{V} = (1 + \mu)\mathbf{V}$$

$$\text{e } \mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_C}{R_C} = \frac{(1 + \mu)\mathbf{V}}{R_C}$$

Devemos, no entanto, obter o resultado em termos de \mathbf{I} , pois \mathbf{V} e $\mu\mathbf{V}$ são variáveis dependentes.

Aplicando a lei de Kirchhoff para correntes, temos:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}}{R_1} + \frac{(1 + \mu)\mathbf{V}}{R_C}$$

$$\text{e } \mathbf{I} = \mathbf{V} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1 + \mu}{R_C} \right)$$

$$\text{ou } \mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1 + \mu}{R_C} \right)}$$

Substituindo na expressão anterior para \mathbf{I}_C , temos:

$$\mathbf{I}_C = \frac{(1 + \mu)\mathbf{V}}{R_C} = \frac{(1 + \mu)}{R_C} \left(\frac{\mathbf{I}}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1 + \mu}{R_C} \right)} \right)$$

$$\text{Logo, } \mathbf{I}_C = \frac{(1 + \mu)R_1\mathbf{I}}{R_C + (1 + \mu)R_1}$$

18.3 TEOREMA DE THÉVENIN

Para aplicarmos o teorema de Thévenin a circuitos de corrente alternada senoidais, devemos apenas substituir o termo resistência pelo termo impedância, ou seja,

qualquer circuito ac linear de dois terminais pode ser substituído por um circuito equivalente constituído por uma fonte de tensão e uma impedância em série, como ilustra a Fig. 18.22.

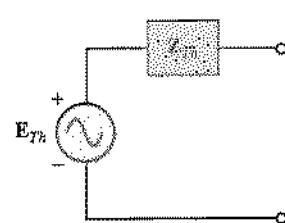


Fig. 18.22 Circuito equivalente de Thévenin para circuitos ac.

Como as reatâncias de um circuito dependem da freqüência, o circuito equivalente de Thévenin de um circuito qualquer só é válido para *uma* freqüência dada.

Vamos agora enunciar os passos necessários para a aplicação deste teorema a circuitos ac. A única mudança necessária é, como já mencionamos, a substituição do termo *resistência* por *impedância*. As fontes dependentes e independentes serão novamente tratadas em separado.

O circuito do último exemplo da seção sobre fontes independentes (Exemplo 18.9), que contém fontes dc e ac, é típico da área da eletrônica.

Fontes Independentes

- Remova a parte do circuito para a qual deseja encontrar o circuito equivalente de Thévenin.*
- Assinale claramente os dois terminais do circuito resultante.*
- Calcule Z_{Th} anulando primeiramente todas as fontes de tensão e de corrente (substituindo-as por curto-circuitos e circuitos abertos, respectivamente) e obtendo em seguida a impedância resultante entre os dois terminais assinalados.*
- Obtenha E_{Th} recolocando as fontes de tensão e de corrente e calculando a tensão de circuito aberto entre os terminais assinalados.*
- Desenhe o circuito equivalente de Thévenin com a parte do circuito previamente removida colocada novamente no lugar.*

EXEMPLO 18.7 Obtenha o circuito equivalente de Thévenin para a parte do circuito externa ao resistor R na Fig. 18.23.

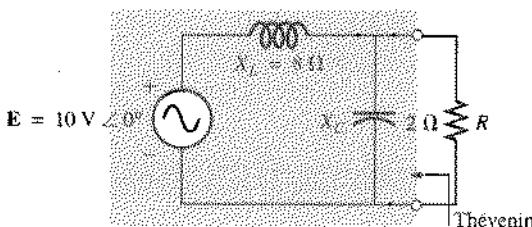


Fig. 18.23 Exemplo 18.7.

Solução:

Passos 1 e 2 (Fig. 18.24):

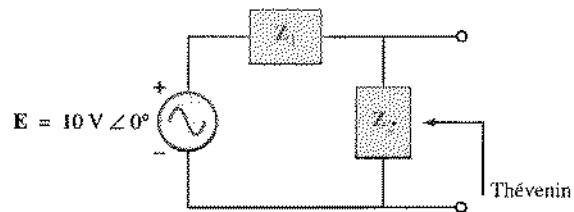


Fig. 18.24 Definição dos blocos de impedâncias para o circuito da Fig. 18.23.

$$Z_1 = jX_L = j8 \Omega \quad Z_2 = -jX_C = -j2 \Omega$$

Passo 3 (Fig. 18.25):

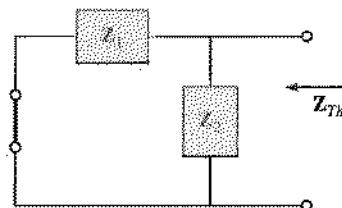


Fig. 18.25 Determinação da impedância de Thévenin para o circuito da Fig. 18.23.

$$\begin{aligned} Z_{Th} &= \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(j8 \Omega)(-j2 \Omega)}{j8 \Omega - j2 \Omega} = \frac{-j^2 16 \Omega}{j6} = \frac{16 \Omega}{j6} = 2,67 \Omega \angle -90^\circ \\ &= 2,67 \Omega \angle -90^\circ \end{aligned}$$

Passo 4 (Fig. 18.26):

$$\begin{aligned} E_{Th} &= \frac{Z_2 E}{Z_1 + Z_2} \quad (\text{regra do divisor de tensão}) \\ &= \frac{(-j2 \Omega)(10 \text{ V})}{j8 \Omega - j2 \Omega} = \frac{-j20 \text{ V}}{j6} = 3,33 \text{ V} \angle -180^\circ \end{aligned}$$

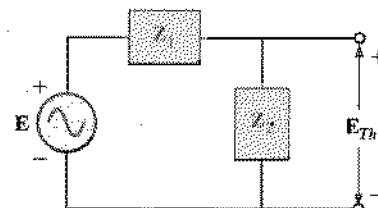


Fig. 18.26 Determinação da tensão de circuito aberto de Thévenin para o circuito da Fig. 18.23.

Passo 5: O circuito equivalente de Thévenin aparece na Fig. 18.27.

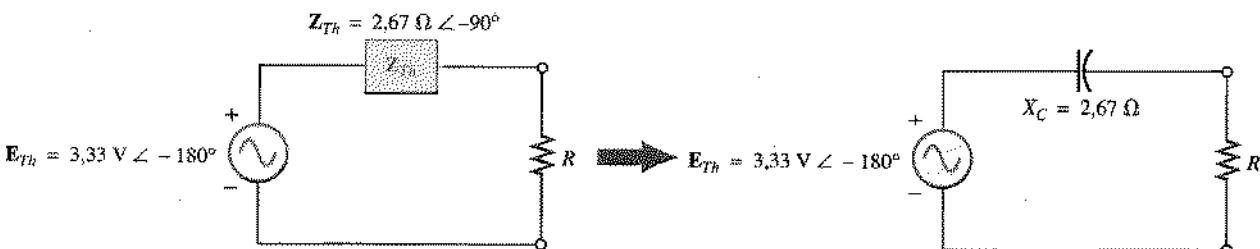


Fig. 18.27 Circuito equivalente de Thévenin para o circuito da Fig. 18.23.

EXEMPLO 18.8 Obtenha o circuito equivalente de Thévenin para a parte do circuito da Fig. 18.28 externa ao ramo aa' .

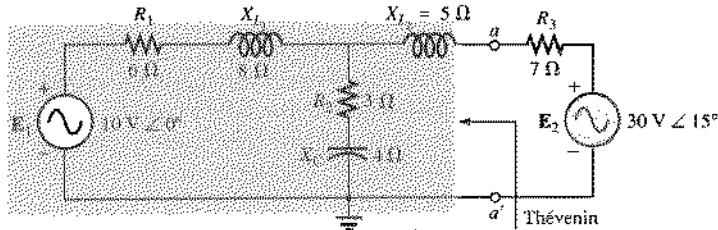


Fig. 18.28 Exemplo 18.8.

Solução:

Passos 1 e 2 (Fig. 18.29): Observe como diminui a complexidade com o uso de blocos de impedâncias.

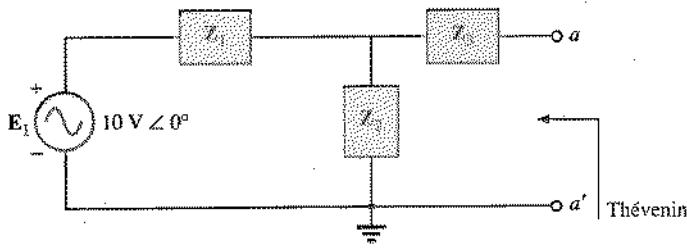


Fig. 18.29 Definição dos blocos de impedâncias para o circuito da Fig. 18.28.

$$Z_1 = R_1 + jX_{L_1} = 6 \Omega + j8 \Omega$$

$$Z_2 = R_2 - jX_C = 3 \Omega - j4 \Omega$$

$$Z_3 = +jX_{L_2} = j5 \Omega$$

Passo 3 (Fig. 18.30):

$$\begin{aligned} Z_{Th} &= Z_3 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ &= j5 \Omega + \frac{(10 \text{ V} \angle 0^\circ)(5 \Omega \angle -53,13^\circ)}{(6 \Omega + j8 \Omega) + (3 \Omega - j4 \Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= j5 + \frac{50 \angle 0^\circ}{9 + j4} = j5 + \frac{50 \angle 0^\circ}{9,85 \angle 23,96^\circ} \\ &= j5 + 5,08 \angle -23,96^\circ = j5 + 4,64 - j2,06 \\ Z_{Th} &= 4,64 \Omega + j2,94 \Omega = 5,49 \Omega \angle 32,36^\circ \end{aligned}$$

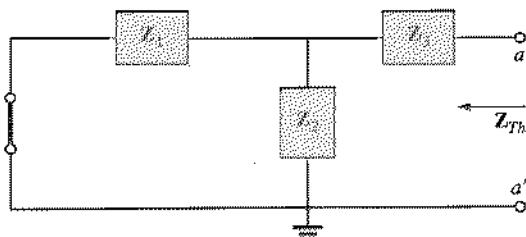


Fig. 18.30 Determinação da impedância de Thévenin para o circuito da Fig. 18.28.

Passo 4 (Fig. 18.31): Como aa' é um circuito aberto, $I_{Z_3} = 0$. Logo E_{Th} é igual à ddp entre os terminais de Z_2 :

$$\begin{aligned} E_{Th} &= \frac{Z_2 E}{Z_2 + Z_1} \quad (\text{regra dos divisores de tensão}) \\ &= \frac{(5 \Omega \angle -53,13^\circ)(10 \text{ V} \angle 0^\circ)}{9,85 \Omega \angle 23,96^\circ} \\ E_{Th} &= \frac{50 \text{ V} \angle -53,13^\circ}{9,85 \angle 23,96^\circ} = 5,08 \text{ V} \angle -77,09^\circ \end{aligned}$$

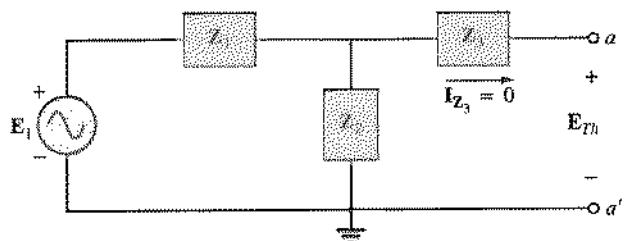


Fig. 18.31 Determinação da tensão de circuito aberto de Thévenin para o circuito da Fig. 18.28.

Passo 5: O circuito equivalente de Thévenin aparece na Fig. 18.32.

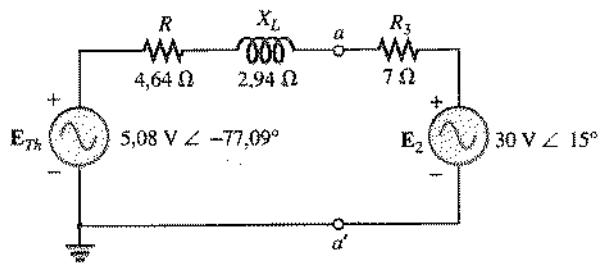
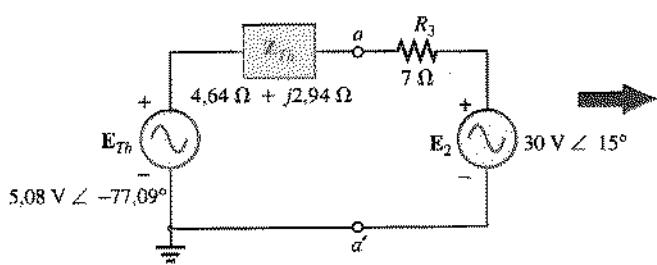


Fig. 18.32 Circuito equivalente de Thévenin para o circuito da Fig. 18.28.

O exemplo a seguir demonstra que o teorema da superposição, quando aplicado a circuitos eletrônicos, permite *analisar separadamente a resposta do circuito a sinais contínuos e alternados*. O fato de que a variável de controle nesta análise não está na parte do circuito ligada diretamente aos terminais de interesse permite analisar o circuito como se todas as fontes fossem independentes.

EXEMPLO 18.9 Determine o circuito equivalente de Thévenin para o circuito transistorizado externo ao resistor R_{CG} no circuito a seguir (Fig. 18.33) e em seguida determine V_{CG} .

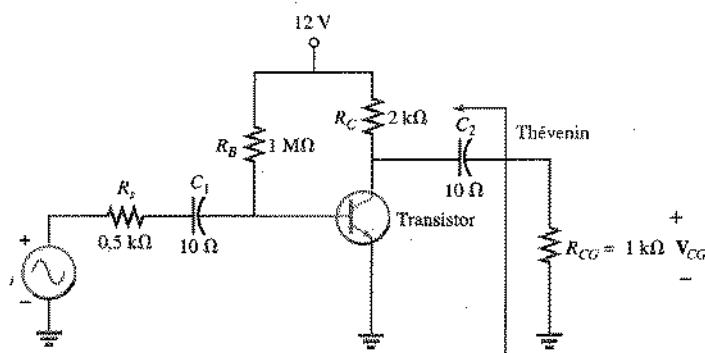


Fig. 18.33 Exemplo 18.9.

Solução: Vamos aplicar o teorema da superposição:

para corrente contínua:

Quando o capacitor de acoplamento C_2 é substituído pelo circuito aberto equivalente, a fonte de 12 V fica isolada do resistor R_{CG} e portanto $V_{CG} = 0$ V. Embora a tensão de saída do circuito seja zero, a aplicação da tensão de 12 V é essencial, por várias razões, para o funcionamento correto do transistor, uma das quais é determinar os parâmetros do circuito equivalente do transistor para sinais alternados.

para corrente alternada:

Neste caso substituímos o transistor por um circuito equivalente, estabelecido pela fonte dc mencionada acima, que se comporta aproximadamente como o transistor real. Teremos, no futuro, muito que dizer acerca de circuitos equivalentes e das operações necessárias para obter o circuito da Fig. 18.34, mas no momento vamos concentrar a atenção no método usado para obter o circuito equivalente de Thévenin. Note que, na Fig. 18.34, o circuito equivalente inclui um resistor de 2,3 kΩ e uma fonte de corrente controlada cuja intensidade é determinada pelo produto do fator 100 por uma corrente I_1 em outra parte do circuito.

Observe na Fig. 18.34 que os capacitores de acoplamento foram omitidos do circuito equivalente para sinais alternados. Em

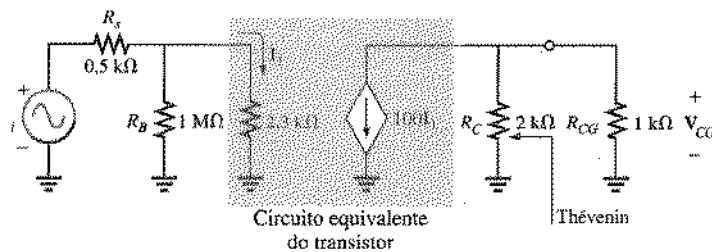


Fig. 18.34 Circuito ac equivalente para o amplificador transistorizado da Fig. 18.33.

geral, os capacitores de acoplamento são projetados para se comportar como circuitos abertos para sinais contínuos e como curto-circuitos para sinais alternados. A aproximação desses capacitores por curto-circuitos para sinais alternados é válida porque as outras impedâncias em série com os capacitores de acoplamento são tão grandes que o efeito desses capacitores pode ser ignorado. Além disso, os resistores R_B e R_C estão ligados à terra porque, de acordo com o teorema da superposição, a fonte de tensão contínua foi substituída por um curto-circuito.

Na análise que se segue, o efeito do resistor R_B será ignorado porque existe um resistor de valor muito menor, 2,3 kΩ, em paralelo com ele.

Z_{Th} :

Quando fazemos E_i igual a zero, obtemos o valor zero para a corrente I_1 e também para a corrente da fonte controlada. Em consequência, a fonte controlada se comporta como um circuito aberto (Fig. 18.35).

De acordo com a Fig. 18.35,

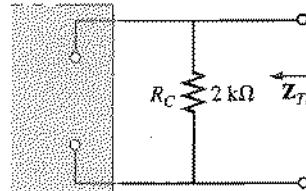


Fig. 18.35 Determinação da impedância de Thévenin para o circuito da Fig. 18.34.

$$Z_{Th} = 2 \text{ k}\Omega$$

E_{Th} :

A corrente I_1 , da Fig. 18.34 é dada por

$$I_1 = \frac{E_i}{R_s + 2,3 \text{ k}\Omega} = \frac{E_i}{0,5 \text{ k}\Omega + 2,3 \text{ k}\Omega} = \frac{E_i}{2,8 \text{ k}\Omega}$$

$$\text{e} \quad 100I_1 = (100) \left(\frac{E_i}{2,8 \text{ k}\Omega} \right) = 35,71 \times 10^{-3} E_i$$

De acordo com a Fig. 18.36, temos:

$$\begin{aligned} E_{Th} &= -(100I_1)R_C \\ &= -(35,71 \times 10^{-3} E_i)(2 \times 10^3 \Omega) \\ E_{Th} &= -71,42 E_i \end{aligned}$$

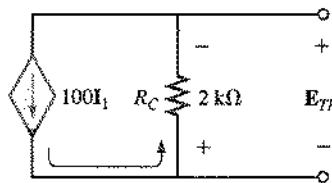


Fig. 18.36 Determinação da tensão de Thévenin para o circuito da Fig. 18.34.



Na Fig. 18.37 vemos o circuito equivalente de Thévenin com o resistor de carga original R_{CG} .

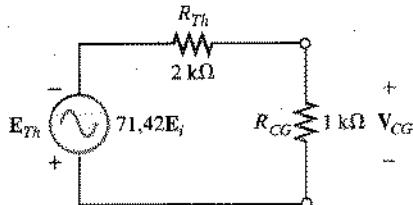


Fig. 18.37 Circuito equivalente de Thévenin para o circuito da Fig. 18.34.

A tensão de saída V_{CG} será

$$V_{CG} = \frac{-R_L E_{Th}}{R_L + Z_{Th}} = \frac{-(1\text{ k}\Omega)(71.42E_i)}{1\text{ k}\Omega + 2\text{ k}\Omega}$$

ou

$$V_{CG} = -23.81E_i$$

o que mostra que a tensão de saída é 23,81 vezes maior que a de entrada; o sinal negativo indica que a saída está defasada de 180° em relação à entrada.

Fontes Dependentes

Como mostra o Exemplo 18.9, o teorema de Thévenin pode ser aplicado diretamente a circuitos com fontes dependentes, contanto que a variável de controle não seja determinada pela parte do circuito à qual será aplicado o teorema. Quando a variável de controle é determinada pela parte do circuito à qual será aplicado o teorema, é preciso usar outra abordagem, como veremos no exemplo a seguir. Este método, na verdade, pode ser usado em qualquer circuito dc ou ac senoidal. Entretanto, no caso de fontes independentes, o método empregado no Cap. 9 e na primeira parte desta seção é mais simples e portanto mais rápido e menos sujeito a erros.

Esta nova abordagem do teorema de Thévenin pode ser mais bem compreendida se considerarmos o equivalente de Thévenin do circuito da Fig. 18.38(a). A tensão de circuito aberto entre os terminais do circuito equivalente de Thévenin (E_{ca}) é, como vemos na Fig. 18.38 (b), a tensão equivalente de Thévenin, ou seja,

$$E_{ca} = E_{Th} \quad (18.1)$$

Se curto-circuitarmos os terminais, como na Fig. 18.38(c), a corrente será:

$$I_{cc} = \frac{E_{Th}}{Z_{Th}} \quad (18.2)$$

logo,

$$Z_{Th} = \frac{E_{Th}}{I_{cc}}$$

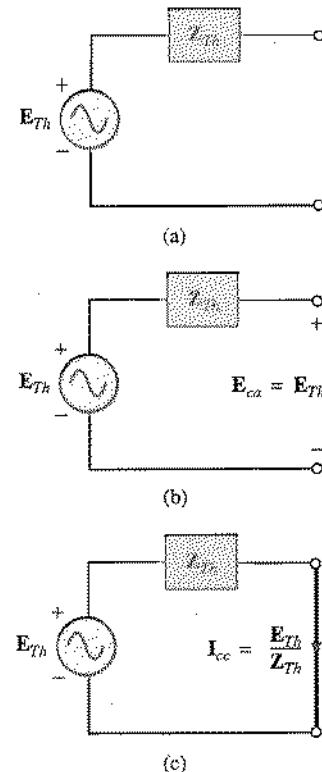


Fig. 18.38 Ilustração de uma abordagem alternativa para calcular a impedância de Thévenin.

e portanto,

$$Z_{Th} = \frac{E_{Th}}{I_{cc}} \quad (18.3)$$

As Eqs. (18.1) e (18.3) mostram que em qualquer circuito linear bilateral de corrente contínua ou alternada, com ou sem fonte dependente de qualquer espécie, o circuito equivalente de Thévenin de uma parte do circuito fica conhecido a partir do momento em que determinamos a tensão de circuito aberto entre os terminais dessa parte do circuito e a corrente de curto entre os mesmos terminais. A aplicação do método ficará clara após alguns exemplos.

Existe um terceiro método para determinar o circuito equivalente de Thévenin que também é útil do ponto de vista prático. A tensão de Thévenin é obtida como nos dois métodos anteriores. A impedância de Thévenin, porém, é calculada ligando uma fonte de tensão aos terminais de interesse e determinando a corrente da fonte, como na Fig. 18.39. Quando utilizamos este método, fazemos a tensão da fonte do circuito original igual a zero. A impedância de Thévenin é dada pela expressão:

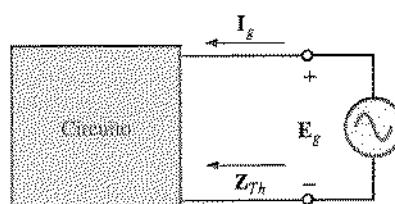


Fig. 18.39 Determinação de Z_{Th} com o uso do método $Z_{Th} = E_g / I_g$.



(18.4)

Note que nos três métodos $E_{Th} = E_{ca}$; a diferença está na forma de determinar a impedância de Thévenin Z_{Th} .

EXEMPLO 18.10 Determine, usando as três técnicas descritas nesta seção, o circuito equivalente de Thévenin do circuito da Fig. 18.40.

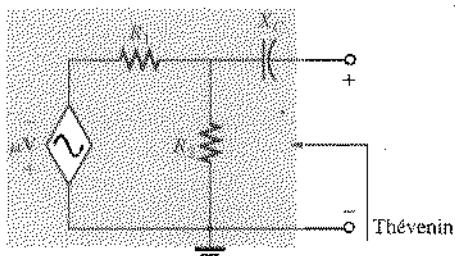


Fig. 18.40 Exemplo 18.10.

Solução: Como nos três métodos a tensão de Thévenin é obtida da mesma forma, vamos determiná-la em primeiro lugar. De acordo com a Fig. 18.40, temos:

$$V_{R_2} = E_{Th} = E_{ca} = \frac{R_2(\mu V)}{R_1 + R_2} = -\frac{\mu R_2 V}{R_1 + R_2}$$

Vamos utilizar agora os três métodos para determinar a impedância de Thévenin, na ordem em que foram apresentados nesta seção.

Método 1 (Fig. 18.41):

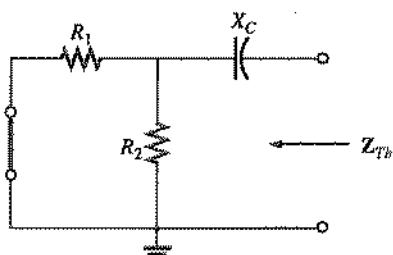


Fig. 18.41 Determinação da impedância de Thévenin para o circuito da Fig. 18.40.

$$Z_{Th} = R_1 \parallel R_2 - j X_C$$

Método 2 (Fig. 18.42): Convertendo a fonte de tensão em fonte de corrente (Fig. 18.43), temos (pela regra dos divisores de corrente):

$$\begin{aligned} I_{cc} &= \frac{-(R_1 \parallel R_2) \frac{\mu V}{R_1}}{(R_1 \parallel R_2) - j X_C} = \frac{-R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{\mu V}{R_1} \right) \\ &= \frac{-\mu R_2 V}{(R_1 \parallel R_2) - j X_C} \end{aligned}$$

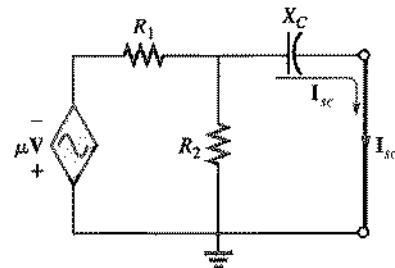


Fig. 18.42 Determinação da corrente de curto-círcuito para o circuito da Fig. 18.40.

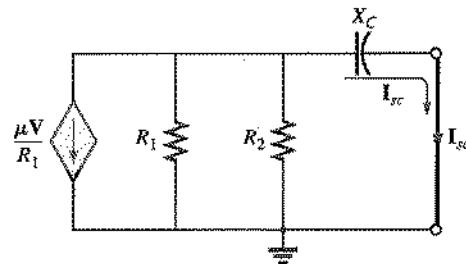


Fig. 18.43 Conversão da fonte de tensão da Fig. 18.42 em uma fonte de corrente.

Logo,

$$\begin{aligned} Z_{Th} &= \frac{E_{ca}}{I_{cc}} = \frac{\frac{-\mu R_2 V}{R_1 + R_2}}{\frac{-\mu R_2 V}{(R_1 \parallel R_2) - j X_C}} = \frac{1}{\frac{1}{(R_1 \parallel R_2) - j X_C}} \\ &= R_1 \parallel R_2 - j X_C \end{aligned}$$

Método 3 (Fig. 18.44):

$$I_g = \frac{E_g}{(R_1 \parallel R_2) - j X_C}$$

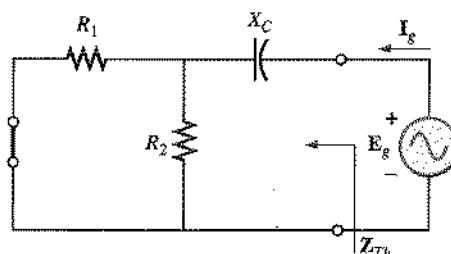


Fig. 18.44 Determinação da impedância de Thévenin para o circuito da Fig. 18.40 utilizando $Z_{Th} = E_g / I_g$.

e assim

$$Z_{Th} = \frac{E_g}{I_g} = R_1 \parallel R_2 - j X_C$$

A impedância de Thévenin é a mesma nos três casos. O circuito equivalente de Thévenin aparece na Fig. 18.45.

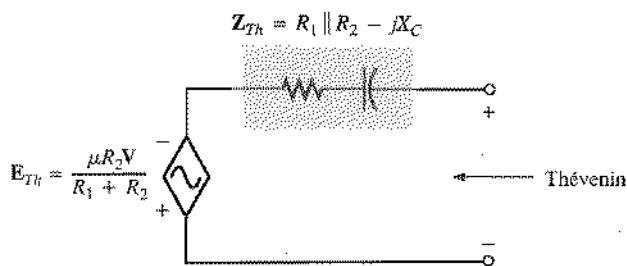


Fig. 18.45 Circuito equivalente de Thévenin para o circuito da Fig. 18.40.

EXEMPLO 18.11 Repita o Exemplo 18.10 para o circuito da Fig. 18.46.

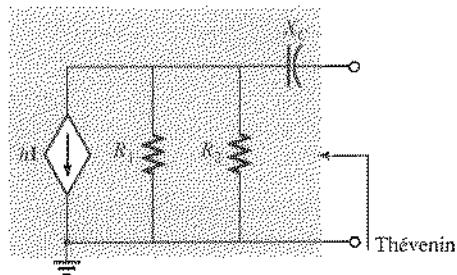


Fig. 18.46 Exemplo 18.11.

Solução: Observando a Fig. 18.46, vemos que E_{Th} é dada por

$$E_{Th} = E_{ca} = -hI(R_1 \parallel R_2) = \frac{-hR_1 R_2 I}{R_1 + R_2}$$

Método 1 (Fig. 18.47):

$$Z_{Th} = R_1 \parallel R_2 - jX_C$$

Observe a semelhança entre esta solução e a obtida no exemplo anterior.

Método 2 (Fig. 18.48):

$$I_{cc} = \frac{-(R_1 \parallel R_2)hI}{(R_1 \parallel R_2) - jX_C}$$

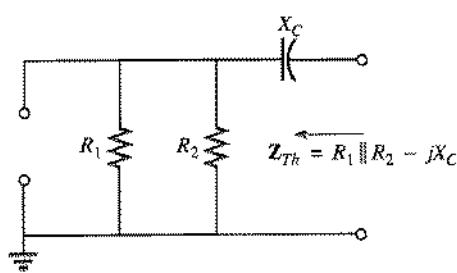


Fig. 18.47 Determinação da impedância de Thévenin para o circuito da Fig. 18.46.

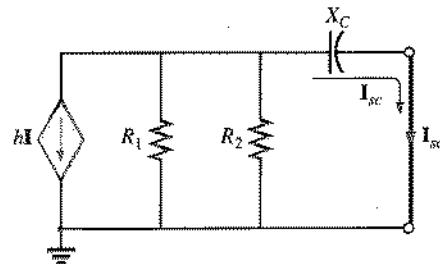


Fig. 18.48 Determinação da corrente de curto-circuito para o circuito da Fig. 18.46.

logo,

$$Z_{Th} = \frac{E_{ca}}{I_{cc}} = \frac{-hI(R_1 \parallel R_2)}{-(R_1 \parallel R_2)hI} = R_1 \parallel R_2 - jX_C$$

Método 3 (Fig. 18.49):

$$I_g = \frac{E_g}{(R_1 \parallel R_2) - jX_C}$$

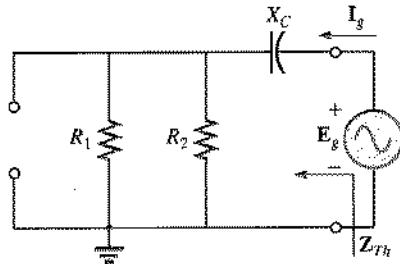


Fig. 18.49 Determinação da impedância de Thévenin usando $Z_{Th} = E/I_g$

logo,

$$Z_{Th} = \frac{E_g}{I_g} = R_1 \parallel R_2 - jX_C$$

Como o circuito do exemplo a seguir contém uma fonte dependente, o primeiro dos três métodos não deve ser usado, pois conduz a resultados errôneos. Mesmo assim, vamos empregar os três métodos, para podermos comparar os resultados.

EXEMPLO 18.12 Determine o circuito equivalente de Thévenin do circuito da Fig. 18.50 (o mesmo do Exemplo 18.6), entre

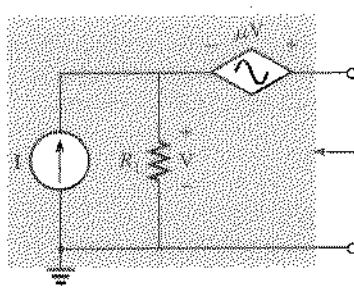


Fig. 18.50 Exemplo 18.12.

os terminais indicados, utilizando os três métodos descritos nessa seção. Compare os resultados.

Solução: Vamos primeiramente, utilizando a lei de Kirchhoff para tensões, escrever E_{Th} (que é a mesma para os três métodos) na forma

$$E_{Th} = V + \mu V = (1 + \mu)V$$

Entretanto,

$$V = IR_1$$

de modo que

$$E_{Th} = (1 + \mu)IR_1$$

Z_{Th} :

Método 1 (Fig. 18.51): como $I = 0$, V e $\mu V = 0$ e portanto

$$Z_{Th} = R_1 \quad (\text{incorreto})$$

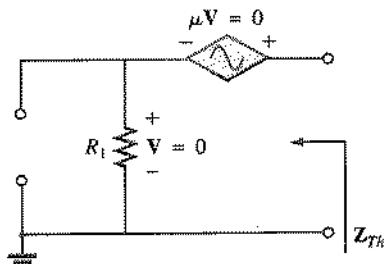


Fig. 18.51 Determinação incorreta de Z_{Th}

Método 2 (Fig. 18.52): a aplicação da lei de Kirchhoff para tensões à malha indicada na figura nos dá:

$$V + \mu V = 0$$

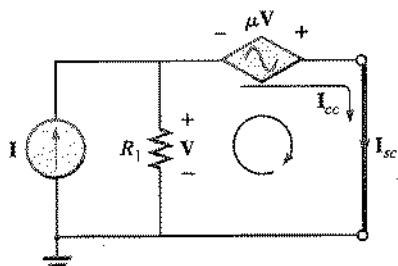


Fig. 18.52 Determinação de I_{cc} para o circuito da Fig. 18.50.

logo

$$V(1 + \mu) = 0$$

Como μ é uma constante positiva, a equação acima pode ser satisfeita somente para $V = 0$. A substituição deste resultado na Fig. 18.52 resulta na configuração da Fig. 18.53 e portanto

$$I_{cc} = I$$

e assim

$$Z_{Th} = \frac{E_{cc}}{I_{cc}} = \frac{(1 + \mu)IR_1}{I} = (1 + \mu)R_1 \quad (\text{correto})$$

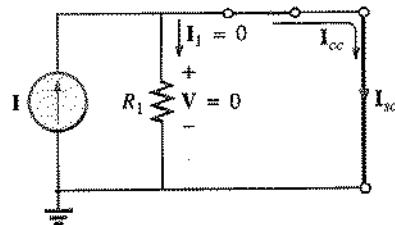


Fig. 18.53 Substituição de $V = 0$ no circuito da Fig. 18.52.

Método 3 (Fig. 18.54):

$$E_g = V + \mu V = (1 + \mu)V$$

logo

$$V = \frac{E_g}{1 + \mu}$$

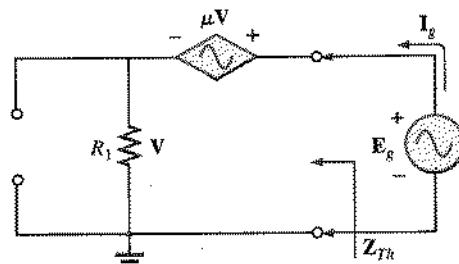


Fig. 18.54 Determinação de Z_{Th} usando $Z_{Th} = E_g/I_g$

e

$$I_g = \frac{V}{R_1} = \frac{E_g}{(1 + \mu)R_1}$$

e assim

$$Z_{Th} = \frac{E_g}{I_g} = (1 + \mu)R_1 \quad (\text{correto})$$

O circuito equivalente de Thévenin aparece na Fig. 18.55 e

$$I_C = \frac{(1 + \mu)R_1 I}{R_L + (1 + \mu)R_1}$$

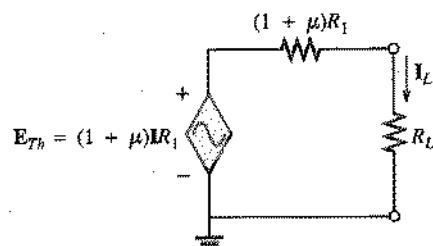


Fig. 18.55 Circuito equivalente de Thévenin para o circuito da Fig. 18.50.

o que concorda com o resultado do Exemplo 18.6.

O circuito da Fig. 18.56 é o circuito equivalente para transistores mais usado nos dias de hoje (embora a maioria dos livros de eletrônica utilize círculos em vez de losangos para representar as fontes). Observe que existem duas fontes dependentes, uma de tensão e outra de corrente.

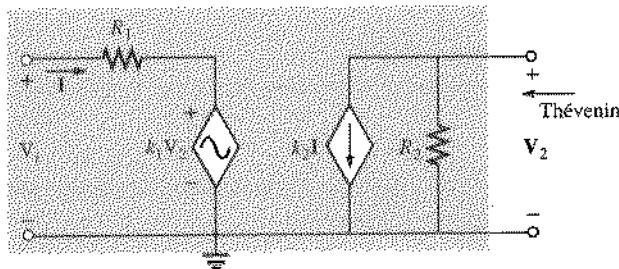


Fig. 18.56 Exemplo 18.13: Circuito equivalente de um transistor.

EXEMPLO 18.13 Obtenha o circuito equivalente de Thévenin para os terminais indicados do circuito da Fig. 18.56.

Solução: Vamos aplicar o segundo dos métodos apresentados nesta seção.

E_{Th} :

$$E_{ca} = V_2$$

$$I = \frac{V_i - k_1 V_2}{R_1} = \frac{V_i - k_1 E_{ca}}{R_1}$$

e assim $E_{ca} = -k_2 I R_2 = -k_2 R_2 \left(\frac{V_i - k_1 E_{ca}}{R_1} \right)$

$$= \frac{-k_2 R_2 V_i}{R_1} + \frac{k_1 k_2 R_2 E_{ca}}{R_1}$$

ou $E_{ca} \left(1 - \frac{k_1 k_2 R_2}{R_1} \right) = \frac{-k_2 R_2 V_i}{R_1}$

logo $E_{ca} \left(\frac{R_1 - k_1 k_2 R_2}{R_1} \right) = \frac{-k_2 R_2 V_i}{R_1}$

e portanto $\boxed{\frac{E_{ca}}{R_1} = \frac{-k_2 R_2 V_i}{R_1 - k_1 k_2 R_2}} = E_{Th}$ (18.5)

I_{cc} :

Considerando o circuito da Fig. 18.57, onde

$$V_2 = 0 \quad k_1 V_2 = 0 \quad I = \frac{V_i}{R_1}$$

e $I_{cc} = -k_2 I = \frac{-k_2 V_i}{R_1}$

temos $Z_{Th} = \frac{E_{ca}}{I_{cc}} = \frac{\frac{-k_2 R_2 V_i}{R_1 - k_1 k_2 R_2}}{\frac{-k_2 V_i}{R_1}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 - k_1 k_2 R_2}$

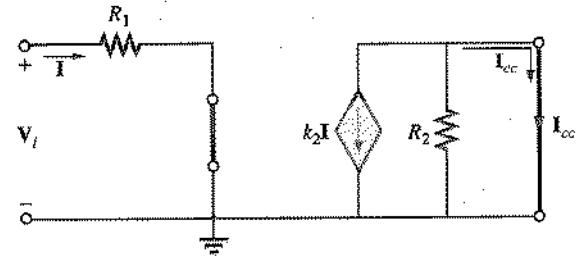


Fig. 18.57 Determinação de I_{cc} para o circuito da Fig. 18.56.

e assim

$$\boxed{Z_{Th} = \frac{R_1}{\frac{1}{k_1 k_2 R_2} + \frac{1}{R_1}}} \quad (18.6)$$

A aproximação $k_1 \approx 0$ é utilizada com freqüência. Nesse caso, a tensão e a impedância de Thévenin passam a ser

$$\boxed{E_{Th} = \frac{-k_2 R_2 V_i}{R_1}} \quad k_1 = 0 \quad (18.7)$$

$$\boxed{Z_{Th} = R_2} \quad k_1 = 0 \quad (18.8)$$

Podemos também aplicar a equação $Z_{Th} = E_g / I_g$ ao circuito da Fig. 18.58, onde

$$I = \frac{-k_2 V_i}{R_1}$$

mas

$$V_2 = E_g$$

logo

$$I = \frac{-k_2 E_g}{R_1}$$

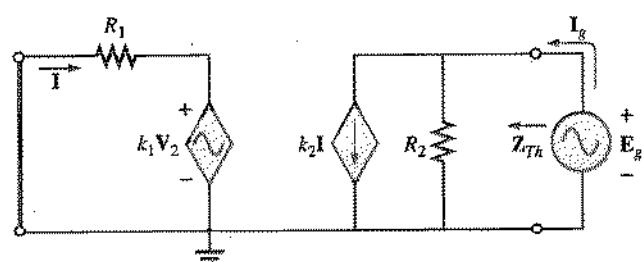


Fig. 18.58 Determinação de Z_{Th} usando $Z_{Th} = E_g / I_g$.

Aplicando a lei de Kirchhoff para correntes, temos

$$I_g = k_2 I + \frac{E_g}{R_2} = k_2 \left(-\frac{k_2 E_g}{R_1} \right) + \frac{E_g}{R_2}$$

$$= E_g \left(\frac{1}{R_2} - \frac{k_1 k_2}{R_1} \right)$$

e portanto $\boxed{\frac{I_g}{E_g} = \frac{R_1 - k_1 k_2 R_2}{R_1 R_2}}$

ou $\boxed{Z_{Th} = \frac{E_g}{I_g} = \frac{R_1 R_2}{R_1 - k_1 k_2 R_2}}$

o que concorda com o resultado anterior.



Os dois últimos métodos apresentados nesta seção foram aplicados somente a circuitos nos quais a intensidade das fontes controladas dependia de uma variável do circuito para o qual queríamos obter o equivalente de Thévenin. Deve ficar claro que estes dois métodos podem também ser aplicados a qualquer circuito dc ou ac com fontes senoidais que contenha apenas fontes independentes ou fontes dependentes do outro tipo.

18.4 TEOREMA DE NORTON

Os três métodos apresentados para determinar o circuito equivalente de Thévenin serão agora usados, em forma modificada, para determinar o circuito equivalente de Norton. Como as impedâncias de Thévenin e de Norton são iguais para o mesmo circuito, certas partes da discussão serão muito parecidas com as da seção anterior. Vamos considerar primeiramente fontes independentes e a abordagem proposta no Cap. 9, passando depois às fontes dependentes e às novas técnicas discutidas na seção anterior.

Como vimos no Cap. 9, o teorema de Norton permite substituir qualquer circuito ac linear bilateral de dois terminais por um circuito equivalente constituído por uma fonte de corrente e uma impedância em paralelo, como na Fig. 18.59.

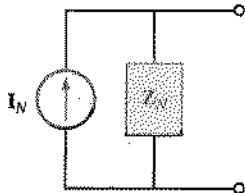


Fig. 18.59 Circuito equivalente de Norton para circuitos ac.

Do mesmo modo que o circuito equivalente de Thévenin, o circuito equivalente de Norton é válido apenas para uma dada frequência, pois, como sabemos, as reatâncias dependem da frequência.

Fontes Independentes

Em relação ao Cap. 9, o método descrito a seguir para obter o circuito equivalente de Norton de um circuito ac senoidal sofre apenas uma modificação: a substituição do termo resistência por impedância.

- 1. Remova a parte do circuito para a qual deseja encontrar o circuito equivalente de Norton.*
- 2. Assinale claramente os dois terminais do circuito resultante.*
- 3. Calcule Z_N anulando primeiramente todas as fontes de tensão e de corrente (substituindo-as por curto-circuitos e circuitos abertos, respectivamente) e obtendo em seguida a impedância resultante entre os dois terminais assinalados.*
- 4. Obtenha I_N recolocando as fontes de tensão e de corrente no circuito e calculando a corrente de curto-circuito entre os terminais assinalados.*
- 5. Desenhe o circuito equivalente de Norton com a parte do circuito previamente reinovida colocada de novo no lugar.*

Podemos obter os circuitos equivalentes de Norton e de Thévenin um a partir do outro utilizando a conversão ilustrada na Fig.

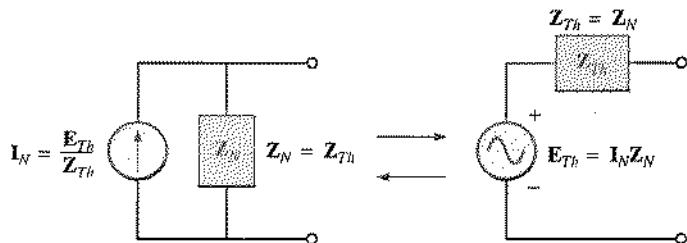


Fig. 18.60 Conversão entre os circuitos equivalentes de Thévenin e de Norton.

18.60. Este método pode ser aplicado a qualquer circuito equivalente de Norton ou de Thévenin.

EXEMPLO 18.14 Obtenha o circuito equivalente de Norton para a parte externa ao resistor de $6\ \Omega$ no circuito da Fig. 18.61.

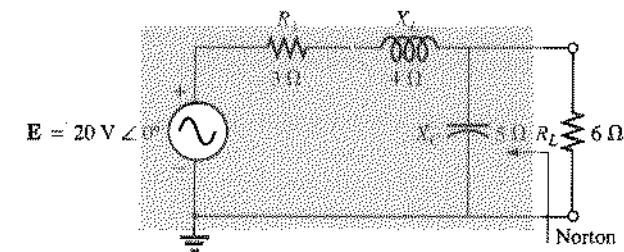


Fig. 18.61 Exemplo 18.14.

Solução:

Passos 1 e 2 (Fig. 18.62):

$$Z_1 = R_1 + jX_L = 3\ \Omega + j4\ \Omega = 5\ \Omega \angle 53,13^\circ$$

$$Z_2 = -jX_C = -j5\ \Omega$$

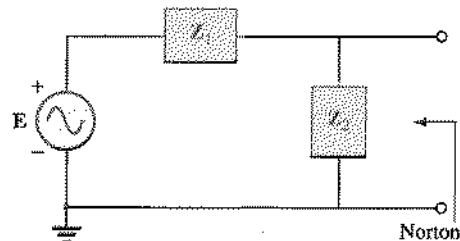


Fig. 18.62 Definição dos blocos de impedâncias para o circuito da Fig. 18.61.

Passo 3 (Fig. 18.63):

$$\begin{aligned} Z_N &= \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(5\ \Omega \angle 53,13^\circ)(5\ \Omega \angle -90^\circ)}{3\ \Omega + j4\ \Omega - j5\ \Omega} \\ &= \frac{25\ \Omega \angle -36,87^\circ}{3 - j1} \\ &= \frac{25\ \Omega \angle -36,87^\circ}{3,16 \angle -18,43^\circ} = 7,91\ \Omega \angle -18,44^\circ \\ &= 7,50\ \Omega - j2,50\ \Omega \end{aligned}$$

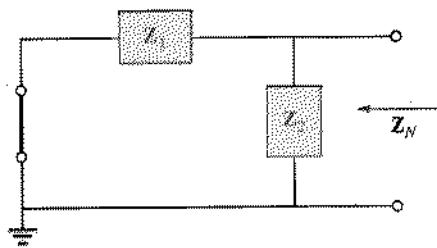


Fig. 18.63 Determinação da impedância de Norton para o circuito da Fig. 18.61.

Passo 4 (Fig. 18.64):

$$I_N = I_1 = \frac{E}{Z_1} = \frac{20 \text{ V} \angle 0^\circ}{5 \Omega \angle 53,13^\circ} = 4 \text{ A} \angle -53,13^\circ$$

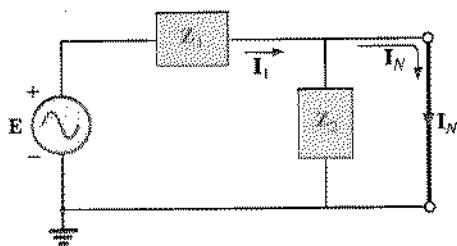


Fig. 18.64 Determinação de I_N no circuito da Fig. 18.61.

Passo 5: O circuito equivalente de Norton aparece na Fig. 18.65.

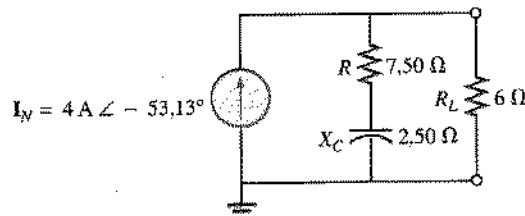
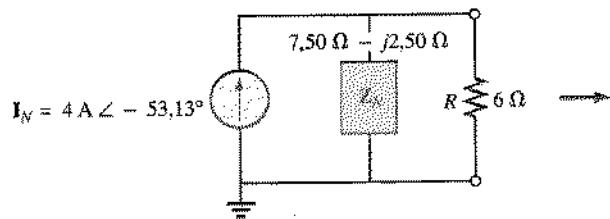


Fig. 18.65 Circuito equivalente de Norton para o circuito da Fig. 18.61.

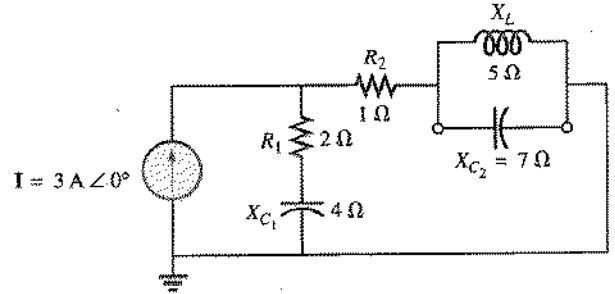


Fig. 18.66 Exemplo 18.15.

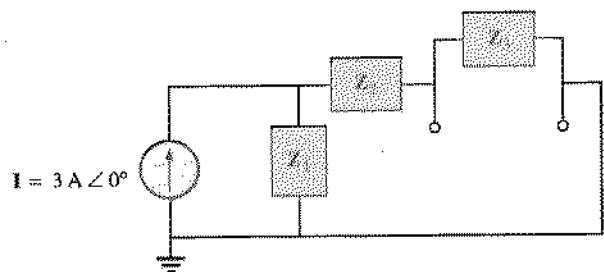


Fig. 18.67 Definição dos blocos de impedância para o circuito da Fig. 18.66.

Passo 3 (Fig. 18.68):

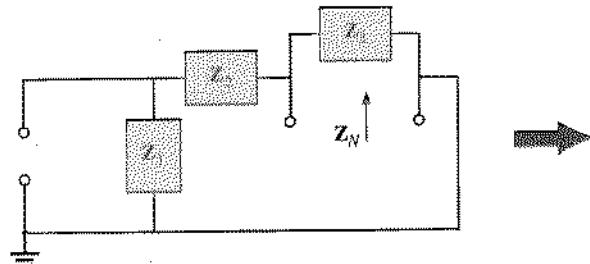
$$Z_N = \frac{Z_3(Z_1 + Z_2)}{Z_3 + (Z_1 + Z_2)}$$

$$Z_1 + Z_2 = 2 \Omega - j 4 \Omega + 1 \Omega = 3 \Omega - j 4 \Omega = 5 \Omega \angle -53,13^\circ$$

$$Z_N = \frac{(5 \Omega \angle 90^\circ)(5 \Omega \angle -53,13^\circ)}{j 5 \Omega + 3 \Omega - j 4 \Omega} = \frac{25 \Omega \angle 36,87^\circ}{3 + j 1}$$

$$= \frac{25 \Omega \angle 36,87^\circ}{3,16 \angle +18,43^\circ}$$

$$Z_N = 7,91 \Omega \angle 18,44^\circ = 7,50 \Omega + j 2,50 \Omega$$



EXEMPLO 18.15 Obtenha o circuito equivalente de Norton para o circuito externo à reatância capacitiva de 7Ω da Fig. 18.66.

Solução:

Passos 1 e 2 (Fig. 18.67):

$$Z_1 = R_1 - j X_{C1} = 2 \Omega - j 4 \Omega$$

$$Z_2 = R_2 = 1 \Omega$$

$$Z_3 = +j X_L = j 5 \Omega$$

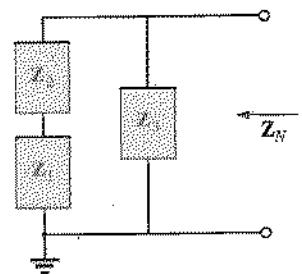


Fig. 18.68 Determinação da impedância de Norton para o circuito da Fig. 18.66.



Calculadora Efetuando os cálculos acima em uma calculadora TI85:

$$\begin{aligned} & ((0,5) * ((2, -4) + (1,0))) / ((0,5) + ((2, -4) + (1,0))) : \\ & (7,500 \angle 0,2,500 \angle 0) \\ \text{Ans} & \gg \text{Pol} \\ & (7,906 \angle 0,18,436 \angle 0) \end{aligned}$$

Passo 4 (Fig. 18.69):

$$\begin{aligned} I_N &= I_1 = \frac{Z_1 I}{Z_1 + Z_2} \quad (\text{regra do divisor de corrente}) \\ &= \frac{(2 \Omega - j4 \Omega)(3 A)}{3 \Omega - j4 \Omega} = \frac{6 A - j12 A}{5 \angle -53,13^\circ} \\ &= \frac{13,4 A \angle -63,43^\circ}{5 \angle -53,13^\circ} \end{aligned}$$

$$I_N = 2,68 A \angle -10,3^\circ$$

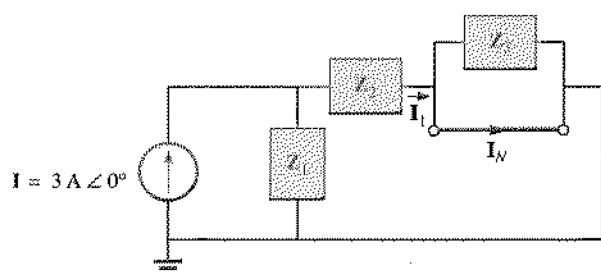


Fig. 18.69 Determinação de I_N no circuito da Fig. 18.66.

Passo 5: O circuito equivalente de Norton aparece na Fig. 18.70.

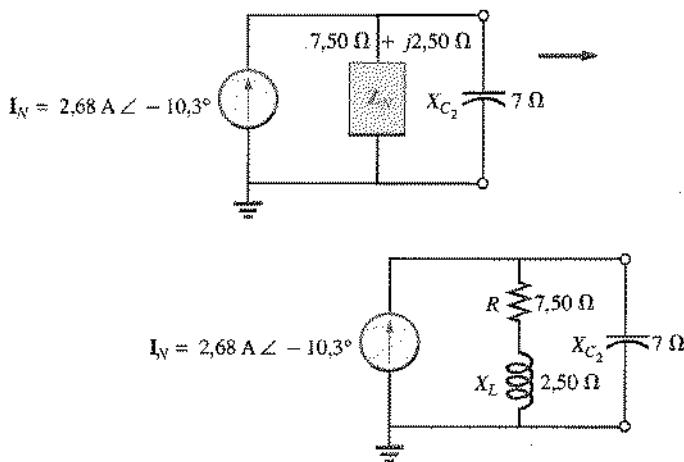


Fig. 18.70 Circuito equivalente de Norton para o circuito da Fig. 18.66.

EXEMPLO 18.16 Obtenha o circuito equivalente de Thévenin para o circuito externo à reatância capacitiva de 7Ω da Fig. 18.66.

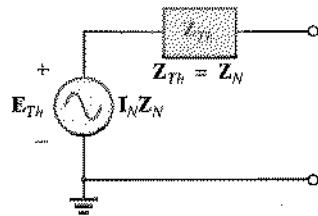


Fig. 18.71 Determinação do circuito equivalente de Thévenin para o circuito equivalente de Norton da Fig. 18.70.

Solução: Utilizando a conversão entre fontes (Fig. 18.71), temos:

$$Z_{Th} = Z_N = 7,50 \Omega + j2,50 \Omega$$

$$\begin{aligned} E_{Th} &= I_N Z_N = (2,68 A \angle -10,3^\circ)(7,91 \Omega \angle 18,44^\circ) \\ &= 21,2 V \angle 8,14^\circ \end{aligned}$$

O circuito equivalente de Thévenin aparece na Fig. 18.72.

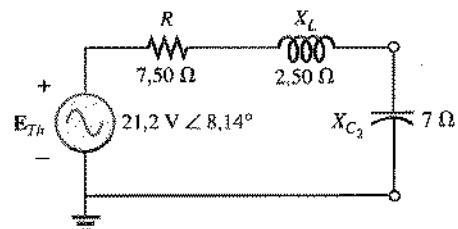


Fig. 18.72 Circuito equivalente de Thévenin para o circuito da Fig. 18.66.

Fontes Dependentes

Como no caso do teorema de Thévenin, *fontes dependentes nas quais a variável de controle não é determinada pelo circuito para o qual desejamos obter o equivalente de Norton* não produzem alterações no método que acabamos de descrever.

No caso de fontes dependentes do outro tipo, devemos aplicar um dos métodos a seguir. Estes dois métodos também podem ser aplicados a circuitos com qualquer combinação de fontes independentes e dependentes que não sejam controladas pela parte do circuito que está sendo investigada.

O circuito equivalente de Norton aparece na Fig. 18.73(a). A partir da Fig. 18.73(b), obtemos

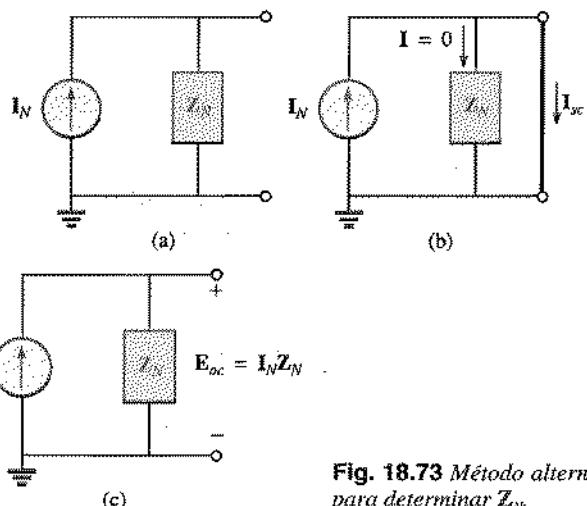
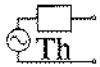


Fig. 18.73 Método alternativo para determinar Z_N .



$$I_{ce} = I_N$$

(18.9)

e a partir da Fig. 18.73(c), encontramos:

$$E_{ca} = I_N Z_N$$

ou

$$Z_N = \frac{E_{ca}}{I_N}$$

e assim

$$Z_N = \frac{E_{ca}}{I_{ce}}$$

(18.10)

Também podemos determinar a impedância de Norton aplicando uma fonte de tensão E_g aos terminais de interesse e calculando a corrente I_g resultante, como na Fig. 18.74. Todas as fontes independentes e as dependentes que não forem controladas por uma variável associada à parte do circuito que estamos analisando devem ser anuladas; assim,

$$Z_N = \frac{E_g}{I_g}$$

(18.11)

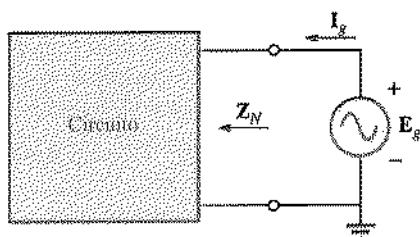


Fig. 18.74 Determinação da impedância de Norton usando $Z_N = E_g / I_g$.

Neste último método, a corrente de Norton também é dada pela corrente de curto-círcuito.

EXEMPLO 18.17 Utilizando os dois métodos descritos para fontes dependentes, encontre o circuito equivalente de Norton para o circuito da Fig. 18.75.

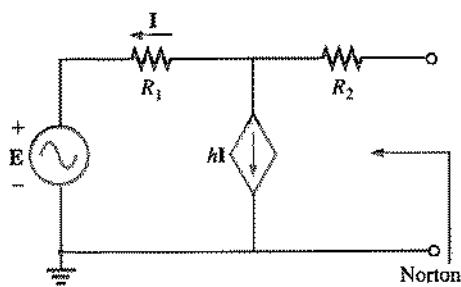


Fig. 18.75 Exemplo 18.17.

Solução:

I_N :

O método para obter I_N é o mesmo nos dois casos. De acordo com a lei de Kirchhoff para correntes, temos (Fig. 18.76):

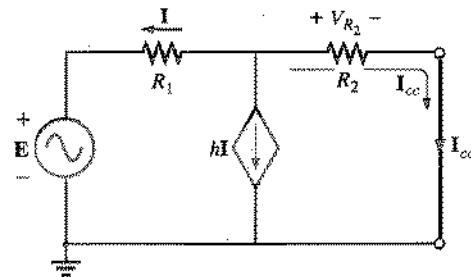


Fig. 18.76 Determinação de I_{ce} para o circuito da Fig. 18.75.

$$0 = I + hI + I_{ce}$$

ou

$$I_{ce} = -(1 + h)I$$

Aplicando a lei de Kirchhoff para tensões, temos:

$$E + IR_1 - I_{ce}R_2 = 0$$

logo

$$IR_1 = I_{ce}R_2 - E$$

e assim

$$I = \frac{I_{ce}R_2 - E}{R_1}$$

$$\text{de modo que } I_{ce} = -(1 + h)I = -(1 + h)\left(\frac{I_{ce}R_2 - E}{R_1}\right)$$

e, finalmente,

$$R_1 I_{ce} = -(1 + h)I_{ce}R_2 + (1 + h)E$$

$$I_{ce}[R_1 + (1 + h)R_2] = (1 + h)E$$

$$I_{ce} = \frac{(1 + h)E}{R_1 + (1 + h)R_2} = I_N$$

Z_N :

Método 1: E_{ca} é obtida utilizando o circuito da Fig. 18.77. De acordo com a lei de Kirchhoff para correntes, temos:

$$0 = I + hI \quad \text{ou} \quad I(h + 1) = 0$$

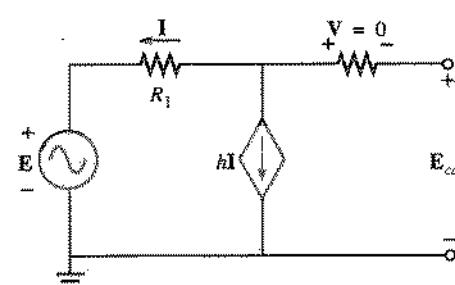


Fig. 18.77 Determinação de E_{ca} para o circuito da Fig. 18.75.

Como h é uma constante positiva, I deve ser igual a zero para satisfazer a equação acima. Assim,

$$I = 0 \quad \text{e} \quad hI = 0$$

logo

$$\mathbf{E}_{ca} = \mathbf{E}$$

e portanto $Z_N = \frac{\mathbf{E}_{ca}}{\mathbf{I}_{ca}} = \frac{\mathbf{E}}{(1+h)\mathbf{E}} = \frac{R_1 + (1+h)R_2}{(1+h)}$

Método 2: Observe a Fig. 18.78. De acordo com a lei de Kirchhoff para correntes,

$$\mathbf{I}_g = \mathbf{I} + h\mathbf{I} = (1+h)\mathbf{I}$$

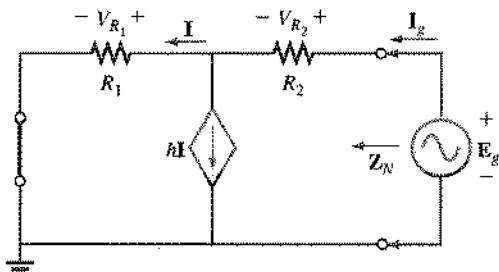


Fig. 18.78 Determinação da impedância de Norton usando $Z_N = \mathbf{E}/\mathbf{I}_g$

De acordo com a lei de Kirchhoff para tensões:

$$\mathbf{E}_g - \mathbf{I}_g R_2 - \mathbf{I} R_1 = 0$$

ou seja, $\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}_g - \mathbf{I}_g R_2}{R_1}$

Substituindo, obtemos

$$\mathbf{I}_g = (1+h)\mathbf{I} = (1+h)\left(\frac{\mathbf{E}_g - \mathbf{I}_g R_2}{R_1}\right)$$

e portanto $\mathbf{I}_g R_1 = (1+h)\mathbf{E}_g - (1+h)\mathbf{I}_g R_2$

o que nos leva a $\mathbf{E}_g(1+h) = \mathbf{I}_g[R_1 + (1+h)R_2]$

logo, finalmente $Z_N = \frac{\mathbf{E}_g}{\mathbf{I}_g} = \frac{R_1 + (1+h)R_2}{1+h}$

o que coincide com o resultado anterior.

EXEMPLO 18.18 Obtenha o circuito equivalente de Norton para o circuito da Fig. 18.56.

Solução: Utilizando conversão de fontes:

$$\mathbf{I}_N = \frac{\mathbf{E}_{Th}}{Z_{Th}} = \frac{\frac{-k_2 R_2 \mathbf{V}_i}{R_1 - k_1 k_2 R_2}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 - k_1 k_2 R_2}}$$

portanto

$$\boxed{\mathbf{I}_N = \frac{-k_2 \mathbf{V}_i}{R_1}}$$

que coincide com a expressão de \mathbf{I}_{ca} determinada no Exemplo 18.13, e portanto

$$\boxed{Z_N = Z_{Th} = \frac{R_2}{1 - k_1 k_2 R_2 / R_1}} \quad (18.13)$$

Para $k_1 \approx 0$, temos

$$\boxed{\mathbf{I}_N = \frac{-k_2 \mathbf{V}_i}{R_1}} \quad k_1 = 0 \quad (18.14)$$

$$\boxed{Z_N = R_2} \quad k_1 = 0 \quad (18.15)$$

18.5 TEOREMA DA TRANSFERÊNCIA MÁXIMA DE POTÊNCIA

O enunciado deste teorema, quando aplicado a circuitos ac, é o seguinte:

A potência fornecida por uma fonte a uma carga é máxima quando a impedância da carga é o complexo conjugado da impedância de Thévenin entre os terminais da fonte.

No caso da Fig. 18.79, por exemplo, para que a potência fornecida à carga seja máxima devemos ter:

$$\boxed{Z_C = Z_{Th} \quad \text{e} \quad \theta_C = -\theta_{Th}}$$

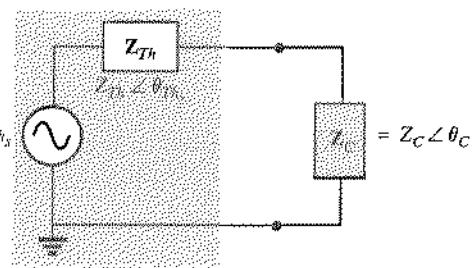


Fig. 18.79 Ilustração das condições para transferência máxima de potência a uma carga.

ou, em forma retangular,

$$\boxed{R_L = R_{Th} \quad \text{e} \quad \pm j X_{carga} = \mp j X_{Th}} \quad (18.17)$$

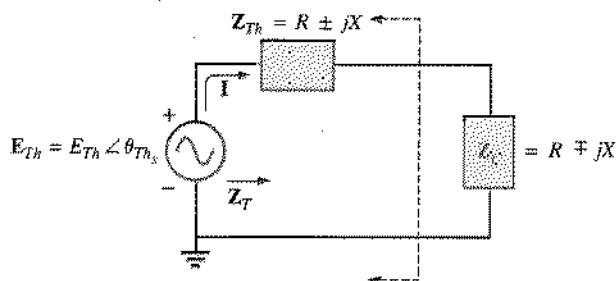
As condições que acabamos de mencionar tornam a impedância total do circuito puramente resistiva, como ilustra a Fig. 18.80:

$$Z_T = (R \pm j X) + (R \mp j X)$$

e assim

$$\boxed{Z_T = 2R} \quad (18.18)$$

Como em condições de transferência máxima de potência o circuito é puramente resistivo, o fator de potência é igual à unidade, isto é,

Fig. 18.80 Condições para transferência máxima de potência a Z_C .

$$\boxed{F_p = 1} \quad (\text{transmissão máxima de potência}) \quad (18.19)$$

O módulo da corrente I no circuito da Fig. 18.80 é dado por

$$I = \frac{E_{Th}}{Z_T} = \frac{E_{Th}}{2R}$$

A potência máxima fornecida à carga é

$$P_{\max} = I^2 R = \left(\frac{E_{Th}}{2R} \right)^2 R$$

ou seja,

$$\boxed{P_{\max} = \frac{E_{Th}^2}{4R}} \quad (18.20)$$

EXEMPLO 18.19 Calcule a impedância da carga da Fig. 18.81 para que a potência dissipada por ela seja máxima, e determine o valor desta potência.

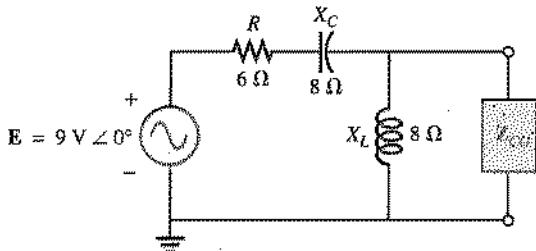


Fig. 18.81 Exemplo 18.19.

Solução: Determinação de Z_{Th} [Fig. 18.82(a)].

$$Z_1 = R - jX_C = 6 \Omega - j8 \Omega = 10 \Omega \angle -53,13^\circ$$

$$Z_2 = +jX_L = j8 \Omega$$

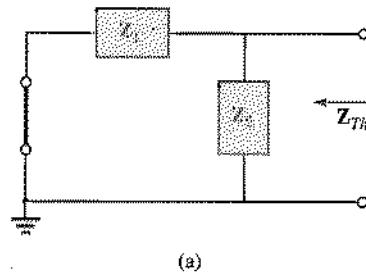
$$Z_{Th} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(10 \Omega \angle -53,13^\circ)(8 \Omega \angle 90^\circ)}{6 \Omega - j8 \Omega + j8 \Omega}$$

$$= \frac{80 \Omega \angle 36,87^\circ}{6 \angle 0^\circ}$$

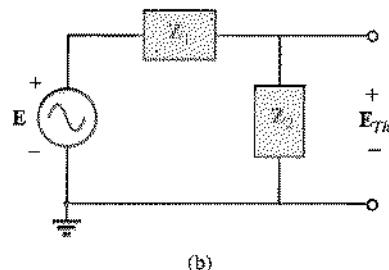
$$= 13,33 \Omega \angle 36,87^\circ = 10,66 \Omega + j8 \Omega$$

e assim

$$Z_{CG} = 13,3 \Omega \angle -36,87^\circ = 10,66 \Omega - j8 \Omega$$



(a)



(b)

Fig. 18.82 Determinação de (a) Z_{Th} e (b) E_{Th} para o circuito externo à carga na Fig. 18.81.

Para obter a potência máxima, devemos encontrar primeiramente E_{Th} [Fig. 18.82(b)] da seguinte forma:

$$E_{Th} = \frac{Z_2 E}{Z_1 + Z_2} \quad (\text{regra do divisor de tensão})$$

$$= \frac{(8 \Omega \angle 90^\circ)(9 \text{ V} \angle 0^\circ)}{j8 \Omega + 6 \Omega - j8 \Omega} = \frac{72 \text{ V} \angle 90^\circ}{6 \angle 0^\circ} = 12 \text{ V} \angle 90^\circ$$

$$\text{Assim, } P_{\max} = \frac{E_{Th}^2}{4R} = \frac{(12 \text{ V})^2}{4(10,66 \Omega)} = \frac{144}{42,64} = 3,38 \text{ W}$$

EXEMPLO 18.20 Calcule a impedância da carga da Fig. 18.83 para que a potência dissipada por ela seja máxima, e determine o valor desta potência.

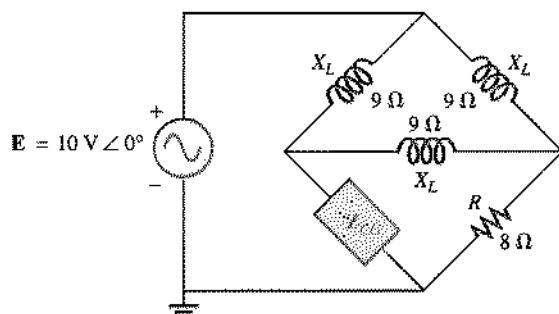


Fig. 18.83 Exemplo 18.20.

Solução: É preciso primeiro encontrar Z_{Th} (Fig. 18.84).

$$Z_1 = +jX_L = j9 \Omega \quad Z_2 = R = 8 \Omega$$

Convertendo de uma configuração Δ para uma configuração Y (Fig. 18.85), temos:

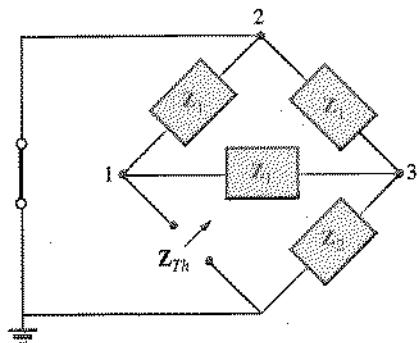


Fig. 18.84 Definição dos blocos de impedâncias para o circuito da Fig. 18.83.

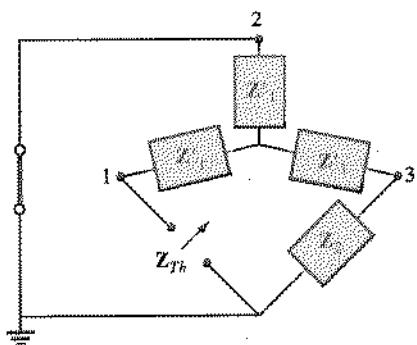


Fig. 18.85 Substituição do circuito Δ (1-2-3) da Fig. 18.84 pelo circuito Y equivalente.

$$Z'_1 = \frac{Z_1}{3} = j3\Omega \quad Z_2 = 8\Omega$$

A partir do circuito redesenhadado (Fig. 18.86), obtemos:

$$\begin{aligned} Z_{Th} &= Z'_1 + \frac{Z'_1(Z'_1 + Z_2)}{Z'_1 + (Z'_1 + Z_2)} \\ &= j3\Omega + \frac{3\Omega \angle 90^\circ (j3\Omega + 8\Omega)}{j6\Omega + 8\Omega} \\ &= j3 + \frac{(3 \angle 90^\circ)(8,54 \angle 20,56^\circ)}{10 \angle 36,87^\circ} \\ &= j3 + \frac{25,62 \angle 110,56^\circ}{10 \angle 36,87^\circ} = j3 + 2,56 \angle 73,69^\circ \\ &= j3 + 0,72 + j2,46 \\ Z_{Th} &= 0,72\Omega + j5,46\Omega \end{aligned}$$

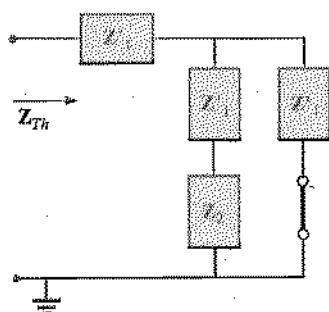


Fig. 18.86 Determinação de Z_{Th} para o circuito da Fig. 18.83.

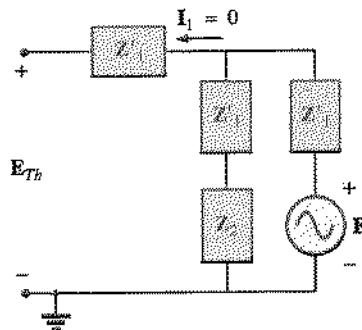


Fig. 18.87 Cálculo da tensão de Thévenin para o circuito da Fig. 18.83.

e assim

$$Z_{CC} = 0,72\Omega - j5,46\Omega$$

Vamos utilizar, para calcular E_{Th} , o circuito modificado da Fig. 18.87 com a fonte de tensão recolocada na posição original. Como $I_1 = 0$, E_{Th} é a tensão entre os terminais da associação em série das impedâncias Z'_1 e Z_2 . Utilizando a regra dos divisores de tensão, temos:

$$\begin{aligned} E_{Th} &= \frac{(Z'_1 + Z_2)E}{Z'_1 + Z_2 + Z'_1} = \frac{(j3\Omega + 8\Omega)(10V \angle 0^\circ)}{8\Omega + j6\Omega} \\ &= \frac{(8,54 \angle 20,56^\circ)(10V \angle 0^\circ)}{10 \angle 36,87^\circ} \end{aligned}$$

$$E_{Th} = 8,54V \angle -16,31^\circ$$

$$\text{logo} \quad P_{\max} = \frac{E_{Th}^2}{4R} = \frac{(8,54V)^2}{4(0,72\Omega)} = \frac{72,93}{2,88}W = 25,32W$$

Se a resistência da carga for ajustável mas o módulo da reatância não puder ser ajustado de modo a se tornar igual ao da reatância de Thévenin, a potência fornecida à carga terá o maior valor possível quando a reatância da carga tiver o valor mais próximo possível do da reatância de Thévenin e a resistência da carga tiver o seguinte valor:

$$R_L = \sqrt{R_{Th}^2 + (X_{Th} + X_{carga})^2} \quad (18.21)$$

onde o sinal das reatâncias é positivo se forem indutivas e negativo se forem capacitivas.

A potência fornecida neste caso será dada por:

$$P = E_{Th}^2 / R_{med} \quad (18.22)$$

onde

$$R_{med} = \frac{R_{Th} + R_{carga}}{2} \quad (18.23)$$

A dedução das expressões acima aparece no Apêndice H. O exemplo a seguir ilustrará o seu uso.

EXEMPLO 18.21 Para o circuito da Fig. 18.88:

- Determine o valor de R_{CC} para que a potência dissipada pela carga seja máxima.

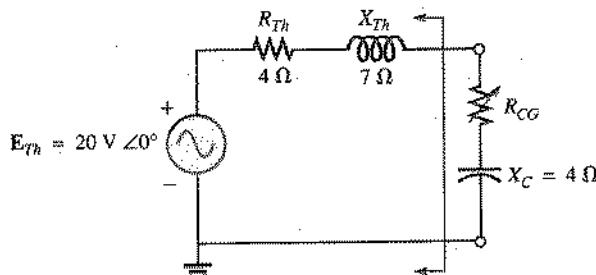


Fig. 18.88 Exemplo 18.21.

- b. Calcule a potência fornecida à carga nas condições do item (a).
 c. Calcule o maior valor possível para a potência fornecida à carga supondo agora que a reatância da carga seja ajustável, podendo assumir qualquer valor. Compare com o resultado do item (b).

Soluções:

a. Da Eq. (18.21): $R_{CG} = \sqrt{R_{Th}^2 + (X_{Th} + X_{carga})^2}$
 $= \sqrt{(4\Omega)^2 + (7\Omega - 4\Omega)^2}$
 $= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25}$

$$R_{CG} = 5\Omega$$

b. Da Eq. (18.23): $R_{med} = \frac{R_{Th} + R_{CG}}{2} = \frac{4\Omega + 5\Omega}{2}$
 $= 4,5\Omega$

Da Eq. (18.22): $P = \frac{E_{Th}^2}{4R_{med}}$
 $= \frac{(20V)^2}{4(4,5\Omega)} = \frac{400}{18} W$
 $\approx 22,22 W$

c. Para $Z_{CG} = 4\Omega - j7\Omega$,
 $Z_{CG} = 4\Omega - j7\Omega$,
 $P_{max} = \frac{E_{Th}^2}{4R_{Th}} = \frac{(20V)^2}{4(4\Omega)}$
 $= 25 W$

um valor que excede o calculado no item (b) de 2,78 W.

18.6 TEOREMAS DA SUBSTITUIÇÃO, DA RECIPROCIDADE E DE MILLMAN

Como observamos na introdução deste capítulo, não vamos discutir aqui os teoremas da substituição, da reciprocidade e de Millman. Após uma revisão do Cap. 9 você terá pouca dificuldade para aplicar estes teoremas a circuitos de corrente alternada senoidais. Os problemas no final deste capítulo incluem algumas aplicações destes teoremas.

18.7 ANÁLISE COMPUTACIONAL

Neste capítulo a seção de análise computacional incluirá uma discussão detalhada de fontes controladas. O estudo destas fontes é muito importante devido à disseminação de seu uso na análise de sistemas eletrônicos. Existem essencialmente quatro tipos de fontes controladas em sistemas eletrônicos com as quais um estudante deve se familiarizar: fontes de corrente controladas por corrente (CCCS), fontes de corrente controladas por tensão (VCCS), fontes de tensão controladas por corrente (CCVS) e fontes de tensão controladas por tensão (VCVS).^{*} A variável de controle deve, em cada caso, ser corretamente indicada no arquivo de entrada de modo a assegurar os valores corretos para o módulo e a fase da fonte controlada. No caso do BASIC, devemos escrever um programa que seja praticamente uma aplicação dos métodos discutidos neste capítulo a um circuito específico. O PSpice, por outro lado, é capaz de analisar o circuito e apresentar os resultados pedidos, contanto que os parâmetros do circuito sejam fornecidos corretamente. Nesta seção, vamos discutir apenas a aplicação do programa PSpice a circuitos que contenham fontes controladas.

PSpice (DOS)

Teorema de Thévenin O circuito a ser analisado usando o teorema de Thévenin é o mesmo que aparece na Fig. 18.28. Para podermos entrar com os valores de indutância e capacitância que aparecem na Fig. 18.89(a), escolhemos uma freqüência de 1 kHz e calculamos esses valores a partir dos valores de reatância indicados na Fig. 18.28.

* As abreviações CCCS, VCCS, CCVS e VCVS, usadas no PSpice e outros programas, correspondem às iniciais dos nomes das fontes em inglês: current controlled current source, voltage-controlled current source, current-controlled voltage source e voltage-controlled voltage source, respectivamente. (N. T.)

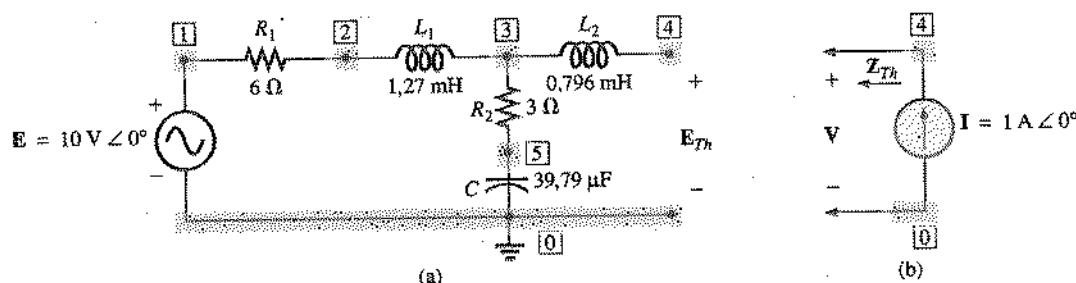


Fig. 18.89 (a) Utilização do PSpice (DOS) para obter a tensão de Thévenin no circuito da Fig. 18.28. (b) Utilização de uma fonte de 1 A (fase 0°) para obter a impedância de Thévenin.



Chapter 18 - Thevenin's Theorem - AC = E(Th)

***** CIRCUIT DESCRIPTION

```
*****
VE 1 0 AC 10V 0
R1 1 2 6
L1 2 3 1.27MH
L2 3 4 0.796MH
R2 3 5 3
C 5 0 39.79UF
RL 4 0 1E30
.AC LIN 1 1KH 1KH
.PRINT AC VM(4) VP(4)
.OPTIONS NOPAGE
.END
```

***** AC ANALYSIS

TEMPERATURE = 27.000 DEG C

FREQ	VM(4)	VP(4)
1.000E+03	5.081E+00	-7.698E+01

Fig. 18.90 Arquivos de saída e de entrada para o circuito da Fig. 18.89(a).

E_{Th} :

O arquivo de entrada para a obtenção de E_{Th} aparece na Fig. 18.90, com os valores dados na Fig. 18.89(a), e considerando 1 kHz como o valor da frequência aplicada. Foi pedido que o programa fornecesse a amplitude e a fase da tensão de Thévenin entre os nós 4 e 0. O resultado, $E_{Th} = 5,081 \text{ V} \angle -76,98^\circ$, está em boa concordância com o obtido no Exemplo 18.8 ($E_{Th} = 5,08 \text{ V} \angle -77,09^\circ$).

Z_{Th} :

Para a obtenção de Z_{Th} utilizamos uma técnica idêntica à aplicada nos sistemas dc, anulando a fonte de tensão e ligando uma fonte de corrente de 1 A entre os nós 4 e 0, como na Fig. 18.89 (b). Como $Z_T = V/I$ e $I = 1A \angle 0^\circ$, a amplitude e a fase de V serão idênticas às de Z_T . Na Fig. 18.91 vemos os arquivos de entrada e de saída; o resultado, $V = 5,493 \angle 32,42^\circ$, mostra que $Z_{Th} = 5,493$

Chapter 18 - Thevenin's Theorem - AC = Z(Th)

***** CIRCUIT DESCRIPTION

```
*****
VE 1 0 AC 0V 0
R1 1 2 6
L1 2 3 1.27MH
L2 3 4 0.796MH
R2 3 5 3
C 5 0 39.79UF
RL 4 0 1E30
.AC LIN 1 1KH 1KH
.PRINT AC VM(4) VP(4)
.OPTIONS NOPAGE
.END
```

***** AC ANALYSIS

TEMPERATURE = 27.000 DEG C

FREQ	VM(4)	VP(4)
1.000E+03	5.493E+00	3.287E+01

Fig. 18.91 Arquivos de entrada e saída para o circuito da Fig. 18.89(a), incluindo a fonte de corrente da Fig. 18.89(b).

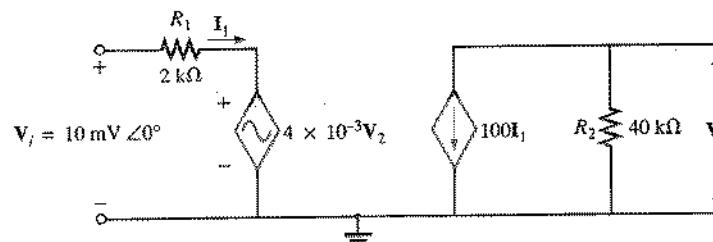


Fig. 18.92 Aplicação do PSpice (DOS) a circuitos com fontes controladas.

$\angle 32,42^\circ$, em excelente concordância com o resultado obtido no Exemplo 18.8 ($Z_{th} = 5,49 \Omega \angle 32,36^\circ$).

Fontes Controladas O circuito híbrido equivalente de um transistor inclui, como ilustra a Fig. 18.92, tanto uma fonte de corrente controlada por corrente (CCCS) como uma fonte de tensão controlada por tensão (VCVS). Conforme já mencionamos anteriormente, os conceitos de circuito equivalente e, em particular, de circuito híbrido equivalente serão discutidos com detalhes em cursos de eletrônica. Nossa interesse aqui é apenas como entrar corretamente com uma fonte controlada no PSpice, de modo a obter os resultados corretos.

A amplitude e a fase da fonte de corrente controlada na Fig. 18.92 são determinadas por um fator multiplicativo (100, neste caso) e pela corrente I , que atravessa o resistor R , no sentido indicado.

A amplitude e a fase da fonte de tensão controlada são determinadas pelo fator multiplicativo 4×10^{-3} , ao passo que a tensão de saída V_2 é definida pelos nós 4 e 0. É interessante observar que a fonte controlada de corrente faz parte do circuito de saída, enquanto a sua variável de controle pertence ao circuito de entrada. Com a fonte de tensão controlada acontece justamente o contrário. Esta última fonte pode ser considerada uma "realimentação" da tensão de saída para o circuito de entrada.

Vamos agora mostrar os formatos de entrada para as fontes controladas do tipo CCCS e VCVS.

Fonte de Corrente Controlada por Corrente (CCCS) No caso das fontes CCCS, é particularmente importante que o sentido da corrente controladora esteja correto. Na Fig. 18.92, por exemplo, se a corrente controladora I_1 fosse fornecida ao programa com o sentido oposto ao indicado na figura, os resultados seriam totalmente diferentes.

O sentido de uma corrente de controle no PSpice é definido por uma fonte independente em série com o ramo no qual a corrente controladora é definida. Não se esqueça, porém, de que no PSpice a corrente em uma fonte independente tem sempre o sentido indicado na Fig. 18.93, ou seja, do potencial mais alto para o mais baixo.

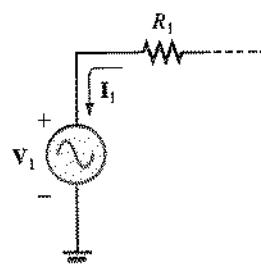


Fig. 18.93 Relação entre a polaridade de uma fonte de tensão e o sentido da corrente quando usamos o PSpice.

No caso do circuito da Fig. 18.92, isto nos levaria a escolher um sentido incorreto para I_1 . Podemos obter o sentido correto, no PSpice, introduzindo uma fonte auxiliar de zero volt no ramo onde I_1 é definida, como ilustra a Fig. 18.94. Observe que o sentido de I_1 corresponde ao sentido da corrente definido para VSENSE, a fonte "fantasma". Como a amplitude desta fonte de tensão é zero volt, não precisamos nos preocupar com possíveis efeitos da fonte sobre o comportamento do circuito. É claro que, se I_1 tivesse o sentido oposto, poderíamos ter utilizado a fonte de tensão V para definir o sentido de I_1 no arquivo de entrada.

Em resumo:

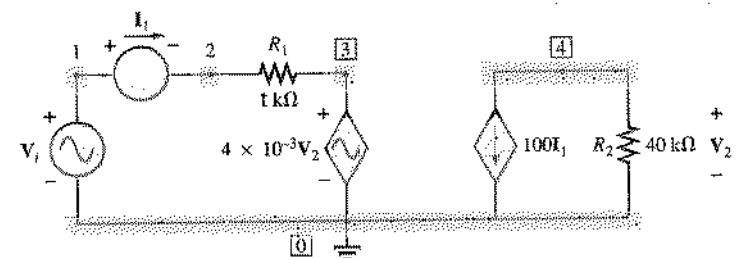


Fig. 18.94 Aplicação do PSpice (DOS) a um circuito que inclui uma CCCS e uma VCVS.

O sentido de uma corrente de controle é determinado por uma fonte independente em série com o ramo onde é definida esta corrente. No caso da ausência de uma fonte independente ou da presença de uma fonte com a polaridade incorreta é necessário introduzir uma fonte de amplitude zero volt com a polaridade correta.

O formato geral para uma CCCS é o seguinte:

FIXATOR	4	0	VSENSE	100
Nome	+	-	Nome da fonte que define o sentido da corrente de controle	Fator multiplicativo
nó	nó			
Corrente da fonte do nó 4 para o nó 0				

Observe que uma CCCS é representada por uma única letra, F, e que, como já dissemos, o sentido de I, é definido por uma fonte de tensão. Naturalmente, para podermos usar a fonte VSENSE no comando CCCS é preciso que ela apareça como fonte independente no circuito de entrada.

Fonte de Tensão Controlada por Tensão (VCVS) O formato de entrada para uma VCVS é mais simples, já que a polaridade da tensão controladora é a indicada na Fig. 18.92. O formato geral é o seguinte:

EF BACK	3	0	4	0	4M
Nome	+	-	+	-	
	nó	nó	nó	nó	Fator multiplicativo
	Fonte controlada	Tensão de controle			

Observe novamente o uso de uma única letra, E, para definir uma VCVS e a relativa simplicidade desta linha de entrada quando comparada com a linha correspondente para uma CCCS.

Antes de examinarmos o arquivo de entrada completo, vamos analisar o circuito da Fig. 18.92 (como teríamos que fazer se fôssemos escrever um programa em BASIC) para nos certificarmos de que compreendemos o efeito de uma fonte controlada e também para termos uma resposta para comparar com os resultados do PSpice.

Para as variáveis de controle:

$$I_1 = \frac{V_e - 4 \times 10^{-3}V_2}{1 \text{ k}\Omega}$$

$$\text{e } V_2 = -(100I_1)(40 \text{ k}\Omega)$$

Obtemos então:

$$V_2 = -(100) \left(\frac{V_e - 4 \times 10^{-3}V_2}{1 \text{ k}\Omega} \right) (40 \text{ k}\Omega)$$

$$V_2 = -(4000)[V_e - 4 \times 10^{-3}V_2] = -4000V_e + 16V_2$$

$$\text{assim, } -15V_2 = -4000V_e$$

$$\text{logo, } V_2 = \frac{-4000V_e}{15} = -266,67V_e$$

$$\text{mas } V_e = 10 \text{ mV} \angle 0^\circ$$

$$\text{portanto } V_2 = -(266,67)(10 \times 10^{-3} \text{ V} \angle 0^\circ)$$

$$V_2 = -2,67 \text{ V} \angle 0^\circ = 2,67 \text{ V} \angle 180^\circ$$

O arquivo de entrada para o circuito da Fig. 18.94 aparece na Fig. 18.95, com as duas fontes controladas ER e FF e a fonte independente VSENSE que define o sentido correto para I_1 . Embora não existam elementos reativos no circuito, definimos uma frequência para permitir o uso do comando AC. Note que o resultado para V_2 no arquivo de saída é bastante próximo do obtido na solução acima.

Vamos agora definir os formatos de entrada para os dois tipos restantes de fontes controladas, embora não apareçam na Fig. 18.92.

Fonte de Corrente Controlada por Tensão (VCCS)

GFET	2	3	5	6	4M
Nome	+	-	+	-	
	nó	nó	nó	nó	
	Corrente da fonte do nó 2 para o nó 3	Definida pela polaridade da tensão de controle	Fator multiplicativo (unidade: siemens)		

Fonte de Tensão Controlada por Corrente (CCVS)

BCCVS	6	5	VSENSE	4
Nome	+	-		
	nó	nó		
	Polaridade da fonte controlada	Define o sentido da variável de controle	Fator multiplicativo (unidade: ohms)	

PSpice (Windows)

Começaremos com uma análise do circuito da Fig. 18.12 (Exemplo 18.4). Este circuito foi escolhido por incluir fontes de corrente contínua e de corrente alternada. Veremos a seguir que a análise pode incluir dc e ac em uma única simulação e Probe pode incluir níveis dc nas formas de onda geradas pelo comando Trace. Na Fig. 18.96 vemos o esquema para este circuito. A capacitorsa e a indutância foram calculadas supondo uma frequência de 1 kHz, a frequência escolhida no AC Sweep da caixa de diálogo de Analysis Setup. Escolhemos o símbolo V3 para VPRINT clicando duas vezes sobre o símbolo, escolhendo In-

Chapter 18 - Transistor Amplifier - Controlled Source

***** CIRCUIT DESCRIPTION

```

VI 1 0 AC 10MV 0
VSENSE 1 2 0V
R1 2 3 1K
ER 3 0 4 0 4M
FF 4 0 VSENSE 100
R2 4 0 40K
.AC LIN 1 1KH 1KH
.PRINT AC VM(4,0)
.OPTIONS NOPAGE
.EEND

```

***** AC ANALYSIS

TEMPERATURE = 27.000 DEG C

FREQ VM(4,0)

1.000E+01 2.667E+00

Fig. 18.95 Arquivos de entrada e de saída para o circuito da Fig. 18.94.

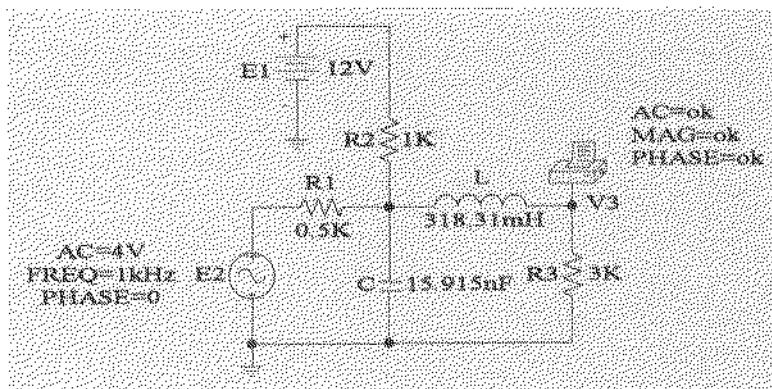


Fig. 18.96 Aplicação do PSpice (Windows) ao circuito da Fig. 18.12.

clude System-defined Attributes e, em seguida, mudando PKGREF para V3. Colocamos AC Sweep na freqüência de 1 kHz na caixa de diálogo de Analysis Setup e optamos por Bias Point Detail para obter a solução de corrente contínua.

Terminada a simulação, o arquivo de saída que aparece na Fig. 18.97 pode ser examinado selecionando File e Examine Output. Observe, abaixo do cabeçalho **SMALL SIGNAL BIAS SOLUTION**, que as tensões nos nós 2 e 3 têm o mesmo valor dc de 3,6 volts. Isto ocorre porque o indutor na Fig. 18.96 se comporta como um curto-círcuito para corrente contínua. Os nós 2 e 3 estão acima do capacitor e do resistor de 3 kΩ, respectivamente. A tensão de saída é, naturalmente, a do nó 3 (em relação à terra) e o valor de 3,6 volts concorda com a solução obtida anteriormente. O comando AC ANALYSIS mostra que a tensão V_3 é 2,06 V $\angle -32,74^\circ$, o que também coincide com a solução anterior.

Podemos obter um gráfico para a tensão v_3 escolhendo a opção Transient na caixa de diálogo Analysis Setup e escolhendo

10 μs para Print Step, bem como 5 μs para Final Time (cinco períodos do sinal aplicado), 0 s para No Print Delay e 10 μs para Step Ceiling (para obtermos uma boa resolução gráfica). Antes de chamarmos Probe, a tensão de entrada deve ser modificada para 5,657 volts ($1,414 \times 4$ V, que é o valor de pico da tensão rms aplicada, 4 V). É correto utilizar 4 V como dado de entrada (embora este seja o valor de pico, e não o valor rms) em uma análise geral, pois os resultados obtidos no arquivo de saída podem ser simplesmente considerados valores rms. Para traçar um gráfico, no entanto, 4 V será considerado um valor de pico, e a forma de onda resultante refletirá esta consideração. Uma vez que Probe tenha acabado de rodar, entre com a sequência Trace-Add-Alias Names e opte por V (R3:1) para obter a forma de onda da Fig. 18.98. Obtemos a linha horizontal no nível dc optando por Tools, seguida de Cursor e Display. Isto fará com que o cursor apareça automaticamente no nível dc, com o valor desta tensão contínua sendo visto na barra horizontal que aparece na extremidade inferior da tela. Observe que, como mencionamos

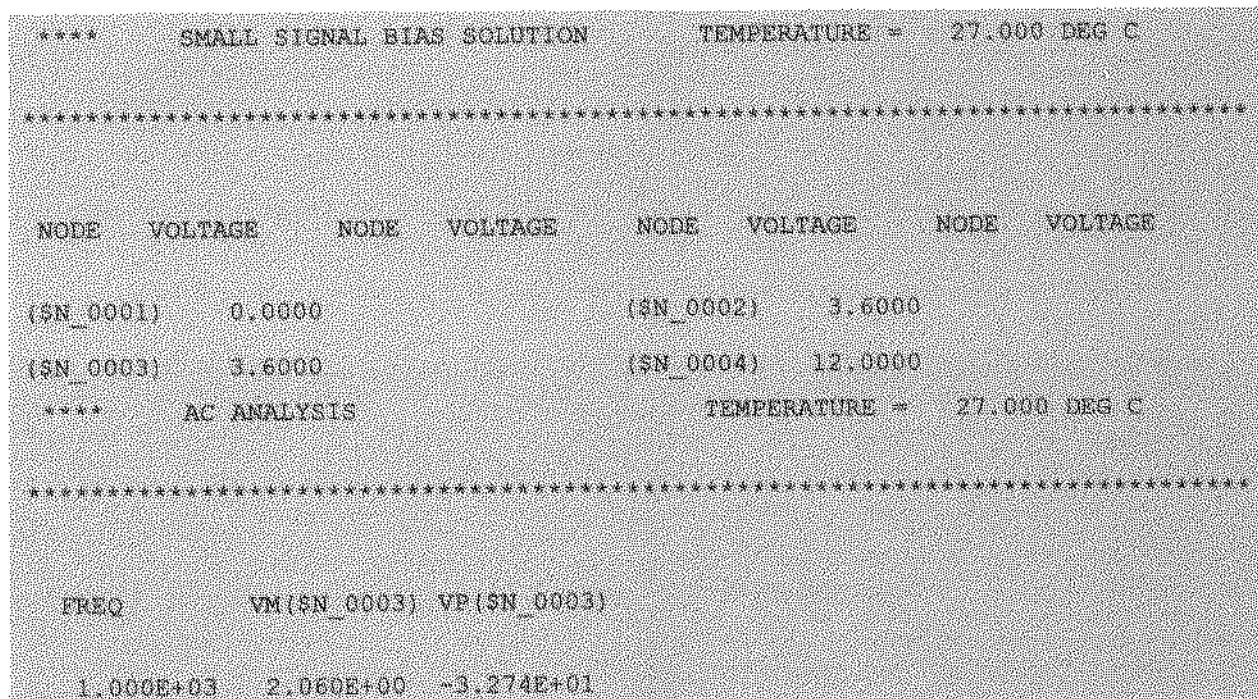


Fig. 18.97 Arquivo de saída para a análise do circuito da Fig. 18.96.

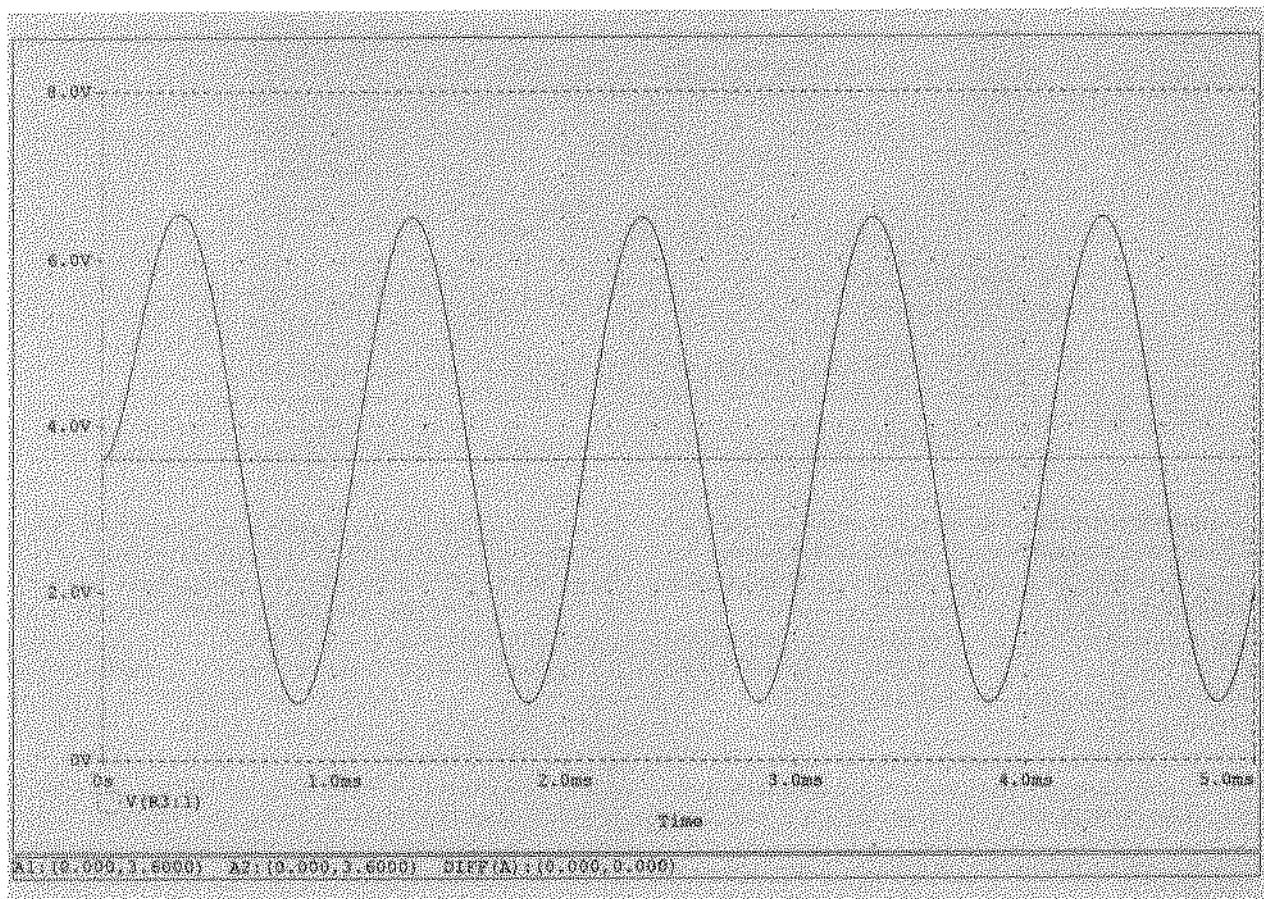


Fig. 18.98 Resposta ao comando Probe para v_3 no circuito da Fig. 18.96.

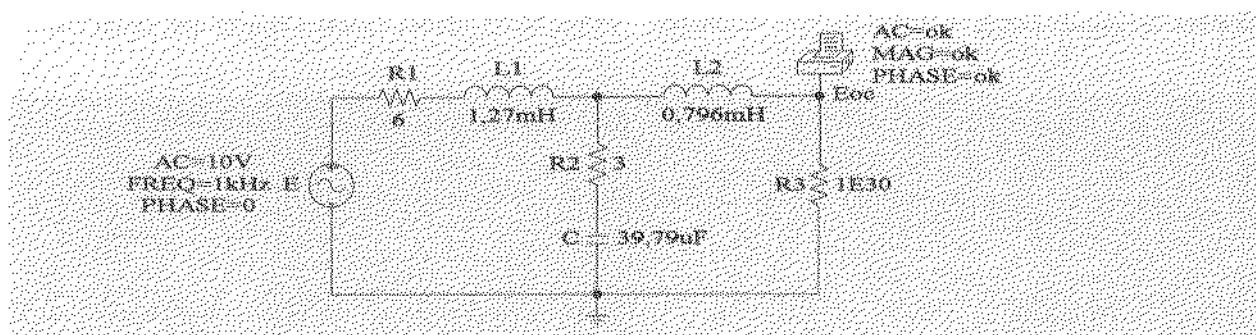


Fig. 18.99 Determinação da tensão de Thévenin para o circuito da Fig. 18.28 utilizando o PSpice (Windows).

```
**** AC ANALYSIS ****
DEG C TEMPERATURE = 27.000
*****
***** VM($N_0005) VP($N_0005)
*****
FREQ VM($N_0005) VP($N_0005)
1.0000E+03 8.081E+00 -7.698E+01
```

Fig. 18.100 Arquivo de saída para a análise do esquema da Fig. 18.99.

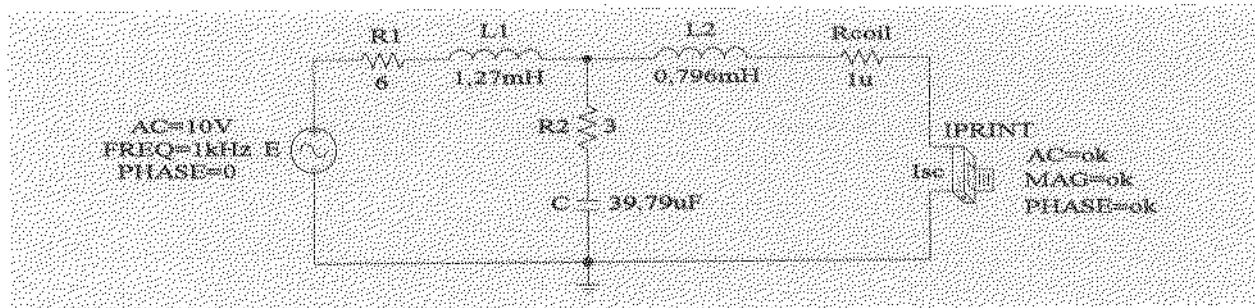


Fig. 18.101 Determinação da corrente de curto-círcuito para o circuito da Fig. 18.28.

anteriormente, o gráfico inclui um deslocamento de 3,6 V, e sua amplitude é idêntica à da solução obtida anteriormente.

Como próxima aplicação do uso de esquemas vamos refazer a análise anterior do circuito da Fig. 18.28, mostrado novamente na Fig. 18.99. Note o resistor de valor extremamente elevado entre os terminais onde é calculada a tensão de circuito aberto de Thévenin. Este valor para o resistor foi escolhido de modo que, quando comparado com os outros elementos do circuito, sua resistência seja tão grande que possamos considerar que existe um circuito aberto entre seus terminais. A ligação deste resistor é necessária [também no caso do PSpice (DOS)] para completar o circuito. O resultado da simulação aparece na Fig. 18.100 e confirma o resultado obtido anteriormente: $E_{th} = 5,081 \text{ V} \angle -76,98^\circ$.

Em seguida, como vemos na Fig. 18.101, foi obtida a corrente de curto-círcuito para permitir o cálculo da impedância de Thévenin. Foi necessário introduzir a resistência R_{coil} , de $1 \mu\Omega$, pois o PSpice não aceita a entrada de indutores como elementos ideais.

O arquivo de saída da Fig. 18.102 mostra que $I_{cc} = 0,925 \text{ mA} \angle -10,94^\circ$. Assim, a impedância de Thévenin é dada por:

$$Z_{th} = \frac{E_{th}}{I_{cc}} = \frac{5,081 \text{ V} \angle -76,98^\circ}{0,925 \text{ A} \angle -109,4^\circ} = 5,493 \Omega \angle 32,42^\circ$$

o que concorda com o resultado obtido no Exemplo 18.8.

Como última aplicação do uso de esquemas, vamos verificar os resultados do Exemplo 18.12 e ganhar também um pouco de prática na utilização de fontes controladas (dependentes). O esquema baseado na Fig. 18.50, onde há uma fonte de tensão controlada por tensão (VCVS), aparece na Fig. 18.103. A VCVS é representada por E na biblioteca **analog.slb**. Observe que foi usado um segundo símbolo de ligação à terra para estabelecer uma ligação entre o terminal negativo da tensão de controle da fonte e a terra. O terminal positivo foi ligado diretamente ao circuito,

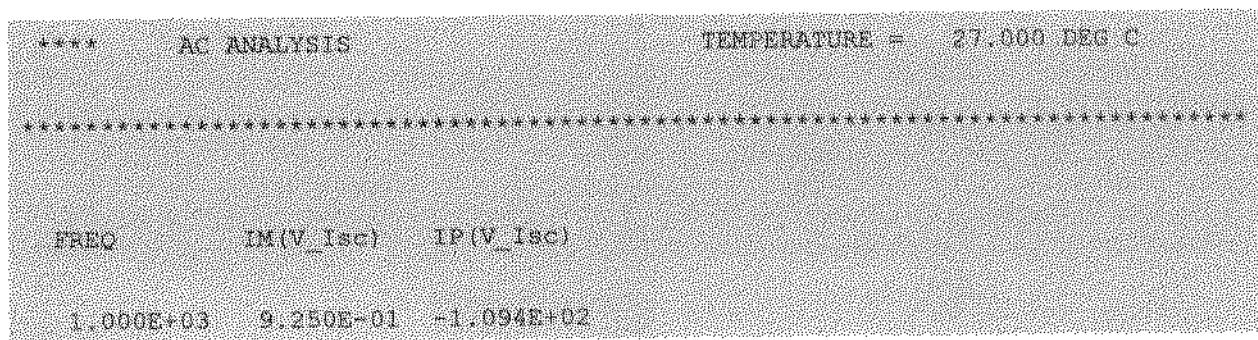


Fig. 18.102 Arquivo de saída para a análise do esquema da Fig. 18.101.

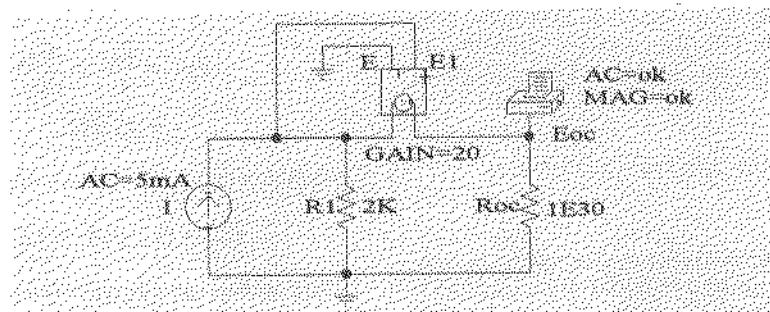


Fig. 18.103 Aplicação do PSpice (Windows) ao circuito da Fig. 18.50 para obter a tensão de circuito aberto entre os terminais de interesse.

```
***** AC ANALYSIS *****  
DEG C  
*****  
  
FREQ VM(SN_0002)  
  
1.000E+03 2.100E+02
```

Fig. 18.104 Arquivo de saída para a análise do esquema da Fig. 18.103.

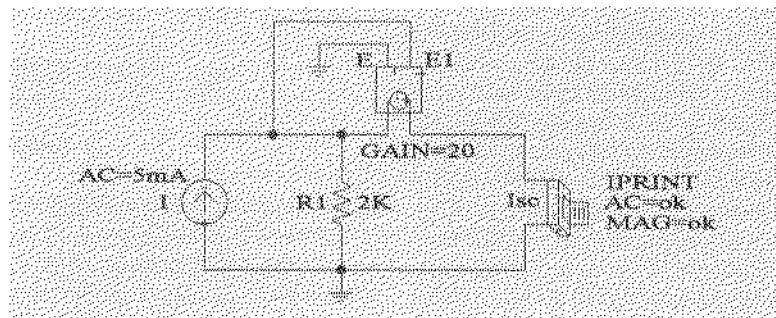


Fig. 18.105 Aplicação do PSpice (Windows) ao circuito da Fig. 18.50 para determinar a corrente de curto-círcito entre os terminais de interesse.

```
***** AC ANALYSIS *****  
DEG C  
*****  
  
FREQ IM(V_Isc)  
  
1.000E+03 5.000E-03
```

Fig. 18.106 Arquivo de saída para a análise do esquema da Fig. 18.105.

sem necessidade de recorrer à opção GLOBAL. Novamente inserimos um resistor de valor extremamente elevado, 1E30, para simular uma situação de circuito aberto entre os pontos onde medimos a tensão de Thévenin. O resultado da simulação (Fig. 18.102) mostra que a tensão de Thévenin é 210 V. Substituindo os valores numéricos na expressão obtida no Exemplo 18.12, obtemos o mesmo resultado:

$$\begin{aligned} E_{Th} &= (1 + \mu)IR_1 = (1 + 20)(5 \text{ mA} \angle 0^\circ)(2 \text{ k}\Omega) \\ &= 210 \text{ V} \angle 0^\circ \end{aligned}$$

Em seguida, a corrente de curto-círcuito foi determinada usando o esquema da Fig. 18.105, no qual IPRINT foi colocado entre os terminais de interesse. O resultado foi o arquivo de saída da Fig. 18.106, onde se pode ver que a corrente de curto-círcuito

é 5 mA, o mesmo valor obtido no Exemplo 18.12. Calculando a relação entre a tensão de Thévenin e a corrente de curto-círcuito, podemos obter a impedância de Thévenin:

$$\begin{aligned} Z_{Th} &= \frac{E_{ca}}{I_{cc}} = \frac{E_{Th}}{I_{cc}} = \frac{210 \text{ V} \angle 0^\circ}{5 \text{ mA} \angle 0^\circ} \\ &= 42 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

que também concorda com a solução do Exemplo 18.12:

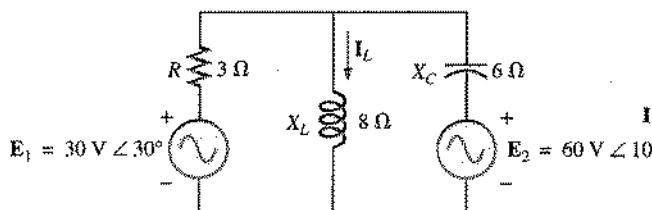
$$Z_{Th} = (1 + \mu)R_1 = (21) \cdot 2 \text{ k}\Omega = 42 \text{ k}\Omega.$$

Uma análise do circuito equivalente completo do transistor (Fig. 18.56), com duas fontes controladas, aparece na seção PSpice (Windows) do Cap. 26.

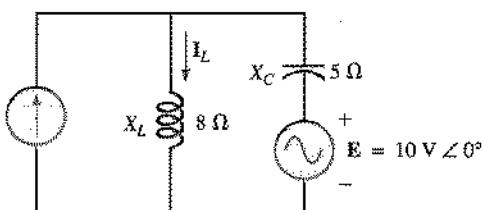
PROBLEMAS

SEÇÃO 18.2 Teorema da Superposição

1. Determine, utilizando o teorema da superposição, a corrente na indutância X_L para os circuitos da Fig. 18.107.



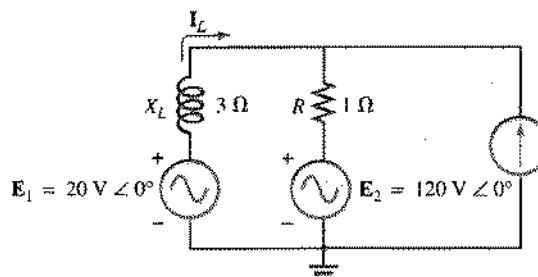
(a)



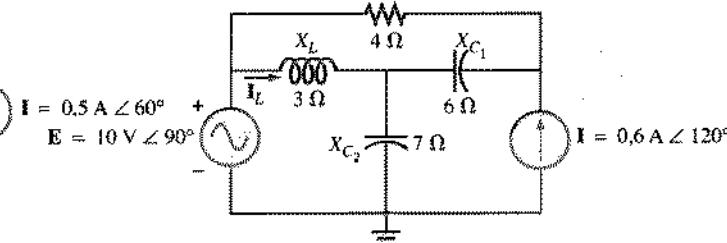
(b)

Fig. 18.107 Problema 1.

- *2. Usando o teorema da superposição, obtenha a corrente I_L nos circuitos da Fig. 18.108.



(a)



(b)

Fig. 18.108 Problema 2.

- *3. Obtenha uma expressão senoidal para a corrente i no circuito da Fig. 18.109, usando o teorema da superposição.
4. Obtenha uma expressão senoidal para a tensão v_c no circuito da Fig. 18.110, usando o teorema da superposição.

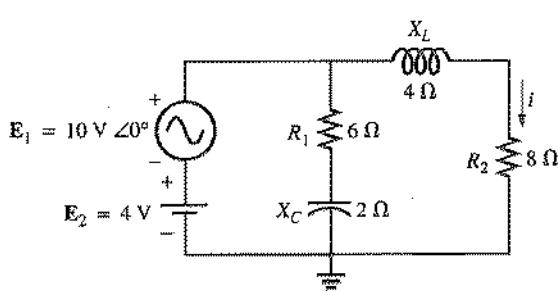


Fig. 18.109 Problemas 3, 30 e 42.

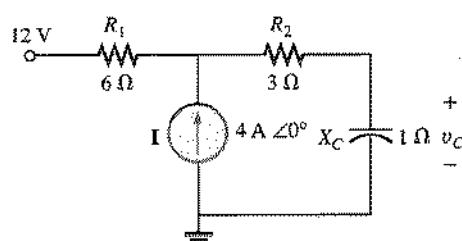


Fig. 18.110 Problemas 4, 16, 31 e 43.

- *5. Calcule a corrente I no circuito da Fig. 18.111, usando o teorema da superposição.

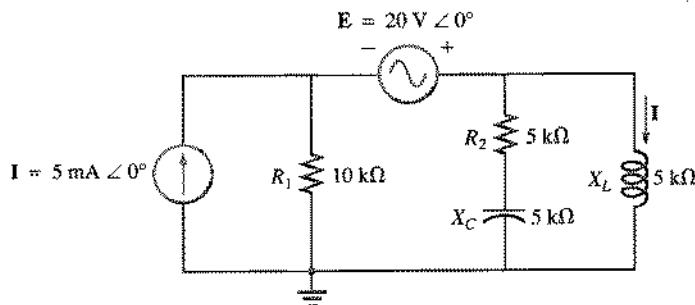


Fig. 18.111 Problemas 5, 17, 32 e 44.

- *8. Determine a corrente I_L no circuito da Fig. 18.114, usando o teorema da superposição ($\mu = 20$, $h = 100$).

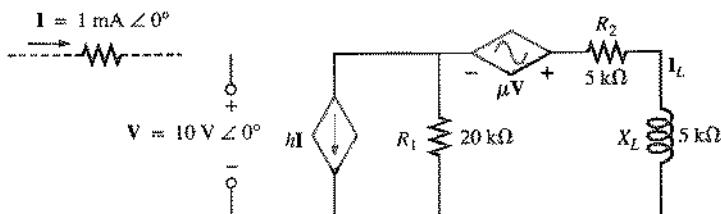


Fig. 18.114 Problemas 8, 22 e 36.

6. Calcule a corrente I_L ($h = 100$) no circuito da Fig. 18.112, usando o teorema da superposição.

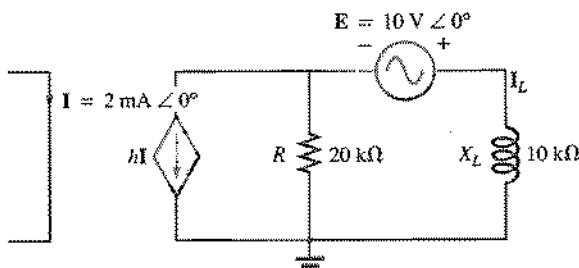


Fig. 18.112 Problemas 6 e 20.

- *9. Determine V_C no circuito da Fig. 18.115 ($h = 50$).

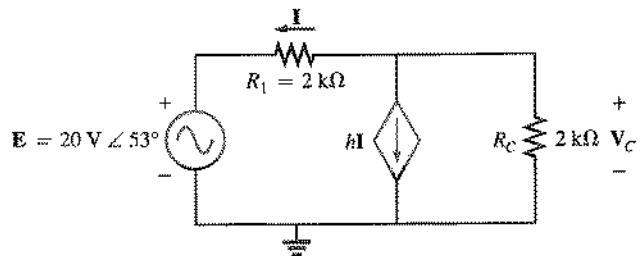


Fig. 18.115 Problemas 9 e 23.

- *10. Calcule a corrente I no circuito da Fig. 18.116.

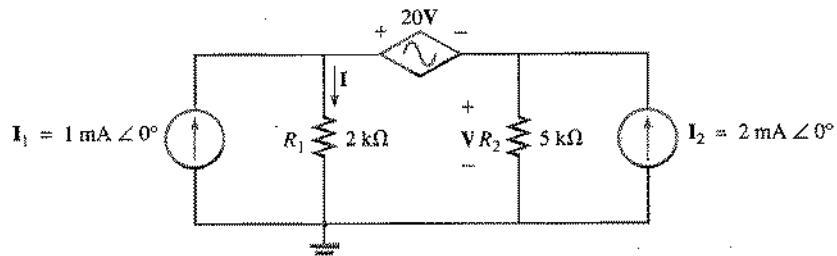


Fig. 18.116 Problemas 10, 24 e 38.

7. Obtenha, usando o teorema da superposição, a tensão V_{CG} no circuito da Fig. 18.113 ($\mu = 20$).

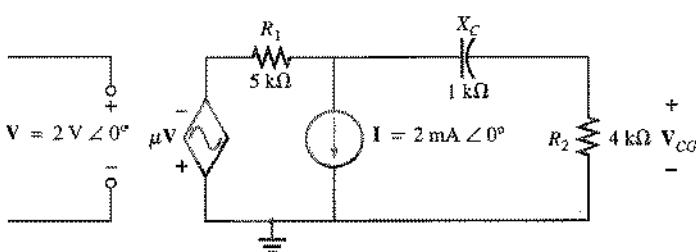


Fig. 18.113 Problemas 7, 21 e 35.

11. Calcule a tensão V_S no circuito da Fig. 18.117.

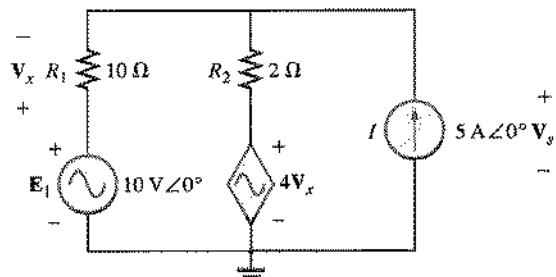
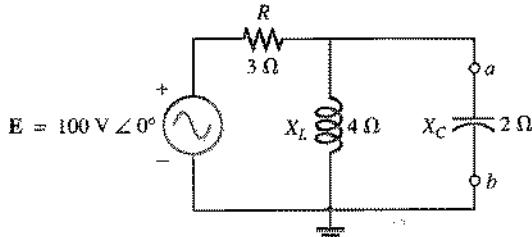


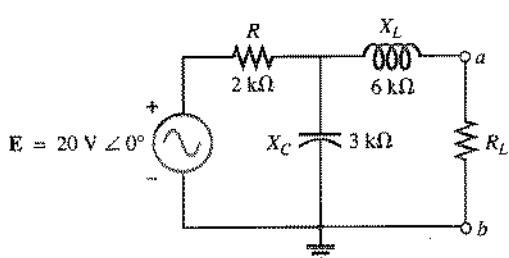
Fig. 18.117 Problema 11.


SEÇÃO 18.3 Teorema de Thévenin

12. Encontre o circuito equivalente de Thévenin para as partes dos circuitos da Fig. 18.118 externas aos elementos entre os pontos *a* e *b*.



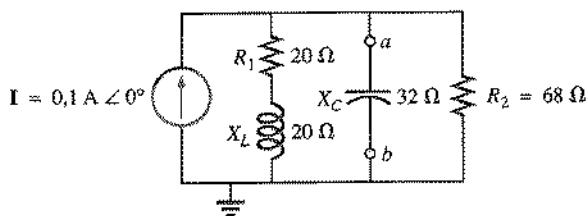
(a)



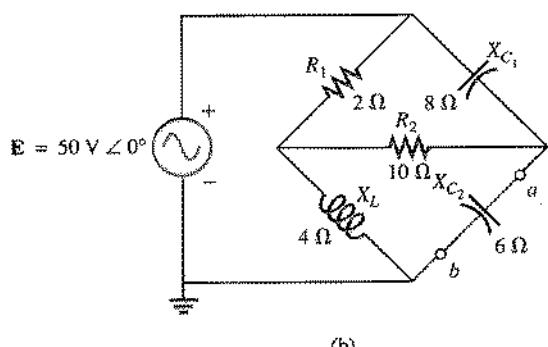
(b)

Fig. 18.118 Problemas 18 e 26.

- *13. Obtenha o circuito equivalente de Thévenin para as partes dos circuitos na Fig. 18.119 externas aos elementos entre os pontos *a* e *b*.



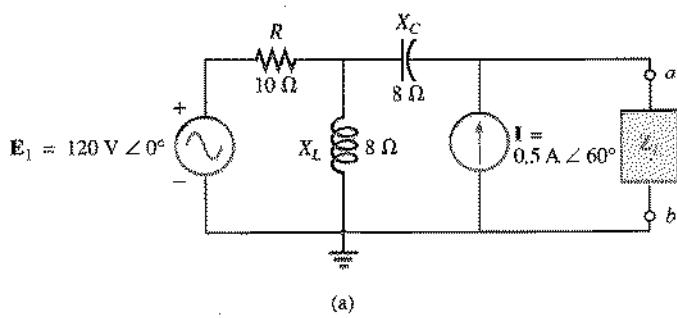
(a)



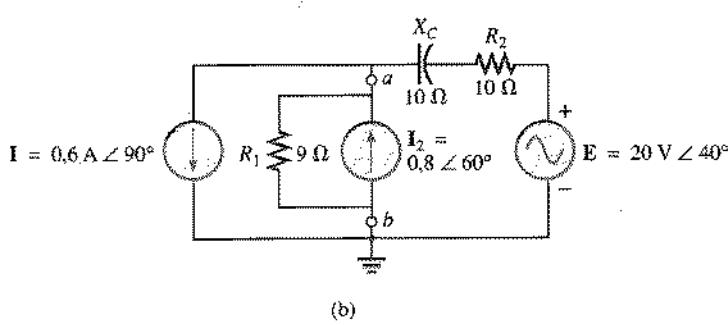
(b)

Fig. 18.119 Problemas 13, 27 e 51.

- *14. Encontre o equivalente de Thévenin para as partes dos circuitos da Fig. 18.20 externas aos elementos entre os pontos *a* e *b*.



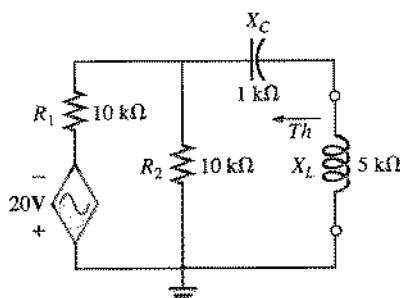
(a)



(b)

Fig. 18.120 Problemas 14 e 28.

- *15. a. Encontre o circuito equivalente de Thévenin para a parte do circuito externa ao resistor R_2 da Fig. 18.109.
b. Utilizando os resultados do item (a), obtenha a corrente i da mesma figura.
16. a. Obtenha o circuito equivalente de Thévenin para o circuito externo ao capacitor na Fig. 18.110.
b. Usando os resultados do item (a), obtenha a tensão V_c da mesma figura.
- *17. a. Obtenha o circuito equivalente de Thévenin para o circuito externo ao indutor da Fig. 18.111.
b. Usando os resultados da parte (a), obtenha a corrente I da mesma figura.
18. Determine o circuito equivalente de Thévenin para o circuito externo à reatância indutiva de $5 \text{ k}\Omega$ da Fig. 18.121 (em função de V).


Fig. 18.121 Problemas 18 e 33.

19. Determine o circuito equivalente de Thévenin para o circuito externo à reatância indutiva de $4 \text{ k}\Omega$ na Fig. 18.122 (em função de I).

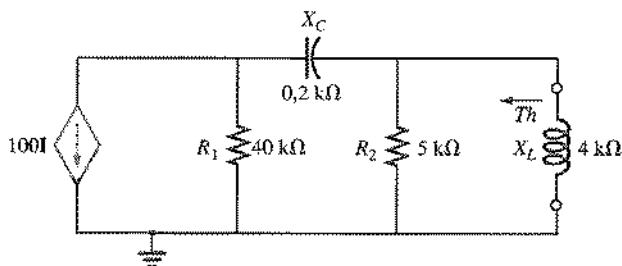


Fig. 18.122 Problemas 19 e 34.

20. Encontre o circuito equivalente de Thévenin para o circuito externo à reatância indutiva de $10 \text{ k}\Omega$ da Fig. 18.112.
 21. Determine o circuito equivalente de Thévenin para o circuito externo ao resistor de $4 \text{ k}\Omega$ da Fig. 18.103.
 *22. Obtenha o circuito equivalente de Thévenin para o circuito externo à reatância indutiva de $5 \text{ k}\Omega$ da Fig. 18.114.
 *23. Encontre o circuito equivalente de Thévenin para o circuito externo ao resistor de $2 \text{ k}\Omega$ da Fig. 18.115.
 *24. Determine o circuito equivalente de Thévenin para o circuito externo ao resistor R_1 da Fig. 18.116.
 *25. Obtenha o circuito equivalente de Thévenin para o circuito à esquerda dos terminais $a-a'$ da Fig. 18.123.

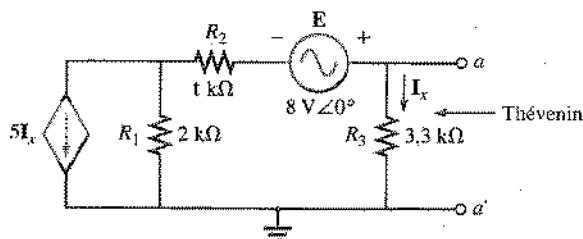
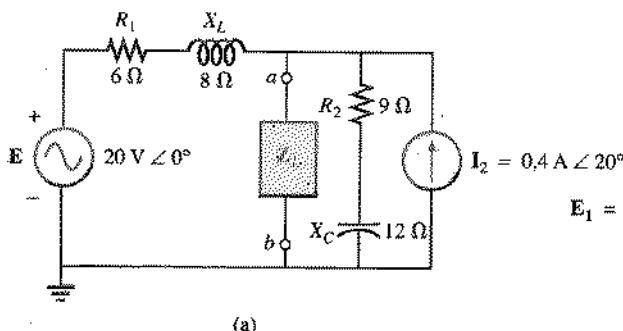


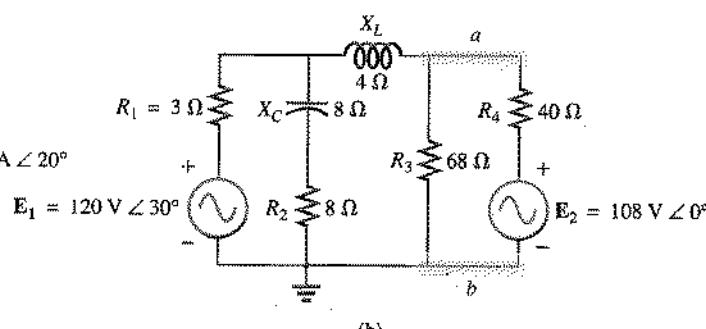
Fig. 18.123 Problema 25.

SEÇÃO 18.4 Teorema de Norton

26. Obtenha o circuito equivalente de Norton para o circuito externo aos elementos entre a e b para os circuitos da Fig. 18.118.
 27. Obtenha o circuito equivalente de Norton para o circuito externo aos elementos entre a e b para os circuitos da Fig. 18.119.
 28. Obtenha o circuito equivalente de Norton para o circuito externo aos elementos entre a e b para os circuitos da Fig. 18.120.
 *29. Obtenha o circuito equivalente de Norton para as partes dos circuitos da Fig. 18.124 externas aos elementos entre os pontos a e b .



(a)



(b)

Fig. 18.124 Problema 29.

- *30. a. Obtenha o circuito equivalente de Norton para o circuito externo ao resistor R_2 da Fig. 18.109.
 b. Usando os resultados do item (a), obtenha o valor da corrente I da mesma figura.
 *31. a. Encontre o circuito equivalente de Norton para o circuito externo ao capacitor da Fig. 18.110.
 b. Determine, usando os resultados do item (a), a tensão V_C da mesma figura.
 *32. a. Obtenha o circuito equivalente de Norton para o circuito externo ao indutor da Fig. 18.111.
 b. Obtenha, usando os resultados do item (a), a corrente I da mesma figura.
 33. Determine o circuito equivalente de Norton para o circuito externo à reatância indutiva de $5 \text{ k}\Omega$ da Fig. 18.121.
 34. Obtenha o circuito equivalente de Norton para o circuito externo à reatância indutiva de $4 \text{ k}\Omega$ da Fig. 18.122.
 35. Ache o circuito equivalente de Norton para o circuito externo ao resistor de $4 \text{ k}\Omega$ da Fig. 18.113.
 *36. Encontre, para o circuito da Fig. 18.114, o circuito equivalente de Norton para a parte externa à reatância indutiva de $5 \text{ k}\Omega$.
 *37. No circuito da Fig. 18.125, encontre o circuito equivalente de Norton para a parte externa ao resistor de $2 \text{ k}\Omega$.

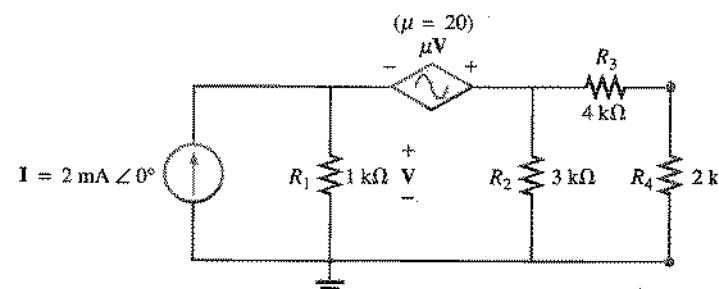
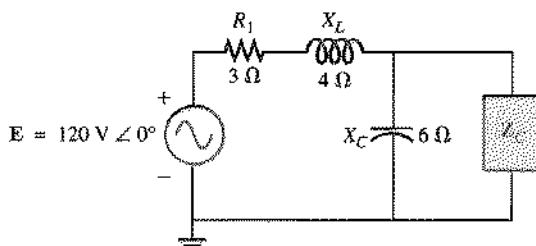


Fig. 18.125 Problema 37.

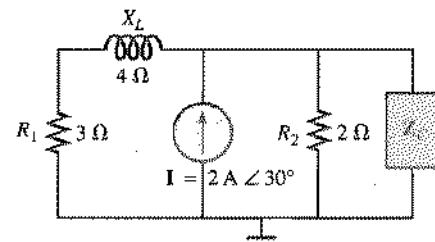
- *38. Obtenha o circuito equivalente de Norton para o circuito externo à fonte de corrente I_1 da Fig. 18.116.

SEÇÃO 18.5 Teorema da Transferência Máxima de Potência

39. Obtenha a impedância de carga Z_C para os circuitos da Fig. 18.126 de modo que a potência fornecida à carga seja máxima, e calcule o valor desta potência.



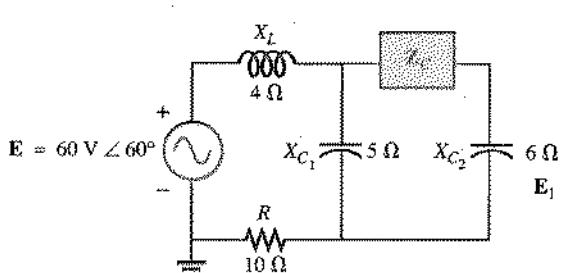
(a)



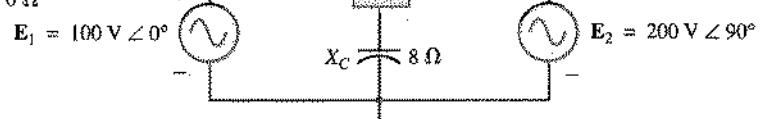
(b)

Fig. 18.126 Problema 39.

- *40. Obtenha a impedância de carga Z_C para os circuitos da Fig. 18.127 de modo que a potência fornecida à carga seja máxima, e calcule o valor desta potência.



(a)



(b)

Fig. 18.127 Problema 40.

41. Obtenha a impedância de carga R_C para o circuito da Fig. 18.128 de modo que a potência fornecida à carga seja máxima, e calcule o valor desta potência.

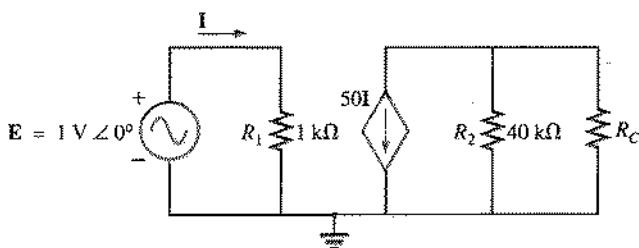


Fig. 18.128 Problema 41.

- *42. a. Qual a impedância da carga que, se colocada no lugar do resistor R_2 da Fig. 18.109, tornaria máxima a potência dissipada por esta carga?
b. Determine, a partir do resultado do item (a), o valor da potência máxima.
- *43. a. Qual a impedância da carga que, se colocada no lugar do capacitor X_C da Fig. 18.110, tornaria máxima a potência dissipada por esta carga?
b. Determine, a partir do resultado do item (a), o valor da potência máxima.
- *44. a. Qual a impedância de carga que, se colocada no lugar do indutor X_L na Fig. 18.111, tornaria máxima a potência dissipada por esta carga?

- b. Determine, a partir do resultado do item (a), o valor da potência máxima.

45. a. Calcule o valor de R_C que torna máxima a potência fornecida à carga no circuito da Fig. 18.129.
b. Calcule o valor desta potência usando os resultados do item (a).

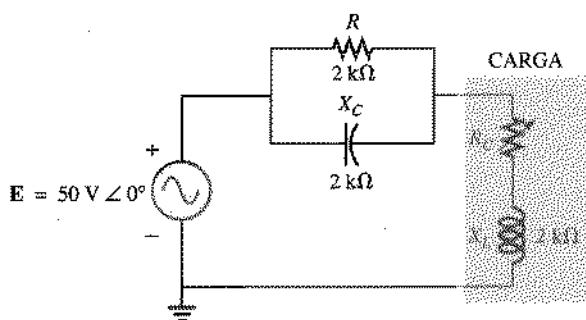


Fig. 18.129 Problema 45.

- *46. a. No circuito da Fig. 18.130, calcule o valor da capacitância que fará com que a potência fornecida à carga seja máxima, levando em conta que esta capacitância pode variar entre 1 e 5 nF.
b. Usando o resultado do item (a), obtenha o valor de R_C para que a potência fornecida à carga seja máxima.
c. Calcule, a partir dos resultados obtidos em (a) e (b), o valor desta potência máxima.

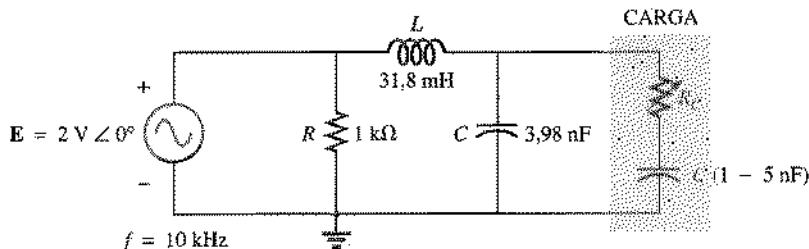


Fig. 18.130 Problema 46.

SEÇÃO 18.6 Teoremas da Substituição, da Reciprocidade e de Millman

47. Determine dois ramos equivalentes no circuito da Fig. 18.131 aplicando o teorema da substituição ao ramo *a-b*.

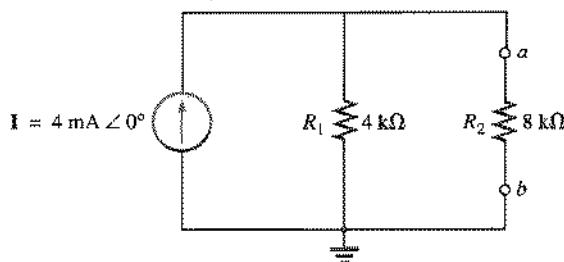
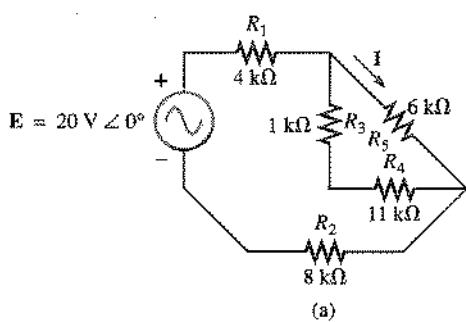
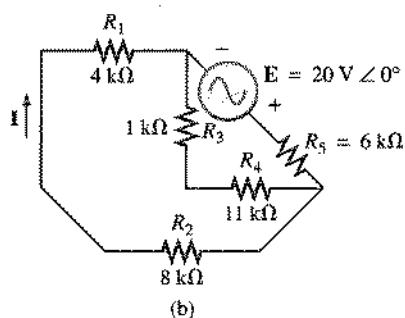


Fig. 18.131 Problema 47.

48. a. Obtenha a corrente I no circuito da Fig. 18.132(a).
 b. Repita o item (a) para o circuito da Fig. 18.132(b).
 c. Compare os resultados dos itens (a) e (b).



(a)



(b)

Fig. 18.132 Problema 48.

49. Utilizando o teorema de Millman, determine a corrente na reatância capacitiva de $4 \text{ k}\Omega$ da Fig. 18.133.

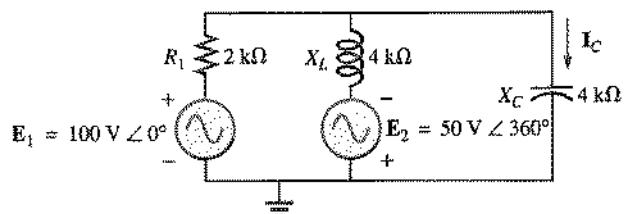


Fig. 18.133 Problema 49.

SEÇÃO 18.7 Análise Computacional PSpice (DOS)

50. Escreva um arquivo de entrada para o circuito da Fig. 18.1 de modo que a solução seja obtida através do teorema da superposição.
 *51. Escreva o arquivo de entrada para determinar a tensão e a impedância de Thévenin para o circuito da Fig. 18.119(b).
 *52. Escreva o arquivo de entrada para a obtenção da impedância e da tensão de Thévenin para o circuito da Fig. 18.50 com $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $\mu = 50$ e $I = 10 \text{ mA} \angle 0^\circ$. Compare os resultados com a solução obtida usando os resultados do Exemplo 18.12.
 *53. Escreva o arquivo de entrada para obter o circuito equivalente de Norton do circuito do Exemplo 18.15.

PSpice (Windows)

54. Aplique o teorema da superposição ao circuito da Fig. 18.6, ou seja, determine a corrente I devido a cada uma das fontes, obtendo em seguida a corrente total.
 *55. Obtenha, utilizando esquemas, a corrente I_C para o circuito da Fig. 18.21.
 *56. Obtenha, usando esquemas, a tensão V_2 no circuito da Fig. 18.56, quando $V_i = 1 \text{ V} < 0^\circ$, $R_1 = 0.5 \text{ k}\Omega$, $k_1 = 3 \times 10^{-4}$, $k_2 = 50$ e $R_2 = 30 \text{ k}\Omega$.
 *57. Obtenha, usando esquemas, o circuito equivalente de Norton do circuito da Fig. 18.75.
 *58. Obtenha, utilizando esquemas, o gráfico da potência fornecida à carga R_C na Fig. 18.88 para valores de R_{CG} entre 1Ω e 10Ω .

Linguagens de Programação (C++, BASIC, Pascal etc.)

59. Utilizando o teorema da superposição, escreva um programa para obter uma solução geral para a corrente I no circuito da Fig. 18.1, isto é, dadas as reatâncias dos elementos do circuito, obtenha I para fontes de tensão de qualquer amplitude, mas sempre com a mesma fase.

- 60.** Dado o circuito da Fig. 18.23, escreva um programa para determinar a tensão e a impedância de Thévenin sejam quais forem as reatâncias dos componentes e a amplitude da tensão da fonte. A fase da tensão da fonte deve permanecer fixa em zero grau.
- 61.** Dado o circuito da Fig. 18.34, demonstre que a potência fornecida à carga será máxima quando $X_c = X_L$, construindo uma tabela da potência para X_c variando de $0,1 \text{ k}\Omega$ até $2 \text{ k}\Omega$ em incrementos de $0,1 \text{ k}\Omega$.

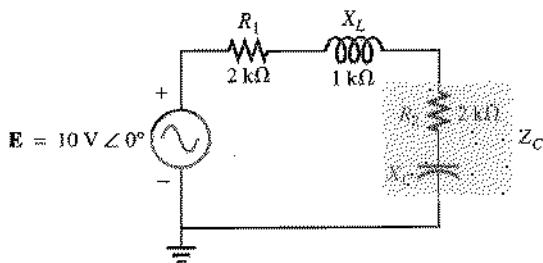


Fig. 18.134 Problema 61.

GLOSSÁRIO

Fonte de corrente controlada por corrente (CCCS) Fonte de corrente cujos parâmetros são controlados por uma corrente em outra parte do circuito.

Fonte de corrente controlada por tensão (VCCS) Fonte de corrente cujos parâmetros são controlados por uma tensão em outra parte do circuito.

Fonte de tensão controlada por corrente (CCVS) Fonte de tensão cujos parâmetros são controlados por uma corrente em outra parte do circuito.

Fonte de tensão controlada por tensão (VCVS) Fonte de tensão cujos parâmetros são controlados por uma tensão em outra parte do circuito.

Teorema da reciprocidade Teorema segundo o qual, em circuitos com uma única fonte, a corrente em qualquer ramo é igual à corrente no ramo onde a fonte estava inicialmente localizada, se colocarmos a fonte no ramo onde a corrente foi medida inicialmente.

Teorema da substituição Teorema segundo o qual se conhecermos a corrente em qualquer ramo de um circuito ac bilateral e a tensão entre seus terminais, podemos substituí-lo por qualquer combinação de elementos que mantenha inalteradas a tensão e a corrente originais.

Teorema da superposição Método de análise de circuitos que permite que levemos em conta os efeitos de cada fonte independentemente. A tensão e/ou corrente resultante é dada pela soma fasorial das correntes e/ou tensões produzidas individualmente pelas fontes.

Teorema da transferência máxima de potência Teorema para determinar a impedância de carga necessária para que a potência transferida para a carga seja máxima.

Teorema de Millman Método que utiliza a conversão de fontes de tensão em fontes de corrente para determinar valores desconhecidos em circuitos de várias malhas.

Teorema de Norton Teorema que estabelece a possibilidade de redução de qualquer circuito ac linear de dois terminais a um circuito composto de uma fonte de corrente e uma impedância em paralelo. A configuração resultante pode ser usada para obter uma tensão ou uma corrente particular no circuito original ou para avaliar os efeitos de uma parte do circuito sobre uma variável qualquer.

Teorema de Thévenin Teorema que estabelece a possibilidade de redução de qualquer circuito ac linear de dois terminais a um circuito constituído por uma fonte de tensão e uma impedância em série. A configuração resultante pode ser usada para obter uma corrente ou uma tensão particulares no circuito original ou para avaliar os efeitos de uma parte do circuito sobre uma variável qualquer.

Potência (ac)

19.1 INTRODUÇÃO

A discussão sobre potência no Cap. 14 se referia apenas à potência média fornecida a um circuito ac. Iremos examinar agora a expressão da potência total de uma forma um pouco diferente e introduzir dois novos tipos de potência: *aparente* e *reativa*.

Em um sistema como o da Fig. 19.1, a potência fornecida a uma carga em qualquer instante é definida pelo produto da tensão aplicada pela corrente resultante:

$$p = vi$$

Se v e i forem grandezas senoidais, teremos:

$$v = V_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$$

$$\text{e} \quad i = I_m \operatorname{sen} \omega t$$

Estas expressões para v e i cobrem todas as possibilidades: se a carga for puramente resistiva, $\theta = 0^\circ$; se for puramente indutiva, $\theta = 90^\circ$; se for puramente capacitativa, $\theta = -90^\circ$. Nos circuitos indutivos, θ é positivo (v adiantada em relação a i), enquanto nos circuitos capacitivos θ é negativo (i adiantada em relação a v).

Substituindo as equações de v e i na expressão da potência, temos

$$p = V_m I_m \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$$

Se aplicarmos agora algumas identidades trigonométricas, ficaremos com a seguinte expressão para a potência:

$$p = VI \cos \theta(1 + \cos 2\omega t) + VI \operatorname{sen} \theta(\operatorname{sen} 2\omega t) \quad (19.1)$$

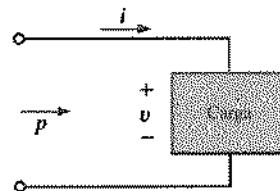


Fig. 19.1 Definição da potência fornecida a uma carga.

onde V e I são valores efetivos. A conversão dos valores de pico, V_m e I_m , para valores efetivos resultou das transformações realizadas com o auxílio das identidades trigonométricas.

Pode parecer inicialmente que nada foi ganho ao colocarmos a equação nesta forma. A utilidade da forma da Eq. (19.1) será, no entanto, demonstrada nas próximas seções. A dedução da Eq. (19.1) a partir da forma inicial será proposta como exercício final do capítulo.

Se a Eq. (19.1) for escrita na forma

$$p = \underbrace{VI \cos \theta}_{\text{Média}} - \underbrace{\frac{VI \cos \theta \cos 2\omega t}{2\pi}}_{\text{Pico}} + \underbrace{\frac{VI \sin \theta \sin 2\omega t}{2\pi}}$$

dois fatos se tornarão evidentes. Primeiro, a potência média aparece em um termo isolado que é independente do tempo. Segundo, os outros dois termos variam com uma freqüência que é o dobro da freqüência da tensão e da corrente.

Para tornar o estudo mais sistemático, vamos tratar separadamente os três elementos básicos (R , L e C).

19.2 CIRCUITOS RESISTIVOS

Nos circuitos puramente resistivos (como o da Fig. 19.2), v e i estão em fase e $\theta = 0^\circ$, como na Fig. 19.3. Fazendo $\theta = 0^\circ$ na Eq. (19.1), obtemos

$$\begin{aligned} p_R &= VI \cos(0^\circ)(1 - \cos 2\omega t) + VI \sin(0^\circ) \sin 2\omega t \\ &= VI(1 - \cos 2\omega t) + 0 \end{aligned}$$

ou

$$p_R = VI - VI \cos 2\omega t \quad (19.2)$$

onde VI é o termo correspondente à potência média e $-VI \cos 2\omega t$ é uma co-senóide de amplitude VI e freqüência duas vezes maior que a da tensão e corrente.

Plotando a forma de onda de p_R (Fig. 19.3), vemos que

T_1 é o período da tensão e da corrente

T_2 é o período da potência p_R .

Observe na Fig. 19.3 que para cada ciclo de v ou i a potência passa por dois ciclos ($T_1 = 2T_2$ ou $f_2 = 2f_1$). Note também que a potência não se torna negativa em nenhum ponto do ciclo. Isto significa que

toda a potência fornecida a um resistor é dissipada em forma de calor.

A potência que retorna à fonte é representada pela parte da curva abaixo do eixo, que neste caso é zero. A potência dissipada pelo resistor em qualquer instante de tempo t_1 pode ser encontrada simplesmente substituindo t_1 na Eq. (19.2) para obter p_1 , como na Fig. 19.3. De acordo com a Eq. (19.2) ou com a Fig. 19.3, a potência média é VI . Resumindo,



Fig. 19.2 Determinação da potência fornecida a uma carga puramente resistiva.

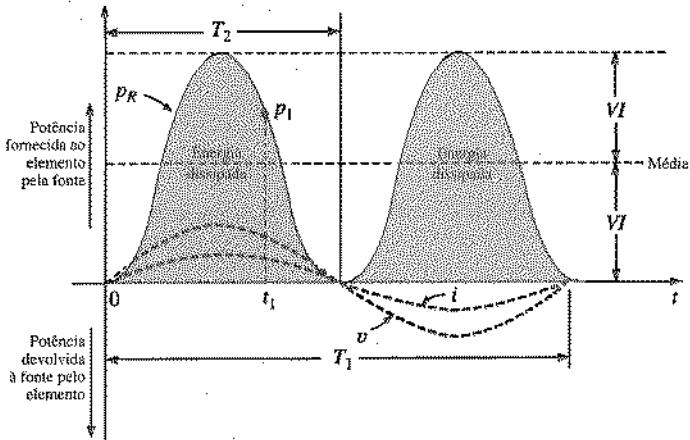


Fig. 19.3 Potência em função do tempo para uma carga puramente resistiva.

$$P = VI = \frac{V_m I_m}{2\pi} = \frac{V^2}{R} = \frac{VI}{R}$$

(watts, W) (19.3)

como foi mostrado no Cap. 14.

A energia dissipada pelo resistor (W_R) em um ciclo completo da tensão aplicada (Fig. 19.3) pode ser obtida utilizando a seguinte equação:

$$W = Pt$$

onde P é o valor médio e t é o período da tensão aplicada. Assim,

$$W_R = VI T_1$$

(Joules, J) (19.4)

ou, como $T_1 = 1/f_1$,

$$W_R = \frac{VI}{f_1}$$

(Joules, J) (19.5)

19.3 POTÊNCIA APARENTE

Os resultados obtidos no estudo dos circuitos de corrente contínua (e também nos circuitos resistivos de corrente alternada, como vimos na seção anterior) parecem indicar que a potência fornecida a uma carga como a da Fig. 19.4 é dada simplesmente pelo produto da corrente pela tensão aplicada, $P = VI$, qualquer que seja a natureza da carga. Entretanto, vimos no Cap. 14 que o fator da potência ($\cos \theta$) da carga tem um efeito considerável sobre a potência dissipada. Embora o produto da tensão pela corrente nem sempre seja igual à potência fornecida, trate-se de um parâmetro útil para a descrição e análise de circuitos de corrente alternada senoidal e para a especificação de componentes e sistemas elétricos. Este parâmetro é chamado de *potência aparente* e representado pelo símbolo S .* Como a potência apa-

* Antes de 1968, o símbolo para a potência aparente era P_o .

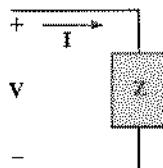


Fig. 19.4 Definição da potência aparente fornecida a uma carga.

rente é simplesmente o produto da tensão pela corrente, sua unidade é o *volt-ampère*, cuja abreviação é VA. Matematicamente, temos

$$S = VI \quad (\text{volt-ampères, VA}) \quad (19.6)$$

ou, como $V = IZ$ e $I = \frac{V}{Z}$

então $S = I^2 Z$ (VA) (19.7)

e $S = \frac{V^2}{Z}$ (VA) (19.8)

A potência média fornecida à carga da Fig. 19.4 é

$$P = VI \cos \theta$$

Entretanto,

$$S = VI$$

Assim,

$$P = S \cos \theta \quad (\text{W}) \quad (19.9)$$

e o fator de potência de um sistema, F_p , é

$$F_p = \cos \theta = \frac{P}{S} \quad (\text{adimensional}) \quad (19.10)$$

O fator de potência de um circuito, portanto, é a razão entre a potência média e a potência aparente. Para um circuito puramente resistivo, temos

$$P = VI = S$$

e $F_p = \cos \theta = \frac{P}{S} = 1$

Em geral, a potência dos equipamentos é especificada em volt-ampères (VA) ou em quilovolt-ampères (kVA), e não em watts. Conhecendo a potência de trabalho em volt-ampères e a tensão de trabalho, é fácil calcular a corrente máxima de operação. Por exemplo: um equipamento cuja potência de trabalho é 10 kVA e cuja tensão de operação é 200 V não deve operar com uma corrente maior do que $I = 10.000 \text{ VA}/200 \text{ V} = 50 \text{ A}$. O valor da potência em volt-ampères de um equipamento é igual à potência em watts somente quando $F_p = 1$. Esta é portanto uma especificação para condições extremas de operação, que ocorrem apenas quando a impedância total de um sistema $Z \angle \theta$ é tal que $\theta = 0^\circ$.

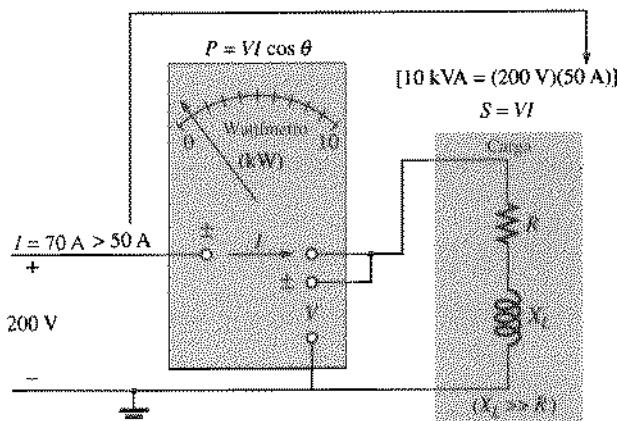


Fig. 19.5 Demonstração do motivo para especificar uma carga em kVA e não em kW.

O consumo exato de corrente de um equipamento, quando usado em condições normais de operação, poderia ser determinado se fossem especificados o fator de potência e a potência de operação em watts, em vez da potência aparente em volt-ampères. Entretanto, muitas vezes o fator de potência não é conhecido ou varia com a carga.

O motivo para se especificar a potência de alguns equipamentos elétricos em quilovolts-ampères e não em quilowatts pode ser compreendido se examinarmos o circuito da Fig. 19.5. A carga tem uma potência aparente de operação de 10 kVA e uma corrente máxima permitida de 50 A para a tensão de operação de 200 V. Na figura, a carga está sendo submetida a uma corrente de 70 A, maior do que o valor máximo permitido, e no entanto a leitura do wattímetro é relativamente baixa, porque a carga é altamente reativa. Em outras palavras, a leitura do wattímetro indica apenas a potência dissipada e pode não refletir o valor da corrente que está atravessando o circuito. Teoricamente, se a carga fosse puramente reativa, a leitura do wattímetro seria zero mesmo que o equipamento estivesse sendo danificado por uma corrente excessiva.

19.4 CIRCUITOS INDUTIVOS E POTÊNCIA REATIVA

Nos circuitos puramente indutivos (como o da Fig. 19.6), ν está adiantada de 90° em relação a i , como na Fig. 19.7. Dessa forma, $\theta = 90^\circ$ na Eq. (19.1). Substituindo esse valor de θ na Eq. (19.1), temos:

$$p_L = VI \cos(90^\circ)(1 - \cos 2\omega t) + VI \sin(90^\circ)(\sin 2\omega t) \\ = 0 + VI \sin 2\omega t$$

ou

$$p_L = VI \sin 2\omega t \quad (19.11)$$

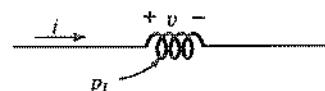


Fig. 19.6 Definição do valor da potência para uma carga puramente indutiva.

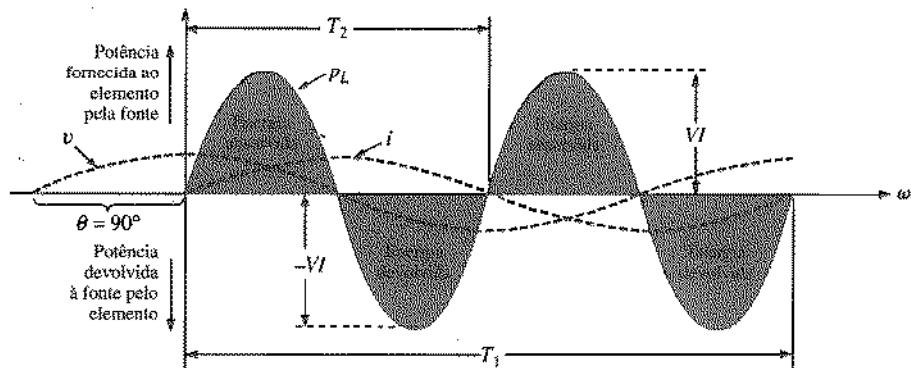


Fig. 19.7 Curva de potência para uma carga puramente indutiva.

onde $VI \sin 2\omega t$ é uma senóide com o dobro da freqüência de entrada (v ou i) e amplitude VI . Note a ausência de um termo associado a um valor médio ou constante na equação.

Traçando o gráfico de p_L (Fig. 19.7), temos

$$T_1 = \text{período da tensão e da corrente}$$

$$T_2 = \text{período de } p_L$$

Observe que em um ciclo completo de p_L (T_2), a área acima do eixo horizontal da Fig. 19.7 é igual à área abaixo do eixo. Isto indica que em um ciclo completo de p_L , a potência fornecida pela fonte ao indutor é exatamente igual à potência devolvida à fonte pelo indutor.

No caso de um indutor puro (ideal), a troca de potência entre a fonte e a carga durante um ciclo completo é exatamente zero; nenhuma energia é perdida no processo.

A potência absorvida ou devolvida pelo indutor em qualquer instante do tempo t_1 pode ser encontrada simplesmente substituindo t por t_1 na Eq. (19.11). O valor máximo da curva VI é denominado *potência reativa* associada a um indutor puro.

A potência reativa associada a qualquer circuito é definida como $VI \sin \theta$, um dos fatores que aparecem no segundo membro da Eq. (19.1). Observe que esta é a amplitude do termo cuja média para um ciclo completo é nula. O símbolo da potência reativa é Q e sua unidade de medida é o *volt-ampère reativo* (VAR).* O símbolo θ foi escolhido por causa da relação de quadratura (90°) entre a potência média e a potência reativa, que será discutida daqui a pouco. Temos:

$$Q = VI \sin \theta \quad (\text{volt-ampères-reativos, VAR}) \quad (19.12)$$

onde θ é o ângulo de fase entre V e I .

Para um indutor,

$$Q_L = VI \sin \theta \quad (\text{VAR}) \quad (19.13)$$

ou, como $V = IX_L$ ou $I = V/X_L$,

$$Q_L = I^2 X_L \quad (\text{VAR}) \quad (19.14)$$

ou

$$Q_L = \frac{V^2}{X_L} \quad (\text{VAR}) \quad (19.15)$$

A potência aparente associada a um indutor é $S = VI$ e a potência média é $P = 0$, como podemos observar na Fig. 19.7. O fator de potência é portanto

$$F_p = \cos \theta = \frac{P}{S} = \frac{0}{VI} = 0$$

Se a potência média é nula e toda a energia fornecida pela fonte é devolvida antes de terminar o ciclo, por que a potência reativa é importante? A razão não é óbvia, mas pode ser explicada usando a curva da Fig. 19.7. Em todos os instantes de tempo para os quais a potência está acima do eixo horizontal (ou seja, para os quais a potência é positiva), a fonte precisa fornecer energia ao indutor, embora ela seja totalmente devolvida mais tarde, na parte negativa do ciclo. Assim, para atender à demanda de um sistema que contém componentes reativos, como indutores, é preciso aumentar a capacidade da usina geradora, embora a parcela reativa da potência não seja dissipada, mas apenas “emprestada”. A maior demanda associada aos elementos reativos é um fator de custo que precisa ser repassado aos consumidores industriais. Na verdade, os consumidores de energia elétrica pagam pela potência aparente que consomem e não pela potência dissipada em seus equipamentos, já que a potência é medida em volt-ampères e não em watts. Assim, quanto mais próximo de 1 está o fator de potência de um consumidor, maior a eficiência dos seus equipamentos, já que a parcela de potência “emprestada” (isto é, que é medida mas não é consumida) é menor. De fato, a maioria dos grandes usuários de energia elétrica paga pela demanda aparente de potência em vez dos watts dissipados, pois os volt-ampères usados são sensíveis à necessidade de potência reativa.

A energia armazenada pelo indutor na parte positiva do ciclo (Fig. 19.7) é igual à devolvida na parte negativa e pode ser calculada através da seguinte equação:

$$W = Pt$$

onde P é o valor médio para o intervalo e t é o intervalo de tempo associado.

Lembre-se, do Cap. 14, de que o valor médio da parte positiva de uma senóide é igual a 2 (valor máximo/ π) e $t = T_2/2$. Assim,

$$W_L = \left(\frac{2VI}{\pi} \right) \times \left(\frac{T_2}{2} \right)$$

* Antes de 1968, o símbolo usado para a potência reativa era P_q .

e

$$W_L = \frac{VI T_2}{\pi} \quad (J)$$

(19.16)

ou, como $T_2 = I/f_2$, onde f_2 é a freqüência da curva de p_L ,

$$W_L = \frac{VI}{\pi f_2} \quad (J)$$

(19.17)

Como a freqüência f_2 da curva da potência é o dobro da freqüência da corrente e da tensão, f_1 , temos:

$$W_L = \frac{VI}{\pi(2f_1)} = \frac{VI}{\omega_1}$$

Entretanto,

$$V = IX_L = I\omega_1 L$$

e portanto

$$W_L = \frac{(I\omega_1 L)I}{\omega_1}$$

e

$$W_L = LI^2 \quad (J)$$

(19.18)

o que nos dá uma equação para a energia armazenada ou fornecida pelo indutor em meio ciclo da tensão aplicada em termos da indutância e do quadrado do valor efetivo da corrente.

19.5 CIRCUITOS CAPACITIVOS

Nos circuitos puramente capacitivos (como o da Fig. 19.8), i está adiantada de 90° em relação a v , como na Fig. 19.9. Dessa forma, $\theta = -90^\circ$ na Eq.(19.1). Substituindo esse valor de θ na Eq. (19.1), temos

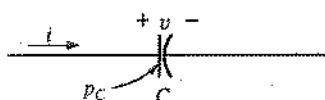


Fig. 19.8 Definição do valor da potência para uma carga puramente capacitiva.

$$p_C = VI \cos(-90^\circ)(1 - \cos 2\omega t) + VI \sin(-90^\circ)(\sin 2\omega t) \\ = 0 - VI \sin 2\omega t$$

ou

$$p_C = -VI \sin 2\omega t \quad (19.19)$$

onde $-VI \sin 2\omega t$ é uma senóide com o dobro da freqüência de entrada (v ou i) e amplitude VI . Note, mais uma vez, a ausência de um termo associado a um valor médio ou constante.Traçando o gráfico de p_C (Fig. 19.9), temos T_1 = período da tensão e da corrente T_2 = período de p_C Note que a situação é a mesma que para a curva de p_L (veja a seção anterior). Em um ciclo completo, a potência fornecida pela fonte ao capacitor é exatamente igual à potência devolvida à fonte pelo capacitor.

No caso de um capacitor puro (ideal), a troca de potência entre a fonte e a carga durante um ciclo completo é exatamente zero; nenhuma energia é perdida no processo.

A potência absorvida ou devolvida pelo capacitor em qualquer instante do tempo t , pode ser encontrada substituindo t por t_1 na Eq. (19.19).A potência reativa associada ao capacitor é igual à amplitude da curva de p_C :

$$Q_C = VI$$

(VAR)

(19.20)

Como $V = IX_C$ e $I = V/X_C$, a potência reativa associada ao capacitor pode também ser escrita como

$$Q_C = I^2 X_C$$

(VAR)

(19.21)

$$Q_C = \frac{V^2}{X_C}$$

(VAR)

(19.22)

A potência aparente associada ao capacitor é

$$S = VI$$

(VA)

(19.23)

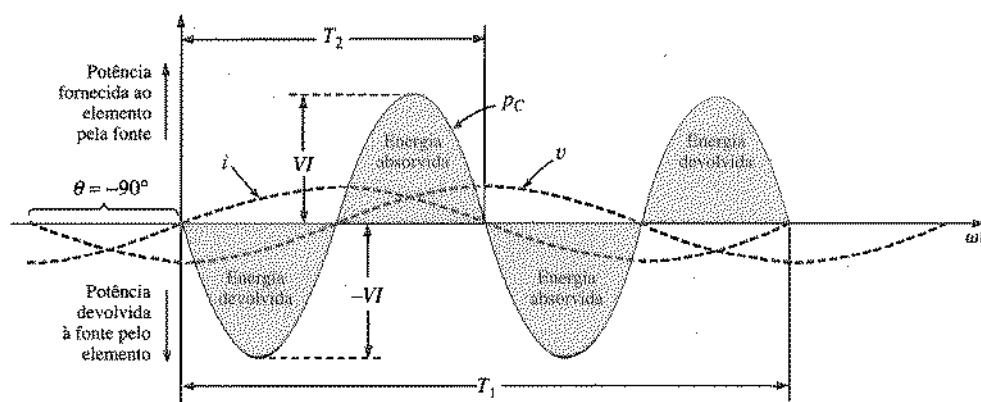


Fig. 19.9 Curva de potência para uma carga puramente capacitiva.

e a potência média é $P = 0$, como podemos observar na Eq. (19.19) ou na Fig. 19.9. O fator de potência é portanto

$$F_p = \cos \theta = \frac{P}{S} = \frac{0}{VI} = 0$$

A energia armazenada pelo capacitor na parte positiva do ciclo (Fig. 19.9) é igual à devolvida na parte negativa e pode ser obtida usando a equação $W = Pt$.

Como no caso do indutor (veja a seção anterior), é fácil mostrar que



(J)

(19.24)

ou, como $T_2 = 1/f_2$, onde f_2 é a freqüência da curva de p_C ,



(J)

(19.25)

Em termos da freqüência f_1 da corrente e da tensão,

$$W_C = \frac{VI}{\pi(2f_1)} = \frac{VI}{\omega_1} = \frac{V(V\omega_1 C)}{\omega_1}$$

e



(J)

(19.26)

o que nos fornece uma equação para a energia armazenada ou fornecida pelo capacitor em meio ciclo da tensão aplicada em termos da capacidade e do valor efetivo da tensão ao quadrado.

19.6 O TRIÂNGULO DE POTÊNCIAS

As grandezas potência aparente, potência média e potência reativa estão relacionadas pela seguinte equação vetorial:

$$\boxed{S = P + jQ} \quad (19.27)$$

onde

$$\mathbf{P} = P \angle 0^\circ \quad \mathbf{Q}_L = Q_L \angle 90^\circ \quad \mathbf{Q}_C = Q_C \angle -90^\circ$$

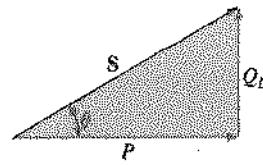


Fig. 19.10 Diagrama de potência para cargas indutivas.

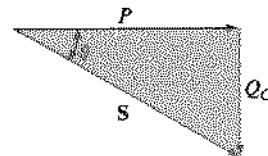


Fig. 19.11 Diagrama de potência para cargas capacitivas.

Para uma carga indutiva, a *potência fasorial* S , como é frequentemente chamada, é definida por

$$S = P + jQ_L$$

como podemos ver na Fig. 19.10.

O ângulo de 90° entre Q_L e P dá origem a outro termo usado para a potência reativa: *potência de quadratura*.

Para uma carga capacitiva, a potência fasorial S é definida por

$$S = P - jQ_C$$

como podemos ver na Fig. 19.11.

Se um circuito possui elementos capacitivos e indutivos, a componente reativa do triângulo de potências é dada pela *diferença* entre as potências reativas fornecidas a esses elementos. Se $Q_L > Q_C$, o triângulo de potências é semelhante ao da Fig. 19.10. Se $Q_C > Q_L$, o triângulo de potências é semelhante ao da Fig. 19.11. Para demonstrar que a potência reativa total é a diferença entre as potências reativas dos elementos capacitivos e indutivos, basta comparar as Eqs. (19.11) e (19.19). Essas equações foram usadas para plotar no mesmo gráfico as potências fornecidas aos elementos de um circuito $L-C$ em série (Fig.

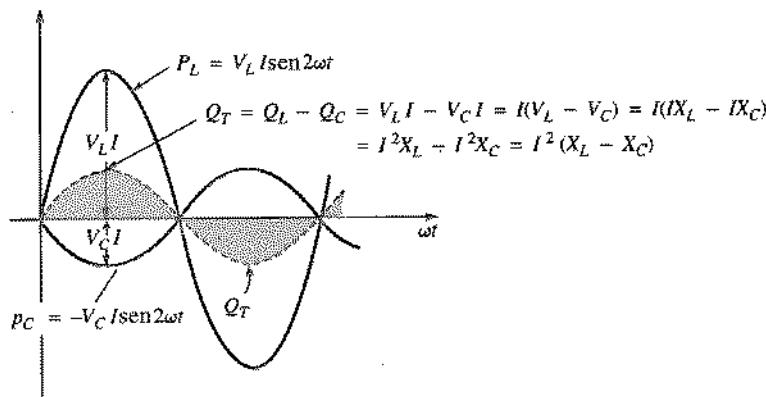


Fig. 19.12 Demonstração do motivo pelo qual a potência reativa total é a diferença entre as potências fornecidas aos elementos indutivos e capacitativos.

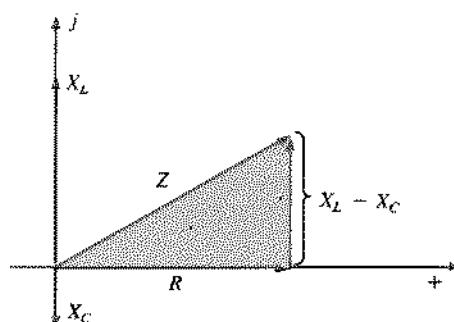


Fig. 19.13 Diagrama de impedância para um circuito R-L-C em série.

19.12). Os elementos reativos foram escolhidos de modo que $X_L > X_C$. Observe que as curvas de potência dos dois elementos estão defasadas de exatamente 180° . A curva da potência reativa resultante é igual à soma algébrica das duas potências. Como a potência reativa é definida como o valor de pico, a componente reativa do triângulo de potências é, como indica a figura, $I^2(X_L - X_C)$.

Uma verificação adicional pode ser obtida considerando primeiramente o diagrama de impedâncias de um circuito R-L-C em série (Fig. 19.13). Se multiplicarmos cada raio vetor pela corrente ao quadrado (I^2), obteremos os resultados da Fig. 19.14, que é o triângulo de potências para um circuito predominantemente indutivo.

Como os vetores associados à potência reativa e à potência média são sempre perpendiculares, os valores das três potências estão relacionados pelo teorema de Pitágoras:

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (19.28)$$

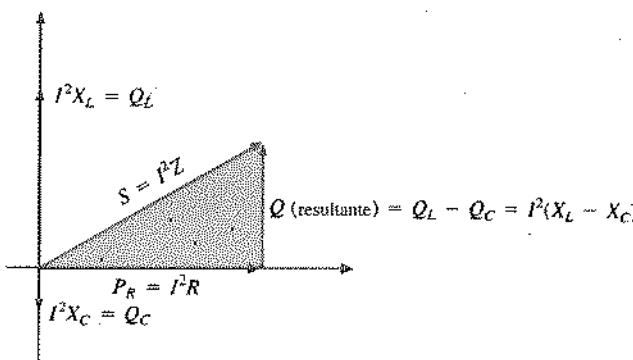
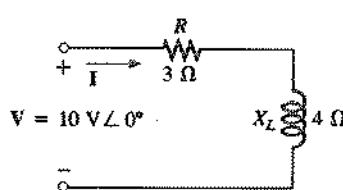
Fig. 19.14 Resultado da multiplicação dos vetores da Fig. 19.13 por I^2 para um circuito R-L-C em série.

Fig. 19.15 Demonstração da validade da Eq. (19.29).

Dessa forma, se conhecermos os valores de duas destas potências, sempre poderemos calcular a terceira.

É especialmente interessante o fato de que a equação

$$S = VI^* \quad (19.29)$$

nos fornece a forma vetorial da potência aparente de um sistema. Aqui, V é a tensão aplicada ao sistema e I^* é o complexo conjugado da corrente.

Considere, por exemplo, o circuito R-L da Fig. 19.15, no qual

$$I = \frac{V}{Z_T} = \frac{10 \text{ V} \angle 0^\circ}{3 \Omega + j 4 \Omega} = \frac{10 \text{ V} \angle 0^\circ}{5 \Omega \angle 53,13^\circ} = 2 \text{ A} \angle -53,13^\circ$$

A potência real (o termo *real* está associado ao fato de que a potência média é plotada no semi-eixo positivo do eixo real do plano complexo) é dada por

$$P = I^2R = (2 \text{ A})^2(3 \Omega) = 12 \text{ W}$$

e a potência reativa é dada por

$$Q_L = I^2X_L = (2 \text{ A})^2(4 \Omega) = 16 \text{ VAR}$$

e portanto

$$\begin{aligned} S &= P + j Q_L = 12 \text{ W} + j 16 \text{ VAR} \\ &= 20 \text{ VA} \angle 53,13^\circ \end{aligned}$$

como podemos ver na Fig. 19.16. Usando a Eq. (19.29), temos

$$S = VI^* = (10 \text{ V} \angle 0^\circ)(2 \text{ A} \angle +53,13^\circ) = 20 \text{ VA} \angle 53,13^\circ$$

como já havíamos obtido anteriormente.

O ângulo θ associado a S , que aparece nas Figs. 19.10, 19.11 e 19.16, é o ângulo do fator de potência do circuito. Como

$$P = VI \cos \theta$$

ou

$$P = S \cos \theta$$

então

$$F_p = \cos \theta = \frac{P}{S} \quad (19.30)$$

19.7 P , Q E S TOTAIS

O número total de watts, volt-ampères reativos e volt-ampères e o fator de potência de qualquer sistema podem ser obtidos utilizando o seguinte método:

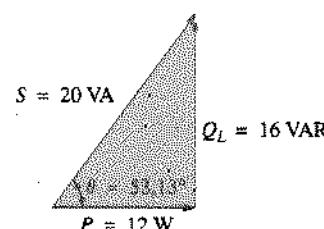


Fig. 19.16 Triângulo de potências para o circuito da Fig. 19.15.

1. Encontre a potência real e a potência reativa para todos os ramos do circuito.
2. A potência real total do sistema (P_T) é a soma das potências médias fornecidas a todos os ramos.
3. A potência reativa total (Q_T) é a diferença entre as potências reativas das cargas indutivas e a das cargas capacitivas.
4. A potência total aparente é dada por $S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$.
5. O fator de potência total é igual a P_T/S_T .

Há dois pontos importantes no método acima. Primeiro, a potência aparente total precisa ser calculada a partir das potências totais média e reativa e *não pode* ser calculada a partir das potências aparentes dos vários ramos. Segundo, e mais importante, *não é necessário* considerar a configuração dos ramos. Em outras palavras, a potência total real, reativa ou aparente é independente do fato de que as cargas estejam em série, em paralelo ou em série-paralelo. Os exemplos a seguir mostram como é fácil calcular todas as grandezas de interesse.

EXEMPLO 19.1 Encontre o número total de watts, de volt-ampères reativos e de volt-ampères e o fator de potência F_p do circuito da Fig. 19.17. Desenhe o triângulo de potências e encontre a corrente em forma fasorial.

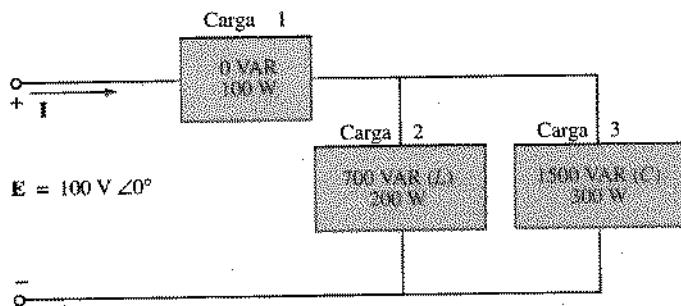


Fig. 19.17 Exemplo 19.1.

Solução: Construa uma tabela:

Carga	W	VAR	VA		
1	100	0	100		
2	200	700 (L)	$\sqrt{(200)^2 + (700)^2} = 728.0$		
3	300	1500 (C)	$\sqrt{(300)^2 + (1500)^2} = 1529.71$		
	$P_T = 600$	$Q_T = 800$ (C)	$S_T = \sqrt{(600)^2 + (800)^2} = 1000$		
Potência total dissipada		Potência reativa do circuito			
(Note que $S_T = \sqrt{\text{Soma das três ramos}}$)					
$1000 \neq 100 + 728 + 1529.71$					

$$F_p = \frac{P_T}{S_T} = \frac{600 \text{ W}}{1000 \text{ VA}} = 0,6 \text{ adiantado (C)}$$

O triângulo de potências aparece na Fig. 19.18.

Como $S_T = VI = 1000 \text{ VA}$, $I = 1000 \text{ VA}/100 \text{ V} = 10 \text{ A}$; como o θ de $\cos \theta = F_p$ é o ângulo entre a tensão e a corrente,

$$I = 10 \text{ A} \angle +53,13^\circ$$

Há um sinal positivo associado à fase, pois o circuito é predominantemente capacitivo.

EXEMPLO 19.2

- a. Encontre o número total de watts, volt-ampères reativos e volt-ampères e o fator de potência F_p para o circuito da Fig. 19.19.
- b. Desenhe o triângulo de potências.
- c. Encontre a energia dissipada pelo resistor durante um ciclo completo da tensão, se a freqüência da tensão for 60 Hz.
- d. Encontre a energia armazenada, ou devolvida, pelo capacitor e pelo indutor durante meio ciclo da curva de potência se a freqüência da tensão for 60 Hz.

Soluções:

$$\text{a. } I = \frac{E}{Z_T} = \frac{100 \text{ V} \angle 0^\circ}{6 \Omega + j7 \Omega - j15 \Omega} = \frac{100 \text{ V} \angle 0^\circ}{10 \Omega \angle -53,13^\circ} \\ = 10 \text{ A} \angle 53,13^\circ$$

$$V_R = (10 \text{ A} \angle 53,13^\circ)(6 \Omega \angle 0^\circ) = 60 \text{ V} \angle 53,13^\circ$$

$$V_L = (10 \text{ A} \angle 53,13^\circ)(7 \Omega \angle 90^\circ) = 70 \text{ V} \angle 143,13^\circ$$

$$V_C = (10 \text{ A} \angle 53,13^\circ)(15 \Omega \angle -90^\circ) = 150 \text{ V} \angle -36,87^\circ$$

$$P_T = EI \cos \theta = (100 \text{ V})(10 \text{ A}) \cos 53,13^\circ = 600 \text{ W} \\ = I^2 R = (10 \text{ A})^2(6 \Omega) = 600 \text{ W}$$

$$= \frac{V_R^2}{R} = \frac{(60 \text{ V})^2}{6} = 600 \text{ W}$$

$$S_T = EI = (100 \text{ V})(10 \text{ A}) = 1000 \text{ VA}$$

$$= I^2 Z_T = (10 \text{ A})^2(10 \Omega) = 1000 \text{ VA}$$

$$= \frac{E^2}{Z_T} = \frac{(100 \text{ V})^2}{10 \Omega} = 1000 \text{ VA}$$

$$Q_T = EI \sin \theta = (100 \text{ V})(10 \text{ A}) \sin 53,13^\circ = 800 \text{ VAR}$$

$$= Q_C - Q_L$$

$$= I^2(X_C - X_L) = (10 \text{ A})^2(15 \Omega - 7 \Omega) = 800 \text{ VAR}$$

$$Q_T = \frac{V_C^2}{X_C} - \frac{V_L^2}{X_L} = \frac{(150 \text{ V})^2}{15 \Omega} - \frac{(70 \text{ V})^2}{7 \Omega} \\ = 1500 \text{ VAR} - 700 \text{ VAR} = 800 \text{ VAR}$$

$$F_p = \frac{P_T}{S_T} = \frac{600 \text{ W}}{1000 \text{ VA}} = 0,6 \text{ adiantado (cap.)}$$

b. O triângulo de potências aparece na Fig. 19.20.

$$\text{c. } W_R = \frac{V_R I}{f_1} = \frac{(60 \text{ V})(10 \text{ A})}{60 \text{ Hz}} = 10 \text{ J}$$

$$\text{d. } W_L = \frac{V_L I}{\omega_1} = \frac{(70 \text{ V})(10 \text{ A})}{(2\pi)(60 \text{ Hz})} = \frac{700 \text{ J}}{377} = 1,86 \text{ J}$$

$$W_C = \frac{V_C I}{\omega_1} = \frac{(150 \text{ V})(10 \text{ A})}{377 \text{ rad/s}} = \frac{1500 \text{ J}}{377} = 3,98 \text{ J}$$

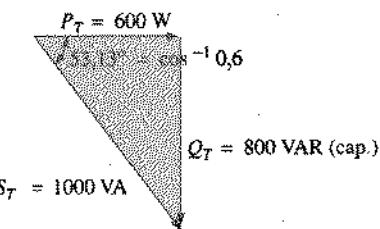


Fig. 19.18 Triângulo de potências para o Exemplo 19.1.

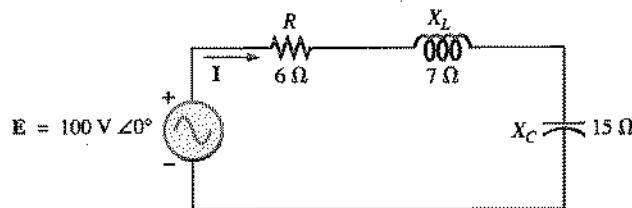


Fig. 19.19 Exemplo 19.2.

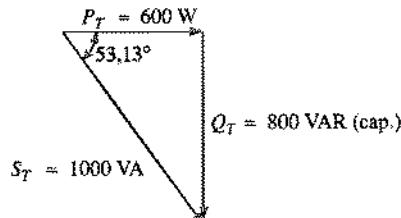


Fig. 19.20 Triângulo de potências para o Exemplo 19.2.

EXEMPLO 19.3 Para o sistema da Fig. 19.21,

- Encontre a potência média, a potência aparente, a potência reativa e F_p para cada ramo.
- Encontre o número total de watts, de volt-ampères reativos e de volt-ampères e o fator de potência do sistema. Desenhe o triângulo de potências.
- Encontre a corrente da fonte, I .

Soluções:a. *Lâmpadas:*

Toda a potência é dissipada

$$P_1 = 12(60 \text{ W}) = 720 \text{ W}$$

$$Q_1 = 0 \text{ VAR}$$

$$S_1 = P_1 = 720 \text{ VA}$$

$$F_{p1} = 1$$

Aquecedores:
Toda a potência é dissipada

$$P_2 = 6,4 \text{ kW}$$

$$Q_2 = 0 \text{ VAR}$$

$$S_2 = P_2 = 6,4 \text{ kVA}$$

$$F_{p2} = 1$$

Motor:

$$\eta = \frac{P_o}{P_i} \rightarrow P_i = \frac{P_o}{\eta} = \frac{5(746 \text{ W})}{0,82} = 4548,78 \text{ W} = P_3$$

$$F_p = 0,72 \text{ atrasado}$$

$$P_3 = S_3 \cos \theta \rightarrow S_3 = \frac{P_3}{\cos \theta} = \frac{4548,78 \text{ W}}{0,72} = 6317,75 \text{ VA}$$

Também sabemos que $\theta = \arccos 0,72 = 43,95^\circ$, de modo que

$$Q_3 = S_3 \sin \theta = (6317,75 \text{ VA})(\sin 43,95^\circ) \\ = (6317,75 \text{ VA})(0,694) = 4384,71 \text{ VAR}$$

Carga capacitiva:

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{208 \text{ V} \angle 0^\circ}{9 \Omega - j 12 \Omega} = \frac{208 \text{ V} \angle 0^\circ}{15 \Omega \angle -53,13^\circ} \\ = 13,87 \text{ A} \angle 53,13^\circ$$

$$P_4 = I^2 R = (13,87 \text{ A})^2 \cdot 9 \Omega = 1731,39 \text{ W}$$

$$Q_4 = I^2 X_C = (13,87 \text{ A})^2 \cdot 12 \Omega = 2308,52 \text{ VAR}$$

$$S_4 = \sqrt{P_4^2 + Q_4^2} = \sqrt{(1731,39 \text{ W})^2 + (2308,52 \text{ VAR})^2} \\ = 2885,65 \text{ VA}$$

$$F_p = \frac{P_4}{S_4} = \frac{1731,39 \text{ W}}{2885,65 \text{ VA}} = 0,6 \text{ adiantado}$$

$$b. P_T = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \\ = 720 \text{ W} + 6400 \text{ W} + 4548,78 \text{ W} + 1731,39 \text{ W} \\ = 13,400,17 \text{ W}$$

$$Q_T = \pm Q_1 \pm Q_2 \pm Q_3 \pm Q_4$$

$$= 0 + 0 + 4384,71 \text{ VAR} - 2308,52 \text{ VAR}$$

$$= 2076,19 \text{ VAR (ind.)}$$

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = \sqrt{(13,400,17 \text{ W})^2 + (2076,19 \text{ VAR})^2} \\ = 13,560,06 \text{ VA}$$

$$F_p = \frac{P_T}{S_T} = \frac{13,4 \text{ kW}}{13,560,06 \text{ VA}} = 0,988 \text{ atrasado}$$

$$\theta = \cos^{-1} 0,988 = 8,89^\circ$$

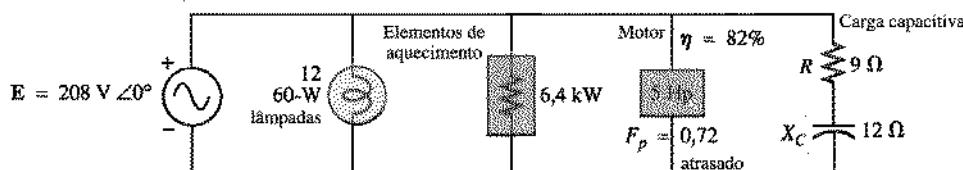


Fig. 19.21 Exemplo 19.3.

Observe a Fig. 19.22.



Fig. 19.22 Triângulo de potências para o Exemplo 19.3.

$$c. S_T = EI \rightarrow I = \frac{S_T}{E} = \frac{13,559,89 \text{ VA}}{208 \text{ V}} = 65,19 \text{ A}$$

Fator de potência atrasado: \mathbf{E} está adiantado de $8,89^\circ$ em relação a \mathbf{I} e assim

$$\mathbf{I} = 65,19 \text{ A} \angle -8,89^\circ$$

EXEMPLO 19.4 Um equipamento elétrico foi projetado para consumir uma potência de 5 kVA operando a 100 V com um fator de potência de 0,6 (atrasado). Qual a impedância do equipamento em coordenadas retangulares?

Solução:

$$S = EI = 5000 \text{ VA}$$

Dessa forma,

$$I = \frac{5000 \text{ VA}}{100 \text{ V}} = 50 \text{ A}$$

Para $F_p = 0,6$, temos

$$\theta = \cos^{-1} 0,6 = 53,13^\circ$$

Como o fator de potência é atrasado, o circuito é predominantemente indutivo e \mathbf{I} está atrasada em relação a \mathbf{E} . Assim, para $\mathbf{E} = 100 \text{ V} \angle 0^\circ$,

$$\mathbf{I} = 50 \text{ A} \angle -53,13^\circ$$

Entretanto,

$$\begin{aligned} Z_T &= \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}} = \frac{100 \text{ V} \angle 0^\circ}{50 \text{ A} \angle -53,13^\circ} = 2 \Omega \angle 53,13^\circ \\ &= 1,2 \Omega + j 1,6 \Omega \end{aligned}$$

que é a impedância do circuito da Fig. 19.23.

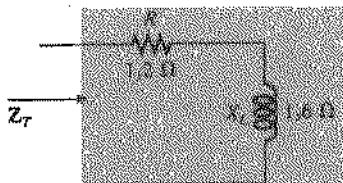


Fig. 19.23 Exemplo 19.4.

19.8 CORREÇÃO DO FATOR DE POTÊNCIA

O projeto de qualquer sistema de transmissão de energia é muito sensível à intensidade da corrente nas linhas, que depende das cargas ligadas ao sistema. Correntes mais altas resultam em maiores perdas de potência (por um fator quadrático, pois $P = I^2 R$) nas linhas de transmissão devido à resistência das mesmas. Valores elevados de corrente também tornam necessário o uso de condutores de grande área de seção reta, aumentando a quantidade de cobre necessária para construir a linha; além disso, obviamente, implicam uma maior capacidade de geração de energia por parte da concessionária.

Existe portanto um grande interesse em limitar a corrente ao mínimo necessário. Como a tensão nas linhas de um sistema de transmissão é mantida constante, a potência aparente é diretamente proporcional à corrente. Assim, quanto menor a potência aparente, menor a corrente na linha. Esta corrente é mínima quando $S = P$ e $Q_T = 0$. Note o efeito da diminuição de Q_T sobre o comprimento (módulo) de S na Fig. 19.24, para a mesma potência real. Note também que o ângulo do fator de potência se aproxima de zero grau e F_p se aproxima de 1, o que mostra que a carga se torna cada vez mais resistiva.

O processo de introduzir elementos reativos para levar o fator de potência a um valor mais próximo da unidade é chamado de *correção do fator de potência*. Como em geral as cargas são indutivas, o processo normalmente envolve a introdução de elementos capacitivos com o único objetivo de aumentar o fator de potência.

Na Fig. 19.25(a), por exemplo, uma carga indutiva está consumindo uma corrente I_L que possui uma componente real e uma imaginária. Na Fig. 19.25(b), uma carga capacitativa foi ligada em paralelo com a carga original para aumentar o fator de potência do sistema para um valor próximo da unidade. Observe que como os elementos indutivo (carga) e capacitativo estão ligados em paralelo, a carga continua a receber a mesma tensão e a consumir a mesma corrente, I_L . Em outras palavras, do ponto de vista da carga, tanto faz se o circuito é o da Fig. 19.25(a) ou o da Fig. 19.25(b).

A corrente da fonte na Fig. 19.25(b) é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_s &= \mathbf{I}_C + \mathbf{I}_L \\ &= -j \mathbf{I}_C + (\mathbf{I}_L + j \mathbf{I}_L') \\ &= \mathbf{I}_L + j (I_L' - I_C) \end{aligned}$$

Se X_C for escolhido de modo que $I_C = I_L'$,

$$\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_L + j(0) = \mathbf{I}_L \angle 0^\circ$$

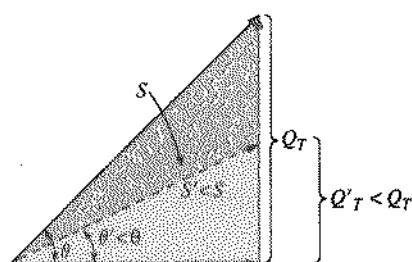


Fig. 19.24 Demonstração da influência da correção do fator de potência sobre o triângulo de potências de um circuito.

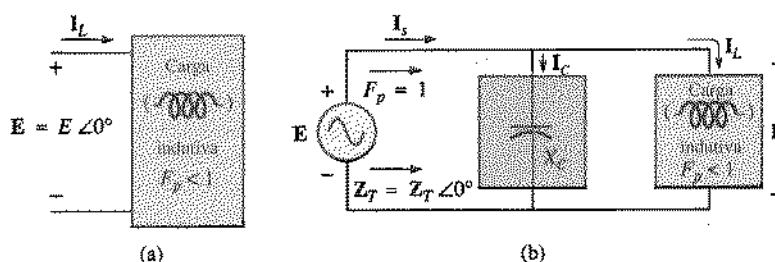


Fig. 19.25 Demonstração da influência de um elemento capacitivo sobre o fator de potência de um circuito.

O resultado é uma corrente na fonte cuja intensidade é igual à parte real da corrente na carga, que pode ser consideravelmente menor que a intensidade da corrente na Fig. 19.25(a). Além disso, como as fases associadas à tensão aplicada e à corrente na fonte são iguais, o sistema parece “resistivo” nos terminais de entrada e toda a potência fornecida é consumida, o que representa a condição de máxima eficiência para a concessionária.

EXEMPLO 19.5 Um motor de 5 hp com um fator de potência atrasado 0,6 e cuja eficiência é 92% está conectado a uma fonte de 208 V e 60 Hz.

- Construa o triângulo de potências para a carga.
- Determine o valor do capacitor que deve ser ligado em paralelo com a carga de modo a aumentar o fator de potência para 1.
- Compare a corrente na fonte do circuito compensado com a do circuito não-compensado.
- Determine o circuito equivalente para o circuito acima e verifique as conclusões.

Soluções:

a. Como 1 hp = 746 W,

$$P_o = 5 \text{ hp} = 5(746 \text{ W}) = 3730 \text{ W}$$

$$\text{e } P_i (\text{consumida}) = \frac{P_o}{\eta} = \frac{3730 \text{ W}}{0,92} = 4054,35 \text{ W}$$

Além disso, $F_p = \cos \theta = 0,6$

$$\text{e } \theta = \arccos 0,6 = 53,13^\circ$$

$$\text{Usando } \operatorname{tg} \theta = \frac{Q_L}{P_i}$$

$$\text{obtemos } Q_L = P_i \operatorname{tg} \theta = (4054,35 \text{ W}) \operatorname{tg} 53,13^\circ = 5405,8 \text{ VAR}$$

$$\text{e } S = \sqrt{P_i^2 + Q_L^2} = \sqrt{(4054,35 \text{ W})^2 + (5405,8 \text{ VAR})^2} = 6757,25 \text{ VA}$$

O triângulo de potências aparece na Fig. 19.26.

- Obtemos um fator de potência unitário introduzindo um valor de potência reativa capacitativa igual a 5405,8 VAR para equilibrar Q_L . Como

$$Q_C = \frac{V^2}{X_C}$$

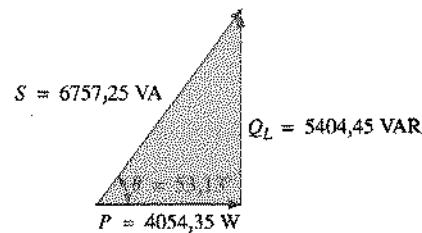


Fig. 19.26 Triângulo de potências inicial para a carga do Exemplo 19.5.

$$\text{então } X_C = \frac{V^2}{Q_C} = \frac{(208 \text{ V})^2}{5405,8 \text{ VAR}} = 8 \Omega$$

$$\text{e } C = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{(2\pi)(60 \text{ Hz})(8 \Omega)} = 331,6 \mu\text{F}$$

c. Para $F_p = 0,6$,

$$S = VI = 6757,25 \text{ VA}$$

$$\text{e } I = \frac{S}{V} = \frac{6757,25 \text{ VA}}{208 \text{ V}} = 32,49 \text{ A}$$

Para $F_p = 1$,

$$S = VI = 4054,35 \text{ VA}$$

$$\text{e } I = \frac{S}{V} = \frac{4054,35 \text{ VA}}{208 \text{ V}} = 19,49 \text{ A}$$

o que resulta em uma redução de 40% na corrente da fonte.

- Para o motor, o ângulo de avanço da tensão aplicada em relação à corrente é

$$\theta = \arccos^{-1} 0,6 = 53,13^\circ$$

e $P = EI_m \cos \theta = 4054,35 \text{ W}$, de acordo com o resultado acima, de modo que

$$I_m = \frac{P}{E \cos \theta} = \frac{4054,35 \text{ W}}{(208 \text{ V})(0,6)} = 32,49 \text{ A} \quad (\text{como acima})$$

o que resulta em

$$I_m = 32,49 \text{ A} \angle -53,13^\circ$$

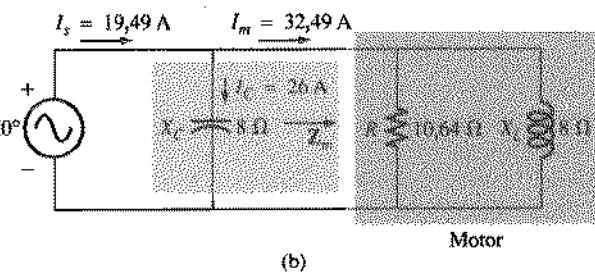
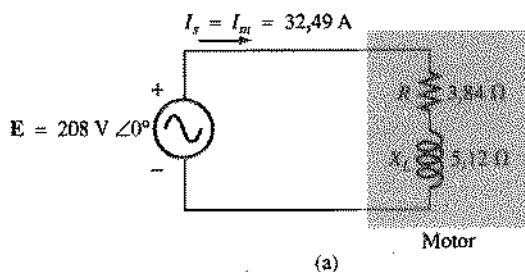


Fig. 19.27 Demonstração da influência da correção do fator de potência sobre a corrente da fonte.

Dessa forma,

$$\begin{aligned} Z_m &= \frac{E}{I_m} = \frac{208 \text{ V} \angle 0^\circ}{32,49 \text{ A} \angle -53,13^\circ} = 6,4 \Omega \angle 53,13^\circ \\ &= 3,84 \Omega + j 5,12 \Omega \end{aligned}$$

como mostra a Fig. 19.27(a).

A carga em paralelo equivalente é dada por

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{Z} = \frac{1}{6,4 \Omega \angle 53,13^\circ} \\ &= 0,156 \text{ S} \angle -53,13^\circ = 0,094 \text{ S} - j 0,125 \text{ S} \\ &= \frac{1}{10,64 \Omega} + \frac{1}{j 8 \Omega} \end{aligned}$$

como mostra a Fig. 19.27(b).

Fica claro agora que o efeito da reatância indutiva de 8Ω pode ser compensado por uma reatância capacitativa de 8Ω em paralelo, usando um capacitor de $332 \mu\text{F}$ para correção do fator de potência.

Como

$$\begin{aligned} Y_T &= \frac{1}{-j X_C} + \frac{1}{R} + \frac{1}{+j X_L} = \frac{1}{R} \\ I_s &= EY_T = E\left(\frac{1}{R}\right) = (208 \text{ V})\left(\frac{1}{10,64 \Omega}\right) \\ &= 19,54 \text{ A} \quad \text{como já foi visto} \end{aligned}$$

Além disso, o módulo da corrente no ramo onde está o capacitor pode ser obtido da seguinte forma:

$$I_C = \frac{E}{X_C} = \frac{208 \text{ V}}{8 \Omega} = 26 \text{ A}$$

EXEMPLO 19.6 Uma pequena usina geradora industrial alimenta 10 kW de aquecedores e 20kVA de motores elétricos. Os elementos de aquecimento são considerados puramente resistivos ($F_p = 1$) e os motores possuem um fator de potência atrasado igual a $0,7$. Se a fonte é de 1000 V e 60 Hz , determine a capacidade necessária para aumentar o fator de potência para $0,95$.

Solução: Para os motores,

$$S = VI = 20 \text{ kVA}$$

$$P = VI \cos \theta = (20 \times 10^3 \text{ VA})(0,7) = 14 \times 10^3 \text{ W}$$

$$\theta = \cos^{-1} 0,7 \approx 45,6^\circ$$

e

$$Q_L = VI \sin \theta = (20 \times 10^3 \text{ VA})(0,714) = 14,28 \times 10^3 \text{ VAR}$$

O triângulo de potências para o sistema aparece na Fig. 19.28. Observe a adição das potências reais e o S_T resultante:

$$S_T = \sqrt{(24 \text{ kW})^2 + (14,28 \text{ kVAR})^2} = 27,93 \text{ kVA}$$

com

$$I = \frac{S_T}{V} = \frac{27,93 \text{ kVA}}{1000 \text{ V}} = 27,93 \text{ A}$$

O fator de potência desejado, $0,95$, resulta em um ângulo entre S e P cujo valor é

$$\theta = \arccos^{-1} 0,95 = 18,19^\circ$$

modificando o triângulo de potências para o da Fig. 19.29 com

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{Q'_L}{P_T} \rightarrow Q'_L = P_T \operatorname{tg} \theta = (24 \times 10^3 \text{ W})(\operatorname{tg} 18,19^\circ) \\ &= (24 \times 10^3 \text{ W})(0,329) = 7,9 \text{ kVAR} \end{aligned}$$

A potência reativa indutiva precisa ser reduzida então de

$$Q_L - Q'_L = 14,28 \text{ kVAR} - 7,9 \text{ kVAR} = 6,38 \text{ kVAR}$$

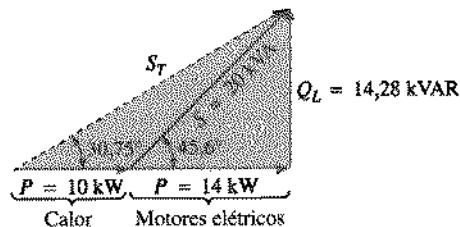


Fig. 19.28 Triângulo de potências inicial para a carga do Exemplo 19.6.

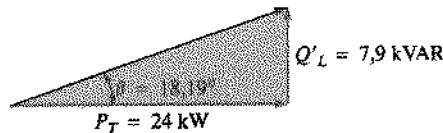


Fig. 19.29 Triângulo de potências para a carga do Exemplo 19.6 após o aumento do fator de potência para $0,95$.

Dessa forma, $Q_C = 6,38 \text{ kVAR}$, e usando

$$Q_C = \frac{V^2}{X_C}$$

obtemos

$$X_C = \frac{V^2}{Q_C} = \frac{(10^3 \text{ V})^2}{6,38 \times 10^3 \text{ VAR}} = 156,74 \Omega$$

e assim

$$C = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{(2\pi)(60 \text{ Hz})(156,74 \Omega)} = 16,93 \mu\text{F}$$

19.9 WATTÍMETROS E MEDIDORES DE FATOR DE POTÊNCIA

O wattímetro analógico já foi discutido na Seção 4.4. O mesmo medidor pode ser usado para medir a potência em circuitos de corrente alternada, usando o mesmo tipo de ligações.

O wattímetro digital da Fig. 19.30 utiliza circuitos eletrônicos sofisticados para medir a tensão e a corrente e, com o auxílio de um módulo de conversão analógico-digital, mostrar os resultados em forma digital. O aparelho também fornece os valores da potência por fasc, da potência total, da potência aparente, da potência reativa e do fator de potência.

Quando está usando um wattímetro, o operador deve tomar cuidado para não exceder os valores máximos de corrente, tensão e potência recomendados pelo fabricante. O valor máximo de potência nem sempre é igual ao produto do valor máximo de tensão pelo valor máximo de corrente. Nos wattímetros de alto fator de potência, o valor máximo da potência é no mínimo 80% do produto do valor máximo da tensão pelo valor máximo da corrente; nos wattímetros de baixo fator de potência, o valor máximo da potência é muito menor do que o produto do valor máximo da tensão pelo valor máximo da corrente. Por razões óbvias, os medidores de baixo fator de potência são usados apenas em circuitos de baixo fator de potência (impedância total altamente reativa). A Tabela 19.1 mostra os valores típicos de operação para medidores de alto fator de potência (AFP) e baixo fator de potência (BFP). A precisão dos dois tipos de medidores é de 0,5% a 1% do valor máximo da escala.

Como o nome indica, os medidores de fator de potência são projetados para mostrar o fator de potência de uma carga em condições de operação. Quase todos os medidores de fator de potência são projetados para serem usados em circuitos monofásicos ou trifásicos. A tensão e a corrente são medidas sem necessidade de abrir

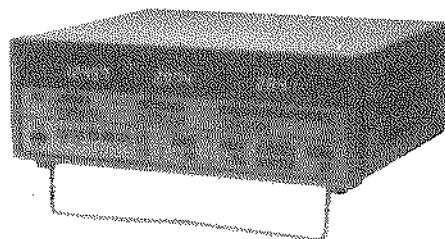


Fig. 19.30 Wattímetro digital. (Cortesia de Yokogawa Corporation of America.)



Fig. 19.31 Medidor de fator de potência com garra para medir correntes. (Cortesia de AEMC Corporation.)

o circuito. Para medir a corrente, utiliza-se um transformador em forma de garra, como o que aparece na Fig. 19.31.

A maioria dos medidores de fator de potência vem com uma série de tabelas que ajudam a escolher o capacitor de compensação que deve ser usado para melhorar o fator de potência, uma vez conhecido o fator de potência do circuito não-compensado. Os capacitores de compensação são geralmente especificados em kVAR (quilovolt-ampères reativos); valores típicos vão de 1 a 25 kVAR para 240 V e de 1 a 50 kVAR 480 V ou 600 V.

19.10 RESISTÊNCIA EFETIVA

A resistência de um condutor, obtida através da equação $R = \rho(l/A)$, é freqüentemente chamada de resistência *dc, ôhmica* ou *geométrica*. Trata-se de uma grandeza constante, que depende somente do material usado e da geometria do condutor. Nos circuitos ac, a resistência real dos condutores (chamada de resistência *efetiva*) difere da resistência dc devido às variações nos valores da corrente e da tensão, que introduzem efeitos não encontrados nos circuitos dc.

Estes efeitos incluem perdas por radiação, efeitos peliculares, correntes parasitas e perdas por histerese. Os dois primeiros estão presentes em qualquer circuito, enquanto os outros dois dão respeito a perdas adicionais causadas pela presença de materiais ferromagnéticos em campos magnéticos variáveis.

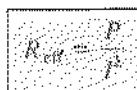
Método Experimental

A resistência efetiva de um circuito ac não pode ser medida pela razão V/I pois esta razão é agora a impedância de um circuito que

Tabela 19.1

Medidor	Corrente Máxima	Tensão Máxima	Potência Máxima
AFP	2,5 A	150 V	1500/750/375
	5,0 A	300 V	
BFP	2,5 A	150 V	300/150/75
	5,0 A	300 V	

pode possuir resistência e reatância. A resistência efetiva pode ser encontrada, entretanto, através da equação de potência $P = I^2 R$, onde



(19.31)

Assim, precisamos de um medidor de potência e de um medidor de corrente para medir a resistência efetiva de um circuito.

Perdas por Radiação

Vamos examinar agora as várias perdas que podem ocorrer. A perda por radiação é a perda de energia na forma de ondas eletromagnéticas durante a transferência de energia de um elemento para outro. Esta perda de energia torna necessário que a potência de entrada seja maior para estabelecer a mesma corrente I , fazendo com que R aumente, como determinado pela Eq. (19.31). A uma freqüência de 60 Hz, os efeitos de perdas por radiação podem ser completamente ignorados. Entretanto, nas freqüências de rádio, este efeito é importante e pode de fato se tornar o principal efeito a se considerar em dispositivos eletromagnéticos, como as antenas.

Efeito Pelicular

Para explicar o efeito pelicular torna-se necessário o uso de alguns conceitos básicos examinados anteriormente. O leitor deve se lembrar de que, conforme mencionamos no Cap. 11, existe um campo magnético em torno de qualquer condutor percorrido por uma corrente (Fig. 19.32).

Como a corrente nos circuitos ac varia com o tempo, o campo magnético também varia. Vimos também que, quando um condutor é submetido a um campo magnético variável, é induzida uma tensão entre suas extremidades, cujo valor é dado pela lei de Faraday, $e = N \times (d\phi/dt)$. Quanto maior a freqüência da corrente, maior a taxa de variação do fluxo magnético e portanto maior a tensão induzida.

Em um condutor percorrido por uma corrente alternada, o campo magnético variável age sobre o próprio fio, induzindo uma tensão que se opõe à corrente original. Este efeito é mais forte no centro do condutor do que na superfície porque o valor de $d\phi/dt$ é maior no centro do condutor. Quanto maior a freqüência, maior a taxa de variação do fluxo e portanto maior a tensão induzida. Em altas freqüências, a oposição à corrente se torna tão alta no centro do fio que praticamente toda a corrente se concentra na superfície do condutor: é o chamado *efeito pelicular*. Em 60 Hz, o efeito pelicular é relativamente pequeno.

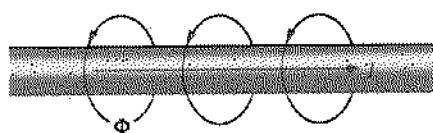


Fig. 19.32 Demonstração do efeito pelicular sobre a resistência efetiva de um condutor.

Nas freqüências de rádio, porém, este efeito pode ser considerável. O efeito peculiar reduz a área efetiva do condutor e portanto aumenta sua resistência, já que esta, de acordo com a equação $R \uparrow = \rho(l/A \downarrow)$, é inversamente proporcional à área efetiva.

Perdas por Histerese e por Correntes Parasitas

Como já foi mencionado, a histerese e as perdas por correntes parasitas se manifestam quando um material ferromagnético é submetido a um campo magnético variável. Para descrever as perdas por correntes parasitas, vamos considerar os efeitos de uma bobina enrolada em torno de um núcleo de material ferromagnético e submetida a uma corrente alternada. A corrente alternada produz um fluxo magnético variável, Φ , que, de acordo com a lei de Faraday, induz uma tensão no núcleo. Esta tensão faz com que surja no núcleo uma corrente $i_{par} = e_{ind}/R_N$, onde e_{ind} é a tensão induzida e $R_N = \rho(l/A)$ é a resistência geométrica do núcleo. A corrente i_{par} é denominada *corrente parasita* e tem uma trajetória circular, como na Fig. 19.33, mudando de sentido cada vez que a corrente na bobina muda de sentido.

As perdas por correntes parasitas são dadas por

$$P_{par} = i_{par}^2 R_C$$

Essas perdas dependem principalmente do tipo de núcleo usado. Se o material do núcleo possuir uma alta resistividade, como a madeira ou o ar, as perdas por correntes parasitas poderão ser desprezadas. Em termos da freqüência do sinal aplicado e do campo magnético produzido, as perdas por correntes parasitas são proporcionais ao quadrado da freqüência multiplicado pelo quadrado do campo magnético:

$$P_{par} \propto f^2 B^2$$

As perdas por correntes parasitas podem ser reduzidas se o núcleo for feito de placas de material ferromagnético, isoladasumas das outras e colocadas paralelamente ao fluxo magnético, o que aumenta a resistência do núcleo e reduz o fluxo magnético.

As perdas por histerese já foram discutidas na Seção 11.8. O leitor deve se lembrar de que, em termos da freqüência do sinal aplicado e da intensidade do campo magnético produzido, a per-

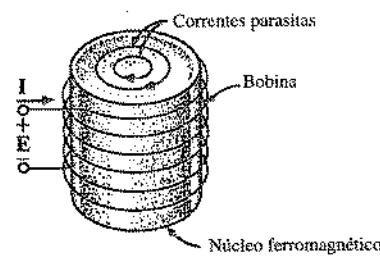


Fig. 19.33 Definição das perdas por correntes parasitas em um núcleo ferromagnético.

da por histerese é proporcional à freqüência multiplicada pelo campo magnético elevado à enésima potência:

$$P_{\text{his}} \propto fB^n$$

onde n pode variar de 1,4 a 2,6, dependendo do material.

As perdas por histerese podem ser reduzidas pela introdução de pequenas quantidades de silício (2 a 3% em massa) na liga ferromagnética de que é feito o núcleo. É preciso, porém, tomar cuidado para não exagerar, pois o excesso de silício torna o material quebradiço e difícil de usinar.

EXEMPLO 19.7

- Um indutor de núcleo de ar é ligado a uma fonte de 120 V e 60 Hz, como na Fig. 19.34. A corrente é 5 A, e a potência medida por um wattímetro é 75 W. Encontre a resistência efetiva e a indutância do indutor.
- Inserimos um núcleo de latão no indutor, o que faz com que o amperímetro registre 4 A e o wattímetro 80 W. Calcule a resistência efetiva do indutor. A que você atribui o aumento da resistência efetiva em relação ao valor medido no item (a)?
- Se um núcleo de ferro maciço é inserido na bobina, a corrente diminui para 2 A e o wattímetro acusa 52 W. Calcule a resistência e a indutância da bobina. Compare esses valores aos obtidos no item (a) e discuta as diferenças.

Soluções:

$$a. R = \frac{P}{I^2} = \frac{75 \text{ W}}{(5 \text{ A})^2} = 3 \Omega$$

$$Z_T = \frac{E}{I} = \frac{120 \text{ V}}{5 \text{ A}} = 24 \Omega$$

$$X_L = \sqrt{Z_T^2 - R^2} = \sqrt{(24 \Omega)^2 - (3 \Omega)^2} = 23,81 \Omega$$

$$\text{e } X_L = 2\pi fL$$

$$\text{ou } L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{23,81 \Omega}{377 \text{ rad/s}} = 63,16 \text{ mH}$$

$$b. R = \frac{P}{I^2} = \frac{80 \text{ W}}{(4 \text{ A})^2} = \frac{80 \Omega}{16} = 5 \Omega$$

O núcleo de latão tem relutância menor que o núcleo de ar; assim, a densidade de fluxo magnético no seu interior, B , é maior. Como $P_{\text{par}} \propto f^2 B^2$ e $P_{\text{his}} \propto fB^n$, ao aumento da densidade de fluxo magnético corresponde um aumento das perdas no núcleo e da resistência efetiva.

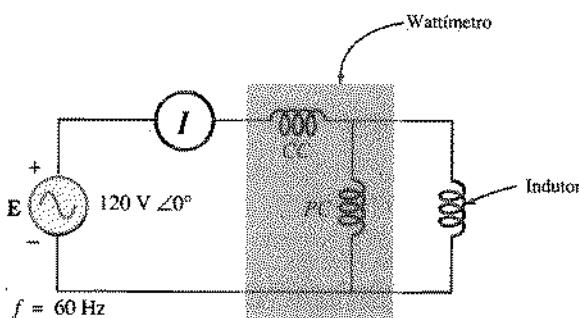


Fig. 19.34 Componentes básicos necessários para determinar a resistência efetiva e a indutância de um indutor.

$$c. R = \frac{P}{I^2} = \frac{52 \text{ W}}{(2 \text{ A})^2} = \frac{52 \Omega}{4} = 13 \Omega$$

$$Z_T = \frac{E}{I} = \frac{120 \text{ V}}{2 \text{ A}} = 60 \Omega$$

$$X_L = \sqrt{Z_T^2 - R^2} = \sqrt{(60 \Omega)^2 - (13 \Omega)^2} = 58,57 \Omega$$

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{58,57 \Omega}{377 \text{ rad/s}} = 155,36 \text{ mH}$$

O núcleo de ferro tem menor relutância que o de ar e o de latão. Assim, a densidade de fluxo magnético no núcleo, B , é maior. Como $P_{\text{par}} \propto f^2 B^2$ e $P_{\text{his}} \propto fB^n$, o aumento da densidade de fluxo faz com que as perdas no núcleo e a resistência efetiva aumentem.

Como a indutância L está relacionada à variação do fluxo pela equação $L = N(d\phi/dt)$, a indutância é maior para o núcleo de ferro, pois o fluxo variável através do núcleo é maior.

19.11 ANÁLISE COMPUTACIONAL

PSpice (Windows)

Vamos, neste capítulo, iniciar a análise computacional com a verificação dos resultados expressos pelas curvas da Fig. 19.3. Primeiro definimos o circuito da Fig. 19.35, seguindo-se uma análise gráfica (Probe) usando uma solução transiente de 0 a 1 ms (o período do sinal senoidal aplicado). A resposta da Fig. 19.36 mostra que $v_R = V(R) = V(R;1)$ está em fase com $i_R = I(R)$ e que a curva de potência definida por $p_R = v_R i_R = V(R;1)*I(R)$ possui uma freqüência que é o dobro da de v_R e i_R . O valor médio da potência é 25 W, como podemos ver pela linha horizontal introduzida através do uso do comando Line, em Tools. Uma análise do circuito revela que $P = V_R^2/R = (10 \text{ V})^2/4 \Omega = 25 \text{ W}$, como obtido acima. Observe, em particular, que a potência obtida a partir do produto de duas funções senoidais é senoidal, com um valor de pico igual à potência média fornecida à carga resistiva. Note também que para um circuito puramente resistivo a potência está sempre acima do eixo horizontal, o que mostra que o circuito está sempre absorvendo energia — o que muda é apenas a rapidez com que isto ocorre.

O circuito da Fig. 19.37, com sua combinação de elementos, será usado para demonstrar que, quaisquer que sejam os elementos de um circuito, o valor médio da potência, calculada através do produto da tensão pela corrente, é sempre igual à potência média total dissipada no circuito. Para uma freqüência de 1 kHz, $X_L = 8 \Omega$ e $X_C = 4 \Omega$. Como a reatância indutiva é maior do que a capacitativa, a tensão está adiantada em relação à corrente, como

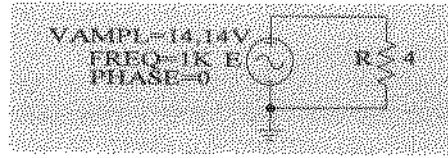


Fig. 19.35 Aplicação de uma potência alternada a uma carga puramente resistiva usando um esquema do PSpice.

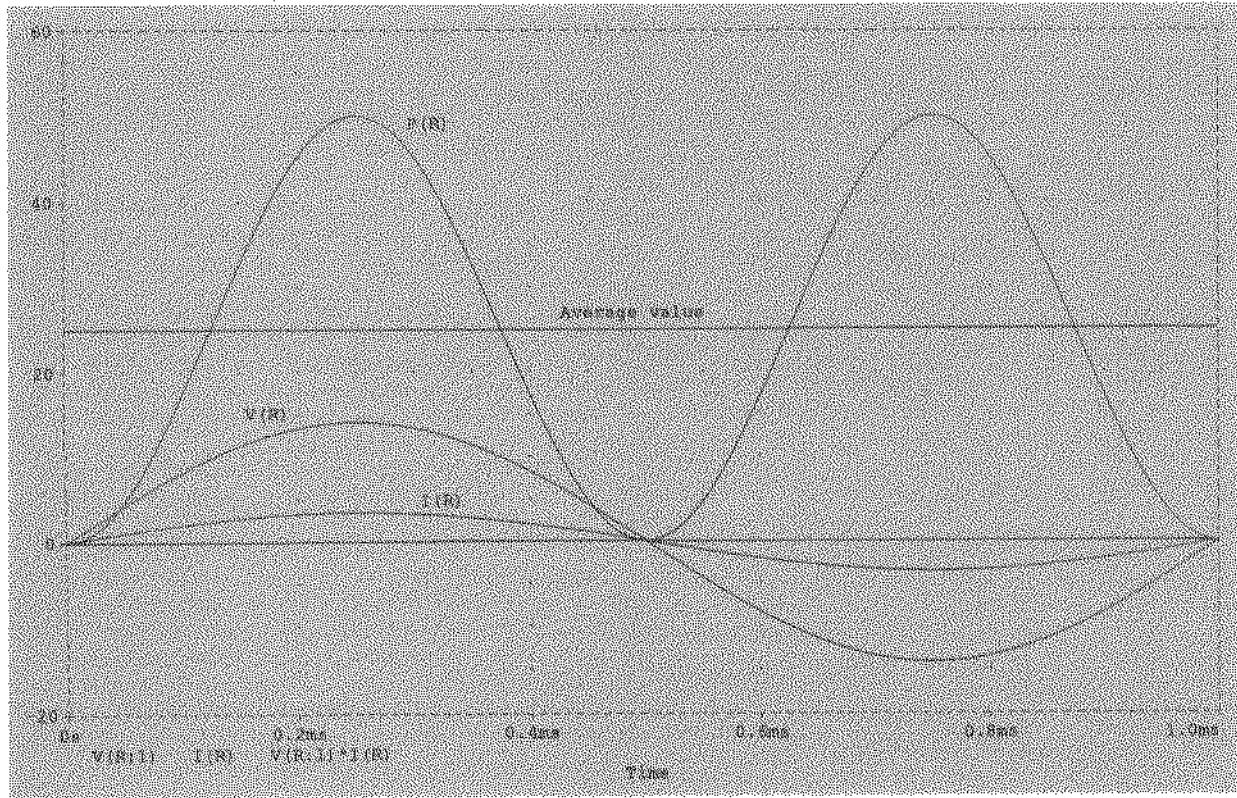


Fig. 19.36 Potência em função do tempo para a carga resistiva da Fig. 19.35.

se pode ver na Fig. 19.38. A potência média, induzida mais uma vez por uma linha horizontal, é 12,5 W. Analisando o circuito, obtemos $Z_T = 4 \Omega + j4 \Omega = 5,657 \Omega \angle 45^\circ$ com $I = E/R = 10 V < 0^\circ / 5,657 \Omega \angle 45^\circ = 1,768 A \angle -45^\circ$ e $P = PR = (1,768 A)^2 4 \Omega = 12,5 W$.

Os resultados confirmam que o *valor médio da potência é a potência absorvida pelo sistema*. A diferença de fase de 45° entre E e I é confirmada pela Fig. 19.38. Note o uso do **No-Print Delay** de 19 ms definido dentro da opção **Transient** do **Analysis Setup** para permitir a passagem do período transiente e obter uma resposta que reflita o estado estacionário. O **Final Time** é de 20 ms e foi utilizado um **Print Step** de 1 μs juntamente com um **Step Ceiling** de 20 μs . Uma observação cuidadosa das curvas traçadas com a opção **Add Trace** revela o uso de um sinal negativo antes de $I(E)$ nos dois casos. Isto foi feito porque o sentido da corrente em um elemento é, por convenção, do potencial mais alto para o mais baixo, o que corresponde ao oposto da si-

tuação real para a fonte. Observe novamente que a forma de onda da potência possui o dobro da freqüência do sinal aplicado e é uma senóide, embora a diferença de fase entre a tensão aplicada e a fonte de corrente não seja um múltiplo de 90° .

O gráfico da Fig. 19.39 foi obtido usando um método que será descrito com detalhes no Cap. 25. Ele é apresentado aqui simplesmente para revelar que há um mecanismo no PSpice, no menu **Plot**, para obter as componentes senoidais de uma forma de onda (o espectro de Fourier). O pico da esquerda, em 0 Hz, mostra que a componente contínua da potência definida por $V(E:+)^* - I(E)$ é 12,5 W. O segundo pico, em 2 kHz (o dobro da freqüência aplicada), tem uma amplitude de aproximadamente 18 W, o que representa o valor de pico da componente de 2 kHz, definida pelo produto $V \cdot I = (10 V)(1,768 A) = 17,68 W$. A soma da componente contínua e da componente de 2 kHz é $12,5 W + 17,68 W = 30,2 W$, o que corresponde ao valor máximo da curva de potência da Fig. 19.38.

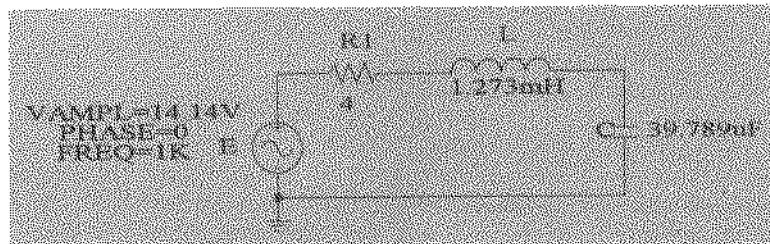


Fig. 19.37 Investigação da potência média para um circuito R-L-C em série.

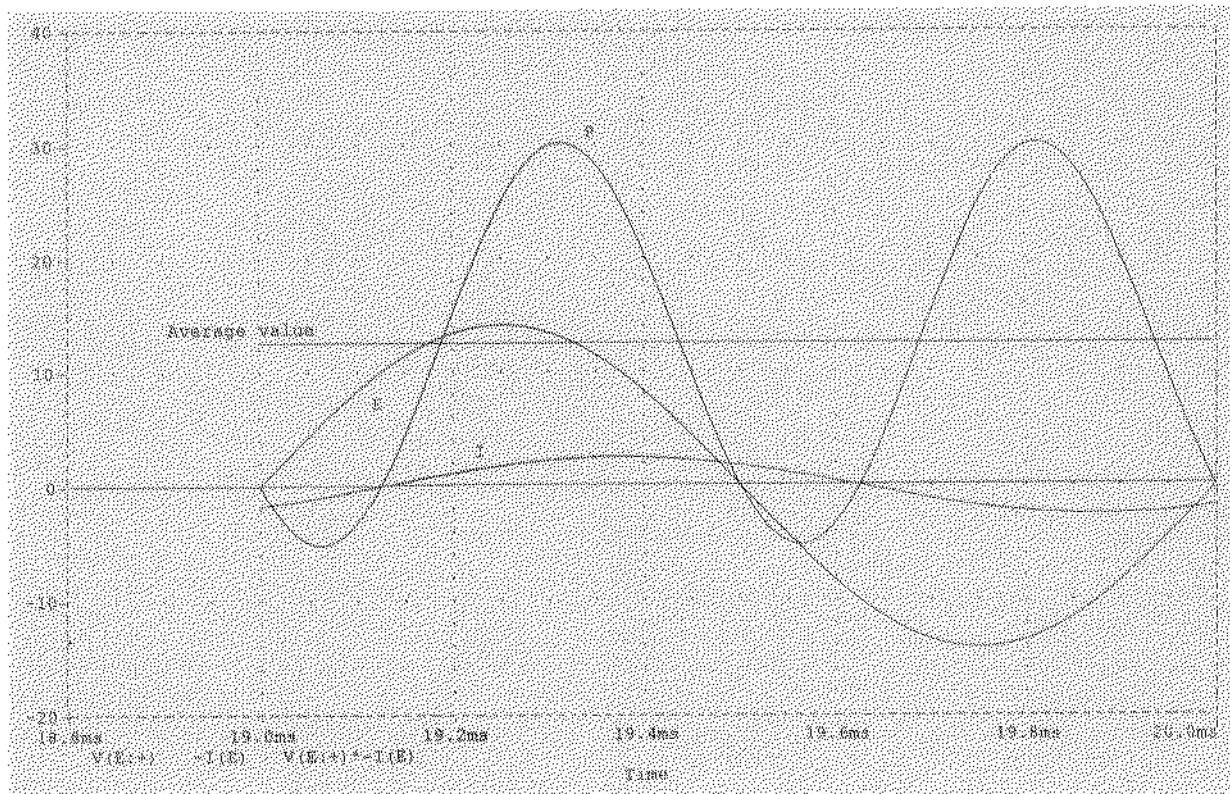


Fig. 19.38 Gráfico da potência fornecida ao circuito R-L-C em série da Fig. 19.37.

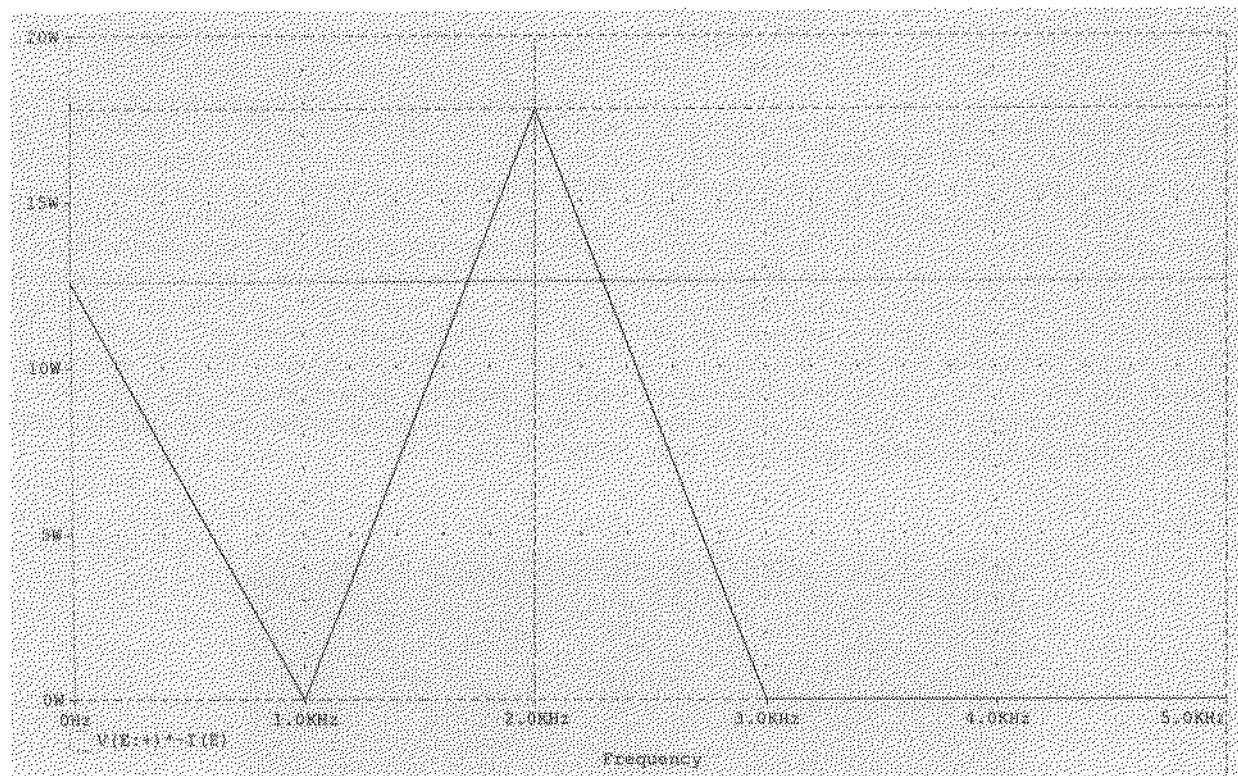


Fig. 19.39 Distribuição espectral para a curva de potência da Fig. 19.38.

```

10 REM ***** PROGRAM 19-1 *****
20 REM ***** This program calculates the total real,
30 REM reactive and apparent power of a network
40 REM with 5 individual loads.
50 REM *****
60 REM *****
70 REM
100 DIM P(5), Q(5), S(5)
110 PRINT "This program calculates the total real,"
120 PRINT "reactive and apparent power of a network"
130 PRINT "with five individual loads."
140 PRINT
150 PRINT "Input the following data:"
160 PRINT "(use negative sign for capacitive vars)"
170 PRINT
180 INPUT "E=?"; E
190 INPUT "at an angle=?"; EA
200 PRINT
210 FOR I = 1 TO 5
220 PRINT "For"; I; "=";

230 INPUT "P(watts)="?; P(I)
240 PRINT TAB(5)
250 INPUT "Q(var)=?" Q(I)
P P = PT + P(I)
Q QT = QT + Q(I)
260 PT = PT + P(I)
270 QT = QT + Q(I)
280 ST = SQRT(PT^2 + QT^2)
290 PRINT
300 PRINT "The apparent power associated with each load"
310 PRINT "is the following:"
320 PRINT
330 FOR I = 1 TO 5
340 S(I) = SQRT(P(I)^2 + Q(I)^2)
350 PRINT "S"; I; "="; S(I)
360 NEAT I
370 ST = SQRT(PT^2 + QT^2)
380 PRINT : PRINT
390 PRINT "Total real power, PT=?"; PT; "watts"
400 PRINT
410 PRINT "Total reactive power, QT=?"; QT; "vars"
420 PRINT
430 PRINT "Total apparent power, ST=?"; ST; "VA"
440 PF = PT / ST
450 TH = -57.296 * ATN(QT / PT)
460 IF QT > 0 THEN IA = EA - TH
470 IF QT < 0 THEN IA = EA + TH
480 PRINT
490 PRINT "Power factor angle=?"; IA; "degrees"
500 PRINT
510 PRINT "Power factor"; PF
520 IF QT > 0 THEN PRINT "(lagging)"
530 IF QT < 0 THEN PRINT "(leading)"
540 I = ST / E
550 PRINT
560 INPUT "Input current?"; I; "at an angle of"; IA; "degrees"
570 END

```

This program calculates the total real, reactive and apparent power of a network with five individual loads.

Input the following data:
(use negative sign for capacitive vars)

E=7.50
at an angle=? 60

For 1 P(watts)=? 200
Q(vars)=? 100
For 2 P(watts)=? 200
Q(vars)=? 100
For 3 P(watts)=? 100
Q(vars)=? -200
For 4 P(watts)=? 100
Q(vars)=? -200
For 5 P(watts)=? 0
Q(vars)=? 0

Fig. 19.40 Problema 19.1.

The apparent power associated with each load is the following:

$$\begin{aligned} S_1 &= 223.6068 \\ S_2 &= 223.6068 \\ S_3 &= 223.6068 \\ S_4 &= 223.6068 \\ S_5 &= 0 \end{aligned}$$

Total real power, $P_T = 600$ watts

Total reactive power, $Q_T = -200$ vars

Total apparent power, $S_T = 612.4355$ VA

Power factor angle: 78.43503 degrees

Power factor = .9486831 (leading)

Input current: 12.64911 at an angle of 78.43502 degrees

Fig. 19.40 Problema 19.1 (continuação)

BASIC

Embora o PSpice possa calcular valores de potência usando a opção. PROBE, ele não pode tabular valores de potências real e reativa usando simplesmente os comandos .PRINT e .PLOT. Entretanto, com o auxílio do C++ ou do BASIC, podemos escrever um programa prático e usá-lo para resolver a maioria dos circuitos que aparecem neste capítulo. O programa em BASIC da Fig. 19.40 pode determinar a potência real, reativa e aparente, além do fator de potência e da corrente de entrada. Ele foi projetado para trabalhar com até cinco cargas com diferentes fatores de potência.

As linhas 260 e 270 determinam a potência total real e reativa, dentro de uma rotina iterativa que começa na linha 210 e termina na linha 280. A potência aparente para cada carga é calculada na linha 340 e a potência aparente total é calculada na linha 370. Os resultados são impressos nas linhas 390 a 430 e o fator de potência é determinado nas linhas 440 a 530. A corrente de entrada é calculada nas linhas 540 a 560.

A Fig. 19.40 mostra também os resultados da aplicação do programa a um caso simples, com quatro cargas. Os valores dos parâmetros foram escolhidos de modo a permitir uma verificação dos resultados por simples inspeção.

PROBLEMAS

SEÇÕES 19.1 A 19.7

- Para a rede de lâmpadas (puramente resistivas) ilustrada na Fig. 19.41:
 - Determine a potência total dissipada.
 - Calcule a potência total reativa e aparente.
 - Encontre a corrente da fonte I_F .
 - Calcule a resistência de cada lâmpada para as condições de operação especificadas.
 - Determine as correntes I_1 e I_2 .
- Para o circuito da Fig. 19.42:
 - Encontre a potência média fornecida a cada elemento.
 - Encontre a potência reativa para cada elemento.
 - Encontre a potência aparente para cada elemento.

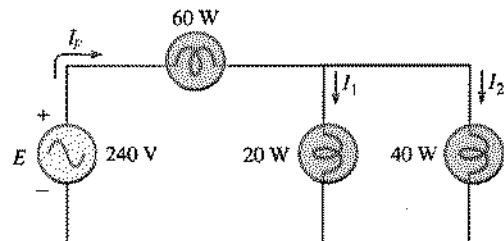


Fig. 19.41 Problema 1.

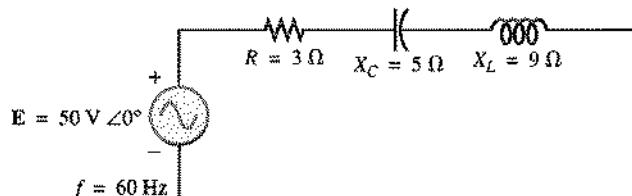


Fig. 19.42 Problema 2.

- Encontre o número total de watts, volt-ampères reativos e volt-ampères e o fator de potência F_p do circuito.
- Desenhe o triângulo de potências.
- Encontre a energia dissipada pelo resistor em um ciclo completo da tensão de entrada.
- Encontre a energia armazenada ou devolvida pelo capacitor e pelo indutor em um semicírculo da curva de potência.
- Para o sistema da Fig. 19.43:
 - Encontre o número total de watts, volt-ampères reativos e volt-ampères e o fator de potência F_p .
 - Desenhe o triângulo de potências.
 - Encontre a corrente I_F .
- Para o sistema da Fig. 19.44:
 - Encontre P_T , Q_T e S_T .
 - Determine o fator de potência F_p .
 - Desenhe o triângulo de potências.
 - Encontre I_F .
- Para o sistema da Fig. 19.45:
 - Encontre P_T , Q_T e S_T .

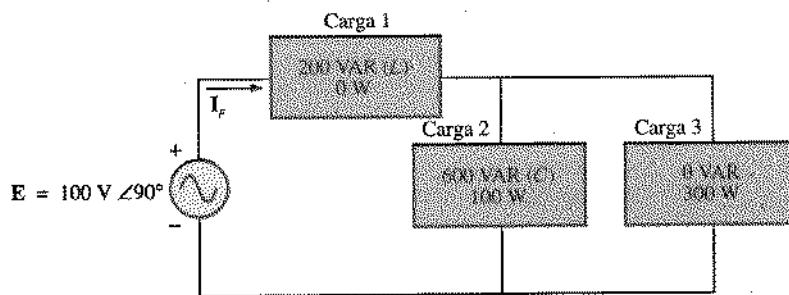


Fig. 19.43 Problema 3.

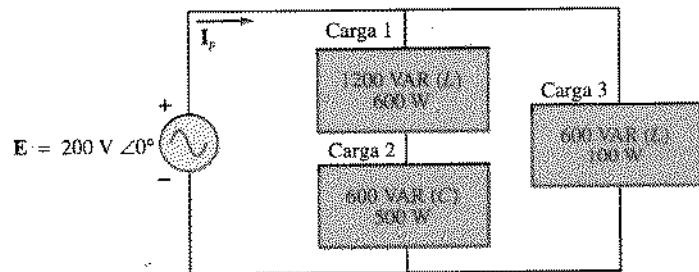


Fig. 19.44 Problema 4.

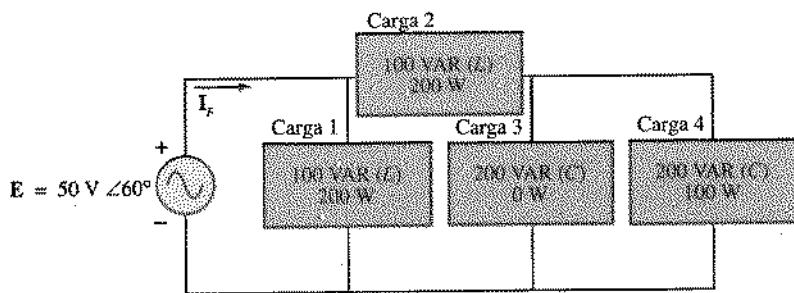


Fig. 19.45 Problema 5.

- b. Determine o fator de potência F_p .
- c. Desenhe o triângulo de potências.
- d. Encontre I_p .
- 6. Para o circuito da Fig. 19.46:
 - a. Encontre a potência média, reativa e aparente para o resistor de 20Ω .
 - b. Repita o item (a) para a indutância reativa de 10Ω .
- 7. Para o circuito da Fig. 19.47:
 - a. Encontre a potência média fornecida a cada elemento.
 - b. Encontre a potência reativa para cada elemento.
 - c. Encontre a potência aparente para cada elemento.

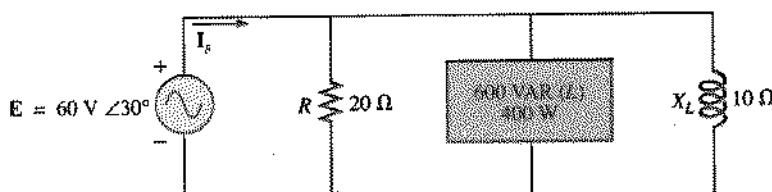


Fig. 19.46 Problema 6.

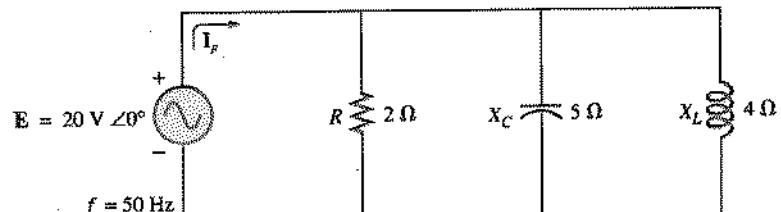


Fig. 19.47 Problema 7.

- d. Encontre P_T , Q_T , S_T e F_P para o sistema.
e. Desenhe o triângulo de potências.
f. Encontre I_S .
8. Repita o Problema 7 para o circuito da Fig. 19.48.

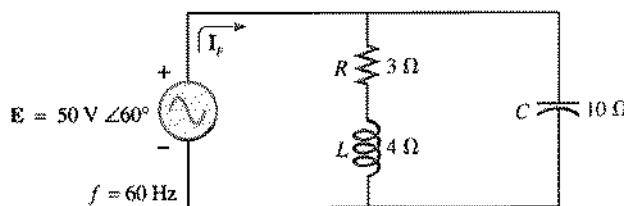


Fig. 19.48 Problema 8.

- *9. Para o circuito da Fig. 19.49:
a. Encontre a potência média fornecida a cada elemento.
b. Encontre a potência reativa para cada elemento.
c. Encontre a potência aparente para cada elemento.
d. Encontre o número total de watts, volt-ampères reativos e volt-ampères c o fator de potência F_P do circuito.

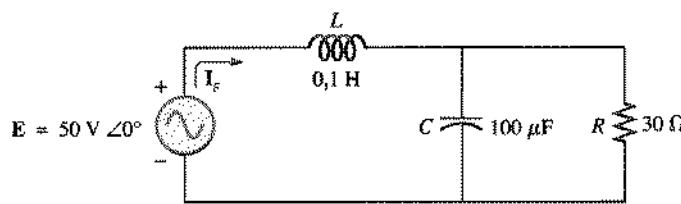


Fig. 19.49 Problema 9.

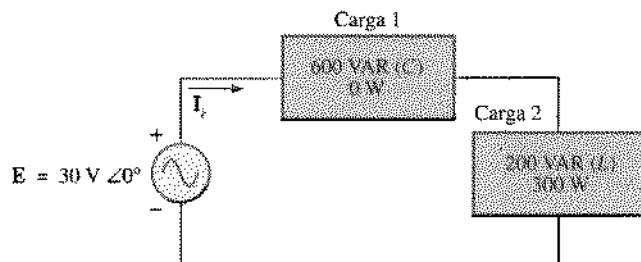


Fig. 19.50 Problema 12.

- e. Desenhe o triângulo de potências.
f. Encontre a energia dissipada pelo resistor em um ciclo completo da tensão de entrada.
g. Encontre a energia armazenada ou devolvida pelo capacitor e pelo indutor em um semicírculo da curva de potência.

10. As especificações de um sistema elétrico são 10 kVA, 200 V com um fator de potência de 0,5 (adiantado).

- a. Determine a impedância do sistema em coordenadas retangulares.
b. Encontre a potência média fornecida ao sistema.

11. As especificações de um sistema elétrico são 5 kVA, 120 V com um fator de potência 0,8 (atrasado).

- a. Determine a impedância do sistema em coordenadas retangulares.
b. Encontre a potência média fornecida ao sistema.

*12. Para o sistema da Fig. 19.50:

- a. Encontre o número total de watts, volt-ampères reativos e volt-ampères e o fator de potência F_P do circuito.
b. Encontre a corrente I_S .
c. Desenhe o triângulo de potência.
d. Descubra quais são os componentes (e sua impedância em ohms) dentro de cada retângulo. (Suponha que todos os elementos de cada carga estão em série.)
e. Verifique se o resultado da parte (b) está correto, encontrando a corrente I_P usando apenas a tensão de entrada E e os resultados do item (d). Compare este valor de I_P com o obtido no item (b).

*13. Repita o Problema 12 para o sistema da Fig. 19.51.

*14. Para o circuito da Fig. 19.52:

- a. Encontre o número total de watts, volt-ampères reativos e volt-ampères e F_P .
b. Encontre a corrente I_S .
c. Descubra os componentes (e suas impedâncias) em cada retângulo. (Suponha que os elementos dentro de cada retângulo estão em série.)

15. Para o circuito da Fig. 19.53:

- a. Encontre o número total de watts, volt-ampères reativos e volt-ampères e F_P .
b. Encontre a tensão E .
c. Descubra quais os componentes (e suas impedâncias) em cada retângulo. (Suponha que os elementos dentro de cada retângulo estão em série.)

SEÇÃO 19.8 Correção do Fator de Potência

*16. A iluminação e os motores de uma pequena fábrica estabelecem uma demanda de potência igual a 10 kVA, para um fator de potência atrasado 0,7 com uma fonte de 208 V e 60 Hz.

- a. Construa o triângulo de potências para a carga.
b. Determine o valor do capacitor que deve ser colocado em paralelo com a carga para levar o fator de potência à unidade.
c. Determine a diferença entre as correntes da fonte no sistema não-compensado e no sistema compensado.

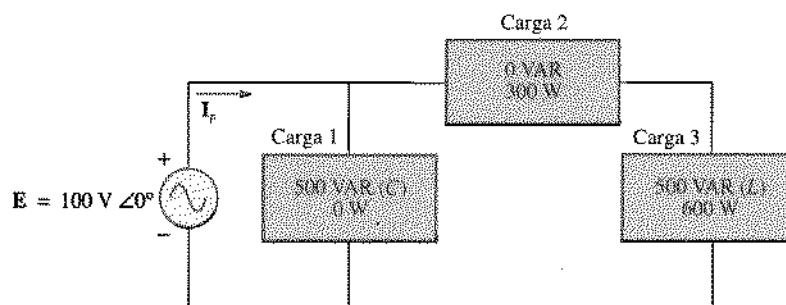


Fig. 19.51 Problema 13.

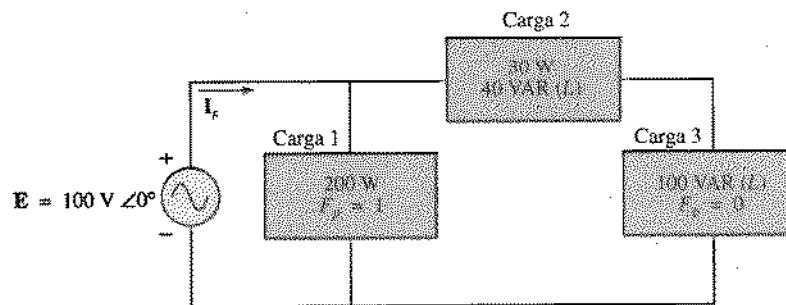


Fig. 19.52 Problema 14.

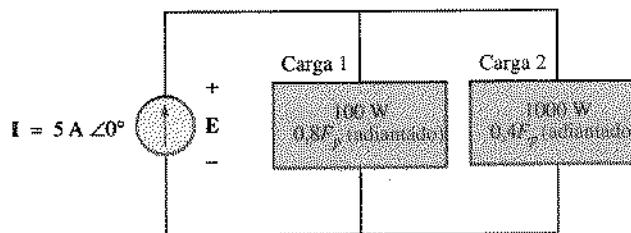


Fig. 19.53 Problema 15.

- d. Repita os itens (b) e (c) para um fator de potência inicial de 0,9.
17. A carga em um gerador de 120 V e 60 Hz é de 5 kW (resistiva), 8 kVAR (indutiva) e 2 kVAR (capacitativa).
- Encontre o número total de kilovolt-ampéres.
 - Determine o F_p das cargas combinadas.
 - Encontre a corrente fornecida pelo gerador.
 - Calcule a capacitância necessária para estabelecer um fator de potência unitário.
 - Encontre a corrente fornecida pelo gerador com um fator de potência unitário e compare com o valor obtido no item (c).
18. As cargas de uma fábrica ligada a um sistema de 1000 V, 60 Hz, são as seguintes:
- 20 kW para aquecimento (fator de potência unitário)
 - 10 kW (P) para motores (fator de potência 0,7 atrasado)
 - 5 kW para iluminação (fator de potência 0,85 atrasado).
- Desenhe o triângulo de potência para a carga total.
 - Determine a capacitância necessária para tornar o fator de potência total igual a 1.
 - Calcule a diferença entre as correntes totais no sistema compensado e no sistema não-compensado.

SEÇÃO 19.9 Wattímetros e Medidores de Fator de Potência

- Um medidor de potência é conectado com a bobina de corrente na posição da Fig. 19.54 e com a bobina de potencial entre os pontos f e g . Qual a leitura do medidor de potência?
 - Repita o item (a) com a bobina de potencial (BP) ligada entre os pontos a e b , b e c , a e c , a e d , c e d , d e e e f e e .
20. A fonte de tensão da Fig. 19.55 fornece 660 VA e 120 V, com uma corrente atrasada em relação à voltagem por um fator de potência de 0,6.
- Determine as leituras do voltímetro, do amperímetro e do wattímetro.
 - Encontre a impedância da carga na forma retangular.

SEÇÃO 19.10 Resistência Efetiva

21. Um indutor de núcleo de ar é conectado a uma fonte de 200 V e 60 Hz. A corrente é de 4 A e um wattímetro indica 80 W. Encontre a resistência efetiva e a indutância do indutor.

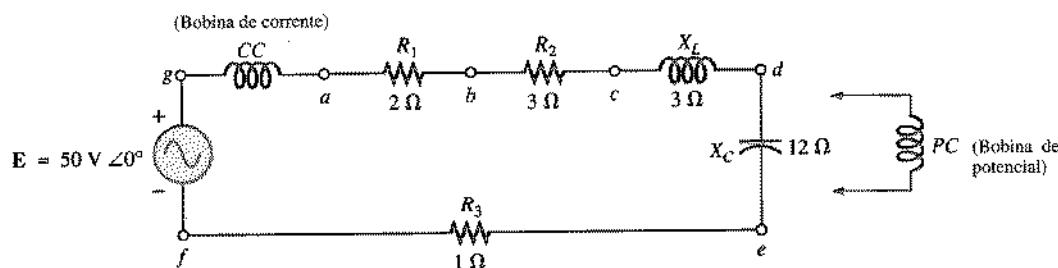


Fig. 19.54 Problema 19.

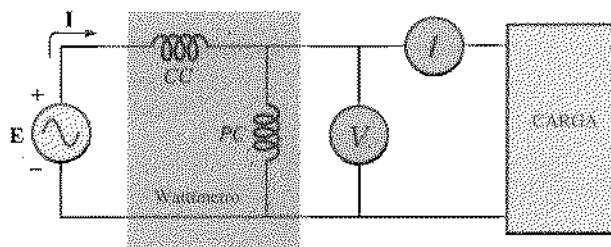


Fig. 19.55 Problema 20.

- b. Um núcleo de latão é inserido no indutor. O amperímetro indica 3 A e o wattímetro, 90 W. Calcule a resistência efetiva do indutor. Explique por que é maior do que a calculada no item (a).
 c. Quando introduzimos um núcleo de ferro maciço no indutor, a corrente é de 2 A e o wattímetro registra 60 W. Calcule a resistência e a indutância do indutor. Compare os valores com os encontrados no item (a) e discuta as diferenças.
 22. a. A indutância de um indutor de núcleo de ar é 0,08 H e a resistência efetiva é 4 Ω quando uma fonte de 60 V e 50 Hz é conectada aos seus terminais. Determine a corrente que atravessa o indutor e a leitura de um wattímetro ligado aos seus terminais.
 b. Quando inserirmos um núcleo de latão no indutor, a resistência efetiva aumenta para 7 Ω e o wattímetro indica 30 W. Calcule a corrente no indutor e sua indutância.
 c. Quando inserirmos um núcleo de ferro maciço no indutor, a resistência efetiva aumenta para 10 Ω e a corrente diminui para 1,7 A. Determine a leitura do wattímetro e a indutância do indutor.

SEÇÃO 19.11 Análise Computacional

PSpice (Windows)

23. Usando o PSpice, obtenha um gráfico da potência reativa para um capacitor de 636,62 μF na frequência de 1 kHz para um ciclo da

tensão entre scus terminais, usando uma tensão aplicada $E = 10 \text{ V} \angle 0^\circ$. Pinte no mesmo gráfico a tensão aplicada e a corrente resultante. Aplice dísticos apropriados às curvas para obter uma figura parecida com a Fig. 19.36.

24. Repita a análise da Fig. 19.37 para um circuito $R-L-C$ em paralelo com os mesmos parâmetros e o mesmo valor da tensão aplicada.
 25. Pinte no mesmo gráfico a tensão aplicada e a corrente total para o circuito da Fig. 19.27(b) e mostre que a tensão e a corrente estão em fase porque o fator de potência é 1.

Linguagem de Programação (C++, BASIC, PASCAL etc.)

26. Escreva um programa que forneça uma solução geral para o circuito da Fig. 19.19. Em outras palavras, dada a resistência ou reatância de cada elemento, o programa deve calcular a potência real, reativa e aparente do sistema.
 27. Escreva um programa para demonstrar o efeito do aumento da potência reativa sobre o fator de potência de um sistema. Construa uma tabela da potência real, da potência reativa e do fator de potência do sistema para uma potência real fixa e uma potência reativa que começa em 10% da potência real e continua até cinco vezes a potência real, em incrementos de 10% da potência real.

GLOSSÁRIO

Correção do fator de potência Uso de componentes reativos (quase sempre capacitivos) para estabelecer um fator de potência próximo da unidade.

Correntes parasitas Pequenas correntes circulares em um núcleo metálico que produzem um aumento da dissipação e da resistência efetiva do material.

Efeito pelicular Confinamento de uma corrente alternada às vizinhanças da superfície de um condutor. O efeito é mais pronunciado em altas freqüências.

Perdas por histerese Perdas em um material magnético causadas pelas mudanças de sentido do fluxo magnético no material.

Perdas por radiação Perda de energia na forma de ondas eletromagnéticas durante a transferência de energia de um elemento para outro.

Potência aparente Potência fornecida a uma carga, sem considerar os efeitos do fator de potência. É dada pelo produto da tensão aplicada pela corrente que atravessa a carga.

Potência média (real) Potência dissipada em um elemento, circuito ou sistema.

Potência reativa Potência associada aos elementos reativos, que fornece uma medida da energia envolvida na criação de campos elétricos e magnéticos em elementos capacitivos e indutivos, respectivamente.

Resistência efetiva Valor de resistência que inclui os efeitos das perdas por radiação, do efeito pelicular, de correntes parasitas e da histerese.

20

Ressonância

20.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo vamos apresentar um circuito muito importante, o circuito ressonante, que é fundamental para o funcionamento de uma grande variedade de sistemas elétricos e eletrônicos utilizados hoje em dia. O circuito ressonante é uma combinação de elementos R , L e C cuja resposta de freqüência é semelhante à que aparece na Fig. 20.1. Observe na figura que a resposta é máxima para a freqüência f_r , diminuindo à medida que nos afastamos desta freqüência. Em outras palavras, a resposta tem um valor relativamente elevado em uma certa faixa de freqüências e um valor muito pequeno fora dessa faixa. Os receptores de rádio e televisão apresentam uma curva de resposta para cada emissora do tipo indicado na Fig. 20.1. Quando o receptor é ajustado (ou sintonizado) para uma emissora em particular, ele é ajustado para uma freqüência próxima à f_r da Fig. 20.1. Estações transmitindo em freqüências afastadas desta freqüência não são recebidas com potência significativa para afetar o programa em que estamos interessados. O processo de sintonia (ajustar o seletor para f_r) que descrevemos acima é a razão da terminologia *círcuito sintonizado*. Quando a resposta está próxima do máximo, dizemos que o circuito se encontra em um estado de *ressonância*.

O conceito de ressonância não se limita a sistemas elétricos ou eletrônicos. Se forem aplicados impulsos a um sistema mecânico com uma freqüência adequada, o sistema entrará em um estado de ressonância, sofrendo grandes oscilações. A freqüência dessas oscilações é chamada de *freqüência natural* do sistema. Um exemplo clássico desse efeito é o que aconteceu com a ponte Tacoma Narrows, construída em 1940 sobre o estreito Puget, no estado de Washington, Estados Unidos. Quatro meses após a inauguração da ponte, que tinha um vão livre de 853 m, um vento intermitente de 67

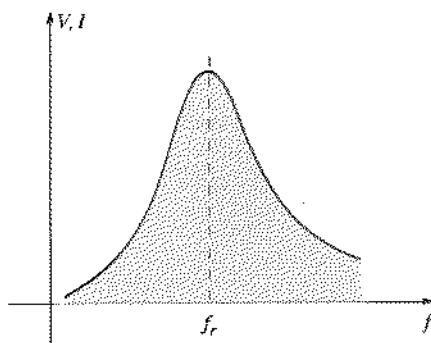
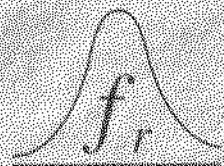


Fig. 20.1 Curva de ressonância.





km/h a fez oscilar na sua freqüência natural. A amplitude das oscilações foi aumentando até que a ponte se rompeu e caiu nas águas do estreito. A ponte só foi reconstruída em 1950.

Um circuito elétrico ressonante *precisa* ter uma indutância e uma capacitância. Além disso, uma resistência sempre está presente, seja como meio de controlar a forma da curva de ressonância, seja em consequência do fato de que não existem capacitores e indutores ideais. Quando a ressonância ocorre pela aplicação da freqüência apropriada (f), a energia armazenada em um elemento reativo é igual à fornecida pelo outro elemento reativo do sistema. Em outras palavras, a energia oscila entre um elemento reativo e o outro. Dessa forma, uma vez que um sistema ideal (C e L puros) atinja um estado de ressonância, ele não necessita mais de potência reativa, pois é auto-sustentado. Em um circuito real, existe uma resistência aos elementos reativos que produz um eventual “amortecimento” das oscilações entre os elementos reativos.

Há dois tipos de circuitos ressonantes: em *série* e em *paralelo*. Ambos serão discutidos neste capítulo.

RESSONÂNCIA EM SÉRIE

20.2 CIRCUITO RESSONANTE EM SÉRIE

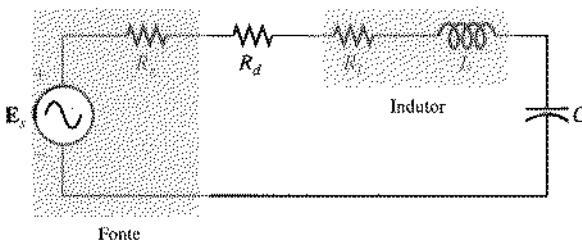
Todo circuito ressonante, seja ele em série ou em paralelo, deve ter um elemento indutivo e outro capacitivo. Além disso, sempre estão presentes elementos resistivos como a resistência interna da fonte, R_s , a resistência interna do indutor R_i , e a resistência acrescentada intencionalmente ao circuito para controlar a forma da curva de resposta, R_d (na maioria dos casos, a resistência interna do capacitor, R_c , pode ser ignorada). A configuração básica do circuito ressonante em série aparece na Fig. 20.2(a) com os elementos resistivos já mencionados. O circuito mais “enxuto” da Fig. 20.2(b) pode ser obtido substituindo os elementos resistivos por uma única resistência equivalente, ou seja:

$$R = R_s + R_i + R_d \quad (20.1)$$

A impedância total deste circuito para qualquer freqüência é dada por

$$Z_T = R + jX_L - jX_C = R + j(X_L - X_C)$$

As condições de ressonância descritas na introdução ocorrem quando



o que remove a componente reativa da equação da impedância total. A impedância total na ressonância é simplesmente

$$Z_{T_s} = R \quad (20.3)$$

o que constitui o valor menor possível de Z_T . O índice s será utilizado para indicar a situação de ressonância em série.

A freqüência de ressonância pode ser expressa em termos da indutância e capacitância do circuito a partir da equação de definição da ressonância [Eq.(20.2)]:

$$X_L = X_C$$

Substituindo as reatâncias por seus valores em termos de L e C , temos:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \text{e} \quad \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

e

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (20.4)$$

ou

$$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \begin{aligned} f &= \text{hertz (Hz)} \\ L &= \text{henries (H)} \\ C &= \text{farads (F)} \end{aligned} \quad (20.5)$$

A corrente do circuito na ressonância é

$$I = \frac{E \angle 0^\circ}{R \angle 0^\circ} = \frac{E}{R} \angle 0^\circ$$

que, como o leitor pode notar, é a corrente máxima no circuito da Fig. 20.2 para uma dada tensão aplicada E , já que o valor de Z_T é mínimo. Observe também que *a tensão de entrada e a corrente estão em fase na ressonância*.

Como as correntes no indutor e no capacitor são iguais, as tensões entre os terminais desses dois componentes na freqüência de ressonância são iguais em módulo mas estão defasadas de 180° .

$$\left. \begin{aligned} V_L &= (I \angle 0^\circ)(X_L \angle 90^\circ) = IX_L \angle 90^\circ \\ V_C &= (I \angle 0^\circ)(X_C \angle -90^\circ) = IX_C \angle -90^\circ \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{defasadas} \\ \text{de } 180^\circ \end{array}$$

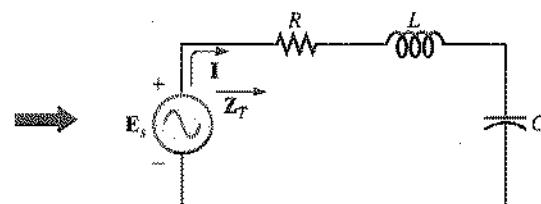


Fig. 20.2 Circuito ressonante em série.

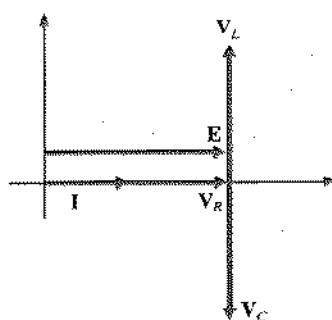


Fig. 20.3 Diagrama de fasores para o circuito ressonante em série, na ressonância.

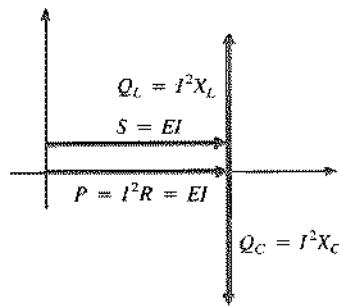


Fig. 20.4 Triângulo de potências para o circuito ressonante em série, na ressonância.

e como $X_L = X_C$, os módulos de V_L e V_C são iguais na ressonância, ou seja,

$$V_{L_0} = V_{C_0} \quad (20.6)$$

A Fig. 20.3, um diagrama fasorial das tensões e da corrente, mostra claramente que a tensão entre os terminais do resistor na ressonância é igual à tensão de entrada e que E , I e V_R estão em fase na ressonância.

A potência média dissipada pelo resistor na ressonância é igual a I^2R , e as potências reativas armazenadas no capacitor e no indutor são I^2X_C e I^2X_L , respectivamente.

O triângulo de potências na ressonância (Fig. 20.4) mostra que a potência aparente total é igual à potência média dissipada pelo

resistor, pois $Q_L = Q_C$. O fator de potência do circuito na ressonância é

$$F_p = \cos \theta = \frac{P}{S}$$

e portanto

$$F_{p_0} = 1 \quad (20.7)$$

Plotando no mesmo gráfico as potências dos três elementos em função do tempo (Fig. 20.5), vemos que, embora a potência reativa em qualquer instante seja nula (observe, por exemplo, o ponto $t = t'$ no qual $p'_C = p'_L$), o indutor e o capacitor alternadamente armazenam e liberam energia.

Examinando mais de perto a situação, vemos que a energia armazenada pelo indutor de 0 a t_1 é igual à energia liberada pelo capacitor no mesmo intervalo. O contrário ocorre no intervalo de t_1 a t_2 e assim por diante. Assim, a potência aparente total é igual à potência média, embora o indutor e o capacitor estejam armazenando e liberando energia. Esta situação ocorre apenas na freqüência de ressonância. Qualquer pequena modificação na freqüência introduz uma componente reativa no triângulo de potências, fazendo com que a potência aparente do sistema seja maior do que a potência média.

20.3 FATOR DE QUALIDADE (Q)

O fator de qualidade Q de um circuito ressonante em série é definido como a razão entre a potência reativa do indutor ou do capacitor e a potência média do resistor na freqüência de ressonância, isto é,

$$Q = \frac{\text{potência reativa}}{\text{potência média}} \quad (20.8)$$

O fator de qualidade é uma indicação da importância da energia armazenada no indutor ou no capacitor em comparação com a energia dissipada nos elementos resistivos. Para a mesma potência reativa, quanto menor a dissipação, maior o fator Q e mais concentrada e intensa a região de ressonância.

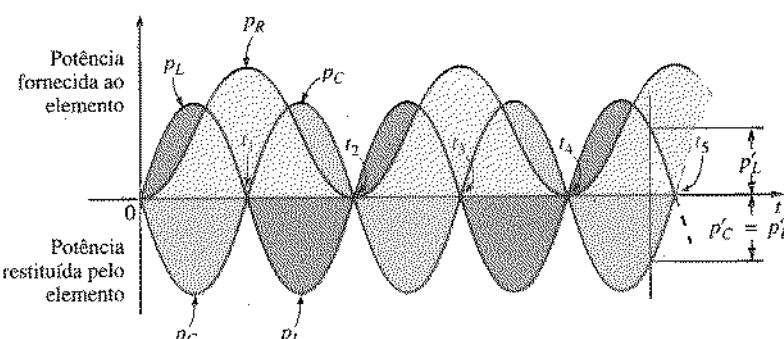


Fig. 20.5 Curvas de potência na ressonância para o circuito ressonante em série.



Substituindo a potência reativa e a potência média por seus valores na Eq. (20.8), temos:

$$Q_s = \frac{I^2 X_L}{I^2 R}$$

e

$$Q_s = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega_s L}{R}$$

(20.9)

Se a resistência R for somente a resistência do indutor (R_i), podemos nos referir ao Q do indutor, dado por

$$Q_{\text{indutor}} = Q_i = \frac{X_L}{R_i}$$

$$R = R_i$$

e

$$Q_i = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

(20.11)

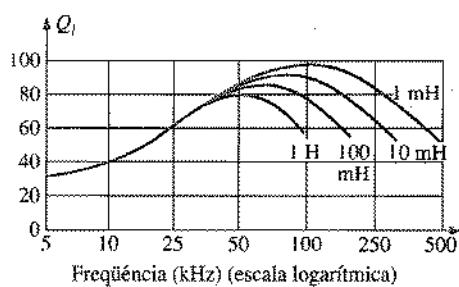
Como o fator de qualidade de um indutor é uma informação fornecida pelo fabricante, muitas vezes é representado pelo símbolo Q sem nenhum índice. Podemos deduzir, a partir da Eq. (20.10), que Q_i irá aumentar linearmente com a freqüência, pois $X_L = 2\pi f L$. Em outras palavras, se a freqüência dobrar, Q_i também será multiplicada por 2. Isto realmente acontece (de forma aproximada) em baixas e médias freqüências, como se pode ver na Fig. 20.6. Infelizmente, à medida que a freqüência aumenta, a resistência efetiva da bobina também aumenta, graças principalmente ao efeito pelicular, e o Q_i do indutor diminui. Além disso, os efeitos capacitivos entre as espiras do indutor aumentam, reduzindo ainda mais o valor de Q_i . Por esta razão, Q_i precisa ser especificado para uma dada freqüência ou faixa de freqüências. Nas aplicações que envolvem uma larga faixa de freqüências, costuma-se trabalhar com um gráfico de Q_i em função da freqüência. O valor máximo de Q_i na maioria dos indutores comerciais é menor do que 200; a maioria tem um Q máximo menor do que 100. Observe na Fig. 20.6 que no caso de indutores do mesmo tipo o valor de Q_i cai mais rapidamente com a freqüência em indutores com valores maiores de indutância.

Se fizermos

$$\omega_s = 2\pi f_s$$

e

$$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$



na Eq. (20.9), teremos

$$Q_s = \frac{\omega_s L}{R} = \frac{2\pi f_s L}{R} = \frac{2\pi}{R} \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \right) L \\ = \frac{L}{R} \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} \right) = \left(\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{L}} \right) \frac{L}{R\sqrt{LC}}$$

e

$$Q_s = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

(20.11)

o que nos dá Q_s em termos dos parâmetros do circuito.

Nos circuitos ressonantes em série usados em sistemas de comunicações, Q_s é geralmente maior do que 1. Aplicando a regra dos divisores de tensão ao circuito da Fig. 20.2, obtemos

$$V_L = \frac{X_L E}{Z_T} = \frac{X_L E}{R} \quad (\text{na ressonância})$$

e

$$V_{L_s} = Q_s E$$

(20.12)

ou

$$V_C = \frac{X_C E}{Z_T} = \frac{X_C E}{R}$$

e

$$V_{C_s} = Q_s E$$

(20.13)

Como Q_s é normalmente maior do que 1, a tensão entre os terminais do capacitor ou do indutor de um circuito ressonante em série pode ser significativamente maior que a tensão de entrada. De fato, em muitos casos o Q_s é tão grande que o projeto do circuito (incluindo isolamento adequado) tem que ser muito cuidadoso com respeito às tensões no capacitor e no indutor.

No circuito da Fig. 20.7, por exemplo, que está em ressonância,

$$Q_s = \frac{X_L}{R} = \frac{480 \Omega}{6 \Omega} = 80$$

e

$$V_L = V_C = Q_s E = (80)(10 \text{ V}) = 800 \text{ V}$$

que é certamente uma tensão considerável.

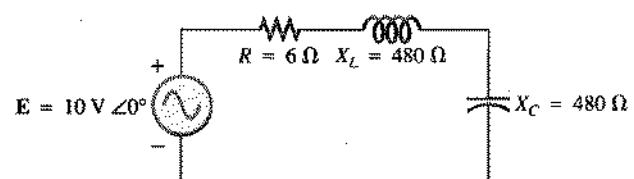


Fig. 20.7 Circuito ressonante em série com alto valor de Q .

Fig. 20.6 Q_i em função da freqüência para vários indutores de valores diferentes.

20.4 Z_T EM FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA

A impedância total do circuito R-L-C em série da Fig. 20.2 em qualquer freqüência é dada por

$$Z_T = R + jX_L - jX_C \quad \text{ou} \quad Z_T = R + j(X_L - X_C)$$

O módulo da impedância Z_T em função da freqüência é dado por

$$Z_T = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

A curva da impedância total em função da freqüência para o circuito ressonante em série da Fig. 20.2 pode ser encontrada usando a curva da impedância em função da freqüência para cada elemento da equação que acabamos de deduzir, escrita da seguinte forma:

$$Z_T(f) = \sqrt{[R(f)]^2 + [X_L(f) - X_C(f)]^2} \quad (20.14)$$

onde Z_T(f) “simboliza” a impedância total *em função* da freqüência. Para o intervalo de freqüências de interesse, iremos supor que a resistência R não muda com a freqüência, como no gráfico da Fig. 20.8. A curva para a indutância, obtida a partir da equação da reatância, é uma linha reta interceptando a origem com uma inclinação igual à indutância do indutor. A expressão matemática de uma reta genérica no espaço bidimensional é a seguinte:

$$y = mx + b$$

Assim, para o indutor,

$$\begin{aligned} X_L &= 2\pi fL + 0 = (2\pi L)(f) + 0 \\ y &= m \cdot x + b \end{aligned}$$

(onde $2\pi L$ é a inclinação), como se pode ver na Fig. 20.9.

Para o capacitor,

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} \quad \text{ou} \quad X_C f = \frac{1}{2\pi C}$$

que se torna $yx = k$, a equação de uma hipérbole, onde

$$\begin{aligned} y (\text{variável}) &= X_C \\ x (\text{variável}) &= f \end{aligned}$$

$$k (\text{constante}) = \frac{1}{2\pi C}$$

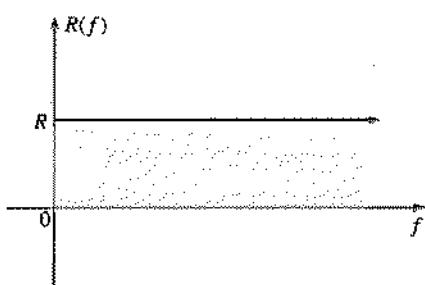


Fig. 20.8 Resistência em função da freqüência.

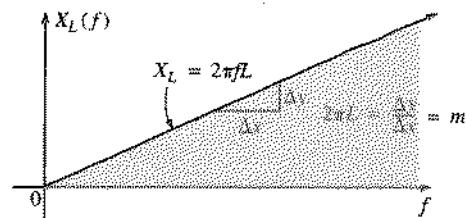


Fig. 20.9 Reatância indutiva em função da freqüência.

A Fig. 20.10 mostra a hipérbole que representa X_C(f). Observe, em particular, que X_C tem um valor muito elevado em baixas freqüências e diminui rapidamente à medida que a freqüência aumenta.

Se plotarmos as curvas das Figs. 20.9 e 20.10 no mesmo gráfico, obteremos a Fig. 20.11. A condição de ressonância é agora claramente definida pelo ponto de interseção, onde X_L = X_C. Fica claro também que para freqüências menores do que f_r o circuito é basicamente capacitivo (X_C > X_L). Para freqüências acima da condição de ressonância, X_L > X_C e o circuito é indutivo.

Aplicando a equação

$$\begin{aligned} Z_T(f) &= \sqrt{[R(f)]^2 + [X_L(f) - X_C(f)]^2} \\ &= \sqrt{[R(f)]^2 + [X(f)]^2} \end{aligned}$$

às curvas da Fig. 20.11, onde X(f) = X_L(f) - X_C(f), obtemos a curva para Z_T(f), mostrada na Fig. 20.12. A impedância é mínima na

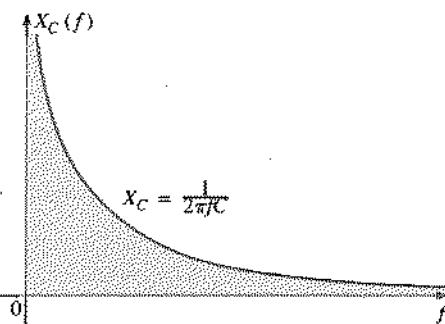


Fig. 20.10 Reatância capacitativa em função da freqüência.

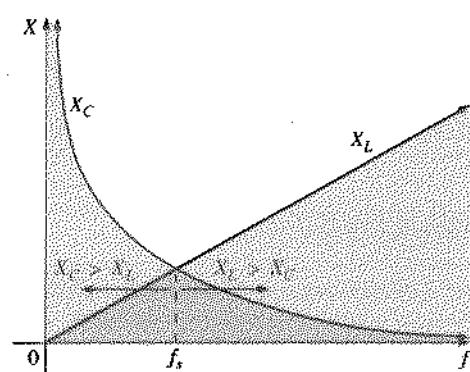


Fig. 20.11 Respostas de freqüência das reatâncias indutiva e capacitativa de um circuito R-L-C, plotadas no mesmo gráfico.

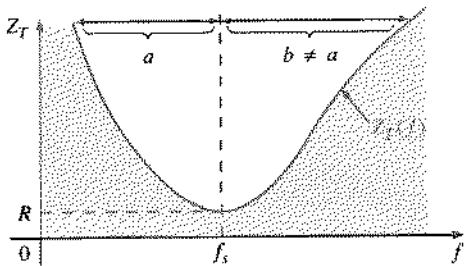


Fig. 20.12 Z_r em função da freqüência para um circuito ressonante em série.

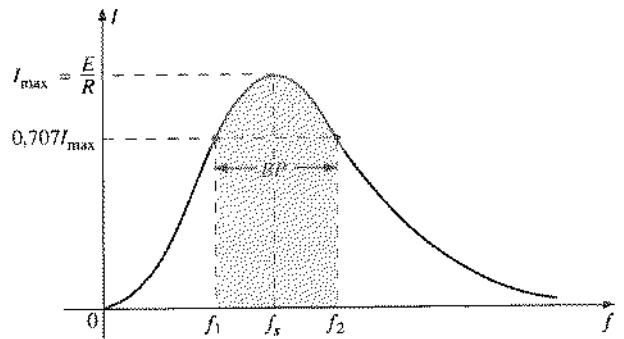


Fig. 20.14 I em função da freqüência para um circuito ressonante em série.

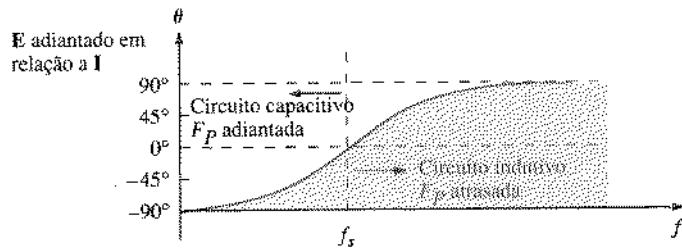


Fig. 20.13 Gráfico de fase para o circuito ressonante em série.

freqüência de ressonância é igual à resistência R . Note que a curva não é simétrica em relação à freqüência de ressonância (especialmente para valores elevados de Z_r).

A fase associada à impedância total é

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{(X_L - X_C)}{R} \quad (20.15)$$

De acordo com a equação acima, para x positivo, isto é, para $X_L > X_C$, quanto maior o valor de x , maior (isto é, mais próximo de 90°) o valor de θ . No caso de $X_C > X_L$, basta lembrar que

$$\operatorname{tg}^{-1}(-x) = -\operatorname{tg}^{-1}(x) \quad (20.16)$$

Em baixas freqüências, $X_C > X_L$ e θ se aproxima de -90° (capacitivo), como vemos na Fig. 20.13, enquanto em altas freqüências $X_L > X_C$ e θ se aproxima de 90° . Em geral, portanto, para um circuito ressonante em série:

$f < f_s$: circuito capacitivo, E adiantado em relação a I
$f > f_s$: circuito indutivo, E atrasado em relação a I
$f = f_s$: circuito resistivo, E e I estão em fase

cíproco da curva da impedância em função da freqüência. Como a curva de Z_r não é simétrica em relação à freqüência de ressonância, a curva da corrente em função da freqüência também não apresenta essa propriedade.

Existe um intervalo definido de freqüências no qual a corrente está próxima do valor máximo e a impedância do valor mínimo. Este intervalo é limitado pelas freqüências para as quais a corrente corresponde a 0,707 do valor máximo, que são chamadas de freqüências de corte (f_1 e f_2 na Fig. 20.14). O intervalo entre as duas freqüências é chamado de banda passante (ou *BP*, abreviadamente) do circuito ressonante.

Nas freqüências de corte, a potência dissipada no circuito é igual à metade da potência dissipada na freqüência de ressonância, ou seja,

$$P_{CPF} \approx \frac{1}{2} P_{max} \quad (20.17)$$

Para demonstrar a Eq. (20.17), basta lembrar que

$$P_{max} = I_{max}^2 R$$

portanto

$$P_{CPF} = I^2 R = (0,707 I_{max})^2 R = (0,5)(I_{max}^2 R) = \frac{1}{2} P_{max}$$

Como o circuito ressonante é ajustado para selecionar uma faixa de freqüências, a curva da Fig. 20.14 é chamada de *curva de seletividade*. O nome resulta do fato de que a curva expressa a forma como o circuito *seleciona* as freqüências que se encontram no interior do intervalo definido pela banda passante. Quanto menor a banda passante, maior a seletividade. A forma da curva, mostrada na Fig. 20.15, depende dos valores de R , L e C . Para valores constantes de indutância e capacitância, quanto menor a resistência, menor a banda passante e maior a seletividade. Para valores constantes de resistência, quanto maior a relação L/C , menor a banda passante e maior a seletividade.

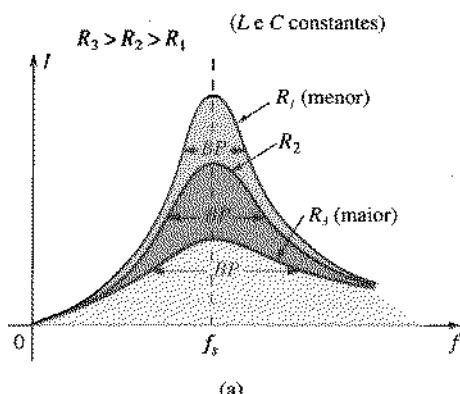
Em termos de Q_s , se R for maior para o mesmo X_L , Q_s será menor, como mostra a equação $Q_s = \omega L / R$.

Um Q_s pequeno, portanto, está associado a uma curva de ressonância com uma grande banda passante e pequena seletividade, enquanto um Q_s elevado indica o contrário.

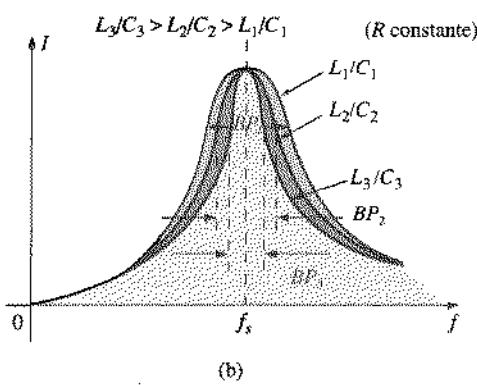
Nos circuitos em que $Q_s \geq 10$, costuma-se usar a aproximação de que a freqüência de ressonância está no

20.5 SELETIVIDADE

Se plotarmos o módulo da corrente $I = E/Z_r$ em função da freqüência para uma amplitude *constante* da tensão E , obteremos uma curva semelhante à da Fig. 20.14, na qual a corrente aumenta de zero até um valor máximo de E/R (no ponto em que Z_r é mínima) e depois diminui até zero mais devagar do que aumentou para chegar ao máximo. Na verdade, a curva corresponde ao re-



(a)



(b)

Fig. 20.15 Efeitos de R , L e C sobre a curva de seletividade para o circuito ressonante em série.

centro da banda passante e a curva de ressonância é simétrica em relação à freqüência da ressonância.

Uma curva traçada para essas condições aparece na Fig. 20.16, onde se pode ver que as freqüências de corte são eqüidistantes da freqüência de ressonância.

Isto não é verdade para qualquer Q_s . As freqüências de corte f_1 e f_2 podem ser encontradas para o caso geral (qualquer Q_s) utilizando o fato de que uma queda da corrente para 0,707 do valor na ressonância corresponde a um aumento na impedância de $1/0,707 = \sqrt{2}$ vezes o valor na ressonância, que é R .

Substituindo $\sqrt{2}R$ na equação do módulo de Z_s , verificamos que

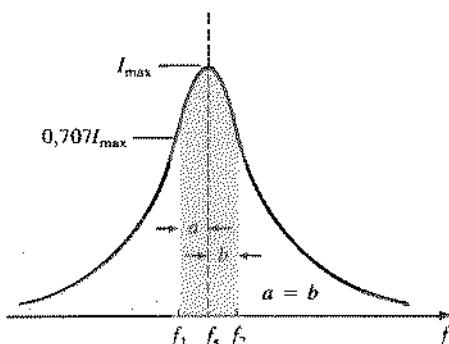


Fig. 20.16 Curva aproximada para o circuito ressonante em série, válida para $Q_s \geq 10$.

$$Z_T = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Se torna

$$\sqrt{2}R = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

ou, elevando os dois membros ao quadrado,

$$2R^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2$$

e

$$R^2 = (X_L - X_C)^2$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, temos:

$$R = X_L - X_C \quad \text{ou} \quad R = X_L + X_C = 0$$

Vamos primeiramente considerar o caso em que $X_L > X_C$, que envolve f_2 ou ω_2 . Substituindo X_L por $\omega_2 L$ e X_C por $1/\omega_2 C$, temos

$$R = \omega_2 L + \frac{1}{\omega_2 C} = 0 \quad \text{ou} \quad R\omega_2 - \omega_2^2 L + \frac{1}{C} = 0$$

que pode ser escrito na forma

$$\omega_2^2 - \frac{R}{L}\omega_2 - \frac{1}{LC} = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos

$$\omega_2 = \frac{-(-R/L) \pm \sqrt{[-(R/L)]^2 - [-(4/LC)]}}{2}$$

e

$$\omega_2 = + \frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}$$

ou

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{R}{2L} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \right] \quad (\text{Hz}) \quad (20.18)$$

Uma das raízes da equação do segundo grau, que corresponderia a tomar o segundo termo do lado direito da Eq. (20.18) com o sinal negativo, foi ignorada porque não tem significado físico; na verdade, como $(1/2)\sqrt{(R/L)^2 + 4/LC}$ é sempre maior do que $R/(2L)$, esta solução levaria a um valor negativo para a freqüência f_2 .

Se repetirmos os cálculos para o caso em que $X_C > X_L$, que envolve ω_1 ou f_1 , teremos:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{R}{2L} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \right] \quad (\text{Hz}) \quad (20.19)$$



A banda passante (*BP*) é dada por:

$$BP = f_2 - f_1 = \text{Eq. (20.18)} - \text{Eq. (20.19)}$$

e, portanto

$$BP = f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L} \quad (20.20)$$

Fazendo $R/L = \omega_s/Q_s$ por causa de $Q_s = \omega_s L/R$ e $1/2\pi = f_s/\omega_s$ por causa de $\omega_s = 2\pi f_s$, temos:

$$BP = \frac{R}{2\pi L} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\left(\frac{R}{L}\right) = \left(\frac{f_s}{\omega_s}\right)\left(\frac{\omega_s}{Q_s}\right)$$

ou

$$BP = \frac{f_s}{Q_s} \quad (20.21)$$

que é uma forma muito conveniente, pois relaciona a banda passante ao Q_s do circuito. A Eq. (20.21) confirma o fato, já mencionado anteriormente, de que quanto maior o valor de Q_s menor a banda passante, e vice-versa.

Escrevendo a Eq. (20.21) de forma um pouco diferente, temos

$$\frac{f_2 - f_1}{f_s} = \frac{1}{Q_s} \quad (20.22)$$

A razão $(f_2 - f_1)/f_s$ é chamada de *banda passante relativa* e é uma indicação da largura da banda passante em comparação com a freqüência de ressonância.

Também é possível demonstrar matematicamente que a freqüência de ressonância é igual à média geométrica das freqüências de corte, isto é, que

$$f_s = \sqrt{f_1 f_2} \quad (20.23)$$

20.6 V_R , V_L e V_C

Plotando no mesmo gráfico o módulo (valor eficaz) das tensões V_R , V_L e V_C e da corrente I do circuito ressonante em série em função da freqüência, obtemos as curvas da Fig. 20.17. Observe que a curva de V_R tem a mesma forma que a curva de I e um valor máximo igual à amplitude da tensão de entrada, E . Em freqüências muito baixas, V_C é praticamente igual à tensão de entrada, já que a reatância do capacitor tem um valor elevado e a reatância do indutor é pequena. À medida que a freqüência aumenta, o fator $1/\omega C$ da equação

$$V_C = IX_C = (I)\left(\frac{1}{\omega C}\right)$$

diminui, mas a corrente I aumenta mais rapidamente do que $1/\omega C$ diminui. Assim, V_C aumenta e continua a aumentar até que a freqüência se aproxima da freqüência de ressonância e a taxa de aumento da corrente I começa a diminuir. Quando

isso acontece, a diminuição causada pelo fator $1/\omega C$ se torna maior do que o aumento causado pelo fator I e V_C começa a diminuir. O máximo de V_C ocorre para uma freqüência um pouco menor do que a freqüência de ressonância. Para freqüências maiores que a freqüência da ressonância, tanto V_C como I diminuem e V_C tende para zero quando a freqüência tende para infinito.

Quanto maior o Q_s do circuito, mais próximo $f_{C_{\max}}$ estará de f_s e mais próximo $V_{C_{\max}}$ estará de QE . Para circuitos com $Q_s \geq 10$, $f_{C_{\max}} \approx f_s$ e $V_{C_{\max}} \approx QE$.

A curva de V_L aumenta monotonicamente de zero até a freqüência de ressonância, pois as grandezas ωL e I da equação $V_L = IX_L = (I)(\omega L)$ aumentam nesta faixa de freqüências. Na ressonância, I atinge o valor máximo, mas ωL ainda está crescendo. O máximo de V_L ocorre portanto para uma freqüência um pouco maior do que a freqüência de ressonância. Depois de passar pelo máximo, a tensão V_L começa a diminuir, pois a queda de I se torna maior do que o aumento do ωL e tende para E quando a freqüência tende para infinito, já que nessas circunstâncias X_L tende para infinito e X_C tende para zero.

À medida que o Q_s do circuito aumenta, a freqüência $f_{L_{\max}}$ diminui, aproximando-se de f_s , e $V_{L_{\max}}$ se aproxima de QE . Em circuitos com $Q_s \geq 10$, $f_{L_{\max}} \approx f_s$ e $V_{L_{\max}} \approx QE$.

Os valores de V_L são maiores do que os de V_C para qualquer freqüência maior do que a freqüência de ressonância e menores do que V_C para qualquer freqüência menor do que a freqüência de ressonância. Isto confirma o fato de que o *R-L-C* em série é basicamente capacitivo para freqüências entre zero e a freqüência de ressonância, e basicamente indutivo para freqüências, maiores do que a freqüência de ressonância.

Quando $Q_s \geq 10$, as curvas da Fig. 20.17 têm o aspecto da Fig. 20.18. Observe que nesse caso todas as curvas têm formas semelhantes e atingem o máximo (aproximadamente) na freqüência de ressonância.

Resumindo:

- As tensões V_C e V_L atingem seus valores máximos em freqüências próximas da freqüência de ressonância.
- Em freqüências muito baixas, V_C é praticamente igual à tensão da fonte e V_L é muito pequena; em freqüências muito al-

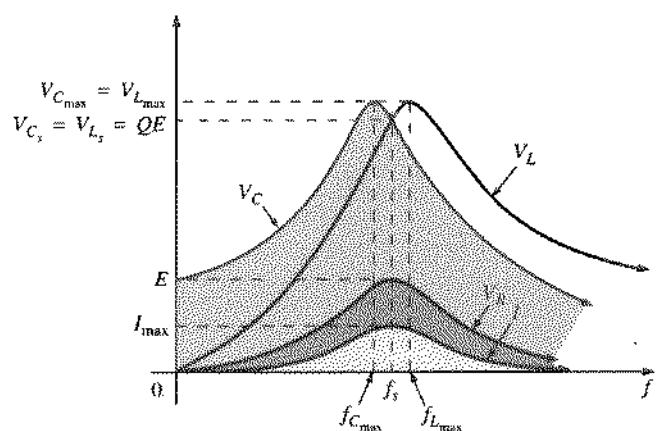


Fig. 20.17 V_R , V_L , V_C e I em função da freqüência para um circuito ressonante em série.

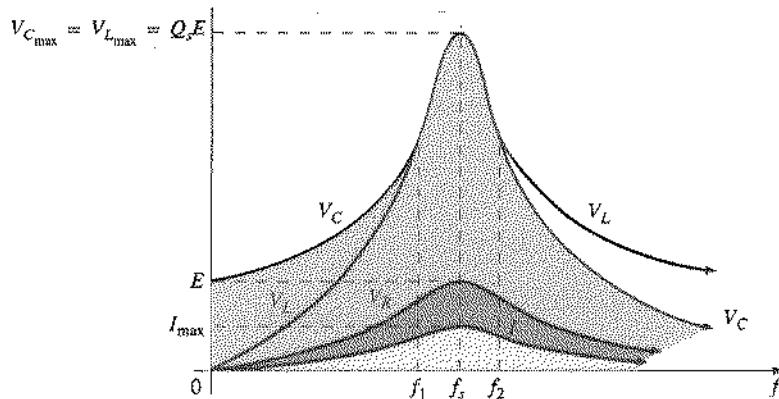


Fig. 20.18 V_R , V_L , V_C e I em função da freqüência para um circuito ressonante em série no qual para $Q_s \geq 10$.

tas, V_L é praticamente igual à tensão da fonte e V_C é muito pequena.

3. A tensão V_R e a corrente I atingem seus valores máximos na freqüência de ressonância e variam da mesma forma com a freqüência.

20.7 EXEMPLOS (RESONÂNCIA EM SÉRIE)

EXEMPLO 20.1

- Para o circuito ressonante em série da Fig. 20.19, encontre I , V_R , V_L e V_C na ressonância.
- Qual o Q_s do circuito?
- Se a freqüência de ressonância é 5000 Hz, encontre a banda passante.
- Qual a potência dissipada no circuito nas freqüências de corte?

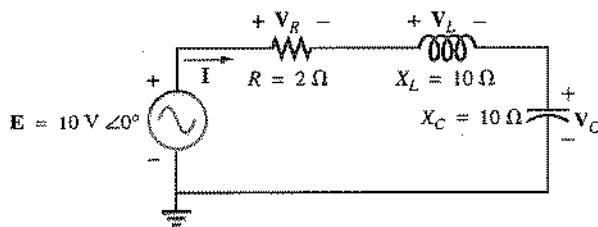


Fig. 20.19 Exemplo 20.1.

Soluções

a. $Z_{T_s} = R = 2 \Omega$

$$I = \frac{E}{Z_{T_s}} = \frac{10 \text{ V} \angle 0^\circ}{2 \Omega \angle 0^\circ} = 5 \text{ A} \angle 0^\circ$$

$$V_R = E = 10 \text{ V} \angle 0^\circ$$

$$V_L = (I \angle 0^\circ)(X_L \angle 90^\circ) = (5 \text{ A} \angle 0^\circ)(10 \Omega \angle 90^\circ) \\ = 50 \text{ V} \angle 90^\circ$$

$$V_C = (I \angle 0^\circ)(X_C \angle -90^\circ) = (5 \text{ A} \angle 0^\circ)(10 \Omega \angle -90^\circ) \\ = 50 \text{ V} \angle -90^\circ$$

b. $Q_s = \frac{X_L}{R} = \frac{10 \Omega}{2 \Omega} = 5$

c. $BP = f_2 - f_1 = \frac{f_s}{Q_s} = \frac{5000 \text{ Hz}}{5} = 1000 \text{ Hz}$

d. $P_C = \frac{1}{2}P_{\max} = \frac{1}{2}I_{\max}^2 R = \left(\frac{1}{2}\right)(5 \text{ A})^2(2 \Omega) = 25 \text{ W}$

EXEMPLO 20.2

A banda passante de um circuito ressonante em série é 400 Hz.

- Se a freqüência de ressonância é 4000 Hz, qual o valor de Q_s ?
- Se $R = 10 \Omega$, qual o valor de X_L na ressonância?
- Encontre a indutância L e a capacidade C do circuito.

Soluções

a. $BP = \frac{f_s}{Q_s}$ ou $Q_s = \frac{f_s}{BP} = \frac{4000 \text{ Hz}}{400 \text{ Hz}} = 10$

b. $Q_s = \frac{X_L}{R}$ ou $X_L = Q_s R = (10)(10 \Omega) = 100 \Omega$

c. $X_L = 2\pi f_s L$ ou $L = \frac{X_L}{2\pi f_s} = \frac{100 \Omega}{2\pi(4000 \text{ Hz})} = 3,98 \text{ mH}$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_s C} \text{ ou } C = \frac{1}{2\pi f_s X_C} = \frac{1}{2\pi(4000 \text{ Hz})(100 \Omega)} \\ = 0,398 \mu\text{F}$$

EXEMPLO 20.3

Um circuito $R-L-C$ em série possui uma freqüência de ressonância de 12.000 Hz.

- Se $R = 5 \Omega$ e X_L na ressonância é 300 Ω, encontre a banda passante.
- Encontre as freqüências de corte.

Soluções

a. $Q_s = \frac{X_L}{R} = \frac{300 \Omega}{5 \Omega} = 60$

$$BP = \frac{f_s}{Q_s} = \frac{12.000 \text{ Hz}}{60} = 200 \text{ Hz}$$

- b. Como $Q_s \geq 10$, f_s fica no centro da banda passante. Assim,

$$f_2 = f_s + \frac{BP}{2} = 12.000 \text{ Hz} + 100 \text{ Hz} = 12.100 \text{ Hz}$$

e

$$f_1 = 12.000 \text{ Hz} - 100 \text{ Hz} = 11.900 \text{ Hz}$$

EXEMPLO 20.4

- a. Determine o Q_s e a banda passante para a curva de resposta da Fig. 20.20.
 b. Para $C = 101,5 \text{ nF}$, determine L e R para o circuito ressonante em série.
 c. Determine a tensão aplicada.

Soluções

a. A freqüência de ressonância é 2800 Hz. Determinando a diferença entre as freqüências para as quais a corrente é 140 mA (0,707 vezes o valor na ressonância, aproximadamente), temos:

$$BP = 200 \text{ Hz}$$

e

$$Q_s = \frac{f_s}{BP} = \frac{2800 \text{ Hz}}{200 \text{ Hz}} = 14$$

$$\begin{aligned} \text{b. } f_s &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ ou } L = \frac{1}{4\pi^2 f_s^2 C} \\ &= \frac{1}{4\pi^2 (2,8 \times 10^3 \text{ Hz})^2 (101,5 \times 10^{-9} \text{ F})} \\ &= 31,832 \text{ mH} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_s &= \frac{X_L}{R} \text{ ou } R = \frac{X_L}{Q_s} = \frac{2\pi(2800 \text{ Hz})(31,832 \times 10^{-3} \text{ H})}{14} \\ &= 40 \Omega \end{aligned}$$

$$\text{c. } I_{\max} = \frac{E}{R} \text{ ou } E = I_{\max}R$$

e

$$E = (200 \text{ mA})(40 \Omega) = 8 \text{ V}$$

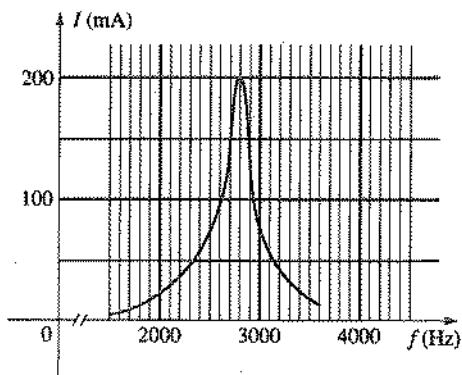


Fig. 20.20 Exemplo 20.4.

EXEMPLO 20.5 Um circuito $R-L-C$ em série foi projetado para entrar em ressonância em $\omega_s = 10^5 \text{ rad/s}$, com uma banda passante de $0,15 \omega_s$, e consome 16 W de uma fonte de 120 V na ressonância.

- Determine o valor de R .
- Encontre a banda passante em hertz.
- Encontre os valores nominais de L e C .
- Qual o Q_s do circuito?
- Determine a banda passante relativa.

Soluções

$$\text{a. } P = \frac{E^2}{R} \text{ e } R = \frac{E^2}{P} = \frac{(120 \text{ V})^2}{16 \text{ W}} = 900 \Omega$$

$$\text{b. } f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = \frac{10^5 \text{ rad/s}}{2\pi} = 15.915,49 \text{ Hz}$$

$$BP = 0,15f_s = 0,15(15.915,49 \text{ Hz}) = 2387,32 \text{ Hz}$$

$$\text{c. Eq. (20.20):}$$

$$BP = \frac{R}{2\pi L} \text{ e } L = \frac{R}{2\pi BP} = \frac{900 \Omega}{2\pi(2387,32 \text{ Hz})} = 60 \text{ mH}$$

$$\begin{aligned} f_s &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ e } C = \frac{1}{4\pi^2 f_s^2 L} \\ &= \frac{1}{4\pi^2 (15.915,49 \text{ Hz})^2 (60 \times 10^{-3} \text{ H})} \\ &= 1,67 \text{ nF} \end{aligned}$$

$$\text{d. } Q_s = \frac{X_L}{R} = \frac{2\pi f_s L}{R} = \frac{2\pi (15.915,49 \text{ Hz})(60 \text{ mH})}{900 \Omega} = 6,67$$

$$\text{e. } \frac{f_2 - f_1}{f_s} = \frac{BP}{f_s} = \frac{1}{Q_s} = \frac{1}{6,67} = 0,15$$

RESSONÂNCIA EM PARALELO**20.8 CIRCUITO RESSONANTE EM PARALELO**

A configuração básica de um circuito ressonante em série é uma combinação de um circuito $R-L-C$ em série com uma fonte de tensão. O circuito ressonante em paralelo possui a configuração básica da Fig. 20.21, uma combinação de um circuito $R-L-C$ em paralelo com uma fonte de corrente.

No caso do circuito ressonante em série, a impedância era mínima na freqüência de ressonância e o resultado era uma corrente elevada que levava a valores consideráveis de V_c e V_L . No circuito ressonante em paralelo, a impedância é máxima na freqüência de ressonância; entretanto, isso também leva a valores elevados de V_c e V_L , como podemos concluir se nos lembrarmos da definição generalizada de resistência ($V_p = IZ_p$). No caso do circuito da Fig. 20.21, a condição de ressonância é $X_L = X_C$, e a curva de V_p em função da freqüência tem a mesma forma que as curvas de V_c e V_L do circuito ressonante em série.

Se fosse possível na prática montar um circuito como o da Fig. 20.21, sua análise seria tão simples e direta quanto a do circuito ressonante em série. Acontece que os indutores reais

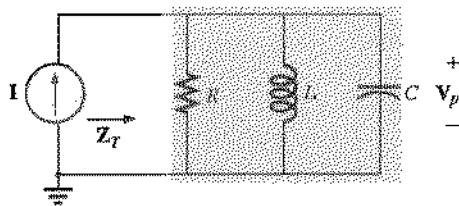
f_r 

Fig. 20.21 Circuito ressonante em paralelo ideal.

possuem uma resistência, R_i , que deve ser incluída no circuito em série com a indutância, como na Fig. 20.22. Ao contrário do que acontece no caso do circuito ressonante em série, esta resistência não pode ser simplesmente acrescentada à resistência da fonte ou a uma resistência colocada intencionalmente no circuito. Embora R_i seja em geral pequena em comparação com outras resistências do circuito, pode ter uma influência importante sobre as condições de ressonância dos circuitos ressonantes em paralelo, como será visto nas próximas seções. Em outras palavras, o circuito da Fig. 20.21 é um circuito idealizado que só constitui uma boa aproximação para um circuito real em circunstâncias muito especiais.

Nossa primeira tarefa será encontrar um circuito paralelo equivalente (nos terminais) ao ramo $R-L$ em série da Fig. 20.22 usando a técnica introduzida na Seção 15.10. Temos:

$$Z_{R-L} = R_i + jX_L$$

e portanto

$$\begin{aligned} Y_{R-L} &= \frac{1}{Z_{R-L}} = \frac{1}{R_i + jX_L} = \frac{R_i}{R_i^2 + X_L^2} - j \frac{X_L}{R_i^2 + X_L^2} \\ &= \frac{1}{\frac{R_i^2 + X_L^2}{R_i}} + \frac{1}{j \left(\frac{R_i^2 + X_L^2}{X_L} \right)} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{jX_{L_p}} \end{aligned}$$

onde

$$R_p = \frac{R_i^2 + X_L^2}{R_i} \quad (20.24)$$

e

$$X_{L_p} = \frac{R_i^2 + X_L^2}{X_L} \quad (20.25)$$

como se pode ver na Fig. 20.23.

Substituindo o indutor da Fig. 20.22 pelo circuito equivalente da Fig. 20.23 e levando em conta o fato de que a fonte possui uma resistência interna R_s , obtemos o circuito da Fig. 20.24.

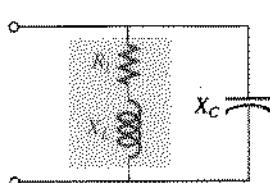


Fig. 20.22 Circuito L-C em paralelo real.

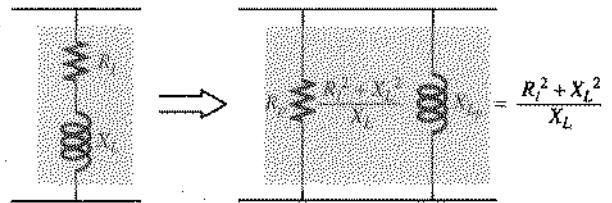


Fig. 20.23 Circuito em paralelo equivalente a uma combinação R-L em série.

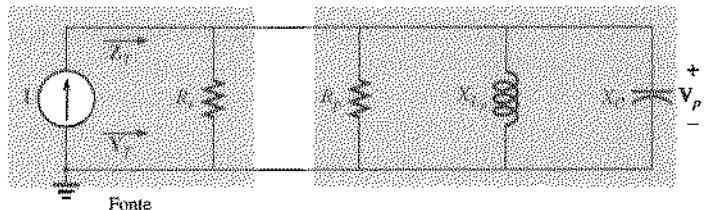


Fig. 20.24 Substituição da combinação R-L em série da Fig. 20.22 por um circuito equivalente em paralelo.

Se definirmos a combinação de R_p e X_{L_p} em paralelo pela notação

$$R = R_p \parallel R_p \quad (20.26)$$

ficaremos com o circuito da Fig. 20.25. Ele se parece com a configuração ideal da Fig. 20.21.

Chegamos agora a um ponto no qual podemos definir as condições de ressonância para o circuito ressonante paralelo. Lembre-se de que para os circuitos ressonantes em série a freqüência de ressonância era a freqüência na qual a impedância era mínima, a corrente era máxima, a impedância de entrada era puramente resistiva e o circuito possuía um fator de potência unitário. Nos circuitos ressonantes em paralelo, como a resistência R_p em nosso circuito equivalente depende da freqüência, a freqüência para a qual V_p é máxima não é necessariamente a mesma para a qual o fator de potência é unitário. Como as duas condições são utilizadas para definir o estado de ressonância, as freqüências nas quais elas ocorrem serão representadas por índices diferentes.

Freqüência para a qual o Fator de Potência É Unitário, f_p

Para o circuito da Fig. 20.25,

$$\begin{aligned} Y_T &= \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jX_{L_p}} + \frac{1}{-jX_C} \\ &= \frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{X_C}\right) + j\left(\frac{1}{X_{L_p}}\right) \end{aligned}$$

e

$$Y_T = \frac{1}{R} + j\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_{L_p}}\right) \quad (20.27)$$

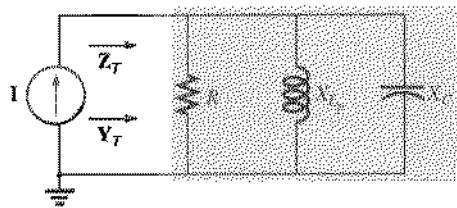


Fig. 20.25 Substituição de R_s e R_p por uma resistência equivalente no circuito da Fig. 20.24.

Para que o fator de potência seja unitário, a componente reativa deve ser nula e portanto

$$\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_{L_p}} = 0$$

Assim,

$$\frac{1}{X_C} = \frac{1}{X_{L_p}}$$

e

$$X_{L_p} = X_C$$
(20.28)

Substituindo X_{L_p} pelo seu valor, temos:

$$\frac{R_s^2 + X_L^2}{X_L} = X_C$$
(20.29)

A freqüência de ressonância f_p pode ser determinada a partir da Eq. (20.29):

$$R_s^2 + X_L^2 = X_C X_L = \left(\frac{1}{\omega C}\right) \omega L = \frac{L}{C}$$

ou

$$X_L^2 = \frac{L}{C} - R_s^2$$

e portanto

$$2\pi f_p L = \sqrt{\frac{L}{C} - R_s^2}$$

e

$$f_p = \frac{1}{2\pi L} \sqrt{\frac{L}{C} - R_s^2}$$

Multiplicando o numerador e o denominador dentro da raiz por C/L ficamos com

$$f_p = \frac{1}{2\pi L} \sqrt{\frac{1 - R_s^2(C/L)}{C/L}} = \frac{1}{2\pi L \sqrt{C/L}} \sqrt{1 - \frac{R_s^2 C}{L}}$$

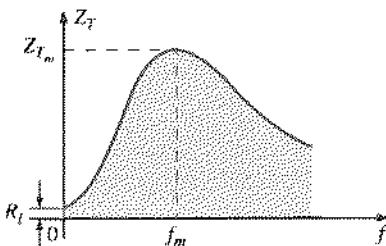


Fig. 20.26 Z_T em função da freqüência para o circuito ressonante paralelo.

e

$$f_p = f_s \sqrt{\frac{1 - (R_s^2 C / L)}{4}}$$
(20.30)

ou

$$f_p = f_s \sqrt{1 - \frac{R_s^2 C}{4L}}$$
(20.31)

onde f_p é a freqüência de ressonância do circuito ressonante paralelo (para $f_p = 1$) e f_s é a freqüência determinada pela condição $X_L = X_C$. Observe que, ao contrário do que acontece nos circuitos ressonantes em série, a freqüência de ressonância f_p depende da resistência (R_s , no caso). Note também a ausência da resistência da fonte R_s nas Eqs.(20.30) e (20.31). Como o fator $\sqrt{1 - (R_s^2 C / L)}$ é menor do que a unidade, f_p é menor do que f_s . Observe também que quando R_s tende para zero, f_p tende para f_s .

Freqüência para a qual a Impedância É Máxima, f_m

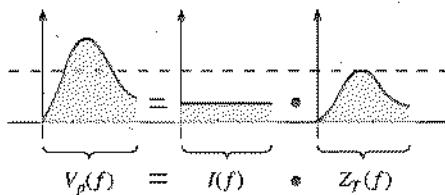
Em $f = f_p$, a impedância do circuito ressonante em paralelo não é máxima, embora esteja próxima deste valor. A freqüência para a qual a impedância é máxima, representada pelo símbolo f_m (Fig. 20.26), é ligeiramente maior do que f_p . A freqüência f_m pode ser determinada derivando a expressão geral para a impedância em relação à freqüência e igualando o resultado a zero. O cálculo é muito trabalhoso e não será reproduzido aqui. O resultado é o seguinte:

$$f_m = f_s \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{R_s^2 C}{L} \right)}$$
(20.32)

Observe a semelhança com a Eq. (20.31). Como o fator dentro da raiz quadrada da Eq. (20.32) é sempre maior que o fator correspondente da Eq. (20.31), f_m está sempre compreendida entre f_s e f_p , ou seja,

$$f_s > f_m > f_p$$

(20.33)

Fig. 20.27 Forma da curva de $V_p(f)$.

Uma vez determinado o valor de f_m , o circuito da Fig. 20.25 pode ser utilizado para determinar o módulo e a fase da impedância total na condição de ressonância simplesmente fazendo $f = f_m$ e executando os cálculos necessários. A expressão geral para Z_{T_m} é a seguinte:

$$\boxed{Z_{T_m} = R \parallel X_{L_p} \parallel X_C} \quad f = f_m \quad (20.34)$$

20.9 CURVA DE SELETIVIDADE PARA CIRCUITOS RESSONANTES EM PARALELO

A curva de Z_T em função da frequência da Fig. 20.26 mostra claramente que o circuito ressonante em paralelo alcança sua impedância máxima na ressonância (f_m), ao contrário do circuito ressonante em série, cuja impedância é mínima nas mesmas condições. Note também que Z_T é aproximadamente igual a R_L em $f = 0$ Hz, pois $Z_T = R_s \parallel R_L \approx R_L$.

Como a corrente I da fonte de corrente é constante para qualquer valor de Z_T ou frequência, a curva da tensão no circuito paralelo em função da frequência tem a mesma forma que a curva da impedância total Z_T , como se pode ver na Fig. 20.27.

Para o circuito paralelo, a curva de ressonância de interesse é a da tensão V_c entre os terminais do capacitor. A razão para este interesse em V_c está nas considerações de ordem prática que freqüentemente envolvem a colocação do capacitor na entrada de outro estágio do sistema.

Como a tensão entre os terminais de elementos em paralelo é igual,

$$\boxed{V_C = V_p = I Z_T} \quad (20.35)$$

O valor de ressonância de V_c é, dessa forma, determinado pelo valor de Z_{T_m} e pela intensidade da corrente da fonte, I .

O fator de qualidade de um circuito ressonante em paralelo também é dado pela razão entre a potência reativa e a potência real:

$$Q_p = \frac{V_p^2/X_{L_p}}{V_p^2/R}$$

onde $R = R_s \parallel R_L$ e V_p é a tensão nos ramos em paralelo. O resultado é

$$\boxed{Q_p = \frac{R}{X_{L_p}} = \frac{R_s \parallel R_L}{X_{L_p}}} \quad (20.36a)$$

ou, como $X_{L_p} = X_C$ na ressonância,

$$\boxed{Q_p = \frac{R_s \parallel R_L}{X_C}} \quad (20.36b)$$

Para uma fonte de corrente ideal ($R_s = \infty \Omega$) ou para R , muito maior do que R_p , podemos usar a seguinte aproximação:

$$R = R_s \parallel R_p \approx R_p$$

e

$$Q_p = \frac{R_s \parallel R_p}{X_{L_p}} = \frac{R_p}{X_{L_p}} = \frac{(R_L^2 + X_L^2)/R_L}{(R_L^2 + X_L^2)/X_L}$$

de modo que

$$\boxed{Q_p = \frac{X_L}{R_L} = Q_I} \quad R_s \gg R_p \quad (20.37)$$

que é simplesmente o fator de qualidade do indutor, Q_I .

A relação entre a banda passante, a frequência de ressonância e o fator de qualidade é a mesma que no circuito ressonante em série:

$$\boxed{BP = f_2 - f_1 = \frac{f_m}{Q_p}} \quad (20.38)$$

As frequências de corte f_1 e f_2 podem ser obtidas usando o circuito equivalente da Fig. 20.25 e a condição de fator de potência unitário para a ressonância. As frequências de corte são definidas pela condição de que a tensão de saída deve ser 0,707 vezes o valor máximo. Entretanto, no caso do circuito ressonante em paralelo alimentado por uma fonte de corrente, a curva da impedância em função da frequência tem a mesma forma que a curva da tensão. Esta semelhança permite definirmos as freqüências de corte como as freqüências nas quais a impedância é 0,707 vezes o valor máximo. Como o valor máximo é a resistência equivalente R da Fig. 20.25, as freqüências de corte são definidas por uma impedância igual a $0,707R$ ou $(1/\sqrt{2})R$.

Fazendo a impedância do circuito da Fig. 20.25 igual a este valor, temos:

$$Z = \left| \frac{1}{\frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)} \right| = 0,707R$$

que pode ser escrita como

$$Z = \left| \frac{1}{\frac{1}{R} \left[1 + jR \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right]} \right| = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

ou

$$\left| \frac{R}{1 + jR \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)} \right| = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

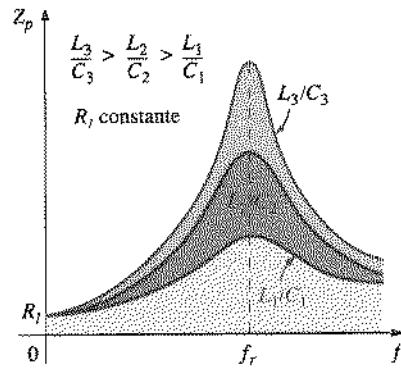
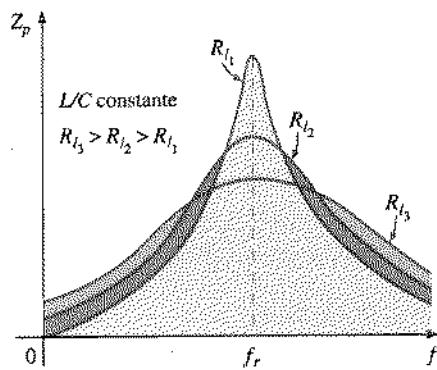


Fig. 20.28 Influência de R_L , L e C na curva de impedância de um circuito ressonante em paralelo.

e finalmente

$$\left| \frac{1}{1 + jR\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Para que a igualdade acima seja satisfeita, é preciso que a parte imaginária do denominador do primeiro membro da equação acima seja igual a 1. Assim, as freqüências de corte são definidas pela seguinte equação:

$$R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = 1$$

Fazendo $\omega = 2\pi f$ e reagrupando os termos, obtemos a seguinte equação do segundo grau:

$$f^2 - \frac{f}{2\pi RC} - \frac{1}{4\pi^2 LC} = 0$$

que é da forma

$$af^2 + bf + c = 0$$

com

$$a = 1, b = -\frac{1}{2\pi RC}, \text{ e } c = -\frac{1}{4\pi^2 LC}$$

Substituindo a , b e c por seus valores na fórmula

$$f = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

obtemos, depois de uma série de manipulações matemáticas, as seguintes expressões:

$$f_1 = \frac{1}{4\pi C} \left[R - \sqrt{R^2 + \frac{4C}{L}} \right] \quad (20.39a)$$

$$f_2 = \frac{1}{4\pi C} \left[R + \sqrt{R^2 + \frac{4C}{L}} \right] \quad (20.39b)$$

Como o termo entre colchetes da Eq. [20.39(a)] é sempre negativo, associamos f_1 ao módulo do resultado.

Os efeitos de R_L , L e C sobre a resposta do circuito ressonante em paralelo, como se pode ver na Fig. 20.28 para a curva da impedância em função da freqüência, são semelhantes aos efeitos sobre a resposta do circuito ressonante em série.

Na ressonância, o aumento de R_L ou a diminuição da razão L/C resultam em uma diminuição da impedância, acompanhada por um aumento da corrente. A banda passante das curvas de ressonância é dada pela Eq. (20.38). Como mostra a Fig. 20.28, quanto maior o valor de R_L e quanto menor o valor de L (ou de L/C , para C constante), maior a banda passante.

Em baixas freqüências, a reatância capacitiva é muito elevada e a reatância indutiva é pequena. Como os elementos estão em paralelo, a impedância total em baixas freqüências é portanto indutiva. Em altas freqüências ocorre o inverso e o circuito é capacitivo. Na ressonância (f_r), o circuito se torna resistivo. Este comportamento pode ser observado na curva da Fig. 20.29. Note a diferença entre esta curva e a curva de fase do circuito ressonante em série (Fig. 20.13), que representa um comportamento capacitivo em baixas freqüências e um comportamento indutivo em altas freqüências.

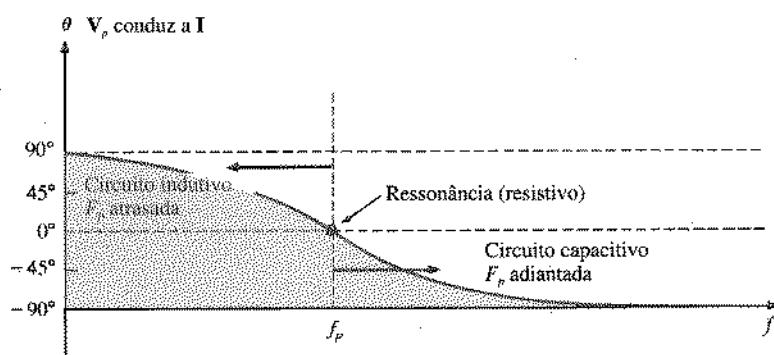


Fig. 20.29 Gráfico de fase para o circuito ressonante em paralelo.



20.10 COMPORTAMENTO DO CIRCUITO RESSONANTE EM PARALELO PARA $Q_l \geq 10$

A seção anterior pode ter deixado a impressão de que a análise de circuitos ressonantes em paralelo é muito mais complexa do que a de circuitos ressonantes em série. Felizmente, na maioria dos casos isso não é verdade; em muitos circuitos ressonantes em paralelo, o fator de qualidade do indutor, Q_l , é suficientemente elevado para que seja possível introduzir várias aproximações que simplificam consideravelmente a análise do circuito.

Reatância Indutiva, X_{L_p}

Se expressarmos X_{L_p} na forma

$$X_{L_p} = \frac{R_l^2 + X_L^2}{X_L} = \frac{R_l^2(X_L)}{X_L(X_L)} + X_L = \frac{X_L}{Q_l^2} + X_L$$

então, para $Q_l \geq 10$, $X_L/Q_l^2 \approx 0$ na presença de X_L e

$$X_{L_p} \approx X_L \quad Q_l \geq 10 \quad (20.40)$$

Como a ressonância é definida por $X_{L_p} = X_C$, a condição de ressonância se reduz a:

$$X_L \approx X_C \quad Q_l \geq 10 \quad (20.41)$$

Freqüência de Ressonância f_p (Fator de Potência Unitário)

Podemos escrever o fator $R_l^2 C/L$ da Eq. (20.31) na forma

$$\frac{R_l^2 C}{L} = \frac{1}{\frac{L}{R_l^2 C}} = \frac{1}{(\omega) \frac{L}{R_l^2 C}} = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{X_L X_C}$$

e usar a Eq. (20.40) ($X_L = X_C$):

$$\frac{1}{X_L X_C} = \frac{1}{X_L^2} = \frac{1}{Q_l^2}$$

Nesse caso, a Eq. (20.31) se torna

$$f_p = f_s \sqrt{1 - \frac{1}{Q_l^2}} \quad Q_l \geq 10 \quad (20.42)$$

revelando claramente que, à medida que Q_l aumenta, f_p se aproxima mais e mais de f_s .

Para $Q_l \geq 10$,

$$1 - \frac{1}{Q_l^2} \approx 1$$

e

$$f_p \approx f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad Q_l \geq 10 \quad (20.43)$$

Freqüência de Ressonância, f_m (V_c Máxima)

Fazendo $R_l^2 C/L = 1/Q_l^2$, na Eq. (20.32), a mesma aproximação usada para deduzir a Eq. (20.42), temos:

$$f_m \approx f_s \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{Q_l^2} \right)} \quad Q_l \geq 10 \quad (20.44)$$

Comparando as Eqs. (20.42) e (20.44), vemos que f_m está sempre mais próximo de f_s do que f_p .

Para $Q_l \geq 10$, o termo negativo se torna muito pequeno e pode ser desprezado. Assim, temos:

$$f_m \approx f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad Q_l \geq 10 \quad (20.45)$$

Nesse caso, para $Q_l \geq 10$,

$$f_p \approx f_m \approx f_s \quad Q_l \geq 10 \quad (20.46)$$

R_p

$$\begin{aligned} R_p &= \frac{R_l^2 + X_L^2}{R_l} = R_l + \frac{X_L^2}{R_l} \left(\frac{R_l}{R_l} \right) = R_l + \frac{X_L^2}{R_l^2} R_l \\ &= R_l + Q_l^2 R_l = (1 + Q_l^2) R_l \end{aligned}$$

Para $Q_l \geq 10$, $1 + Q_l^2 \approx Q_l^2$ e

$$R_p \approx Q_l^2 R_l \quad Q_l \geq 10 \quad (20.47)$$

Aplicando as aproximações para R_p e X_{L_p} ao circuito da Fig. 20.24, obtemos o circuito equivalente aproximado para $Q_l \geq 10$ da Fig. 20.30, que é certamente muito mais “enxuto”.

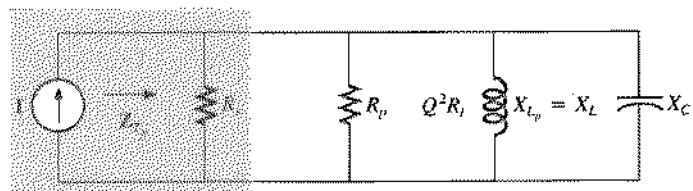


Fig. 20.30 Circuito equivalente aproximado para $Q_l \geq 10$.

Fazendo $Q_l = X_L/R_l$ na Eq. (20.47), temos:

$$R_p \equiv Q_l^2 R_l = \frac{X_L^2}{R_l^2 R_l} = \frac{X_L^2}{R_l} = \frac{X_L X_C}{R_l} = \frac{2\pi f L}{R_l (2\pi f C)}$$

e

$$R_p \equiv \frac{L}{R_l C} \quad Q_l \geq 10$$

(20.48)

Z_{T_p}

A impedância total na ressonância é agora definida por:

$$Z_{T_p} \equiv R_s \parallel R_p \approx R_s \parallel Q_l^2 R_l \quad Q_l \geq 10 \quad (20.49)$$

Se a fonte de corrente for ideal ($R_s = \infty \Omega$) ou se $R_s \gg R_p$, a equação se reduz a

$$Z_{T_p} \equiv Q_l^2 R_l \quad Q_l \geq 10, R_s \gg R_p$$

(20.50)

Q_p

O fator de qualidade é agora definido por

$$Q_p = \frac{R_s}{X_{I_p}} \approx \frac{R_s \parallel Q_l^2 R_l}{X_L} \quad (20.51)$$

É óbvio, portanto, que R_s afeta o fator de qualidade do circuito e a forma da curva de ressonância.

Se a fonte de corrente for ideal ($R_s = \infty \Omega$) ou se $R_s \gg R_p$,

$$Q_p \equiv \frac{R_s \parallel Q_l^2 R_l}{X_L} = \frac{Q_l^2 R_l}{X_L} = \frac{Q_l^2}{X_L / R_l} = \frac{Q_l^2}{Q_l}$$

e

$$Q_p \equiv Q_l \quad Q_l \geq 10, R_s \gg R_p \quad (20.52)$$

BP

A banda passante definida em função de f_p é dada por

$$BP \equiv f_2 - f_1 \equiv \frac{f_p}{Q_p} \quad (20.53)$$

Substituindo na Eq. (20.53) f_p e Q_p por seus valores, dados respectivamente pelas Eqs. (20.45) e (20.51), e fazendo $R_l^2 C/L = 1/Q_l^2$, a mesma aproximação usada para deduzir a Eq. (20.42), obtemos, após algumas manipulações algébricas:

$$BP \equiv f_2 - f_1 \equiv \frac{1}{2\pi} \left[\frac{R_l}{L} + \frac{1}{R_s C} \right] \quad (20.54)$$

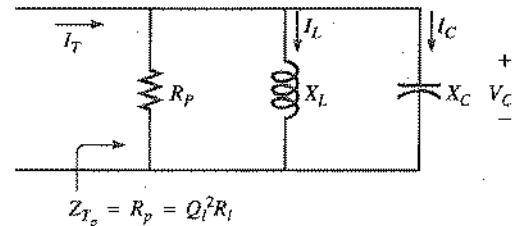


Fig. 20.31 Determinação de I_c e I_L em função da corrente da fonte, I_T .

o que revela claramente a influência de R_s sobre a banda passante. Se $R_s = \infty \Omega$ (fonte de corrente ideal), temos:

$$BP \equiv f_2 - f_1 \equiv \frac{R_l}{2\pi L} \quad R_s = \infty \Omega \quad (20.55)$$

I_L e I_C

Uma parte da Fig. 20.30 foi reproduzida na Fig. 20.31, com I_T definida como a corrente da fonte.

Na ressonância, Z_{T_p} assume o valor $Q_l^2 R_l$, como podemos ver na figura. A tensão no circuito é portanto

$$V_C = V_L = V_R = I_T Z_{T_p} = I_T Q_l^2 R_l$$

A intensidade da corrente I_C pode ser obtida usando a definição de resistência generalizada:

$$I_C = \frac{V_C}{X_C} = \frac{I_T Q_l^2 R_l}{X_C}$$

Substituindo $X_C \equiv X_L$ para $Q_l \geq 10$, temos:

$$I_C = \frac{I_T Q_l^2 R_l}{X_L} = I_T \frac{Q_l^2}{X_L} = I_T \frac{Q_l^2}{R_l} \quad (20.56)$$

e

$$I_C \equiv Q_l I_T \quad Q_l \geq 10 \quad (20.56)$$

o que mostra que a corrente capacitiva é Q_l vezes maior do que a corrente da fonte. Assim, se o Q_l do indutor for elevado, a corrente I_C poderá ser considerável.

Uma dedução semelhante leva a

$$I_L \equiv Q_l I_T \quad Q_l \geq 10 \quad (20.57)$$

Conclusões

As equações aproximadas que resultam da suposição de que $Q_l \geq 10$ são, naturalmente, bem mais simples do que as obtidas an-

teriormente. Assim, antes de iniciar a análise de um circuito, convém verificar se esta suposição é válida, caso em que é muito mais prático usar as equações aproximadas. Na verdade, muitas das equações apresentadas na seção anterior constituem boas aproximações mesmo para $Q_l < 10$. Assim, por exemplo, se $Q_l = 5$, $X_{lp} = (X_L/Q_l) + X_L = (X_L/25) + X_L = 1,04 X_L$, que é praticamente igual a X_L . Mesmo para $Q_l = 2$, $X_{lp} = (X_L/4) + X_L = 1,25 X_L$, o que pode não ser exatamente X_L , mas difere de X_L em apenas 25%. Em geral, as equações aproximadas podem ser usadas com precisão razoável mesmo $Q_l < 10$; quanto menor o valor de Q_l , porém, pior será a aproximação. De qualquer forma, as equações aproximadas podem ser usadas sem problemas se tudo que se deseja é uma idéia razoável da resposta do circuito, e não um resultado exato até a última casa decimal.

20.11 TABELA DE RESULTADOS

A Tabela 20.1 foi preparada com o objetivo de evitar confusões associadas ao fato de que é possível definir duas freqüências de ressonância diferentes, f_p e f_m . A tabela mostra também as expressões aproximadas para $Q_l \geq 10$ e para $Q_l \geq 10$, $R_s \geq 10$, $R_s \geq Q_l^2 R_l$. Embora seja possível usar as equações exatas em todos os casos, vale a pena, sempre que possível, recorrer às expressões aproximadas.

No futuro, portanto, procure seguir esses passos ao analisar um circuito ressonante em paralelo:

- Determine f_p para ter uma idéia da freqüência de ressonância. Lembre-se de que, na maioria dos casos, f_v , f_m e f_p terão valores relativamente próximos.
- Calcule um Q_l aproximado, utilizando o valor de f_p obtido acima, e verifique se satisfaz a condição $Q_l \geq 10$. Se a resposta for afirmativa, use as equações aproximadas.
- Mesmo que Q_l seja menor que 10, as fórmulas aproximadas podem ser usadas, contanto que o leitor não se esqueça de que quanto menor o valor de Q_l , menos precisa será a aproximação. Considerando, porém, que todos os componentes comerciais apresentam uma certa tolerância e que raramente é necessário especificar a freqüência de ressonância com várias casas decimais, o uso das fórmulas aproximadas pode ser satisfatório em muitas circunstâncias.

20.12 EXEMPLOS (RESSONÂNCIA EM PARALELO)

EXEMPLO 20.6 Dado o circuito ressonante em paralelo da Fig. 20.32, composto de elementos “ideais”:

- Determine a freqüência de ressonância f_p .

Tabela 20.1

Círcuito ressonante em paralelo $f_f = 1/(2\pi\sqrt{LC})$.

	Qualquer Q_l	$Q_l \geq 10$	$Q_l \geq 10, R_s \gg Q_l^2 R_l$
f_p	$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$	f_p	f_p
Z_m	$\sqrt{1 - \frac{1}{4} \left[\frac{R^2 C}{L} \right]}$	f_p	f_p
Z_{lp}	$R_s \parallel R_p = R_s \parallel \left(\frac{R_l^2 + X_l^2}{R_l} \right)$	$R_s \parallel Q^2 R_l$	$Q^2 R_l$
Z_{lm}	$R_s \parallel Z_m \parallel Z_p$	$R_s \parallel Q^2 R_l$	$Q^2 R_l$
Q_l	$\frac{Z_{lp}}{X_{lp}} = \frac{Z_p}{X_p}$	$\frac{Z_{lp}}{X_{lp}} = \frac{Z_p}{X_p}$	Q_l
BP	$\frac{f_p}{Q_l} \text{ ou } f_m$	$\frac{f_p}{Q_l} = \frac{f_p}{Q_p}$	$\frac{f_p}{Q_l} = \frac{f_p}{Q_l}$
I_s, I	Análise do circuito	$I_s = I_p = Q_l I$	$I_s = I_p = Q_l I$

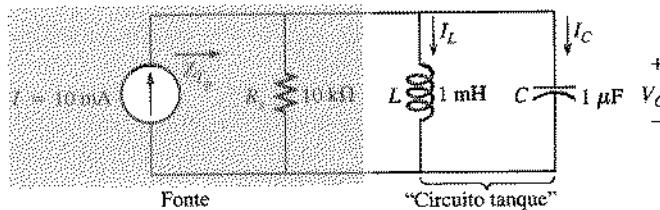


Fig. 20.32 Exemplo 20.6.

- b. Encontre a impedância total na ressonância.
 c. Calcule o fator de qualidade, a banda passante e as freqüências de corte f_1 e f_2 do sistema.
 d. Encontre a tensão V_C na ressonância.
 e. Determine as correntes I_L e I_C na ressonância.

Soluções

- a. Se R_s é nula, $Q_p (= X_L/R_s)$ é muito elevado e portanto podemos usar a expressão aproximada para calcular f_p .

$$f_p = f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1 \text{ mH})(1 \mu\text{F})}} \\ = 5,03 \text{ kHz}$$

- b. Para os elementos reativos em paralelo:

$$Z_L \parallel Z_C = \frac{(X_L \angle 90^\circ)(X_C \angle -90^\circ)}{+j(X_L - X_C)}$$

mas $X_L = X_C$ na ressonância, o que resulta em um valor zero no denominador da equação e em uma impedância extremamente alta que pode ser aproximada por um circuito aberto. Dessa forma,

$$Z_{T_p} = R_s \parallel Z_L \parallel Z_C = R_s = 10 \text{ k}\Omega$$

$$\text{c. } Q_p = \frac{R_s}{X_{L_p}} = \frac{R_s}{2\pi f_p L} = \frac{10 \text{ k}\Omega}{2\pi(5,03 \text{ kHz})(1 \text{ mH})} = 316,41$$

$$BP = \frac{f_p}{Q_p} = \frac{5,03 \text{ kHz}}{316,41} = 15,90 \text{ Hz}$$

Eq.(20.39a):

$$f_1 = \frac{1}{4\pi C} \left[\frac{1}{R} - \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{4C}{L}} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi(1 \mu\text{F})} \left[\frac{1}{10 \text{ k}\Omega} - \sqrt{\frac{1}{(10 \text{ k}\Omega)^2} + \frac{4(1 \mu\text{F})}{1 \text{ mH}}} \right]$$

$$= 5,025 \text{ kHz}$$

Eq.(20.39a):

$$f_2 = \frac{1}{4\pi C} \left[\frac{1}{R} + \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{4C}{L}} \right]$$

$$= 5,041 \text{ kHz}$$

- d. $V_C = IZ_{T_p} = (10 \text{ mA})(10 \text{ k}\Omega) = 100 \text{ V}$
 e. $I_L = \frac{V_L}{X_L} = \frac{V_C}{2\pi f_p L} = \frac{100 \text{ V}}{2\pi(5,03 \text{ kHz})(1 \text{ mH})}$
 $= \frac{100 \text{ V}}{31,6 \text{ }\Omega} = 3,16 \text{ A}$
- $$I_C = \frac{V_C}{X_C} = \frac{100 \text{ V}}{31,6 \text{ }\Omega} = 3,16 \text{ A} (= Q_p I)$$

Este exemplo demonstra a influência de R_s na análise de circuitos ressonantes em paralelo. A impedância da fonte é o único fator que limita a impedância de entrada e o valor de V_C .

EXEMPLO 20.7 Para o circuito ressonante em paralelo da Fig. 20.33, com $R_s = \infty \Omega$:

- a. Determine f_s , f_m e f_p e compare seus valores.

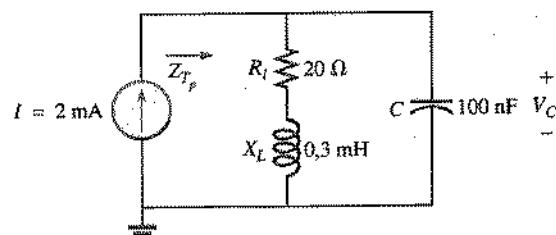


Fig. 20.33 Exemplo 20.7.

- b. Calcule a impedância de entrada do circuito e a amplitude da tensão V_C quando a freqüência é igual a f_m .
 c. Determine o fator de qualidade Q_p .
 d. Calcule a banda passante.
 e. Compare os resultados acima com os obtidos usando as equações aproximadas, válidas para $Q_p \geq 10$.

Soluções

a. $f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(0,3 \text{ mH})(100 \text{ nF})}} = 29.057,58 \text{ Hz}$

$$f_m = f_s \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left[\frac{R_s^2 C}{L} \right]}$$

$$= (29.057,58 \text{ Hz}) \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left[\frac{(20 \Omega)^2 (100 \text{ nF})}{0,3 \text{ mH}} \right]}$$

$$= 28.569,19 \text{ Hz}$$

$$f_p = f_s \sqrt{1 - \frac{R_s^2 C}{L}}$$

$$= (29.057,58 \text{ Hz}) \sqrt{1 - \left[\frac{(20 \Omega)^2 (100 \text{ nF})}{0,3 \text{ mH}} \right]}$$

$$= 27.051,14 \text{ Hz}$$



As frequências f_m e f_p são menores do que f_s , como previsto. Além disso, f_m está mais próximo de f_s que de f_p ; f_m está pouco menos de 0,5 kHz abaixo de f_s , enquanto f_p está pouco mais de 2 kHz abaixo de f_s . As diferenças entre f_s , f_p e f_m sugerem um circuito de baixo Q .

b. $Z_{T_m} = (R_t + j X_L) \parallel -j X_C \quad f = f_m$

$$X_L = 2\pi f_m L = 2\pi(28.569,19 \text{ Hz})(0,3 \text{ mH}) = 53.852 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_m C} = \frac{1}{2\pi(28.569,19 \text{ Hz})(100 \text{ nF})} = 55.709 \Omega$$

$$R_t + j X_L = 20 \Omega + j 53.852 \Omega = 57.446 \Omega \angle 69.626^\circ$$

$$Z_{T_m} = \frac{(57.446 \Omega \angle 69.626^\circ)(55.709 \Omega \angle -90^\circ)}{20 \Omega + j 53.852 \Omega - j 55.709 \Omega}$$

$$= 159,34 \Omega \angle -15,069^\circ$$

$$V_{C_{\max}} = IZ_{T_m} = (2 \text{ mA})(159,34 \Omega) = 318,68 \text{ mV}$$

c. $R_s = \infty \Omega$; assim,

$$Q_p = \frac{R_s \parallel R_p}{X_{L_p}} = \frac{R_p}{X_{L_p}} = Q_l = \frac{X_L}{R_t}$$

$$= \frac{2\pi(27.051,14 \text{ Hz})(0,3 \text{ mH})}{20 \Omega} = \frac{50.990 \Omega}{20 \Omega} = 2,55$$

O baixo valor de Q confirma a conclusão do item (a). As diferenças entre f_s , f_m e f_p seriam bem menores em um circuito de alto Q .

d. $BP = \frac{f_p}{Q_p} = \frac{27.051,14 \text{ Hz}}{2,55} = 10.608,29 \text{ Hz}$

e. Para $Q_l \geq 10$, $f_m = f_p = f_s = 29.057,28 \text{ Hz}$

$$Q_p = Q_l = \frac{2\pi f_s L}{R_t} = \frac{2\pi(29.057,58 \text{ Hz})(0,3 \text{ mH})}{20 \Omega} = 2,739$$

[em vez de 2,55, como no item (c)].

$$Z_{T_p} = Q_p^2 R_t = (2,739)^2 \cdot 20 \Omega = 150,04 \Omega \angle 0^\circ$$

[em vez de $159,34 \Omega \angle -15,069^\circ$, como no item (b)].

$$V_{C_{\max}} = IZ_{T_p} = (2 \text{ mA})(150,04 \Omega) = 300,08 \text{ mV}$$

[em vez de 318,68 mV, como no item (b)].

$$BP = \frac{f_p}{Q_p} = \frac{29.057,58 \text{ Hz}}{2,739} = 10.608,83 \text{ Hz}$$

[em vez de 10.608,29 Hz como no item (d)].

Os resultados mostram que mesmo em um sistema com um valor de Q relativamente pequeno, as soluções aproximadas não diferem muito das soluções exatas. A maior diferença é entre f_s e f_p (7% aproximadamente); a diferença entre f_s e f_m é de menos de 2%. Uma boa estratégia é usar f_s para calcular Q_l e usar o valor calculado de Q_l para verificar se é razoável ou não usar as expressões aproximadas.

EXEMPLO 20.8 Para o circuito da Fig. 20.34, conhecendo o valor de f_p :

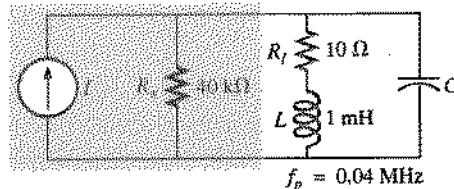


Fig. 20.34 Exemplo 20.8.

- Determine Q_l .
- Determine R_p .
- Calcule Z_{T_p} .
- Encontre C na ressonância.
- Encontre Q_p .
- Calcule a BP e as frequências de corte.

Soluções

a. $Q_l = \frac{X_L}{R_t} = \frac{2\pi f_p L}{R_t} = \frac{2\pi(0,04 \text{ MHz})(1 \text{ mH})}{10 \Omega} = 25,12$

b. $Q_l \geq 10$. Portanto,

$$R_p \approx Q_l^2 R_t = (25,12)^2 (10 \Omega) = 6,31 \text{ k}\Omega$$

c. $Z_{T_p} = R_s \parallel R_p = 40 \text{ k}\Omega \parallel 6,31 \text{ k}\Omega = 5,45 \text{ k}\Omega$

d. $Q_l \geq 10$. Portanto,

$$f_p \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

e

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f_p^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 (0,04 \text{ MHz})^2 (1 \text{ mH})} = 15,83 \text{ nF}$$

e. $Q_l \geq 10$; assim,

$$Q_p = \frac{Z_{T_p}}{X_L} = \frac{R_s \parallel Q_p^2 R_t}{2\pi f_p L} = \frac{5,45 \text{ k}\Omega}{2\pi(0,04 \text{ MHz})(1 \text{ mH})} = 21,68$$

f. $BP = \frac{f_p}{Q_p} = \frac{0,04 \text{ MHz}}{21,68} = 1,85 \text{ kHz}$

$$f_1 = \frac{1}{4\pi C} \left[\frac{1}{R} - \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{4C}{L}} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi(15,9 \text{ mF})} \left[\frac{1}{5,45 \text{ k}\Omega} - \sqrt{\frac{1}{(5,45 \text{ k}\Omega)^2} + \frac{4(15,9 \text{ mF})}{1 \text{ mH}}} \right]$$

$$= 5,005 \times 10^6 [183,486 \times 10^{-6} - 7,977 \times 10^{-3}]$$

$$= 5,005 \times 10^6 [-7,794 \times 10^{-3}]$$

$$= 39,009 \text{ kHz} \quad (\text{ignorando o sinal negativo})$$

$$\begin{aligned}f_2 &= \frac{1}{4\pi C} \left[\frac{1}{R} + \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{4C}{L}} \right] \\&= 5,005 \times 10^6 [183,486 \times 10^{-6} + 7,977 \times 10^{-3}] \\&= 5,005 \times 10^6 [8,160 \times 10^{-3}] \\&= 40,843 \text{ kHz}\end{aligned}$$

Observe que $f_2 - f_1 = 40,843 \text{ kHz} - 39,009 \text{ kHz} = 1,834 \text{ kHz}$, um valor ligeiramente menor do que a banda passante calculada (1,85 kHz). Observe também que a banda passante não é simétrica em relação à freqüência de ressonância f_p : f_1 está 991 Hz abaixo de f_p , e f_2 está 843 Hz acima de f_p .

EXEMPLO 20.9 A Fig. 20.36 mostra o circuito equivalente do circuito transistorizado da Fig. 20.35.

- Determine f_p .
- Determine Q_p .
- Calcule a BP .
- Calcule a tensão V_p na ressonância.
- Trace a curva de V_c em função da freqüência.

Soluções

$$a. f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(5 \text{ mH})(50 \text{ pF})}} = 318,31 \text{ kHz}$$

$$X_L = 2\pi f_p L = 2\pi(318,31 \text{ kHz})(5 \text{ mH}) = 10 \text{ k}\Omega$$

$$Q_p = \frac{X_L}{R_i} = \frac{10 \text{ k}\Omega}{50 \text{ }\Omega} = 200 > 10$$

Assim, $f_p = f_s = 318,31 \text{ kHz}$. Utilizando a Eq. (20.31), teríamos o resultado de $\approx 318,5 \text{ kHz}$.

$$b. Q_p = \frac{R_s \| R_p}{X_L}$$

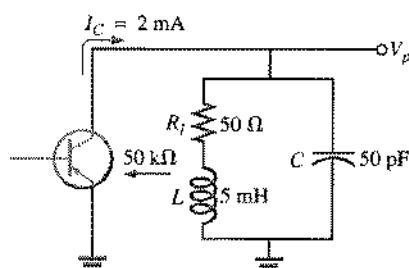


Fig. 20.35 Exemplo 20.9.

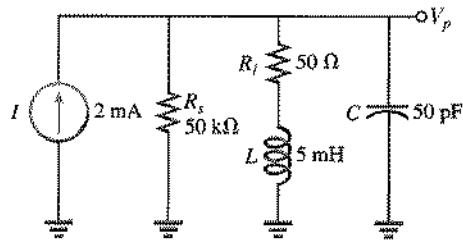


Fig. 20.36 Circuito equivalente do circuito transistorizado da Fig. 20.35.

$$\begin{aligned}R_p &= Q_p^2 R_i = (200)^2 50 \text{ }\Omega = 2 \text{ M}\Omega \\Q_p &= \frac{50 \text{ k}\Omega \| 2 \text{ M}\Omega}{10 \text{ k}\Omega} = \frac{48,78 \text{ k}\Omega}{10 \text{ k}\Omega} = 4,88\end{aligned}$$

Note a queda no valor de Q de $Q_p = 200$ para $Q_p = 4,88$, devido a R_s .

$$c. BP = \frac{f_p}{Q_p} = \frac{318,31 \text{ kHz}}{4,88} = 65,23 \text{ kHz}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}BP &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{R_i}{L} + \frac{1}{R_s C} \right) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{50 \text{ }\Omega}{5 \text{ mH}} + \frac{1}{(50 \text{ k}\Omega)(50 \text{ pF})} \right] \\&= 65,25 \text{ kHz}\end{aligned}$$

um resultado semelhante ao anterior.

$$d. V_p = IZ_{T_p} = (2 \text{ mA})(R_s \| R_p) = (2 \text{ mA})(48,78 \text{ k}\Omega) \\= 97,56 \text{ V}$$

- Veja a Fig. 20.37.

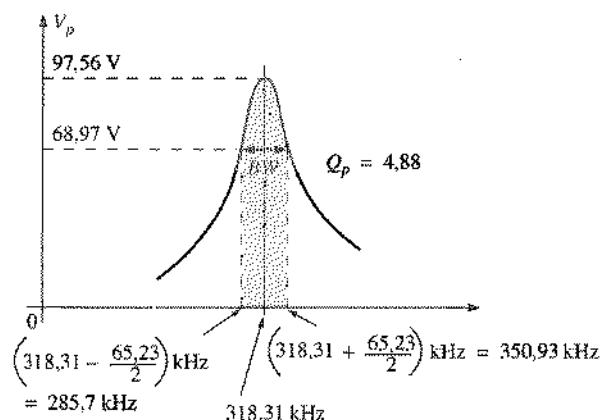


Fig. 20.37 Curva de ressonância para o circuito da Fig. 20.36.

EXEMPLO 20.10 Repita o Exemplo 20.9 ignorando os efeitos de R_s . Compare os resultados.

Soluções

- f_p é a mesma, 318,31 kHz.
- Para $R_s = \infty \text{ }\Omega$

$$Q_p = Q_i = 200 \quad (\text{em vez de } 4,88)$$

$$c. BP = \frac{f_p}{Q_p} = \frac{318,31 \text{ kHz}}{200} \\= 1,592 \text{ kHz} \quad (\text{em vez de } 65,23 \text{ kHz})$$

$$d. Z_{T_p} = R_p = 2 \text{ M}\Omega \quad (\text{em vez de } 48,78 \text{ k}\Omega) \\V_p = IZ_{T_p} = (2 \text{ mA})(2 \text{ M}\Omega) = 4000 \text{ V} \quad (\text{em vez de } 97,56 \text{ V})$$

Os resultados obtidos demonstram claramente que a resistência da fonte pode ter uma influência considerável nas características de resposta de um circuito ressonante em paralelo.

EXEMPLO 20.11 Projete um circuito ressonante em paralelo que possua a curva de resposta da Fig. 20.38 utilizando um indutor de 1 mH e 10 Ω e uma fonte de corrente com uma resistência interna de 40 kΩ.

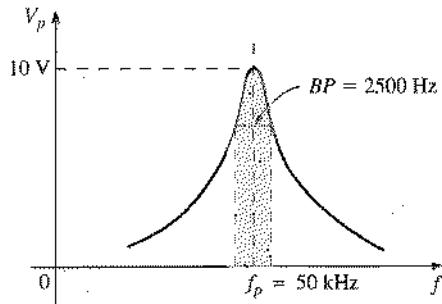


Fig. 20.38 Exemplo 20.11.

Solução

$$BP = \frac{f_p}{Q_p}$$

Assim,

$$Q_p = \frac{f_p}{BP} = \frac{50.000 \text{ Hz}}{2500 \text{ Hz}} = 20$$

$$X_L = 2\pi f_p L = 2\pi(50 \text{ kHz})(1 \text{ mH}) = 314 \Omega$$

e

$$Q_I = \frac{X_L}{R_I} = \frac{314 \Omega}{10 \Omega} = 31,4$$

$$R_p = Q_I^2 R = (31,4)^2 (10 \Omega) = 9859,6 \Omega$$

$$Q_p = \frac{R}{X_L} = \frac{R_s \parallel 9859,6 \Omega}{314 \Omega} = 20 \quad (\text{obtido anteriormente})$$

de modo que

$$\frac{(R_s)(9859,6)}{R_s + 9859,6} = 6280$$

e portanto

$$R_s = 17,298 \text{ k}\Omega$$

Entretanto, a fonte tem uma resistência de 40 Ω. Precisamos portanto ligar em paralelo com a fonte um resistor, R' , que reduza essa resistência para aproximadamente 17,298 kΩ, ou seja, a resistência de R' deve ser tal que

$$\frac{(40 \text{ k}\Omega)(R')}{40 \text{ k}\Omega + R'} = 17,298 \text{ k}\Omega$$

Tirando o valor de R' :

$$R' = 30,481 \text{ k}\Omega$$

O valor comercial mais próximo é 30 kΩ. Na ressonância, $X_C = X_L$ e

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_p C}$$

$$C = \frac{1}{2\pi f_p X_C} = \frac{1}{2\pi(50 \text{ kHz})(314 \Omega)}$$

onde

$$C \approx 0,01 \mu\text{F} \quad (\text{disponível comercialmente})$$

$$\begin{aligned} Z_{T_p} &= R_s \parallel Q_I^2 R_I \\ &= 17,298 \text{ k}\Omega \parallel 9859,6 \Omega \\ &= 6,28 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

mas

$$V_p = IZ_{T_p}$$

e portanto

$$I = \frac{V_p}{Z_{T_p}} = \frac{10 \text{ V}}{6,28 \text{ k}\Omega} \approx 1,6 \text{ mA}$$

O circuito aparece na Fig. 20.39.

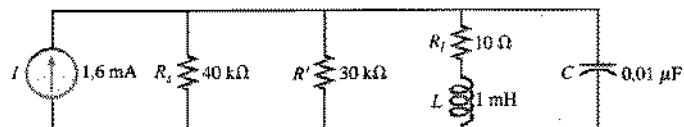


Fig. 20.39 Circuito projetado para atender às especificações da Fig. 20.38.

20.13 ANÁLISE COMPUTACIONAL

PSpice (DOS)

Toda a beleza da resposta ao comando .PROBE pode ser apreciada nos gráficos associados a circuitos ressonantes paralelos e em série. A inclusão de uns poucos parâmetros no arquivo de entrada do PSpice produz uma curva que revela imediatamente a frequência de ressonância, a banda passante e o fator de qualidade. Também podemos conhecer a partir do gráfico as faixas de frequências que não recebem potência suficiente para afetar a resposta do estágio seguinte do sistema.

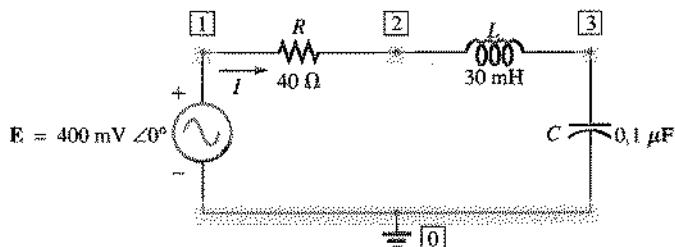


Fig. 20.40 Definição dos parâmetros para uma análise com o PSpice (DOS).

A não ser pela inclusão de uma fonte, o circuito ressonante em série da Fig. 20.40 é muito parecido com o do Exemplo 20.4. A fonte foi escolhida de modo a produzir uma corrente máxima de $I = 400 \text{ mV}/40 \Omega = 10 \text{ mA}$ na ressonância; os elementos reativos foram escolhidos para que o circuito tivesse uma freqüência de ressonância

$$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(30 \text{ mH})(0,1 \mu\text{F})}} \cong 2,9 \text{ kHz}$$

O fator de qualidade é dado por

$$Q_l = \frac{X_L}{R_l} = \frac{546,64 \Omega}{40 \Omega} = 13,7$$

e a banda passante é dada por

$$BP = \frac{f_s}{Q_l} = \frac{2,9 \text{ kHz}}{13,7} \cong 212 \text{ Hz}$$

O arquivo de entrada da Fig. 20.41 especifica 91 pontos entre 1 kHz e 10 kHz, para um incremento de

$$\text{Incremento} = \frac{10 \text{ kHz} - 1 \text{ kHz}}{91 - 1} = \frac{9 \text{ kHz}}{90} = 100 \text{ Hz}$$

O arquivo de saída da Fig. 20.42 confirma os resultados acima, com uma freqüência de ressonância de 2,9 kHz, uma corrente máxima de 10 mA e uma banda passante de aproximadamente 200 Hz para uma corrente de 7,07 mA. A forma da curva sugere que o fator de qualidade é maior do que 10. Além disso, observe que a corrente tem aproximadamente o mesmo valor (muito pequeno) em 1 kHz e 8 kHz e valores ainda menores em freqüências menores do que 1 kHz ou maiores do que 8 kHz.

damente 200 Hz para uma corrente de 7,07 mA. A forma da curva sugere que o fator de qualidade é maior do que 10. Além disso, observe que a corrente tem aproximadamente o mesmo valor (muito pequeno) em 1 kHz e 8 kHz e valores ainda menores em freqüências menores do que 1 kHz ou maiores do que 8 kHz.

PSpice (Windows)

O esquema para o circuito do Exemplo 20.9 aparece na Fig. 20.43. A fonte de corrente escolhida foi uma ISRC principalmente por causa do símbolo da seta. Os atributos escolhidos foram **DC** = 0 A, **AC** = 2 mA e **PKGREF** = 1. No menu **Analysis**, o **Setup** incluiu o **AC Sweep** apenas com os seguintes parâmetros: **Linear**, **Total Pts:** 1000, **Start Freq.:** 10 Hz, **End Freq.:** 500 kHz. No menu **Probe Setup**, escolhemos **Automatically Run Probe After Simulation**. Após o **Simulation**, entramos na sequência seguinte, para obter uma escala linear de 10 Hz a 500 kHz: **Plot-X-Axis Settings-Linear-User Defined-10 Hz to 500 kHz**.

Em seguida, mostramos a tensão entre os terminais do capacitor com **Trace-Add-Alias Names-V(C:1)-OK**, que nos dá a curva de baixo da Fig. 20.44. Usamos então o **Cursor**, com **Tools-Cursor-Display**, botão esquerdo do mouse, para determinar o valor máximo de V_c , que ocorre em 317,822 kHz, como se pode ver na caixa de diálogo do **Cursor** na parte inferior esquerda do gráfico. O valor máximo de 97,543 V está muito próximo de 97,56 V, valor obtido no Exemplo 20.9. Clicando com o botão direito do mouse, utilizamos o segundo **Cursor** para determinar a freqüência de corte inferior. Multiplicando o valor máximo da tensão por 0,707 para calcular o valor de V_c nas freqüências de corte, obtemos $0,707 \times 97,543 = 68,96 \text{ V}$.

Posicionando o **Cursor** o mais perto possível deste valor, verificamos que ele ocorre para uma freqüência de 287,292 kHz, valor indicado na caixa de diálogo do **Cursor**. Posicionando o mesmo **Cursor** do lado direito da freqüência de ressonância, no mesmo valor de tensão, verificamos que a freqüência de corte superior é 353,350 kHz, ou seja, que a diferença entre a freqüência de corte superior e a freqüência de ressonância excede em aproximadamente 5 kHz a diferença entre a freqüência de ressonância e a freqüência de corte inferior. Isso sugere que o valor de Q é relativamente pequeno (da ordem de 5). Calculando a

```

Chapter 20 - Series Resonance
***** CIRCUIT DESCRIPTION *****

VE 1 0 AC 400MV 0
R 1 2 40
L 2 3 30MH
C 3 0 0.1UF
AC LIN 91 1KH 10KH
PROBE
OPTIONS NOPAGE
END

```

Fig. 20.41 Arquivo de entrada para o circuito da Fig. 20.40.

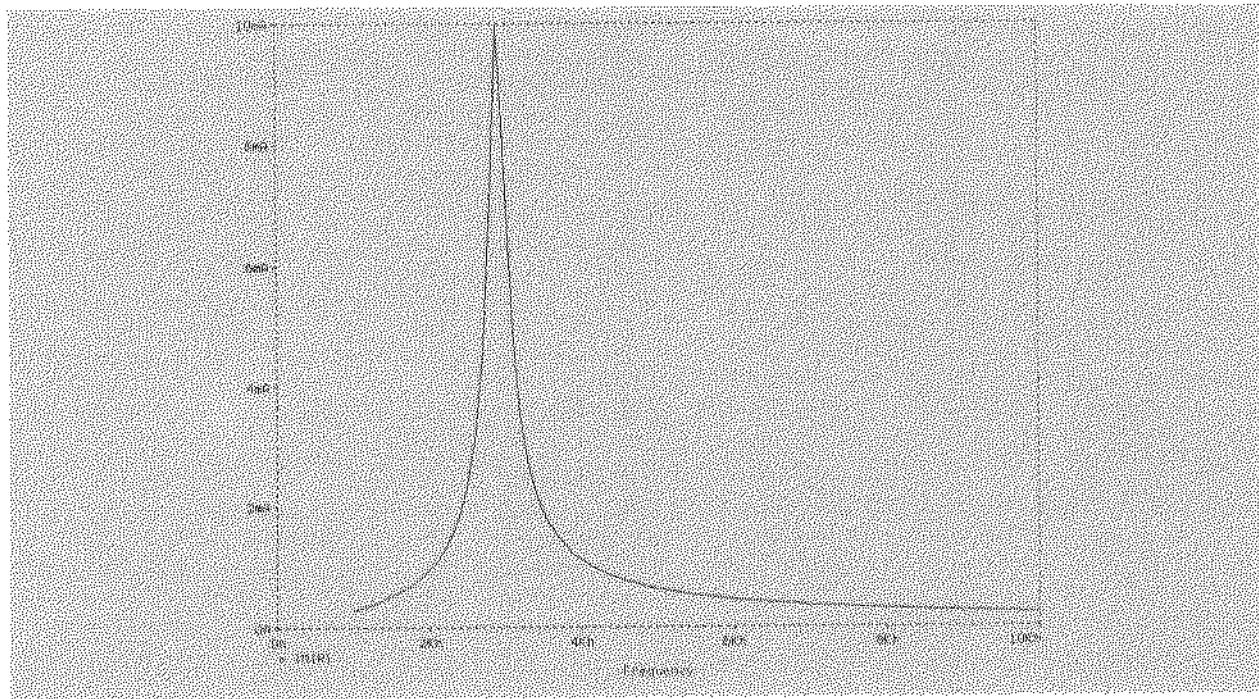
f_r 

Fig. 20.42 Arquivo de saída para o circuito da Fig. 20.40.

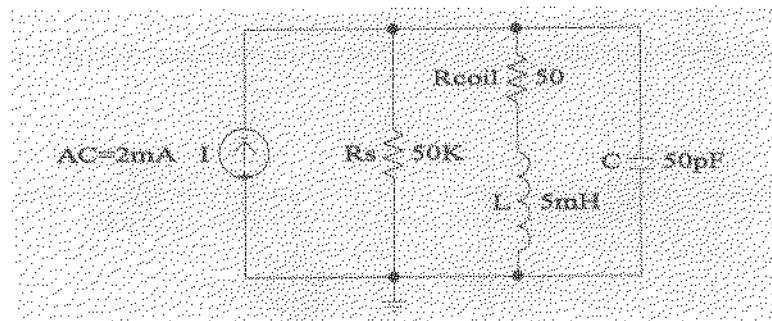


Fig. 20.43 Representação esquemática do circuito ressonante em paralelo da Fig. 20.36.

diferença entre as duas freqüências de corte, descobrimos que a banda passante é de 66,06 kHz.

Utilizando **Plot-Add Plot-Trace-Add-P(V(C:1))**, podemos obter o gráfico da fase da tensão em função da freqüência, como se pode ver na parte superior da Fig. 20.44. Observe que nas proximidades do valor máximo da tensão o ângulo de fase se aproxima de zero grau, o valor associado a uma impedância puramente resistiva. Usando o **Cursor**, verificamos que a freqüência correspondente a zero grau é 318,322 kHz, um valor ligeiramente maior do que a freqüência correspondente ao máximo da tensão. Teoricamente, porém, deveríamos esperar que a freqüência para um ângulo de fase de zero grau (f_m) fosse menor do que a freqüência para a máxima tensão (f_{m0}). Entretanto, devemos nos lembrar de que as duas freqüências estão muito próximas e não podem ser medidas com precisão em um gráfico duplo. Examinando as duas curvas separadamente (em gráficos de tela inteira) para aumentar a precisão, obtemos os seguintes resultados, que confirmam as previsões teóricas: $f_m = 318,822$ kHz e $f_{m0} = 318,322$

kHz. A levea distorção que aparece no gráfico de fase em baixas freqüências se deve à rápida variação da reatância capacitativa nessa faixa de freqüências.

PROBLEMAS

SEÇÕES 20.2 A 20.7 Ressonância em Série

- Determine a ω_r e a f_r de ressonância de um circuito em série com os seguintes parâmetros:
 - $R = 10 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ e $C = 16 \mu\text{F}$.
 - $R = 300 \Omega$, $L = 0,5 \text{ H}$ e $C = 0,16 \mu\text{F}$.
 - $R = 20 \Omega$, $L = 0,28 \text{ H}$ e $C = 7,46 \mu\text{F}$.
- Para o circuito em série da Fig. 20.45:
 - Encontre o valor de X_r na ressonância.
 - Determine a impedância total do circuito na ressonância.
 - Encontre a intensidade da corrente I .

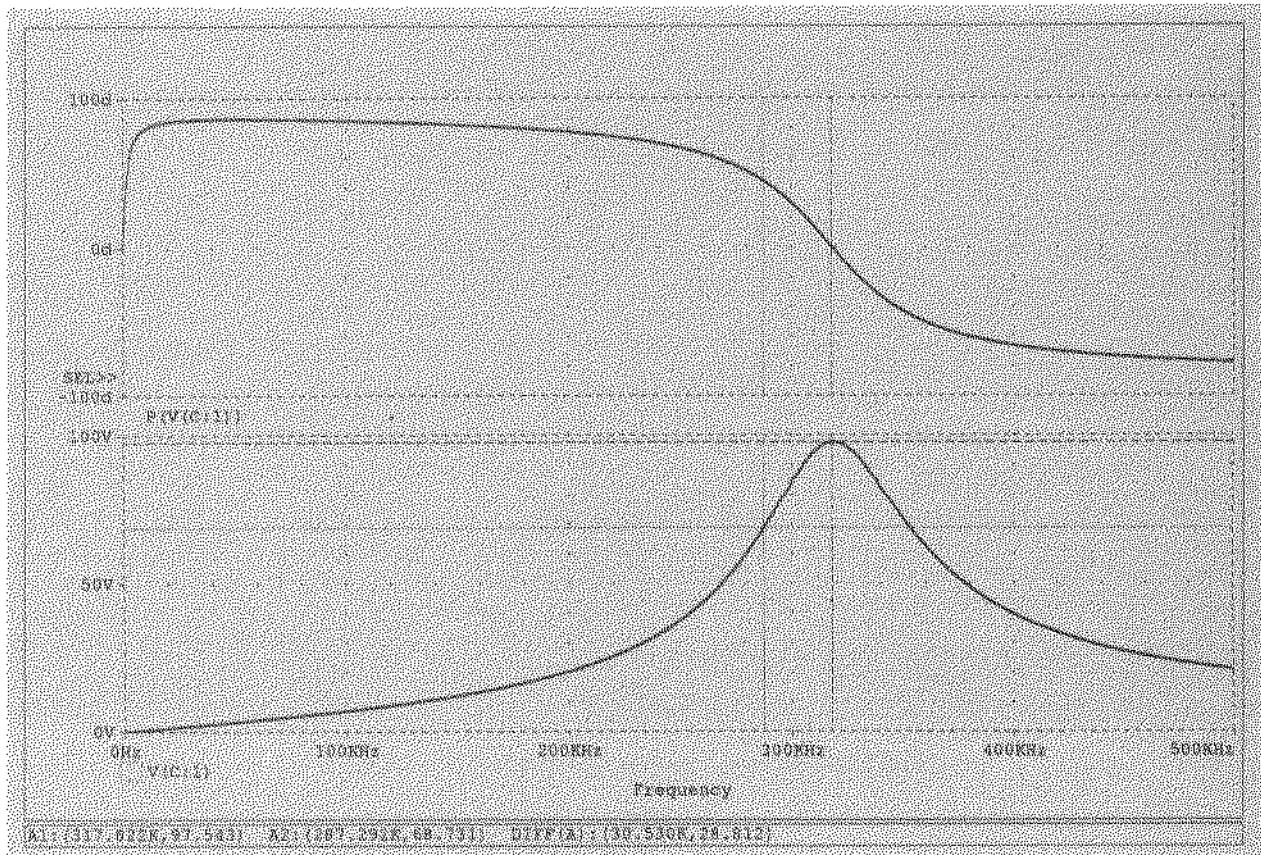
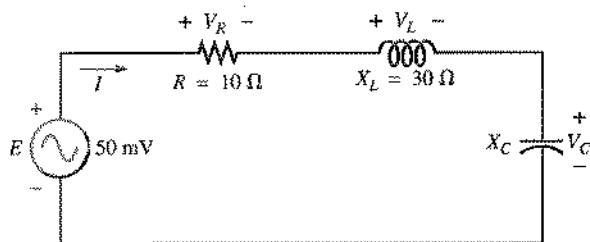
Fig. 20.44 Respostas de freqüência de V_c e θ_c para o circuito ressonante em paralelo da Fig. 20.43.

Fig. 20.45 Problema 2.

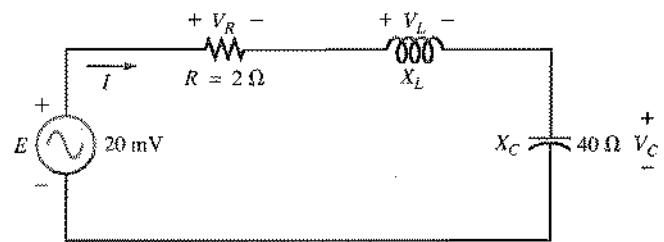


Fig. 20.46 Problema 3.

- d. Calcule as tensões V_R , V_L e V_c na ressonância. Qual a relação entre V_L e V_c ? Como V_R se compara à tensão aplicada E ?
e. Qual é o fator de qualidade do circuito? Trata-se de um circuito alto ou baixo Q ?
f. Qual a potência dissipada pelo circuito na ressonância?
3. Para o circuito em série da Fig. 20.46:
a. Encontre o valor de X_L na ressonância.
b. Determine a intensidade da corrente I na ressonância.
c. Encontre as tensões V_R , V_L e V_c na ressonância e compare suas amplitudes.
d. Determine o fator de qualidade do circuito. Trata-se de um circuito de alto ou baixo Q ?
e. Se a freqüência de ressonância é 5 kHz, determine os valores de L e C .
f. Calcule a banda passante se a freqüência de ressonância for 5 kHz.
g. Quais são as freqüências de corte inferior e superior?

4. Para o circuito da Fig. 20.47:
a. Encontre o valor de L em milihenries, se a freqüência de ressonância é 1800 Hz.
b. Calcule X_L e X_C . Como eles se compararam?

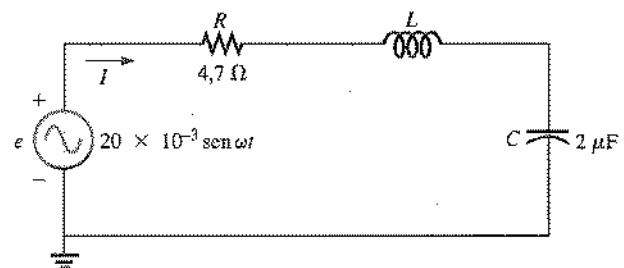


Fig. 20.47 Problema 4.



- c. Encontre a intensidade da corrente, I_{mz} , na ressonância.
d. Encontre a potência dissipada pelo circuito na ressonância.
e. Qual a potência aparente fornecida ao sistema na ressonância?
f. Qual o fator de potência do circuito na ressonância?
g. Calcule o Q do circuito e a banda passante.
h. Encontre as freqüências de corte e calcule a potência dissipada pelo circuito nessas freqüências.
5. a. Encontre a banda passante de um circuito ressonante em série com uma freqüência de ressonância de 6000 Hz e um Q_s de 15.
b. Encontre as freqüências de corte.
c. Se a resistência do circuito na ressonância é 3Ω , quais os valores de X_L e X_C em ohms?
d. Qual a potência dissipada nas freqüências de corte se a corrente máxima no circuito é 0,5 A?
6. Um circuito em série possui uma freqüência de ressonância de 10 kHz. A resistência do circuito é 5Ω , e X_C na ressonância é 200Ω .
a. Encontre a banda passante.
b. Encontre as freqüências de corte.
c. Encontre Q_s .
d. Se a tensão de entrada é $30 V \angle 0^\circ$, encontre as tensões no indutor e no capacitor em forma fasorial.
e. Encontre a potência dissipada na ressonância.
7. a. A banda passante de um circuito ressonante em série é 200 Hz. Se a freqüência de ressonância é 2000 Hz, qual o valor de Q_s para o circuito?
b. Se $R = 2 \Omega$, qual o valor de X_L na ressonância?
c. Encontre o valor de L e C na ressonância.
d. Encontre as freqüências de corte.
8. As freqüências de corte de um circuito ressonante em série são 5400 Hz e 6000 Hz.
a. Encontre a banda passante do circuito.
b. Se Q_s é 9,5, encontre a freqüência de ressonância do circuito.
c. Se a resistência do circuito é 2Ω , encontre os valores de X_L e X_C na ressonância.
d. Encontre os valores de L e C na ressonância.
- *9. Projete um circuito ressonante em série com uma tensão de entrada de $5 V \angle 0^\circ$ e as seguintes especificações:
a. Uma corrente máxima de 500 mA na ressonância.
b. Uma banda passante de 120 Hz.
c. Uma freqüência de ressonância de 8400 Hz.
Encontre os valores de L e C e as freqüências de corte.
- *10. Projete um circuito ressonante em série com uma banda passante de 400 Hz, usando um indutor com um Q_s de 20 e uma resistência de 2Ω . Encontre os valores de L e C e as freqüências de corte.
- *11. Um circuito ressonante em série entra em ressonância quando $\omega_s = 2\pi \times 10^6$ rad/s e consome 20 W de uma fonte de 120 V na ressonância. Se a banda passante relativa é 0,16,
a. Determine a freqüência de ressonância em hertz.
b. Calcule a banda passante em hertz.
c. Determine os valores de R , L e C .
d. Encontre a resistência do indutor se $Q_s = 80$.
- *12. Um circuito ressonante em série entra em ressonância na freqüência de 1 MHz, e a banda passante relativa é 0,2. Se o fator de qualidade do indutor na ressonância é 12,5 e sua indutância é $100 \mu H$, determine
a. A resistência da bobina.
b. A resistência adicional necessária para estabelecer a banda passante relativa especificada.
c. O valor da capacitância.

SEÇÕES 20.8 A 20.12 Ressonância em Paralelo

13. Para o circuito ressonante em paralelo “ideal” da Fig. 20.48:
a. Determine a freqüência de ressonância (f_p).

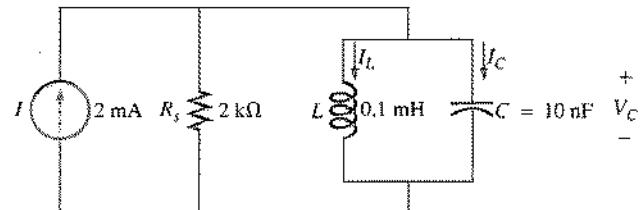


Fig. 20.48 Problema 13.

- b. Encontre a tensão V_C na ressonância.
c. Determine as correntes I_L e I_C na ressonância.
d. Encontre Q_p .
14. Para o circuito ressonante em paralelo da Fig. 20.49:
a. Calcule f_p .
b. Determine Q_p supondo $f = f_p$. É razoável usar as expressões aproximadas?
c. Determine f_p e f_m .
d. Calcule X_L e X_C a partir de f_p . Como as duas reatâncias se comportam?
e. Encontre a impedância total na ressonância (Z_{T_p}).
f. Calcule V_C na ressonância (f_p).
g. Determine Q_p e a BP a partir de f_p .
h. Calcule I_L e I_C em f_p .

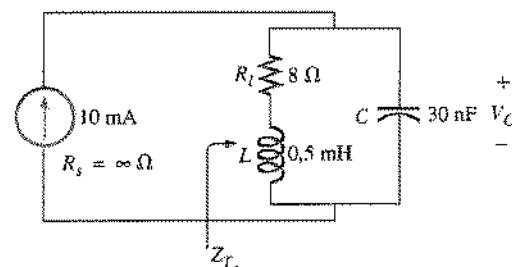


Fig. 20.49 Problema 14.

15. Repita o Problema 14 para o circuito da Fig. 20.50.

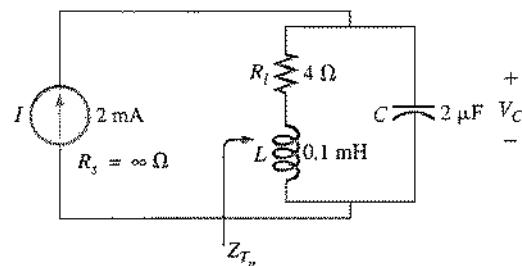


Fig. 20.50 Problema 15.

16. Para o circuito da Fig. 20.51:
a. Encontre o valor de X_C na ressonância (f_p).
b. Encontre a impedância total Z_{T_p} na ressonância (f_p).
c. Encontre as correntes I_L e I_C na ressonância (f_p).
d. Se a freqüência de ressonância é 20.000 Hz, encontre os valores de L e C na ressonância.
e. Encontre Q_p e a BP.

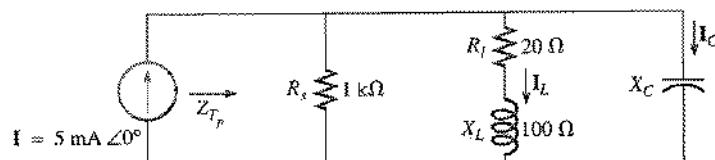


Fig. 20.51 Problema 16.

17. Repita o Problema 16 para o circuito da Fig. 20.52.

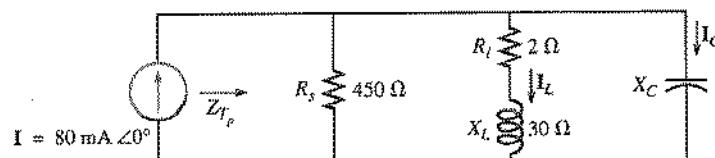


Fig. 20.52 Problema 17.

18. Para o circuito da Fig. 20.53:

- Encontre as freqüências de ressonância f_o , f_p e f_m . O que os resultados sugerem em relação ao Q_p do circuito?
- Encontre os valores de X_L e X_C na ressonância (f_p). Como as duas reatâncias se comparam?
- Encontre a impedância Z_{T_p} na ressonância (f_p).
- Calcule Q_p e a BP.
- Encontre as correntes I_L e I_C na ressonância (f_p).
- Calcule a tensão V_C na ressonância (f_p).

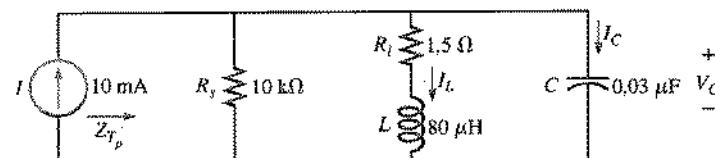


Fig. 20.53 Problema 18.

- *19. Repita o Problema 18 para o circuito da Fig. 20.54.

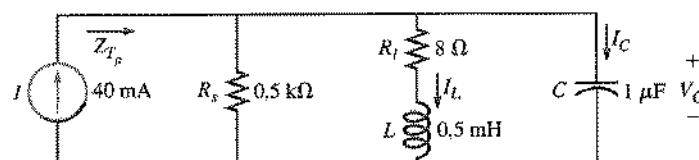


Fig. 20.54 Problemas 19, 29 e 31.

20. A impedância Z_{T_p} do circuito de alto Q da Fig. 20.55 deve ser $50 \text{ k}\Omega \angle 0^\circ$ na ressonância (f_p).
- Encontre o valor de X_L .
 - Compute X_C .
 - Encontre a freqüência de ressonância (f_p) se $L = 16 \text{ mH}$.
 - Encontre o valor de C .

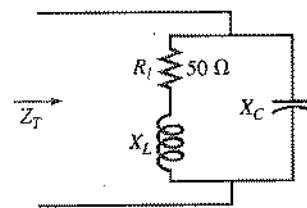


Fig. 20.55 Problema 20.

21. Para o circuito da Fig. 20.56:

- Encontre f_p .
- Calcule V_c na ressonância (f_p).
- Determine a potência absorvida na ressonância.
- Encontre a BP.

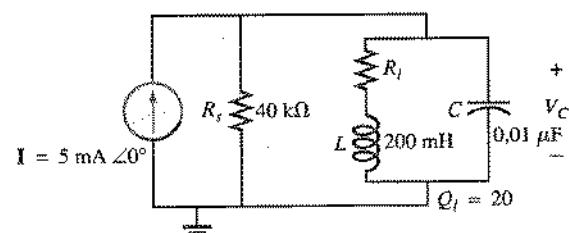


Fig. 20.56 Problema 21.

- *22. Para o circuito da Fig. 20.57:

- Encontre o valor de X_L para a ressonância.
- Encontre Q_p .
- Encontre a freqüência de ressonância (f_p) se a banda passante for 1 kHz.
- Encontre o valor máximo da tensão V_C .
- Plote a curva de V_c em função da freqüência. Indique o valor máximo, a freqüência de ressonância e as freqüências de corte.

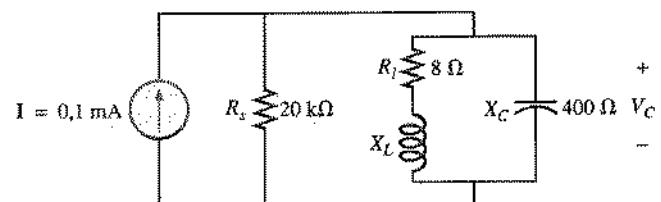


Fig. 20.57 Problema 22.

- *23. Repita o Problema 22 para o circuito da Fig. 20.58.

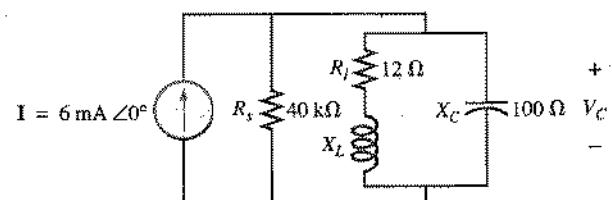


Fig. 20.58 Problema 23.



*24. Para o circuito da Fig. 20.59:

- Encontre f_p , f_{μ} e f_m .
- Determine Q_p e Q_{μ} em f_p , após uma conversão de fonte.
- Encontre a impedância de entrada Z_{T_p} .
- Encontre a tensão V_c .
- Calcule a banda passante a partir de f_p .
- Determine as correntes I_c e I_v .

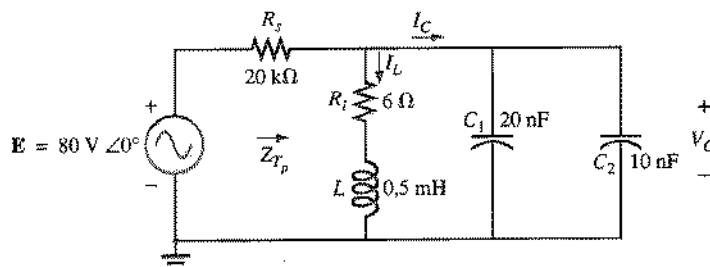


Fig. 20.59 Problema 24.

*25. O circuito da Fig. 20.60 obedece às seguintes especificações:

$$\begin{aligned} f_p &= 20 \text{ kHz} \\ BP &\approx 1,8 \text{ kHz} \\ L &= 2 \text{ mH} \\ Q_p &= 80 \end{aligned}$$

Encontre R_s e C .

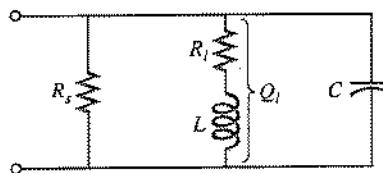


Fig. 20.60 Problema 25.

*26. Projete o circuito da Fig. 20.61 para que apresente as seguintes características:

- Uma banda passante de 500 Hz.
- $Q_p = 30$.
- $V_{C_{\max}} = 1,8 \text{ V}$.

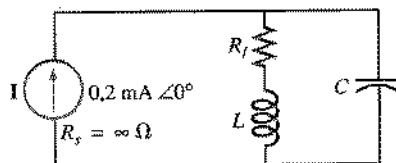


Fig. 20.61 Problema 26.

*27. Para o circuito ressonante em paralelo da Fig. 20.62:

- Determine a frequência de ressonância.
- Encontre a impedância total na ressonância.
- Encontre Q_p .
- Calcule a banda passante.
- Repita os itens (a) a (d) para $L = 20 \mu\text{H}$ e $C = 20 \text{nF}$.

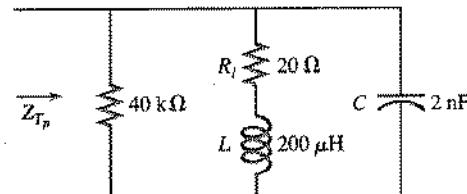


Fig. 20.62 Problema 27.

- Repita os itens (a) a (d) para $L = 0,4 \text{ mH}$ e $C = 1 \text{nF}$.
- Para o circuito da Fig. 20.62 e os parâmetros dos itens (e) e (f), determine a razão L/C .
- Os resultados confirmam as conclusões da Fig. 20.28 em relação à influência da razão L/C ?

SEÇÃO 20.13 Análise Computacional

PSpice (DOS)

- Dado um circuito $R-L-C$ em série com $R = 10 \Omega$, $L = 3,98 \text{ mH}$ e $C = 0,398 \mu\text{F}$, escreva um arquivo de entrada para determinar as tensões V_R , V_L e V_C e a corrente I na ressonância ($f_s = 2800 \text{ Hz}$).
- Escreva um arquivo de entrada para obter um gráfico .PROBE para a tensão V_C no circuito da Fig. 20.54.

PSpice (Windows)

- Verifique os resultados do Exemplo 20.8 utilizando o PSpice Windows; em outras palavras, demonstre que a frequência de ressonância é de fato 40 kHz, que as frequências de corte são as calculadas e que a banda passante é 1,85 kHz.
- Encontre f_p e f_m para o circuito ressonante em paralelo da Fig. 20.54 e comente a respeito da banda passante encontrada e sua relação com o fator de qualidade do circuito.

Linguagem de Programação (C++, BASIC, PASCAL etc.)

- Escreva um programa para tabular a impedância e a corrente do circuito da Fig. 20.2 em função da frequência para a faixa de frequências de $0,1 f_s$ a $2 f_s$, a intervalos de $0,1 f_s$, usando os parâmetros do Exemplo 20.1.
- Escreva um programa para fornecer uma solução geral para o circuito da Fig. 20.36; em outras palavras, determine os parâmetros pedidos nos itens (a) a (e) do Exemplo 20.9.

Ressonância Condição estabelecida pela aplicação de uma frequência particular (a frequência de ressonância) a um circuito $R-L-C$ em série ou paralelo. A transferência de potência para o sistema é máxima na frequência de ressonância.

Seletividade Característica dos circuitos ressonantes diretamente relacionada à banda passante. A alta seletividade está associada a uma banda passante estreita (e altos valores de Q), e a baixa seletividade, a uma banda passante larga (e baixos valores de Q).

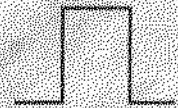
GLOSSÁRIO

Banda passante Faixa de frequências compreendida entre as frequências de corte inferior e superior.

Fator de qualidade (Q) Parâmetro que fornece uma indicação imediata da largura de uma curva de ressonância. Quanto maior o Q , mais estreita é a curva e, consequentemente, mais abruptamente ela diminui de amplitude à esquerda e à direita da frequência de ressonância.

Frequências de corte Frequências que definem os pontos da curva de ressonância nos quais a tensão ou a corrente atinge 0,707 vezes o valor máximo ou a potência atinge metade do valor máximo.

22



Formas de Onda Pulsadas e a Resposta de Circuitos R-C

22.1 INTRODUÇÃO

Nossas análises de formas de onda alternadas até agora se limitaram a ondas senoidais. Neste capítulo, vamos apresentar a terminologia básica associada a formas de onda pulsadas e estudar a resposta de um circuito *R-C* a uma onda quadrada. As formas de onda pulsadas são muito usadas na indústria. Instrumentos de medida, equipamentos de comunicações, computadores e sistemas de radar empregam sinais pulsados para controlar operações, transmitir dados e exibir informações.

A resposta dos circuitos que estudamos até agora a um sinal pulsado é muito diferente da resposta a um sinal senoidal; na verdade, teremos que recorrer a alguns conceitos e equações desenvolvidos no capítulo em que tratamos do comportamento de capacitores em circuitos de corrente contínua. Este capítulo tem caráter meramente introdutório: nosso objetivo é estabelecer os fundamentos para que o leitor aprofunde seus conhecimentos mais tarde em áreas específicas de aplicação das formas de onda pulsadas.

22.2 PULSOS IDEIAIS E PULSOS REAIS

O pulso *ideal* da Fig. 22.1 tem lados verticais, cantos bem-definidos, e é plano no topo; começa instantaneamente em $t = t_1$ e termina da mesma forma abrupta em $t = t_2$.

A forma de pulso da Fig. 22.1 será usada em muitas das análises deste capítulo e provavelmente aparecerá nas investigações iniciais de problemas mais complexos. Depois que a resposta de um equipamento, sistema ou circuito a pulsos ideais está bem compreendida, pode-se examinar a resposta a um pulso *real*. Se tentássemos mostrar todas as diferenças entre um pulso ideal e um pulso real em uma única figura, provavelmente não seríamos bem-sucedidos. Por essa razão, os parâmetros relevantes serão apresentados gradualmente.

Ao se oporem a variações instantâneas da tensão (capacitor) e da corrente (indutor), os elementos reativos de um circuito fazem com que um pulso tenha bordos inclinados, como na Fig. 22.2. O *bordo de subida* do pulso da Fig. 22.2 é definido como o bordo no qual o módulo do valor instantâneo do pulso está aumentando.

O bordo de descida é definido como o bordo no qual o módulo do valor instantâneo do pulso está diminuindo. Como o bordo de subida é o que ocorre primeiro (mais próximo de $t = 0$), ele também é chamado de bordo de ataque. O bordo de descida também é conhecido como bordo de fuga.

Os dois bordos estão indicados nas Figs. 22.1 e 22.2.

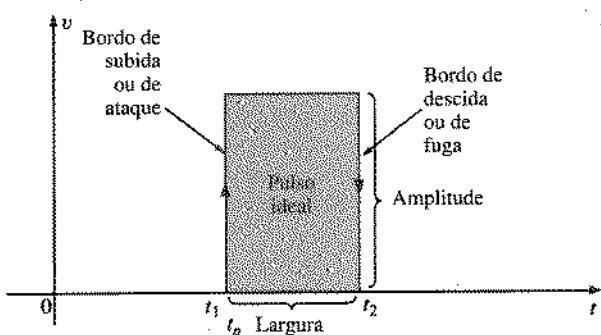


Fig. 22.1 Pulse ideal.

Amplitude

A amplitude de um pulso é definida como a distância entre o máximo positivo e o máximo negativo.

Alguns exemplos de amplitudes de pulsos aparecem nas Figs. 22.1 a 22.4.

Largura

A largura ou duração de um pulso é definida como a distância entre os pontos nos quais o valor do pulso é igual a 50% da amplitude.

No caso de um pulso ideal, como o da Fig. 22.1, a largura pode ser medida em qualquer valor; quando se trata de um pulso real,

porém, como o da Fig. 22.2, é importante que t_p seja medida entre os pontos corretos.

Nível de Base

O nível de base de um pulso é definido como o nível no qual o pulso começa.

O nível de base dos pulsos das Figs. 22.1 e 22.2 é 0 V. O nível de base do pulso da Fig. 22.3 (a) é 1 V, e o nível de base do pulso da Fig. 22.3 (b) é -4 V.

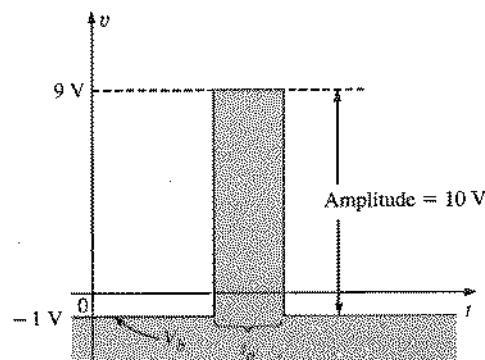


Fig. 22.4 Pulse positivo.

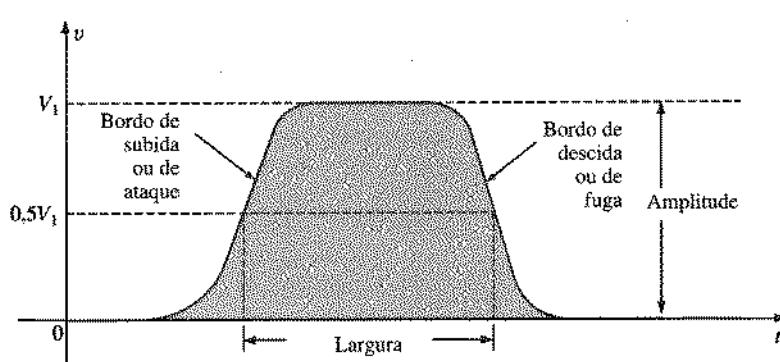


Fig. 22.2 Pulse real.

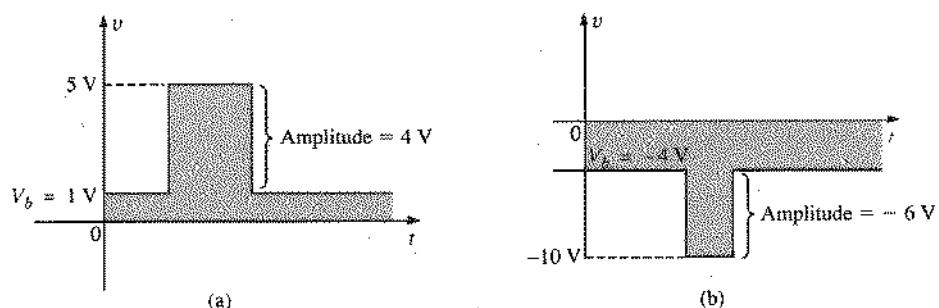


Fig. 22.3 Definição do nível de base.

Pulsos Positivos e Pulsos Negativos

Pulsos positivos são aqueles cujo valor instantâneo aumenta a partir do nível de base; pulsos negativos são aqueles cujo valor instantâneo diminui a partir do nível de base.

O pulso das Figs. 22.1, 22.2, 22.3(a) e 22.4 é positivo, enquanto o pulso da Fig. 22.3(b) é negativo.

Tempo de Subida e Tempo de Descida

O tempo de subida e o tempo de descida de um pulso são definidos como os tempos necessários para que o valor instantâneo varie de 10% para 90% do valor máximo e de 90% para 10% da amplitude, respectivamente.

Observe que o tempo de subida não é necessariamente igual ao tempo de descida.

Inclinação

A Fig. 22.6 mostra uma distorção relativamente comum, causada pela resposta deficiente em baixas freqüências do circuito pelo qual passou o pulso. Esta queda do valor instantâneo é chamada de *inclinação*. A inclinação percentual é definida pela equação

$$\% \text{ inclinação} = \frac{V_1 - V_2}{V} \times 100\% \quad (22.1)$$

onde V é o valor médio da amplitude, dado por

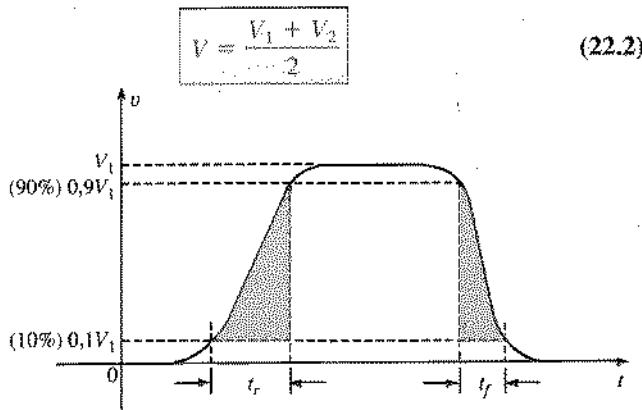


Fig. 22.5 Definição dos tempos de subida e descida.

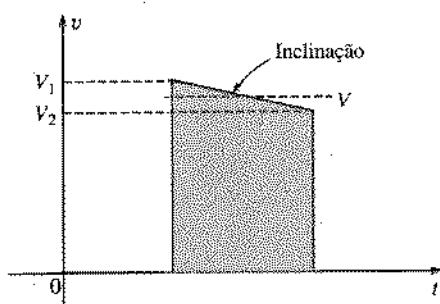


Fig. 22.6 Definição de inclinação.

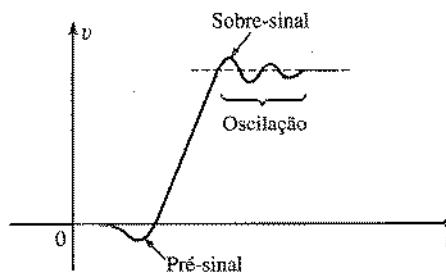


Fig. 22.7 Definição de pré-sinal, sobre-sinal e oscilação.

Naturalmente, quanto menor a inclinação percentual, mais o pulso se aproxima da forma ideal. Às vezes o arredondamento torna difícil definir os valores de V_1 e V_2 . Nesse caso, pode ser necessário aproximar a parte inclinada do pulso por uma linha reta antes de determinar V_1 e V_2 .

Outras distorções, definidas na Fig. 22.7, são o *pré-sinal* e o *sobre-sinal*, normalmente causadas pela resposta excessiva em altas freqüências do circuito, e a *oscilação*, causada pela troca de energia entre elementos capacitivos e indutivos do circuito.

EXEMPLO 22.1 Com relação ao pulso da Fig. 22.8, determine:

- se é positivo ou negativo
- o nível de base
- a largura
- a amplitude
- a inclinação percentual

Soluções

- positivo
- $V_b = -4 \text{ V}$
- $t_p = (12 - 7) \text{ ms} = 5 \text{ ms}$
- $V_{\max} = 8 \text{ V} + 4 \text{ V} = 12 \text{ V}$
- $V = \frac{V_1 + V_2}{2} = \frac{12 \text{ V} + 11 \text{ V}}{2} = \frac{23 \text{ V}}{2} = 11,5 \text{ V}$

$$\% \text{ inclinação} = \frac{V_1 - V_2}{V} \times 100\%$$

$$= \frac{12 \text{ V} - 11 \text{ V}}{11,5 \text{ V}} \times 100\% = 8,696\%$$

(Lembre-se de que V é definida pelo valor médio da amplitude.)

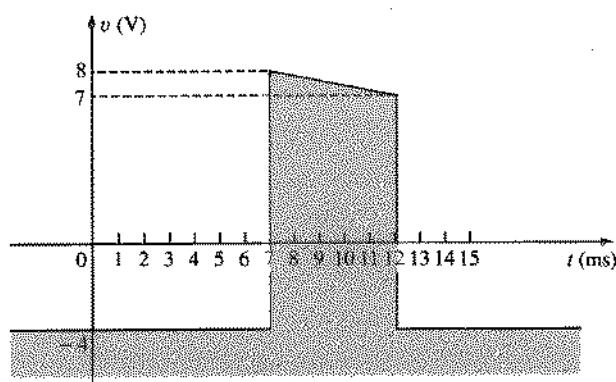


Fig. 22.8 Exemplo 22.1.

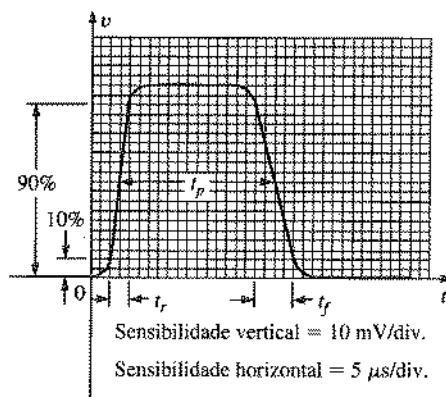


Fig. 22.9 Exemplo 22.2.

- EXEMPLO 22.2** Determine, no caso do pulso da Fig. 22.9:
- se é positivo ou negativo
 - o nível dc base
 - a inclinação percentual
 - a amplitude
 - a largura
 - o tempo de subida e o tempo de descida

Soluções

- positivo
- $V_b = 0 \text{ V}$
- % inclinação = 0%
- amplitude = (4 div.)(10 mV/div.) = 40 mV
- $t_p = (3,2 \text{ div.})(5 \mu\text{s}/\text{div.}) = 16 \mu\text{s}$
- $t_s = (0,4 \text{ div.})(5 \mu\text{s}/\text{div.}) = 2 \mu\text{s}$
- $t_d = (0,8 \text{ div.})(5 \mu\text{s}/\text{div.}) = 4 \mu\text{s}$

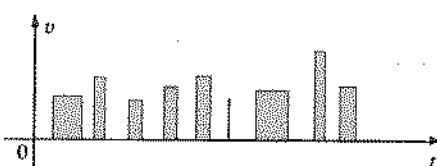


Fig. 22.10 Trem de pulsos.

22.3 TAXA DE REPETIÇÃO E CICLO DE OPERAÇÃO

Uma seqüência de pulsos como a que aparece na Fig. 22.10 é denominada *trem de pulsos*. As alturas e larguras variáveis podem conter informações a serem decodificadas no final do processo.

Quando os pulsos têm todos a mesma largura e se repetem a intervalos regulares, como na Fig. 22.11(a) e (b), temos um *trem de pulsos periódico*.

O *período* (T) de um trem de pulsos periódico é definido como a diferença de tempo entre pontos equivalentes de dois pulsos sucessivos, como indicado na Fig. 22.11 (a) e (b).

A *frequência de repetição de pulsos* (f_{rp}), ou *taxa de repetição de pulsos* (trp), é definida por

$$\boxed{f_{rp} (\text{ou trp}) = \frac{1}{T}} \quad (\text{Hz ou pulsos/s}) \quad (22.3)$$

Aplicando a Eq. (22.3) às formas de onda da Fig. 22.11 (a) e (b), obtemos o mesmo valor para a f_{rp} , já que os períodos são iguais. É fácil ver que

a frequência de repetição de pulsos não depende da forma dos pulsos individuais.

A frequência de repetição de pulsos depende apenas do intervalo entre pulsos sucessivos. O parâmetro que expressa qual é a fração desse intervalo durante a qual o pulso está presente é chamado de *ciclo de operação* e definido da seguinte forma:

$$\text{ciclo de operação} = \frac{\text{largura de pulso}}{\text{período}} \times 100\%$$

$$\text{ou} \quad \boxed{\text{ciclo de operação} = \frac{t_p}{T} \times 100\%} \quad (22.4)$$

No caso da Fig. 22.11(a) (uma onda quadrada),

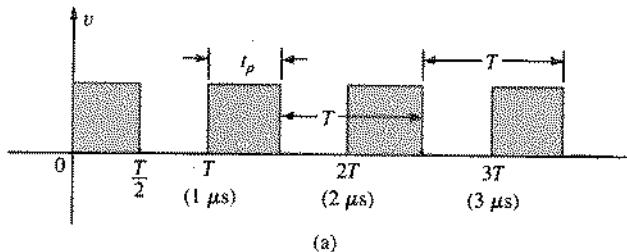
$$\text{ciclo de operação} = \frac{0,5T}{T} \times 100\% = 50\%$$

e no caso da Fig. 22.11(b),

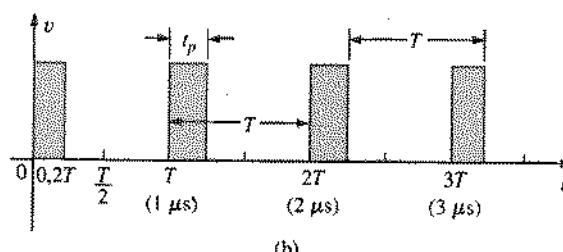
$$\text{ciclo de operação} = \frac{0,2T}{T} \times 100\% = 20\%$$

É fácil ver que

o ciclo de operação fornece uma indicação percentual da fração do período ocupada pelo pulso.



(a)



(b)

Fig. 22.11 Trem de pulsos periódicos.

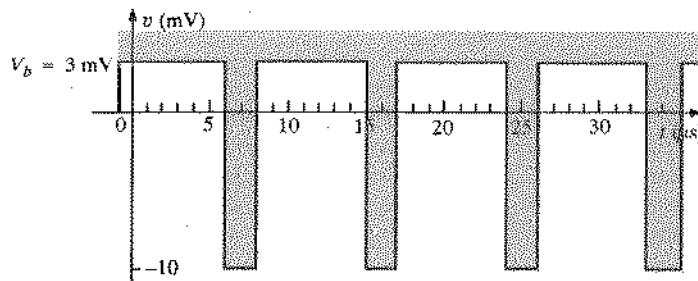


Fig. 22.12 Exemplo 22.3.

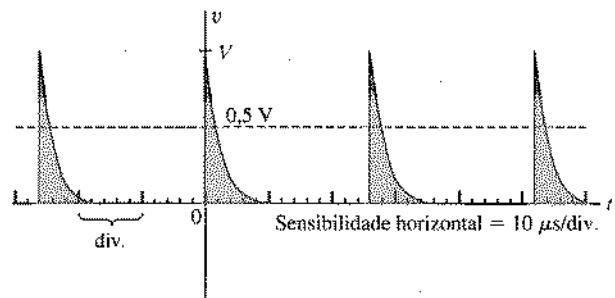


Fig. 22.14 Exemplo 22.5.

EXEMPLO 22.3 Determine a freqüência de repetição de pulsos e o ciclo de operação para o trem de pulsos periódico da Fig. 22.12.

Solução

$$T = (15 - 6) \mu s = 9 \mu s$$

$$f_{rp} = \frac{1}{T} = \frac{1}{9 \mu s} \cong 111,11 \text{ kHz}$$

$$\begin{aligned} \text{ciclo de operação} &= \frac{t_p}{T} \times 100\% = \frac{(8 - 6) \mu s}{9 \mu s} \times 100\% \\ &= \frac{2}{9} \times 100\% \cong 22,22\% \end{aligned}$$

EXEMPLO 22.4 Determine a freqüência de repetição de pulsos e o ciclo de operação para o trem de pulsos periódico cuja imagem na tela de um osciloscópio aparece na Fig. 22.13 com as sensibilidades vertical e horizontal indicadas na figura.

Solução

$$T = (3,2 \text{ div.})(1 \text{ ms/div.}) = 3,2 \text{ ms}$$

$$t_p = (0,8 \text{ div.})(1 \text{ ms/div.}) = 0,8 \text{ ms}$$

$$f_{rp} = \frac{1}{T} = \frac{1}{3,2 \text{ ms}} = 312,5 \text{ Hz}$$

$$\text{ciclo de operação} = \frac{t_p}{T} \times 100\% = \frac{0,8 \text{ ms}}{3,2 \text{ ms}} \times 100\% = 25\%$$

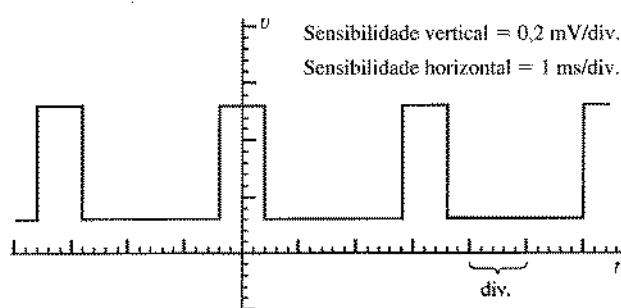


Fig. 22.13 Exemplo 22.4.

EXEMPLO 22.5 Calcule a taxa de repetição de pulsos e o ciclo de operação para a forma de onda da Fig. 22.14.

Solução

$$T = (2,6 \text{ div.})(10 \mu s/\text{div.}) = 26 \mu s$$

$$f_{rp} = \frac{1}{T} = \frac{1}{26 \mu s} = 38,462 \text{ kHz}$$

$$t_p \cong (0,2 \text{ div.})(10 \mu s/\text{div.}) = 2 \mu s$$

$$\text{ciclo de operação} = \frac{t_p}{T} \times 100\% = \frac{2 \mu s}{26 \mu s} \times 100\% = 7,69\%$$

22.4 VALOR MÉDIO

Existem dois métodos para determinar o valor médio de uma forma de onda pulsada. O primeiro, já discutido na Seção 13.6, pode ser aplicado a qualquer forma de onda; o segundo se aplica apenas a formas de onda pulsadas, já que se baseia em dois parâmetros relacionados especificamente a formas de onda pulsadas. De acordo com o segundo método, o valor médio é dado por:

$$V_{av} = \frac{\text{(ciclo de operação)}(\text{valor de pico})}{\text{(1 ciclo de operação)}(V_b)} \quad (22.5)$$

onde a amplitude é medida em relação ao nível de base e o ciclo de operação é expresso em forma decimal. A Eq. (22.5) não leva em conta os efeitos da inclinação e dos tempos de subida e descida.

EXEMPLO 22.6 Determine o valor médio do trem de pulsos periódico da Fig. 22.15.

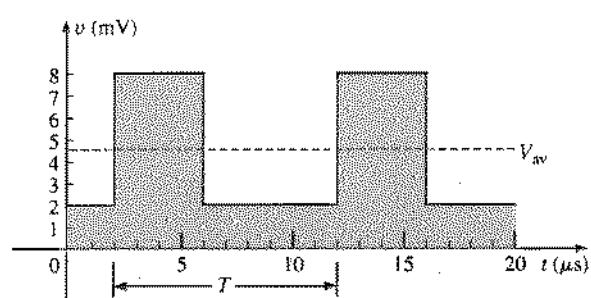


Fig. 22.15 Exemplo 22.6.



Solução Utilizando o método da Seção 13.6,

$$G = \frac{\text{área sob a curva}}{T}$$

$$T = (12 - 2) \mu s = 10 \mu s$$

$$G = \frac{(8 \text{ mV})(4 \mu s) + (2 \text{ mV})(6 \mu s)}{10 \mu s} = \frac{32 \times 10^{-9} + 12 \times 10^{-9}}{10 \times 10^{-6}} = \frac{44 \times 10^{-9}}{10 \times 10^{-6}} = 4,4 \text{ mV}$$

De acordo com a Eq. (22.5),

$$V_b = +2 \text{ mV}$$

$$\text{ciclo de operação} = \frac{t_p}{T} = \frac{(6 - 2) \mu s}{10 \mu s} = \frac{4}{10} = 0,4 \text{ (forma decimal)}$$

$$\text{Valor de pico (referência de } 0\text{-V}) = 8 \text{ mV}$$

$$V_{av} = (\text{ciclo de operação})(\text{valor de pico}) + (1 - \text{ciclo de operação})(V_b) \\ = (0,4)(8 \text{ mV}) + (1 - 0,4)(2 \text{ mV}) \\ = 3,2 \text{ mV} + 1,2 \text{ mV} = 4,4 \text{ mV}$$

valor idêntico ao obtido pelo método anterior.

EXEMPLO 22.7 Dado um trem de pulsos periódico com um ciclo de operação de 28%, uma amplitude de 7 V e um nível de base de -3 V:

- Determine o valor médio.
- Plote a forma de onda.
- Confirme o resultado do item (a) usando o método da Seção 13.6.

Soluções

a. De acordo com a Eq. (22.5),

$$V_{med} = (\text{ciclo de operação})(\text{valor de pico}) + (1 - \text{ciclo de operação})(V_b) \\ = (0,28)(7 \text{ V}) + (1 - 0,28)(-3 \text{ V}) = 1,96 \text{ V} + (-2,16 \text{ V}) = -0,2 \text{ V}$$

b. Veja a Fig. 22.16.

$$c. G = \frac{(7 \text{ V})(0,28T) - (3 \text{ V})(0,72T)}{T} = 1,96 \text{ V} - 2,16 \text{ V} \\ = -0,2 \text{ V}$$

resultado idêntico ao obtido em (a).

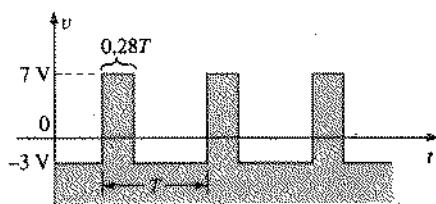


Fig. 22.16 Solução do item (b) do Exemplo 22.7.

Instrumentação

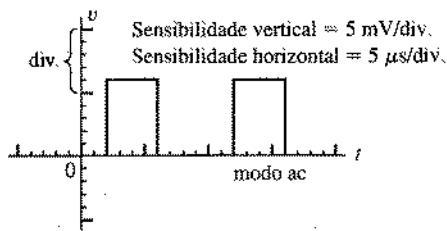
Podemos determinar facilmente o valor médio (nível dc) de qualquer forma de onda com o auxílio de um osciloscópio. Se a chave seletora do osciloscópio for colocada na posição ac, a componente dc da onda de entrada será bloqueada por um capacitor interno do aparelho, não produzindo assim nenhum efeito sobre a imagem na tela. Podemos ajustar os controles de modo a obter a imagem da Fig. 22.17(a). Se deslocarmos agora a chave seletora para a posição dc, o deslocamento vertical (positivo ou negativo) da imagem revelará o valor do nível dc do sinal de entrada, como na Fig. 22.17(b).

22.5 TRANSIENTES EM CIRCUITOS R-C

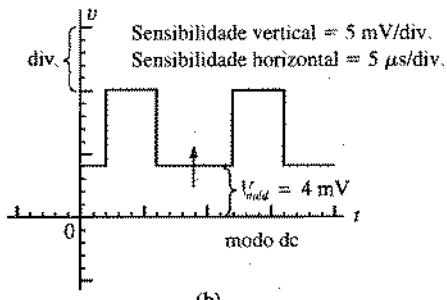
No Cap. 10 obtivemos a solução geral para o problema do comportamento transiente de um circuito R-C com ou sem valores iniciais de tensão. Repetimos a seguir, por conveniência, a expressão obtida naquela ocasião para a ddp entre os terminais de um capacitor

$$v_C = V_f + (V_i - V_f)(1 - e^{-t/RC}) \quad (22.6)$$

Lembre-se de que V_f é a tensão entre os terminais do capacitor no início da fase transiente (Fig. 22.18). A tensão V_i é a tensão entre os terminais do capacitor após o término da fase transi-



(a)



(b)

Fig. 22.17 Determinação do valor médio de uma forma de onda pulsada usando um osciloscópio.

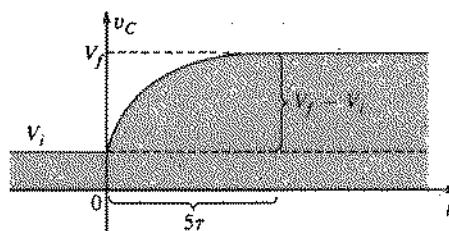


Fig. 22.18 Definição dos parâmetros da Eq. (22.6).

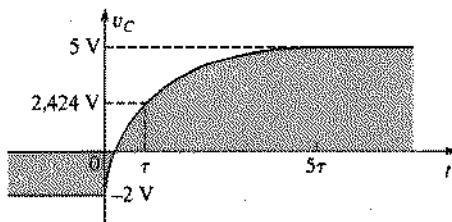


Fig. 22.19 Exemplo do uso da Eq. (22.6).

ente. A duração da fase transiente é aproximadamente 5τ , onde τ é a constante de tempo do circuito, dada pelo produto $R \cdot C$.

Quando a tensão inicial é zero, a Eq. (22.6) se reduz à forma a seguir, onde em geral v_i representa a tensão aplicada:

$$v_C = V_i(1 - e^{-t/\tau}) \quad V_i = 0\text{ V} \quad (22.7)$$

Na situação da Fig. 22.19, $V_i = -2\text{ V}$ e $V_f = +5\text{ V}$, logo

$$\begin{aligned} v_C &= V_i + (V_f - V_i)(1 - e^{-t/\tau}) \\ &= -2\text{ V} + [5\text{ V} - (-2\text{ V})](1 - e^{-t/\tau}) \\ v_C &= -2\text{ V} + 7\text{ V}(1 - e^{-t/\tau}) \end{aligned}$$

Para $t = \tau = R \cdot C$,

$$\begin{aligned} v_C &= -2\text{ V} + 7\text{ V}(1 - e^{-1}) = -2\text{ V} + 7\text{ V}(0.368) \\ &= -2\text{ V} + 7\text{ V}(0.632) \\ v_C &= 2,424\text{ V} \end{aligned}$$

como ilustra a Fig. 22.19.

EXEMPLO 22.8 A tensão entre os terminais do capacitor da Fig. 22.20 é 2 V antes que a chave seja fechada em $t = 0$.

- Obtenha a expressão matemática de v_c para $t \geq 0$.
- Obtenha a expressão matemática de i_c para $t > 0$.
- Esboce as formas de onda de v_c e i_c para $t \geq 0$.

Soluções

a. $V_i = 2\text{ V}$

V_f (após 5τ) = $E = 8\text{ V}$

$\tau = RC = (100\text{ k}\Omega)(1\text{ }\mu\text{F}) = 100\text{ ms}$

Pela Eq. (22.6),

$$\begin{aligned} v_C &= V_i + (V_f - V_i)(1 - e^{-t/\tau}) \\ &= 2\text{ V} + (8\text{ V} - 2\text{ V})(1 - e^{-t/\tau}) \end{aligned}$$

e portanto $v_C = 2\text{ V} + 6\text{ V}(1 - e^{-t/\tau})$

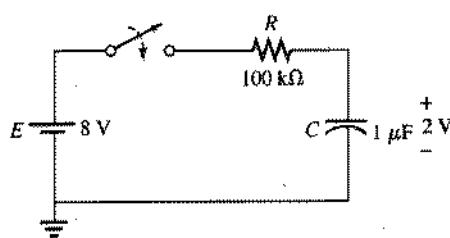
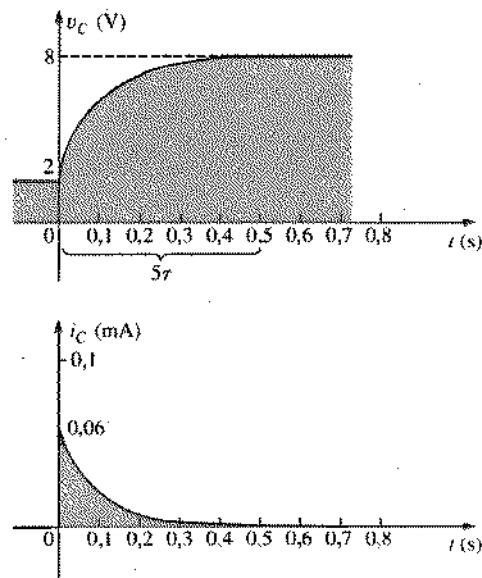


Fig. 22.20 Exemplo 22.8.

Fig. 22.21 v_C e i_C para o circuito da Fig. 22.20.

- b. Quando a chave é fechada, a tensão entre os terminais do capacitor não pode mudar instantaneamente e portanto $V_s = E - V_i = 8\text{ V} - 2\text{ V} = 6\text{ V}$. A corrente muda instantaneamente de zero para um valor dado pela definição de resistência:

$$I_{R_{\max}} = \frac{V_s}{R} = \frac{6\text{ V}}{100\text{ k}\Omega} = 0,06\text{ mA}$$

Em seguida, a corrente cai para zero com a mesma constante de tempo calculada no item (a):

$$i_C = 0,06\text{ mA}e^{-t/\tau}$$

- c. Veja a Fig. 22.21.

EXEMPLO 22.9 Trace o gráfico de v_c em função de tempo para o degrau de tensão $v_i(t)$ da Fig. 22.22, supondo que a tensão de -4 mV foi aplicada ao circuito por um período de tempo maior do que cinco constantes de tempo.

Solução

$V_i = -4\text{ mV} \quad V_f = 10\text{ mV}$

$\tau = RC = (1\text{ k}\Omega)(0,01\text{ }\mu\text{F}) = 10\text{ }\mu\text{s}$

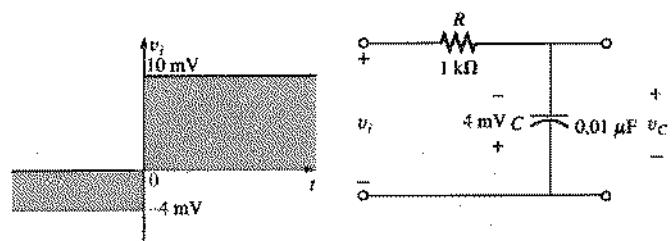
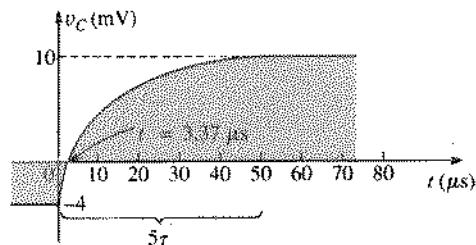


Fig. 22.22 Exemplo 22.9.

Fig. 22.23 v_c para o circuito da Fig. 22.22.

De acordo com a Eq. (22.6),

$$\begin{aligned} v_c &= V_i + (V_f - V_i)(1 - e^{-t/\tau}) \\ &= -4 \text{ mV} + [10 \text{ mV} - (-4 \text{ mV})](1 - e^{-t/\tau}) \end{aligned}$$

e portanto $v_c = -4 \text{ mV} + 14 \text{ mV}(1 - e^{-t/(10 \mu s)})$

O gráfico de $v_c(t)$ aparece na Fig. 22.23.

Fazendo $v_c = 0 \text{ V}$ na equação acima, temos:

$$v_c = 0 = -4 \text{ mV} + 14 \text{ mV}(1 - e^{-t/\tau})$$

logo $\frac{4 \text{ mV}}{14 \text{ mV}} = 1 - e^{-t/\tau}$

ou $0,286 = 1 - e^{-t/\tau}$

e portanto $0,714 = e^{-t/\tau}$

mas $\log_e 0,714 = \log_e(e^{-t/\tau}) = -\frac{t}{\tau}$

logo $t = -\tau \log_e 0,714 = -(10 \mu s)(-0,377) = 3,37 \mu s$

como se pode ver na Fig. 22.23.

22.6 RESPOSTA DE UM CIRCUITO R-C A UMA ONDA QUADRADA

A onda quadrada da Fig. 22.24 é um caso particular de forma de onda pulsada. Ela apresenta um ciclo de operação de 50% e um valor médio de zero volt, como mostram os cálculos a seguir:

$$\text{ciclo de operação} = \frac{t_p}{T} \times 100\% = \frac{T/2}{T} \times 100\% = 50\%$$

$$V_{\text{med.}} = \frac{(V_1)(T/2) + (-V_1)(T/2)}{T} = \frac{0}{T} = 0 \text{ V}$$

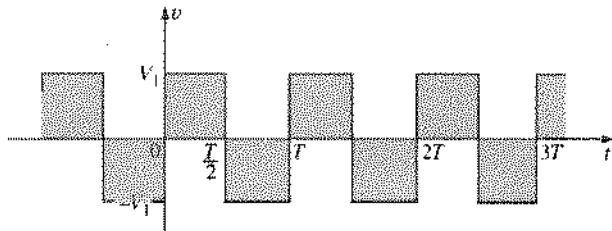


Fig. 22.24 Onda quadrada.

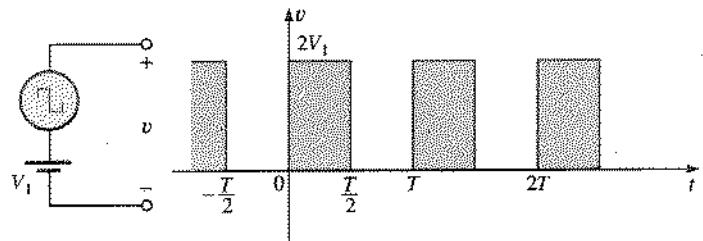


Fig. 22.25 Onda quadrada com um nível de base de 0 V.

Quando uma tensão contínua V_i é aplicada simultaneamente com a onda quadrada da Fig. 22.24, o nível de base aumenta de $-V_1$ para 0, e o valor médio, de 0 para V_i .

Quando uma onda quadrada como a da Fig. 22.25 é aplicada a um circuito como o da Fig. 22.26, a forma de onda da tensão entre os terminais do capacitor pode variar consideravelmente, dependendo do período da onda quadrada.

Nas análises que se seguem, vamos supor que o regime estacionário é atingido após transcorridas cinco constantes de tempo. Com base nesse critério, as formas de onda da tensão entre os terminais do capacitor podem ser divididas em três tipos:

T/2 > 5τ

Quando $T/2 > 5\tau$, ou seja, quando $T > 10\tau$, o capacitor se carrega totalmente antes de $t = T/2$. As formas de onda correspondentes de v_c e i_c aparecem na Fig. 22.27. Observe que v_c se parece muito com a tensão aplicada v_i e que i_c não passa de uma série de picos muito estreitos. Observe também que quando a tensão aplicada cai de V para 0 no final de cada pulso, o capacitor se descarrega totalmente, com a mesma constante de tempo do processo de carga.

T/2 = 5τ

Quando a frequência da onda quadrada é tal que $T/2 = 5\tau$, ou seja, quando $T = 10\tau$, a tensão v_c atinge o valor final exatamente no instante em que a tensão de entrada cai para 0. Como se pode ver na Fig. 22.28, a forma de onda da tensão v_c nesse caso se parece mais com uma onda triangular do que com uma onda quadrada. Os picos da corrente i_c são mais largos do que no caso anterior.

T/2 < 5τ

Quando $T/2 < 5\tau$, ou seja, $T < 10\tau$, a tensão v_c ainda não atingiu o valor final no momento em que a tensão de entrada cai para

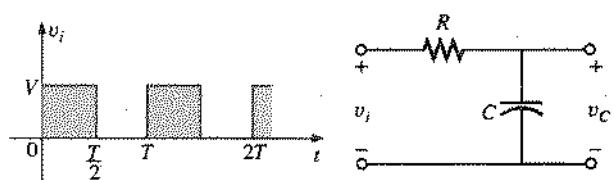
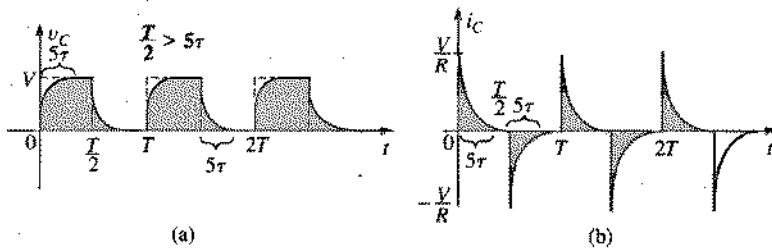
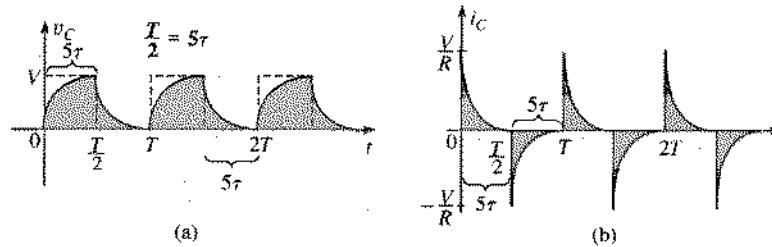
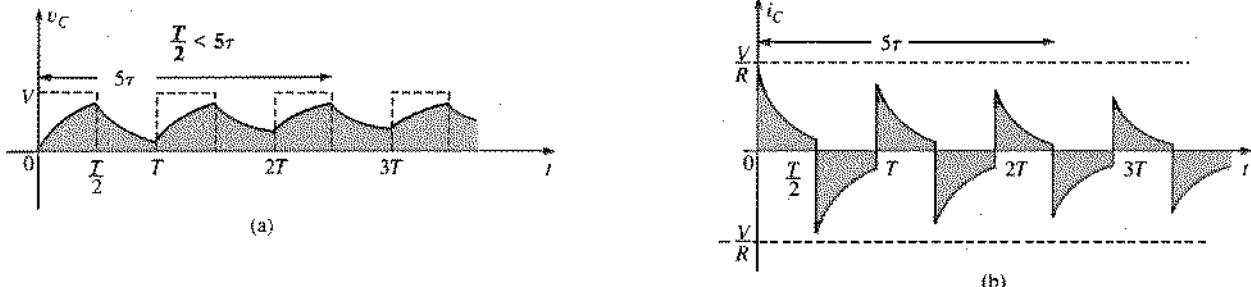


Fig. 22.26 Aplicação de uma onda quadrada a um circuito R-C.

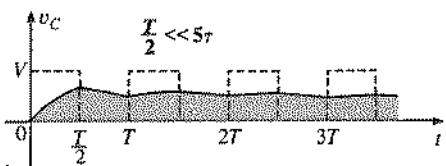
Fig. 22.27 v_c e i_c para $T/2 > 5\tau$.Fig. 22.28 v_c e i_c para $T/2 = 5\tau$.Fig. 22.29 v_c e i_c para $T/2 < 5\tau$.

O e ainda não caiu para 0 no momento em que a tensão de entrada volta a subir para V . Assim, o valor de v_c no início de cada pulso aumenta gradualmente até que o circuito atinja o regime estacionário, o que geralmente ocorre após 5 ciclos da tensão aplicada.

Quando o período da onda quadrada é muito maior do que a constante de tempo do circuito, a forma de onda de v_c , se torna quase plana, como na Fig. 22.30. Esta figura deixa mais evidente uma importante conclusão com relação à tensão v_c :

No regime estacionário, o valor médio de v_c é igual ao valor médio da onda quadrada aplicada.

Observe nas Figs. 22.29 e 22.30 que a forma de onda de v_c não se afasta muito de $V/2$.

Fig. 22.30 v_c para $T/2 \ll 5\tau$ ou $T \ll 10\tau$.

EXEMPLO 22.10 A onda quadrada da Fig. 22.31, cuja frequência é 1000 Hz, é aplicada ao circuito R-C da mesma figura.

- Compare a largura dos pulsos da onda quadrada com a constante de tempo do circuito.
- Esboce o gráfico de v_c .
- Esboce o gráfico de i_c .

Soluções

$$a. T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1000} = 1 \text{ ms}$$

$$t_p = \frac{T}{2} = 0,5 \text{ ms}$$

$$\tau = RC = (5 \times 10^3 \Omega)(0,01 \times 10^{-6} \text{ F}) = 0,05 \text{ ms}$$

$$\frac{t_p}{\tau} = \frac{0,5 \text{ ms}}{0,05 \text{ ms}} = 10 \quad \text{e} \quad t_p = 10\tau = \frac{T}{2}$$

O resultado mostra que v_c atinge o valor final após decorrido um intervalo igual à metade da largura dos pulsos.

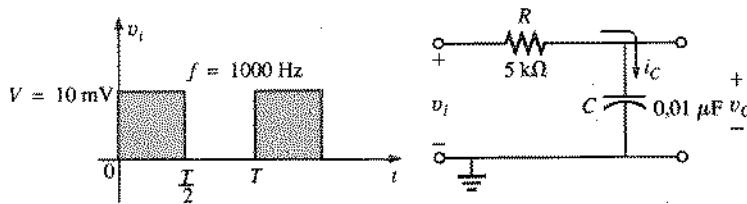
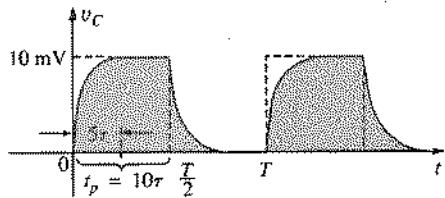


Fig. 22.31 Exemplo 22.10.

Fig. 22.32 v_C para o circuito R-C da Fig. 22.31.

b. Na fase de carga temos $V_i = 0$ e $V_f = 10 \text{ mV}$; logo,

$$v_C = V_i + (V_f - V_i)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ = 0 + (10 \text{ mV} - 0)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

e portanto $v_C = 10 \text{ mV}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

Na fase de descarga, $V_i = 10 \text{ mV}$ e $V_f = 0$; logo,

$$v_C = V_i + (V_f - V_i)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ = 10 \text{ mV} + (0 - 10 \text{ mV})(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ v_C = 10 \text{ mV} - 10 \text{ mV} + 10 \text{ mV}(e^{-\frac{t}{\tau}})$$

e portanto $v_C = 10 \text{ mV}e^{-\frac{t}{\tau}}$

A forma de onda de v_C aparece na Fig. 22.32.

c. Em $t = 0 \text{ s}$, $V_i = V$ e $I_{\max} = V/R = 10 \text{ mV}/5 \text{ k}\Omega = 2 \mu\text{A}$; logo,

$$i_C = I_{\max}e^{-\frac{t}{\tau}} = 2 \mu\text{A}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Durante a fase de descarga, a variação da corrente com o tempo é descrita pela mesma equação, mas com o sinal oposto, como se pode ver na Fig. 22.33.

EXEMPLO 22.11 Repita o Exemplo 22.10 para $f = 10 \text{ kHz}$.

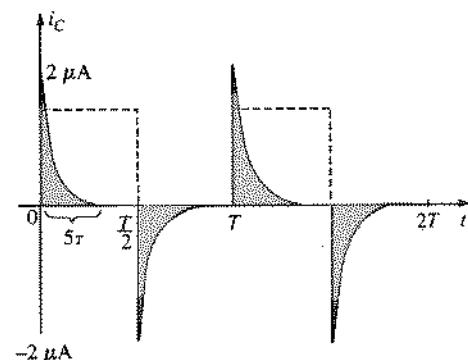
Solução

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{10 \text{ kHz}} = 0,1 \text{ ms}$$

e portanto $\frac{T}{2} = 0,05 \text{ ms}$

e $\tau = t_p = \frac{T}{2} = 0,05 \text{ ms}$

Em outras palavras, a largura dos pulsos é exatamente igual à constante de tempo do circuito; assim, o primeiro pulso da tensão aplicada termina muito antes que v_C atinja o valor final.

Fig. 22.33 i_C para o circuito R-C da Fig. 22.31.

No intervalo de $t = 0$ a $t = T/2$, $V_i = 0 \text{ V}$ e $V_f = 10 \text{ mV}$; logo,

$$v_C = 10 \text{ mV}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Como vimos do Cap. 10, em $t = \tau$ a tensão v_C atingiu 63,2% do valor final. Fazendo $t = \tau$ na equação acima, temos:

$$v_C = (10 \text{ mV})(1 - e^{-1}) = (10 \text{ mV})(1 - 0,368) \\ = (10 \text{ mV})(0,632) = 6,32 \text{ mV}$$

como se pode ver na Fig. 22.34.

Na fase de descarga, entre $t = T/2$ e $t = T$, $V_i = 6,32 \text{ mV}$ e $V_f = 0 \text{ V}$; logo,

$$v_C = V_i + (V_f - V_i)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ = 6,32 \text{ mV} + (0 - 6,32 \text{ mV})(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ v_C = 6,32 \text{ mV}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

onde agora t é medido a partir de $t = T/2$ na Fig. 22.34. Em outras palavras, fazemos $t = 0$ no início de cada um dos intervalos da Fig. 22.34. Assim, por exemplo, para calcular o valor de v_C em $t = T$, fazemos $t = \tau$ na equação acima e não $t = 2\tau$, como parece sugerir a Fig. 22.34.

Fazendo $t = \tau$, temos:

$$v_C = (6,32 \text{ mV})(e^{-1}) = (6,32 \text{ mV})(0,368) \\ = 2,33 \text{ mV}$$

como se pode ver na Fig. 22.34.

No intervalo seguinte, $V_i = 2,33 \text{ mV}$ e $V_f = 10 \text{ mV}$; logo,

$$v_C = V_i + (V_f - V_i)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ = 2,33 \text{ mV} + (10 \text{ mV} - 2,33 \text{ mV})(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ v_C = 2,33 \text{ mV} + 7,67 \text{ mV}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

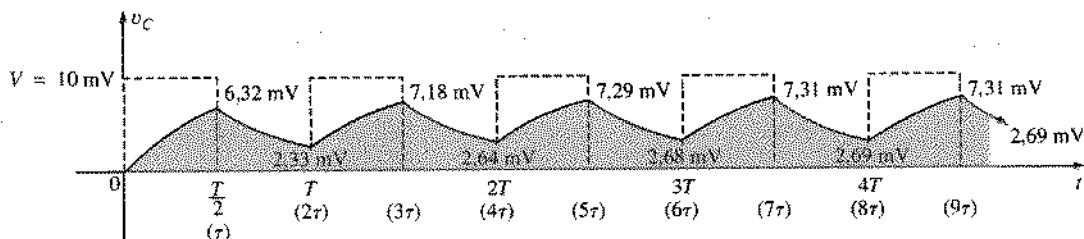


Fig. 22.34 \$v_C\$ para \$t_p = \tau = T/2\$.

Em \$t = \tau\$ (pois \$t = T = 2\tau\$ é considerado \$t = 0\$ para este intervalo),

$$\begin{aligned} v_C &= 2,33 \text{ mV} + 7,67 \text{ mV}(1 - e^{-1}) \\ &= 2,33 \text{ mV} + 4,85 \text{ mV} \\ v_C &= 7,18 \text{ mV} \end{aligned}$$

como se pode ver na Fig. 22.34.

No intervalo em que o capacitor está se descarregando, \$V_i = 7,18 \text{ mV}\$ e \$V_f = 0 \text{ V}\$; logo,

$$\begin{aligned} v_C &= V_i + (V_f - V_i)(1 - e^{-ut}) \\ &= 7,18 \text{ mV} + (0 - 7,18 \text{ mV})(1 - e^{-ut}) \\ v_C &= 7,18 \text{ mV}e^{-ut} \end{aligned}$$

Em \$t = \tau\$ (medido a partir de \$3\tau\$ na Fig. 22.34),

$$\begin{aligned} v_C &= (7,18 \text{ mV})(e^{-1}) = (7,18 \text{ mV})(0,368) \\ &= 2,64 \text{ mV} \end{aligned}$$

como se pode ver na Fig. 22.34.

Continuando o processo, é possível gerar a forma de onda completa de \$v_C\$ que aparece na Fig. 22.34. Observe que a forma de onda se torna periódica para \$t = 8\tau\$ e portanto o regime estacionário é atingido em menos de 5 ciclos da onda quadrada, que corresponderiam a \$10\tau\$.

Observando mais de perto a forma de onda, verificamos que os níveis máximo e mínimo de \$v_C\$ aumentam gradualmente até os valores finais. Como as constantes de tempo das duas exponenciais entre \$t = 4T\$ e \$t = 5T\$ são iguais, o valor médio de \$v_C\$

pode ser determinado a partir dos valores finais de \$v_C\$, \$7,31 \text{ mV}\$ e \$2,69 \text{ mV}\$, da seguinte forma:

$$V_{med.} = \frac{7,31 \text{ mV} + 2,69 \text{ mV}}{2} = \frac{10 \text{ mV}}{2} = 5 \text{ mV}$$

que é igual, como já foi dito anteriormente, ao valor médio da onda quadrada aplicada.

Podemos usar os resultados da Fig. 22.34 para plotar \$i_C\$. Em qualquer instante de tempo,

$$\begin{aligned} v_i &= v_R + v_C \quad \text{ou} \quad v_R = v_i - v_C \\ \text{e portanto} \quad i_R &= i_C = \frac{v_i - v_C}{R} \end{aligned}$$

Em \$t = 0^+\$, \$v_C = 0 \text{ V}\$ e

$$i_R = \frac{v_i - v_C}{R} = \frac{10 \text{ mV} - 0}{5 \text{ k}\Omega} = 2 \mu\text{A}$$

como se pode ver na Fig. 22.35.

À medida que o capacitor vai se carregando, a corrente \$i_C\$ diminui de acordo com a expressão:

$$i_C = 2 \mu\text{A}e^{-ut}$$

Em \$t = \tau\$,

$$\begin{aligned} i_C &= (2 \mu\text{A})(e^{-1}) = (2 \mu\text{A})(e^{-1}) = (2 \mu\text{A})(0,368) \\ &= 0,736 \mu\text{A} \end{aligned}$$

como se pode ver na Fig. 22.35

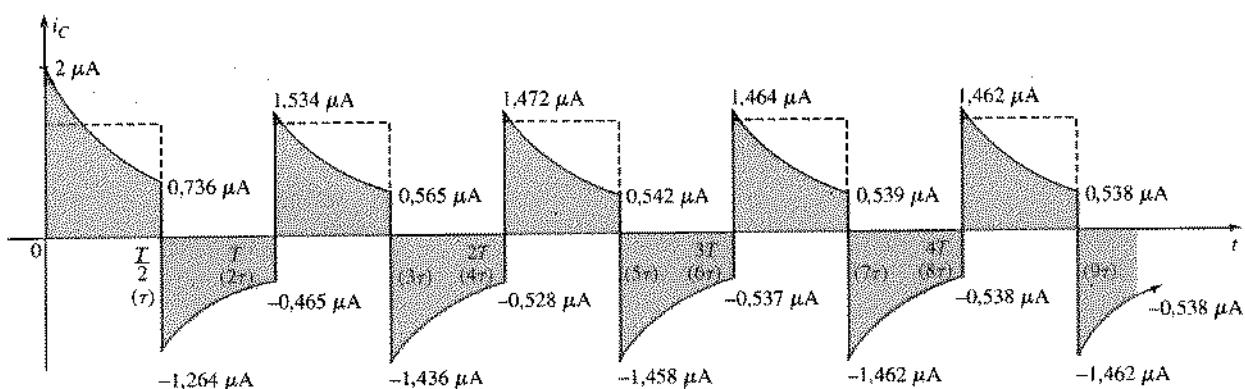


Fig. 22.35 \$i_C\$ para \$t_p = \tau = T/2\$.

Como a tensão entre os terminais do capacitor não pode variar instantaneamente, a corrente logo depois que a tensão aplicada cai para zero é dada por

$$i_C = i_R = \frac{v_i - v_C}{R} = \frac{0 - 6,32 \text{ mV}}{5 \text{ k}\Omega} = -1,264 \mu\text{A}$$

como se pode ver na Fig. 22.35. A partir desse momento, a corrente passa a diminuir de acordo com a equação

$$i_C = -1,264 \mu\text{A} e^{-t/\tau}$$

e em $t = \tau$ (ou seja, em $t = 2\tau$ na Fig. 22.35),

$$\begin{aligned} i_C &= (-1,264 \mu\text{A})(e^{-\tau/\tau}) = (-1,264 \mu\text{A})(e^{-1}) \\ &= (-1,264 \mu\text{A})(0,368) = -0,465 \mu\text{A} \end{aligned}$$

como se pode ver na Fig. 22.35.

Em $t = T$ ($t = 2\tau$), $v_c = 2,33 \text{ mV}$, $v_i = 10 \text{ mV}$ e portanto

$$i_C = i_R = \frac{v_i - v_C}{R} = \frac{10 \text{ mV} - 2,33 \text{ mV}}{5 \text{ k}\Omega} = 1,534 \mu\text{A}$$

A partir desse momento, a corrente passa a diminuir de acordo com a equação

$$i_C = 1,534 \mu\text{A} e^{-t/\tau}$$

e em $t = \tau$ (ou seja, em $t = 3\tau$ na Fig. 22.35),

$$i_C = (1,534 \mu\text{A})(0,368) = 0,565 \mu\text{A}$$

O processo continua até que i_c e v_c atinjam simultaneamente o regime estacionário. Observe na Fig. 22.35 que a corrente máxima diminui de ciclo para ciclo, enquanto a corrente no sentido oposto se torna mais negativa. É também importante observar que a forma de onda da corrente se torna simétrica em relação ao eixo horizontal quando o regime estacionário é atingido. O resultado é que a corrente média para um ciclo se anula, como deve acontecer nos circuitos R-C em série, já que, como vimos no Cap. 10, no regime estacionário o capacitor pode ser substituído por um circuito aberto e portanto $\bar{i}_c = 0$.

Embora nos dois exemplos anteriores tenhamos iniciado nossa análise com o capacitor descarregado, nada impede que utilizemos o mesmo método para resolver problemas em que o capacitor possui uma carga inicial. Para isso, basta usar a Eq. (22.6) em vez da Eq. (22.7) e substituir V_i pela tensão inicial do capacitor.

22.7 PONTA DE PROVA ATENUADORA COMPENSADA

A ponta de prova atenuadora $\times 10$ usada nos osciloscópios tem por objetivo dividir por 10 a tensão aplicada à entrada do osciloscópio. Como se pode ver na Fig. 22.36, se a impedância de entrada do osciloscópio for $1 \text{ M}\Omega$, a ponta de prova $\times 10$ deverá ter uma resistência interna de $9 \text{ M}\Omega$, pois nesse caso, usando a regra dos divisores de tensão,

$$V_{\text{osciloscópio}} = \frac{(1 \text{ M}\Omega)(V_i)}{1 \text{ M}\Omega + 9 \text{ M}\Omega} = \frac{1}{10} V_i$$

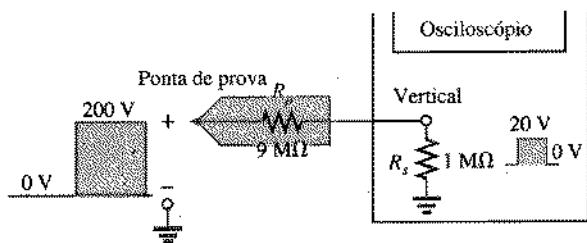


Fig. 22.36 Ponta atenuadora $\times 10$.

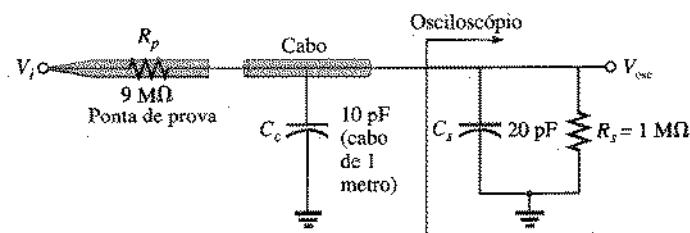


Fig. 22.37 Elementos capacitivos associados ao uso de uma ponta de prova atenuadora.

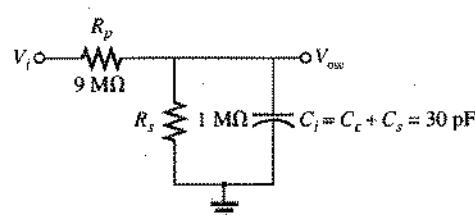


Fig. 22.38 Circuito equivalente da Fig. 22.37.

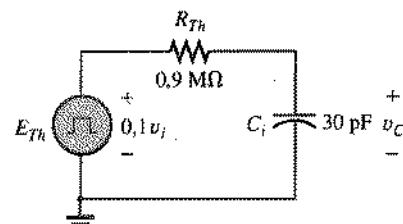


Fig. 22.39 Circuito equivalente de Thévenin para o circuito da Fig. 22.38, do ponto de vista do capacitor C_j .

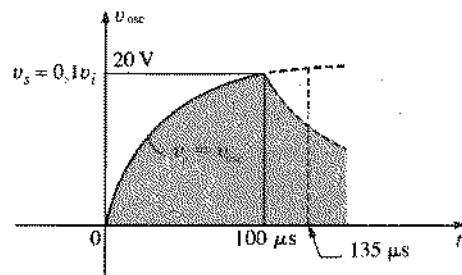


Fig. 22.40 Imagem na tela de um osciloscópio da tensão v_c da Fig. 22.38 para $v_i = 200 \text{ V}$ (valor máximo).

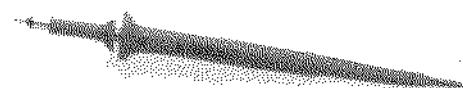


Fig. 22.41 Ponta de prova atenuadora compensada do tipo X 10. (Cortesia de Tektronix, Inc.)

Além da resistência de entrada, os osciloscópios também possuem uma certa capacidade de entrada; a ligação da ponta de prova introduz uma capacidade adicional em paralelo com a capacidade do osciloscópio, como se pode ver na Fig. 22.37. A capacidade da ponta de prova é da ordem de 10 pF para cabos de 1 m de comprimento e 15 pF para cabos de 3 m de comprimento. A capacidade total, que aparece no circuito equivalente da Fig. 22.38, é a soma das duas capacidades.

Para analisar o circuito, vamos determinar o circuito equivalente de Thévenin do ponto de vista do capacitor C_p :

$$E_{Th} = \frac{(1\text{ M}\Omega)(V_i)}{1\text{ M}\Omega + 9\text{ M}\Omega} = \frac{1}{10}V_i$$

$$\text{e } R_{Th} = 9\text{ M}\Omega \parallel 1\text{ M}\Omega = 0,9\text{ M}\Omega$$

O circuito equivalente de Thévenin aparece na Fig. 22.39

Para $v_i = 200\text{ V}$ (valor máximo),

$$E_{Th} = 0,1v_i = 20\text{ V} \text{ (valor máximo)}$$

Para calcular $v_c(t)$, podemos usar a Eq. (22.6) com $V_f = 20\text{ V}$, $V_i = 0\text{ V}$ e

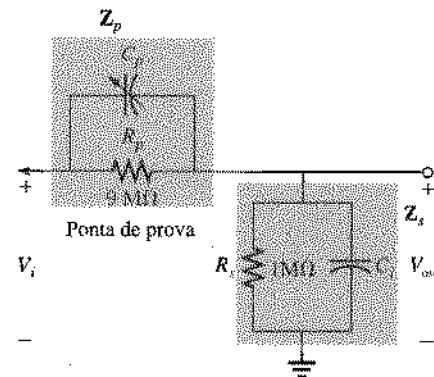


Fig. 22.42 Ponta de prova atenuadora compensada e impedância de entrada de um osciloscópio, incluindo a capacidade do cabo.

$$\tau = RC = (0,9 \times 10^6 \Omega)(30 \times 10^{-12} \text{ F}) = 27\text{ }\mu\text{s}$$

Para uma frequência aplicada de 5 kHz,

$$T = \frac{1}{f} = 0,2\text{ ms} \quad \text{e} \quad \frac{T}{2} = 0,1\text{ ms} = 100\text{ }\mu\text{s}$$

e portanto $5\tau = 135\text{ }\mu\text{s} > T/2$, o que resulta em uma considerável distorção do sinal de entrada, como se pode ver na Fig. 22.40.

Para corrigir este problema, costuma-se ligar um capacitor variável em paralelo com a resistência da ponta de prova, o que resulta em uma *ponta de prova atenuada compensada* como a da Fig. 22.41. No Cap. 25 será demonstrado que uma onda quadrada pode

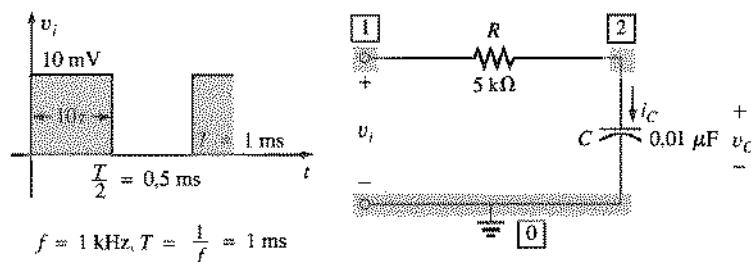


Fig. 22.43 Definição dos parâmetros para a análise de um circuito R-C pelo PSpice (DOS).

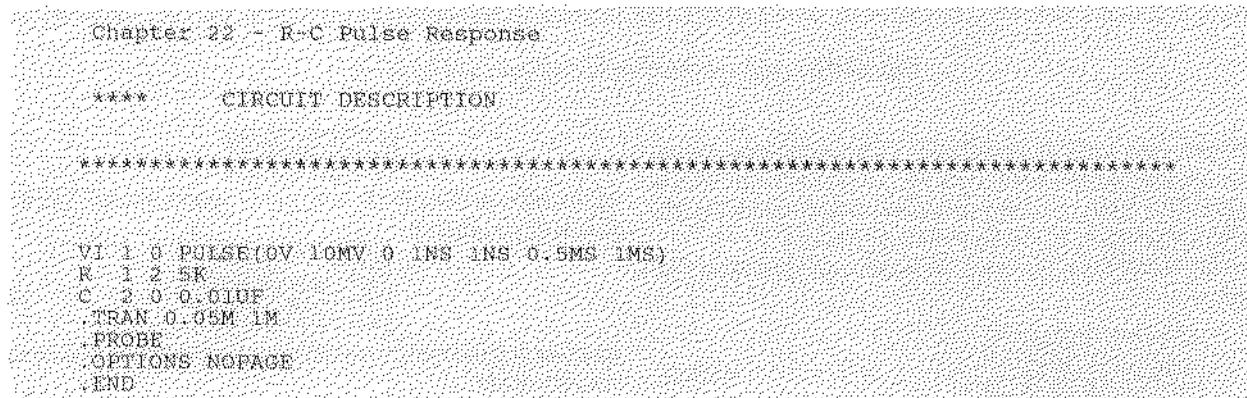


Fig. 22.44 Arquivo de entrada para o circuito da Fig. 22.43.

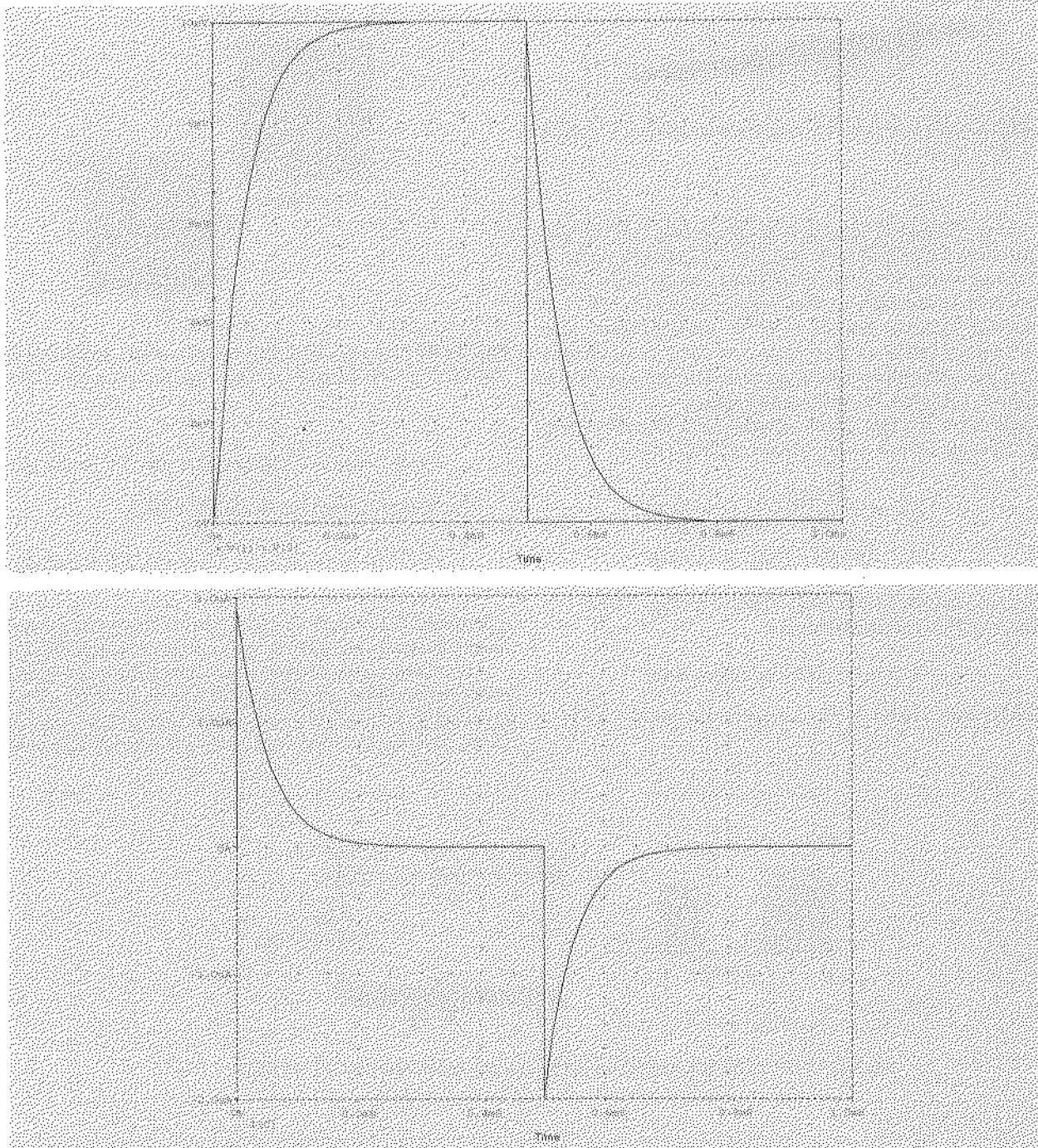


Fig. 22.45 Arquivo de saída para o circuito da Fig. 22.43.

ser considerada uma soma de senóides de várias freqüências; assim, se projetarmos um circuito como o da Fig. 22.42 de tal forma que V_{in} seja igual a $0.1 v_i$, para qualquer freqüência, a onda quadrada será atenuada sem distorção e V_{out} terá a mesma forma que v_i .

Aplicando a regra dos divisores de tensão ao circuito da Fig. 22.42, temos:

$$V_{out} = \frac{Z_p V_i}{Z_s + Z_p} \quad (22.8)$$

Se os parâmetros forem escolhidos ou ajustados de tal forma que

$$R_p C_{pi} = R_s C_s \quad (22.9)$$

os ângulos de fase de Z_s e Z_p serão iguais e a Eq. (22.8) ficará reduzida à equação

$$V_{out} = \frac{R_p V_i}{R_s + R_p} \quad (22.10)$$

que não depende da freqüência, já que a parte reativa da resposta foi cancelada.

Na prática, simplesmente ajustamos a capacitância da ponta de prova até que os cantos de uma onda quadrada usada como padrão

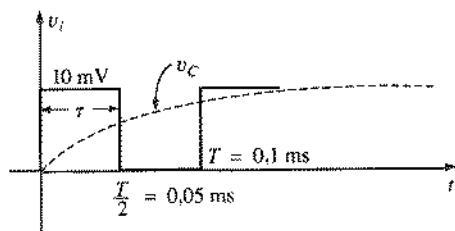
Chapter 22 - R-C Pulse Response

***** CIRCUIT DESCRIPTION *****

```

VI 1 0 PULSE(0V 10mV 0 1NS 1NS 0.05MS 1MS)
R 1 2 5K
C 2 0 0.01UF
TRAN 0.005M 1M
PROBE
OPTIONS NOPAGE
END

```

Fig. 22.46 Arquivo de entrada para as condições da Fig. 22.47.**Fig. 22.47** Forma de onda na entrada.

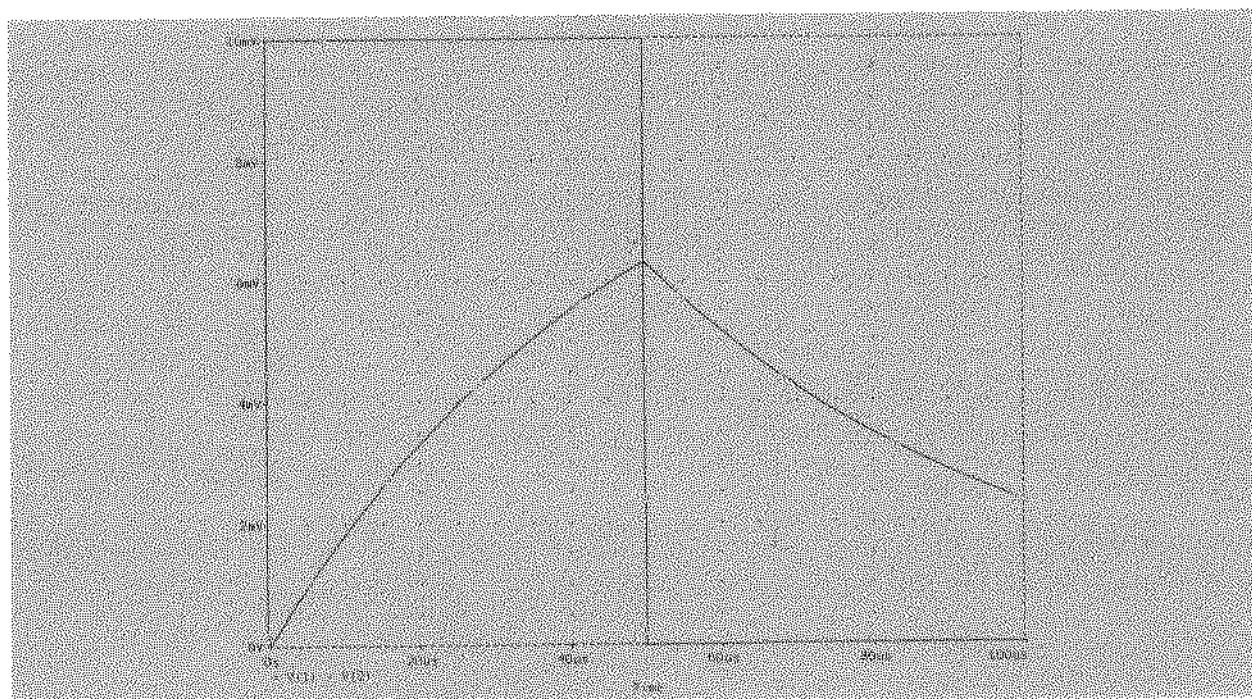
fiquem bem definidos. É importante que o sinal de entrada usado para calibrar a ponta de prova seja realmente uma onda quadrada, já que outros tipos de sinais podem ficar com o aspecto de uma onda quadrada para certos valores de capacidade da ponta de prova.

Se o valor da capacidade da ponta de prova for excessivo, haverá um efeito de sobre-sinal; se for insuficiente, os pulsos continuarão a ter uma forma arredondada.

22.8 ANÁLISE COMPUTACIONAL**PSpice (DOS)**

Nesta seção, vamos usar o comando .PROBE do PSpice para gerar algumas formas de onda estudadas neste capítulo. Em particular, vamos obter a resposta a uma onda quadrada do circuito da Fig. 22.31, reproduzido na Fig. 22.43.

Para a freqüência aplicada, os pulsos têm uma amplitude de 10 mV durante 0,5 ms e uma amplitude de 0 V durante os 0,5 ms subsequentes. Os primeiros três dados da primeira linha do ar-

**Fig. 22.48** Arquivo de saída para as condições definidas na Fig. 22.47.

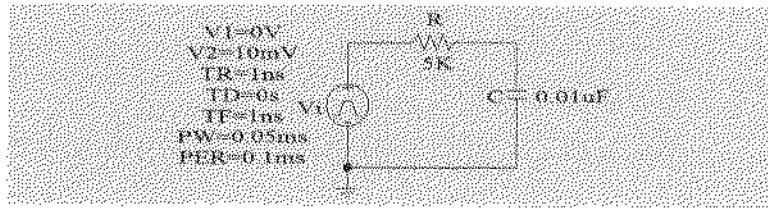


Fig. 22.49 Versão esquemática do circuito da Fig. 22.31 com $f = 10 \text{ kHz}$.

quivo de entrada da Fig. 22.44 especificam uma transição de 0 V para 10 mV com um tempo de retardo de 0 s. Os dois dados seguintes representam os tempos de subida e de descida. Como o leitor deve se lembrar, se esses tempos não forem especificados, o programa usará o tempo TSTEP do comando .TRAN. O sexto dado é a largura dos pulsos, e o sétimo é o período da forma de onda. O comando .TRAN especifica que deve ser gerado um ponto a cada 0,05 ms (50 ms) até 1 ms.

O comando .PROBE é usado para obter os gráficos de v_i [tensão nodal V_1 , da Fig. 22.43(b)] e v_c [(tensão nodal V_2 , da Fig. 22.43(b))] que aparecem na Fig. 22.45. Observe que esses gráficos são idênticos aos das Figs. 22.32 e 22.33. Observe também que .PROBE mostra na parte inferior do gráfico os símbolos usados para representar as duas tensões, \square para v_i e para 0 para v_c . O gráfico de i_c mostra que .PROBE é capaz de representar também valores negativos; neste caso, o eixo horizontal é colocado automaticamente no meio do gráfico.

O segundo arquivo de entrada (Fig. 22.46) é para a onda quadrada da Fig. 22.47, que tem uma frequência de 10 kHz, como no Exemplo 22.11. Neste caso, os pulsos de 10 mV estão presentes por um período de tempo igual à constante de tempo do circuito, isto é, um período de tempo insuficiente (menor do que 5τ) para que a tensão v_c atinja o valor final. Em consequência, o valor máximo de v_c para o primeiro pulso (e também, na verdade, para os pulsos subsequentes) é menor do que 10 mV, como se pode ver na Fig. 22.47.

As únicas alterações em relação ao arquivo de entrada da Fig. 22.44 são a mudança do período para 0,1 ms ($2 \times 0,05 \text{ ms}$) e a modificação do comando .TRAN para mostrar um ponto a cada 0,005 ms = 5 μs até 0,1 ms = 100 μs . O traçado dos gráficos de v_i e v_c pelo programa resultou nas curvas da Fig. 22.48, que concordam muito bem com as da Fig. 22.34. O valor de v_c chega a 6,3 V em 50 μs e cai para cerca de 2,3 V em $t = 100 \mu\text{s}$.

É difícil obter uma precisão além da casa dos décimos com as curvas da Fig. 22.48, mas lembre-se de que, se desejarmos uma

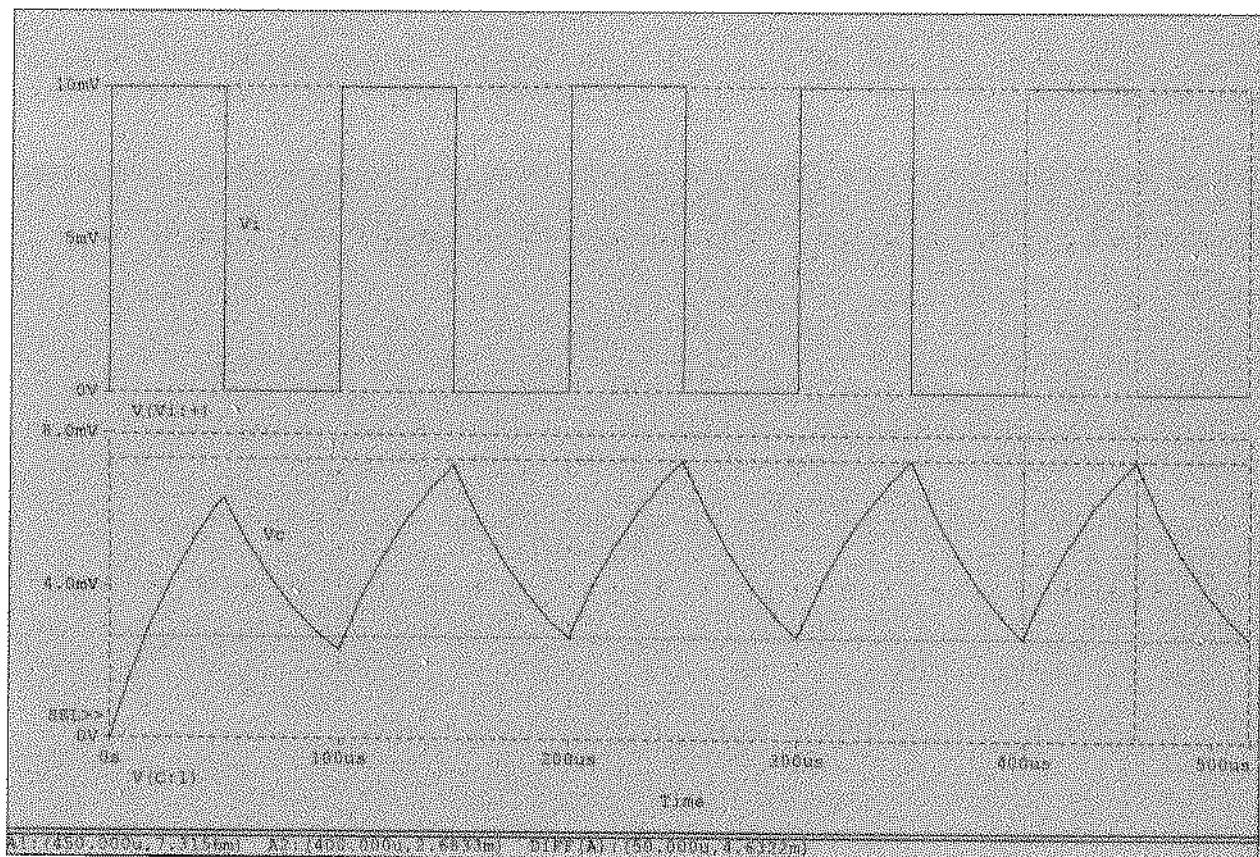


Fig. 22.50 Confirmação dos resultados da Fig. 22.34.

precisão maior, podemos modificar a escala e observar somente uma região particular das formas de onda.

PSpice (Windows)

O uso de esquemas será aqui limitado a uma verificação dos resultados da Fig. 22.34, mostrando a variação da tensão entre os terminais de um capacitor à medida que o circuito se aproxima do regime estacionário. O circuito (Fig. 22.49) é o mesmo representado pelo arquivo de entrada da Fig. 22.46.

Dentro de Analysis escolhemos a opção **Automatically Run Probe** e, depois de terminada a simulação, os comandos **Trace**, **Add** e **Add Trace** levaram à escolha de $V(C:1) = V_C$, cujo gráfico aparece na tela, como ilustra a Fig. 22.50. Entrando com **Tools-Cursor-Display** e em seguida pressionando o botão esquerdo do mouse, estabelecemos uma linha para o cursor. Retornando a **Tools-Cursor-Max**, o cursor se deslocará para o valor

máximo, 7,31 mV, que ocorre em $t = 450 \mu s$, como se pode ver na parte inferior da Fig. 22.50. Uma comparação com a Fig. 22.34 mostra que existe uma concordância perfeita. Foi ainda adicionado um segundo cursor através de um clique no botão da direita do mouse, sendo este segundo cursor deslocado, mantendo pressionado o botão da direita, até o valor mínimo 2,68 mV em $t = 400 \mu s$. Este resultado está, novamente, em boa concordância com a solução anterior. A única diferença é que o PSpice necessitou de 8,73 s para calcular a solução (com um pequeno intervalo de tempo adicional para exibir os gráficos na tela), enquanto um tempo muito maior seria necessário para obter o mesmo resultado usando os métodos da Seção 22.6.

O gráfico da tensão aplicada V pode ser acrescentado usando a sequência **Plot-Add Plot-Trace-Add-V(V; +)**. Para rotular as curvas, basta dar um clique no botão esquerdo do mouse com o cursor sobre uma delas, o que fará aparecer **SEL>>** no canto inferior esquerdo do gráfico escolhido. Use então **Tools-LABEL-Text** para rotular o gráfico como V , ou V_C .

PROBLEMAS

SEÇÃO 22.2 Pulsos Ideais e Pulsos Reais

- Determine, para a forma de onda pulsada da Fig. 22.51:
 - se os pulsos são positivos ou negativos.
 - o nível de base.
 - a largura dos pulsos.
 - a amplitude dos pulsos.
 - a inclinação percentual dos pulsos.

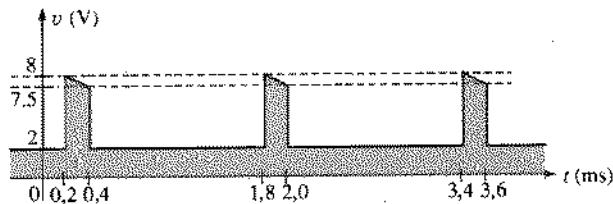


Fig. 22.51 Problemas 1, 8 e 12.

- Repita o Problema 1 para a forma de onda pulsada da Fig. 22.52.

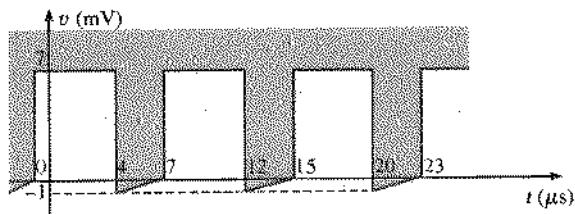


Fig. 22.52 Problemas 2 e 9.

- Repita o Problema 1 para a forma de onda pulsada da Fig. 22.53.

- Determine os tempos de subida e de descida para a forma de onda da Fig. 22.53.

Sensibilidade vertical = 10 mV/div.
Sensibilidade horizontal = 2 ms/div.

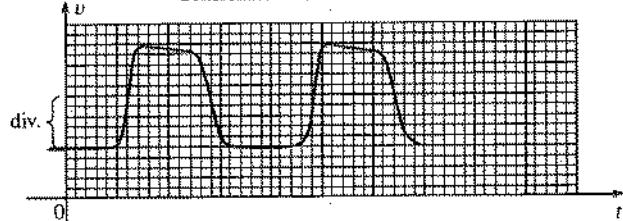


Fig. 22.53 Problemas 3, 4, 10 e 13.

- Desenhe uma forma de onda pulsada com um período de $10 \mu s$ cujos pulsos são positivos e têm um nível de referência de -5 mV, uma largura de $2 \mu s$, uma amplitude de 15 mV, uma inclinação de 10% e tempos de subida e descida desprezíveis.
- Para a forma de onda da Fig. 22.54, obtida aproximando a forma de onda original por segmentos de reta:
 - Determine o tempo de subida dos pulsos.
 - Determine o tempo de descida dos pulsos.
 - Determine a largura dos pulsos.
 - Calcule a frequência.

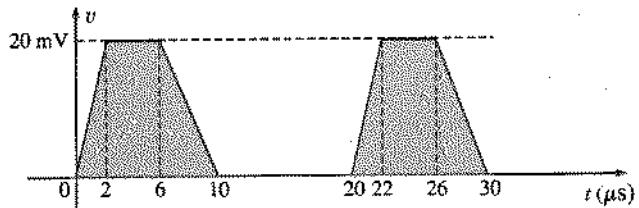


Fig. 22.54 Problemas 6 e 14.

- Para a forma de onda da Fig. 22.55:
 - Determine o período.
 - Calcule a frequência.
 - Encontre o valor máximo e o valor mínimo.

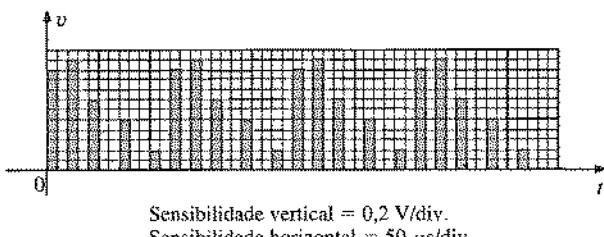


Fig. 22.55 Problemas 7 e 15.

SEÇÃO 22.3 Taxa de Repetição e Ciclo de Operação

8. Determine a freqüência de repetição de pulsos e o ciclo de operação para a forma de onda da Fig. 22.51.
9. Repita o Problema 8 para a forma de onda da Fig. 22.52.
10. Repita o Problema 8 para a forma de onda da Fig. 22.53.

SEÇÃO 22.4 Valor Médio

11. Para a forma de onda da Fig. 22.56, determine:
 - a. o período
 - b. a largura
 - c. a freqüência de repetição de pulsos
 - d. o valor médio
 - e. o valor eficaz

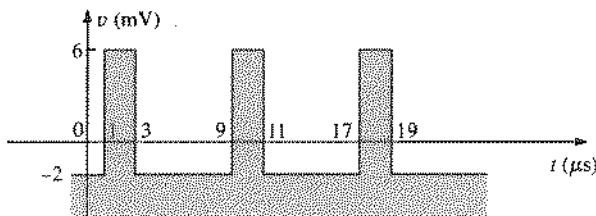


Fig. 22.56 Problema 11.

12. Determine o valor médio da forma de onda periódica da Fig. 22.51.
13. Obtenha, com a maior precisão possível, o valor médio da forma de onda da Fig. 22.53.
14. Determine o valor médio da forma de onda da Fig. 22.54.
15. Obtenha o valor médio do trem de pulsos periódico da Fig. 22.55.

SEÇÃO 22.5 Transientes em Circuitos R-C

16. A tensão inicial no capacitor da Fig. 22.57 é 5 V, com a polaridade indicada na figura. A chave é fechada em $t = 0$ s.
 - a. Determine $v_c(t)$.
 - b. Plote $v_c(t)$.
 - c. Determine $i_c(t)$.
 - d. Plote $i_c(t)$.

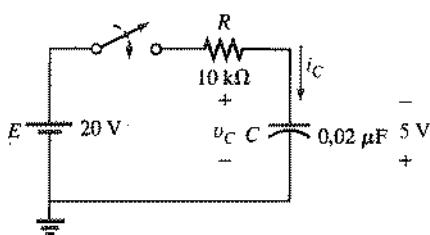


Fig. 22.57 Problema 16.

17. Desenhe a forma de onda de v_o para a tensão v_i da Fig. 22.58, supondo que o circuito se encontra no regime estacionário em $v_i = 8$ V.

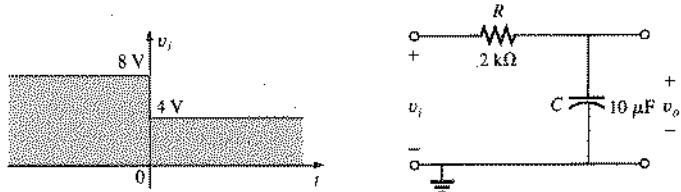


Fig. 22.58 Problema 17.

18. A chave da Fig. 22.59 é mantida na posição 1 até ser atingido o regime estacionário; em seguida, é deslocada (em $t = 0$ s) para a posição 2. Pinte a forma de onda da tensão v_c .

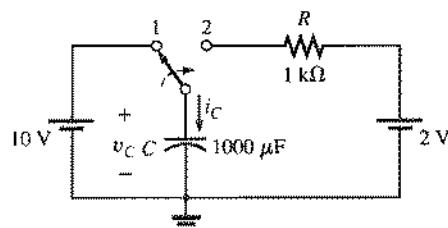


Fig. 22.59 Problemas 18 e 19.

19. Plote a forma de onda de i_c do Problema 18.

SEÇÃO 22.6 Resposta de um Circuito R-C a uma Onda Quadrada

20. Plote a forma de onda de v_c no circuito da Fig. 22.60 se a onda quadrada que aparece na mesma figura tiver uma freqüência de
 - a. 500 Hz
 - b. 100 Hz
 - c. 5000 Hz

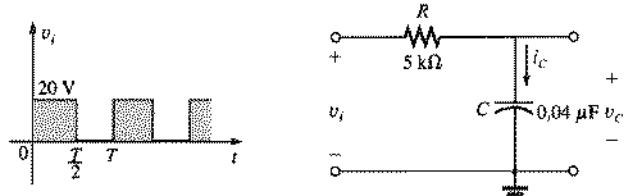


Fig. 22.60 Problemas 20, 21, 23, 24, 29, 30 e 31.

21. Plote a corrente i_c para as três freqüências do Problema 20.
22. Plote a tensão v_c no circuito da Fig. 22.60 se a tensão de entrada v_i for a onda quadrada da Fig. 22.61.

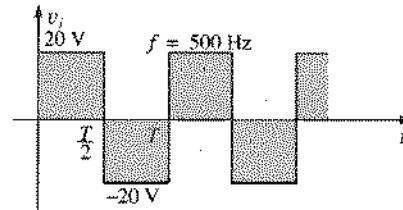


Fig. 22.61 Problemas 22 e 28.

23. Pinte a tensão v_c no circuito da Fig. 22.60 se a tensão inicial do capacitor for 20 V e a tensão de entrada v_i for a onda quadrada da Fig. 22.60, com uma freqüência de 500 Hz.
 24. Repita o Problema 23 se a tensão inicial do capacitor for -10 V.

SEÇÃO 22.7 Ponta de Prova Atenuadora Compensada

25. Para o circuito da Fig. 22.42 com $R_s = 9 \text{ M}\Omega$ e $R_o = 1 \text{ M}\Omega$, determine \mathbf{V}_{∞} em forma polar se $C_s = 3 \text{ pF}$, $C_o = 18 \text{ pF}$, $C_c = 9 \text{ pF}$ e $v_i = \sqrt{2} (100) \text{ sen } 2\pi 10.000t$. Para isso, determine Z_s e Z_o e substitua os dois valores na Eq. (22.8). Compare com o resultado obtido usando a Eq. (22.10). É verdade que os ângulos de fase de Z_s e Z_o são iguais quando $R_s C_o = R_o C_s$?
 26. Repita o Problema 25 para $\omega = 10^5 \text{ rad/s}$.

SEÇÃO 22.8 Análise Computacional

PSpice (DOS)

27. Escreva o arquivo de entrada para obter as formas de onda de v_c e i_c para o circuito da Fig. 22.31 supondo que a freqüência é 1 kHz.
 28. Escreva o arquivo de entrada para plotar o gráfico de $v_c(t)$ do Problema 22, usando um intervalo de $1/5 \tau$ para os pontos calculados e um intervalo total de 0 a 5τ .
 *29. Escreva o arquivo de dados para plotar o arquivo de $i_c(t)$ do Problema 23. Consulte o manual do programa PSpice para saber como especificar as condições iniciais.

GLOSSÁRIO

Amplitude (de um pulso) Distância entre o máximo positivo e o máximo negativo.

Ciclo de operação Parâmetro que expressa a fração do período durante a qual um pulso está presente.

Freqüência de repetição de pulsos Freqüência de um trem de pulsos periódico.

Inclinação (de um pulso) Diferença entre o valor inicial e final do pulso.

Largura (de um pulso) Distância entre os pontos nos quais o valor do pulso é igual a 50% da amplitude.

Nível de base (de um pulso) Nível no qual o pulso começa.

Onda quadrada Forma de onda periódica composta por pulsos ideais com um ciclo de operação de 50%.

Ponta de prova atenuadora Ponta de prova que reduz o valor da tensão aplicada ao canal vertical de um osciloscópio.

Ponta de prova atenuada compensada Ponta de prova que reduz o valor da tensão aplicada ao canal vertical de um osciloscópio sem modificar a forma de onda dessa tensão.

PSpice (Windows)

30. Usando esquemas, pinte $v_o(t)$ e $i_o(t)$ circuito da Fig. 22.60, supondo uma freqüência de 1 kHz.
 31. Usando esquemas, pinte no mesmo gráfico $v_o(t)$, $v_c(t)$ e $i_c(t)$ para o circuito da Fig. 22.60, supondo uma freqüência de 2 kHz.
 *32. Usando esquemas, pinte a forma de onda que aparece na tela do osciloscópio da Fig. 22.37 quando a tensão de entrada é uma onda quadrada com uma amplitude de 20 V e uma freqüência de 5 kHz.
 *33. Repita o Problema 32 supondo que um capacitor é ligado em paralelo com o resistor R_s da Fig. 22.37, fazendo com que v_{∞} e v_i fiquem em fase.

Linguagens de Programação (C++, BASIC, PASCAL etc.)

34. Escreva um programa de computador para calcular o valor médio de um trem de pulsos periódico como os da Fig. 22.11, usando como dados de entrada o nível de referência, a amplitude dos pulsos e o ciclo de operação.
 35. Escreva um programa de computador para preparar uma tabela de valores de v_c em um circuito RC para $t = 0, \tau, 2\tau, 3\tau, 4\tau$ e 5τ , usando como dados de entrada as tensões inicial e final e os valores de R e C .
 36. Escreva um programa de computador para preparar uma tabela de valores de v_c no circuito da Fig. 22.26 para $t = 0, T/2, T, 3T/2, 2T, 5T/2$ e $3T$, usando como dados de entrada as tensões inicial e final e os valores de R e C . Teste o programa entrando com os dados do Exemplo 22.11 e comparando os resultados com a Fig. 22.34.

Pulso ideal Pulso no qual o tempo de subida, o tempo de descida e a inclinação são nulos.

Pulso negativo Pulso no qual o valor instantâneo diminui a partir do nível de base.

Pulso positivo Pulso no qual o valor instantâneo aumenta a partir do nível de base.

Pulso real Pulso no qual os tempos de subida e descida e/ou a inclinação são diferentes de zero ou que apresenta outras distorções como pré-sinal, sobre-sinal ou oscilação.

Taxa de repetição de pulsos O mesmo que freqüência de repetição de pulsos.

Tempo de descida Tempo necessário para que o valor instantâneo de um pulso varie de 90% para 10% da amplitude.

Tempo de subida Tempo necessário para que o valor instantâneo de um pulso varie de 10% para 90% da amplitude.

Trem de pulsos Seqüência de pulsos, nem todos necessariamente com a mesma amplitude e a mesma largura.

Trem de pulsos periódico Trem de pulsos que se repete após um certo intervalo de tempo.

Sistemas Polifásicos

23.1 INTRODUÇÃO

Um gerador ac projetado para desenvolver uma única tensão senoidal para cada rotação do eixo é chamado de *gerador monofásico*. Se for usado mais de um enrolamento no rotor (parte móvel) ou no estator (parte fixa) do gerador, o resultado será um *gerador polifásico*, que desenvolve mais de uma tensão ac para cada volta completa do rotor. Neste capítulo iremos discutir com detalhes o sistema trifásico, que é o mais usado para transmissão de energia elétrica.

A preferência por sistemas trifásicos em lugar dos monofásicos para transmissão de energia pode ser justificada por muitos motivos, incluindo os seguintes:

1. É possível usar condutores bem mais finos para transmitir a mesma potência à mesma tensão, o que reduz em cerca de 25% a quantidade de cobre necessária e consequentemente reduz os custos de fabricação e manutenção das linhas.
2. Linhas mais leves são mais fáceis de instalar e as torres de sustentação podem ser mais delgadas e mais espaçadas.
3. Motores e equipamentos trifásicos apresentam melhores características de partida e operação que os sistemas monofásicos porque a transferência de potência da fonte para a carga nos sistemas trifásicos está menos sujeita a flutuações nos sistemas trifásicos do que nos sistemas monofásicos.
4. Quase todos os motores de grande porte são trifásicos porque, ao contrário dos motores monofásicos, os motores trifásicos não necessitam de circuitos especiais para a partida.

A freqüência gerada é determinada pelo número de pólos do *rotor* (parte giratória do gerador) e pela sua velocidade angular. No Brasil e nos Estados Unidos, a freqüência utilizada para a geração e distribuição de energia elétrica é 60 Hz, enquanto na Europa a maioria dos países trabalha com uma freqüência de 50 Hz. Essas freqüências foram escolhidas porque podem ser geradas com eficiência por equipamentos de grande porte, como os necessários para atender à demanda de uma grande cidade. Alguns equipamentos menores, como os usados em navios e aeronaves, utilizam uma freqüência de 400 Hz.

O sistema trifásico é utilizado em praticamente todos os geradores elétricos comerciais. Isto não significa que os geradores monofásicos ou bifásicos estejam obsoletos. A maioria dos geradores de emergência, como os movidos a gasolina, é monofásica. O sistema bifásico é usado normalmente em servomecanismos, que são sistemas de controle auto-ajustáveis capazes de detectar alterações e ajustar sua operação às novas condições externas. Os servomecanismos são utilizados nos sistemas de direção de navios e aviões e em dispositivos mais simples, como termostatos, para regular a produção de calor. Em muitos casos, entretanto, em que são necessárias tensões monofásicas ou bifásicas, estas são obtidas a partir de sistemas trifásicos e não geradas de forma independente.

O número de fases das tensões que podem ser produzidas por um gerador polifásico não está limitado a três. Podemos obter qualquer número de fases ajustando o espaça-

mento angular entre os enrolamentos das diferentes fases ao longo do rotor ou do estator. Alguns sistemas elétricos operam de maneira mais eficiente se forem usadas mais de três fases. Assim, por exemplo, nos sistemas em que a tensão alternada é convertida em tensão contínua (um processo conhecido como *retificação*), quanto maior o número de fases, menor a necessidade de filtrar a tensão retificada.

23.2 O GERADOR TRIFÁSICO

O gerador trifásico da Fig. 23.1(a) utiliza três enrolamentos distribuídos simetricamente ao longo do rotor, como mostra a Fig. 23.1(b). Como os três enrolamentos possuem o mesmo número de espiras e giram com a mesma velocidade angular, as tensões induzidas nesses enrolamentos têm a mesma amplitude e a mesma frequência. Essas tensões, que são geradas quando se faz girar o eixo do gerador com o auxílio de algum equipamento externo, como um motor ou uma turbina, estão representadas como e_{AN} , e_{BN} e e_{CN} na Fig. 23.2. Observe que as três formas de onda são idênticas, a não ser por uma defasagem de 120° .

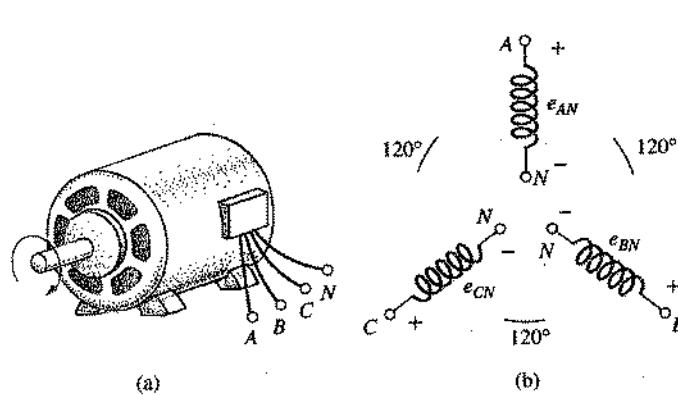


Fig. 23.1 (a) Gerador trifásico; (b) tensões nos enrolamentos de um gerador trifásico.

Em particular, observe que

em qualquer instante de tempo, a soma fasorial das três tensões de fase de um gerador trifásico é nula.

É fácil verificar na Fig. 23.2 que esta afirmação é verdadeira para $\omega t = 0$. Também é fácil ver que *quando uma das tensões de fase*

é zero, o valor instantâneo das outras duas corresponde a 86,6% do valor máximo positivo ou negativo. Além disso, quando duas das tensões de fase têm o mesmo módulo (que corresponde a metade da amplitude) e o mesmo sinal, a terceira tensão tem a polaridade oposta e ao valor máximo positivo ou negativo.

As expressões matemáticas das tensões da Fig. 23.2 são as seguintes:

$$\begin{aligned} e_{AN} &= E_{m(AN)} \sin(\omega t) \\ e_{BN} &= E_{m(BN)} \sin(\omega t - 120^\circ) \\ e_{CN} &= E_{m(CN)} \sin(\omega t - 240^\circ) = E_{m(AN)} \sin(\omega t + 120^\circ) \end{aligned} \quad (23.1)$$

O diagrama fasorial dessas tensões aparece na Fig. 23.3. Em termos dos valores eficazes, podemos escrever:

$$E_{AN} = 0,707 E_{m(AN)}$$

$$E_{BN} = 0,707 E_{m(BN)}$$

$$E_{CN} = 0,707 E_{m(CN)}$$

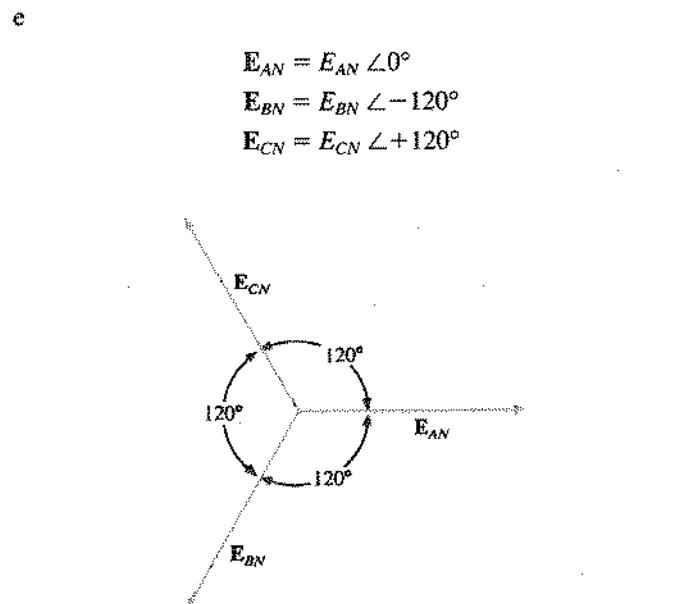


Fig. 23.3 Diagrama fasorial para as tensões de fase de um gerador trifásico.

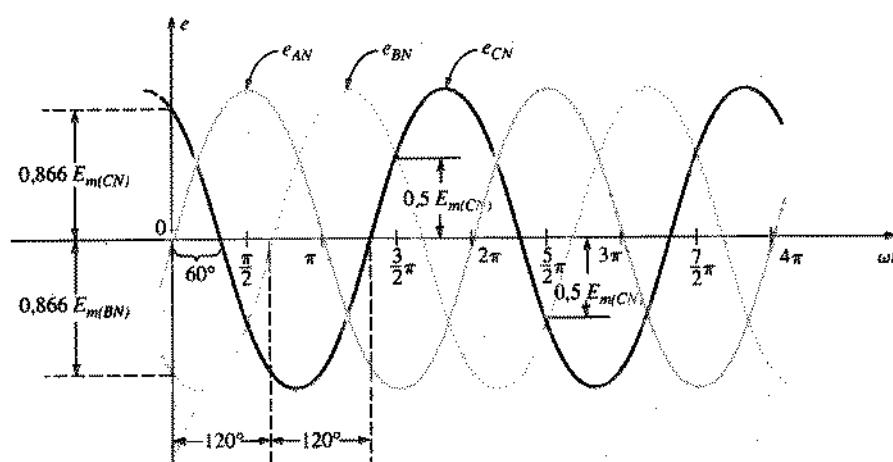


Fig. 23.2 Tensões de fase de um gerador trifásico.



Desenhando de outra forma os fasores da Fig. 23.4 e aplicando a regra segundo a qual a soma de três ou mais vetores é nula sempre que, ao desenharmos os vetores de tal forma que a "cauda" do segundo comece onde a "ponta" do primeiro termina, e assim por diante, a ponta do último vetor coincida com a cauda do primeiro, chegamos à conclusão de que a soma fasorial das tensões de fase em um sistema trifásico é nula, ou seja,

$$\sum E_{AN} + E_{BN} + E_{CN} = 0 \quad (23.2)$$

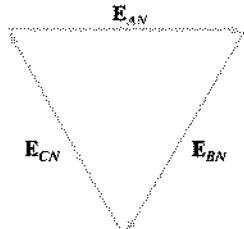


Fig. 23.4 Demonstração de que a soma fasorial das tensões de fase de um gerador trifásico é nula.

23.3 O GERADOR TIPO Y

Quando os três terminais *N* da Fig. 23.1(b) são ligados entre si, o gerador é chamado de *gerador trifásico tipo Y* (Fig. 23.5). O ponto comum aos três terminais é chamado de *neutro*. Quando não existe nenhum condutor ligando o neutro à carga, o sistema é chamado de *gerador trifásico tipo Y de três fios*; quando existe um fio ligando o neutro à carga, o sistema é chamado de *gerador trifásico tipo Y de quatro fios*. A função do quarto fio será discutida daqui a pouco, quando estudarmos a carga dos circuitos trifásicos.

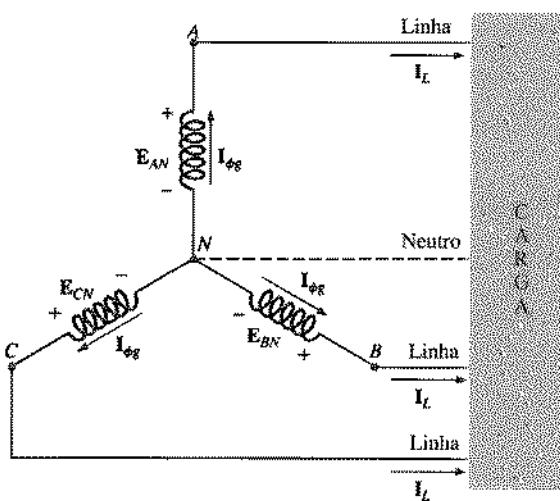


Fig. 23.5 Gerador tipo Y.

Os três condutores usados para ligar os terminais *A*, *B* e *C* à carga do circuito são chamados de *linhas*. Como se pode ver na Fig. 23.5, nos geradores tipo Y a corrente de linha é igual à corrente de fase, isto é

$$I_L = I_{\phi\alpha} \quad (23.3)$$

onde o índice ϕ é usado para indicar que se trata de uma fase, e o índice g , para indicar que se trata de um gerador.

A tensão entre uma linha e outra é chamada de *tensão de linha*. Em um diagrama fasorial como o da Fig. 23.6, é o fasor que liga as extremidades dos fasores associadas a duas fases, no sentido anti-horário.

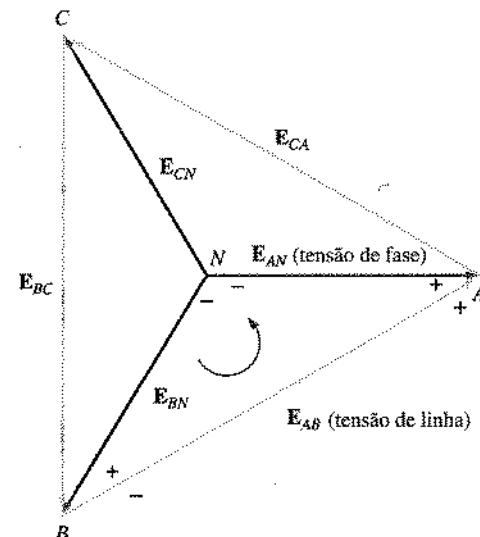


Fig. 23.6 Tensões de fase e de linha de um gerador trifásico tipo Y.

Aplicando a lei de Kirchhoff para tensões à malha indicada na Fig. 23.6, obtemos:

$$E_{AB} - E_{AN} + E_{BN} = 0$$

ou

$$E_{AB} = E_{AN} - E_{BN} = E_{AN} + E_{NB}$$

A Fig. 23.7 mostra o mesmo diagrama fasorial da Fig. 23.6 desenhado de outra forma. Como o fasor E_{AB} faz ângulos iguais com E_{CN} e E_{AN} por estar sobre uma reta que coincide com a altura de um triângulo isósceles cujos lados iguais são E_{AN} e E_{NB} , $\beta = 30^\circ$.

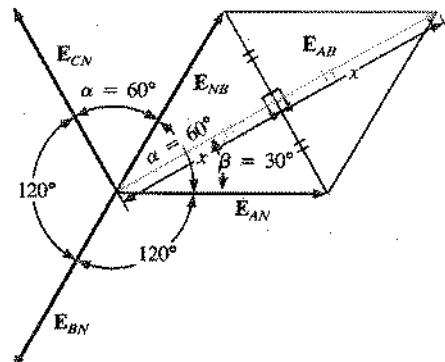


Fig. 23.7 Determinação de uma das tensões de linha de um gerador trifásico.

A distância x é dada por

$$x = E_{AN} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} E_{AN}$$

e portanto

$$E_{AB} = 2x = (2) \frac{\sqrt{3}}{2} E_{AN} = \sqrt{3} E_{AN}$$

Dê acordo com a Fig. 23.7, o ângulo de fase do fasor E_{AB} é 30° e portanto

$$E_{AB} = E_{AB} \angle 30^\circ = \sqrt{3} E_{AN} \angle 30^\circ$$

$$E_{CA} = \sqrt{3} E_{CA} \angle 150^\circ$$

$$E_{BC} = \sqrt{3} E_{BC} \angle 270^\circ$$

Assim, em um gerador tipo Y, o módulo da tensão de linha é igual a $\sqrt{3}$ vezes a tensão de fase:

$$\boxed{E_L = \sqrt{3} E_\phi} \quad (23.4)$$

Além disso, o ângulo de fase entre qualquer tensão de linha e a tensão de fase mais próxima é 30° .

Em notação senoidal,

$$e_{AB} = \sqrt{2} E_{AB} \sin(\omega t + 30^\circ)$$

$$e_{CA} = \sqrt{2} E_{CA} \sin(\omega t + 150^\circ)$$

$$e_{BC} = \sqrt{2} E_{BC} \sin(\omega t + 270^\circ)$$

O diagrama fasorial das tensões de linhas de fase aparece na Fig. 23.8. Desenhando de outra forma os fasores que representam as tensões de linha na Fig. 23.8(a), é fácil demonstrar que eles formam um circuito fechado, o que mostra que a soma das três tensões de linha é nula, ou seja,

$$\boxed{\sum E_{AB} + E_{CA} + E_{BC} = 0} \quad (23.5)$$

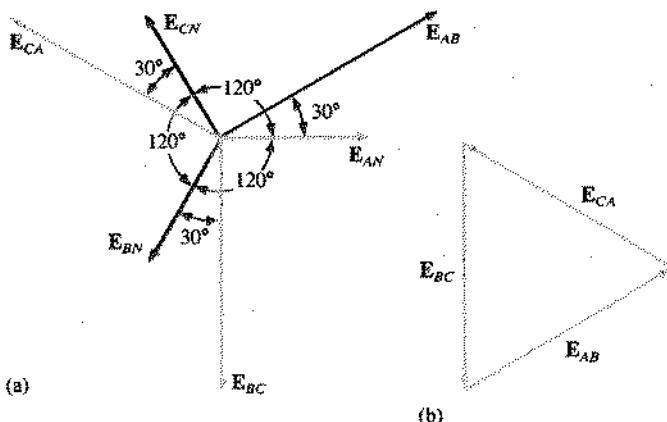


Fig. 23.8 (a) Diagrama fasorial das tensões de fases e de linha de um gerador trifásico; (b) demonstração de que a soma fasorial das tensões de linha de um sistema trifásico é nula.

23.4 SEQÜÊNCIA DE FASES NOS GERADORES TIPO Y

A seqüência de fases pode ser determinada pela ordem na qual os fasores que representam as tensões de fase passam por um ponto fixo do diagrama fasorial quando se faz girar todo o diagrama no

sentido anti-horário. Na Fig. 23.9, por exemplo, a seqüência de fases é ABC. Entretanto, como o ponto fixo pode ser escolhido em qualquer lugar do diagrama, a seqüência também pode ser descrita como BCA ou CAB. A seqüência de fases é muito importante na hora de ligar os sistemas de distribuição trifásicos a uma carga. No caso de um motor trifásico, por exemplo, se as ligações de duas tensões de fases forem invertidas, a seqüência de fases ficará diferente e o motor passará a girar no sentido oposto. Outros efeitos da seqüência de fases serão examinados quando discutirmos os sistemas trifásicos carregados.

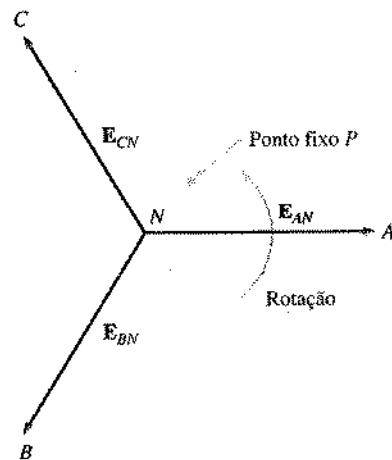


Fig. 23.9 Determinação da seqüência de fases a partir das tensões de fase de um gerador trifásico.

A seqüência de fases também pode ser descrita em termos das tensões de linha. Representando as tensões de linha em um diagrama de fasores, como na Fig. 23.10, podemos determinar a seqüência de fases fazendo girar novamente os fasores no sentido anti-horário. Neste caso, entretanto, a seqüência pode ser determinada observando a ordem em que passa o primeiro ou o segundo índice. No sistema da Fig. 23.10, por exemplo, a seqüência de fases com base no primeiro índice que passa pelo ponto P é ABC, e a seqüência de fases com base no segundo índice é BCA. Entretanto, como BCA é equivalente a ABC, a seqüência de fases é a mesma nos dois casos. Observe que a seqüência de fases também é a mesma que foi obtida a partir das tensões de fase (Fig. 23.9).

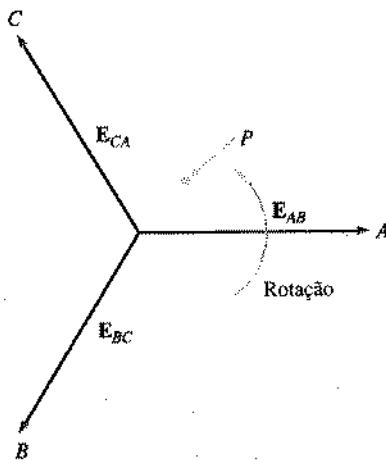


Fig. 23.10 Determinação da seqüência de fases a partir das tensões de linha de um gerador trifásico.

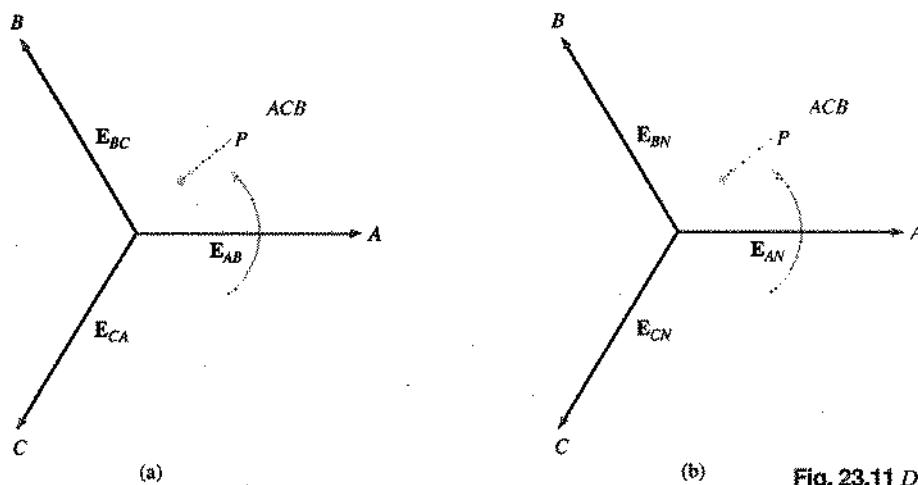


Fig. 23.11 Diagrama de fasores a partir da sequência de fase.

Quando conhecemos a sequência de fases, podemos traçar o diagrama de fasores simplesmente escolhendo uma tensão como referência, representando-a no eixo de referência e traçando as outras tensões nas posições angulares apropriadas. Para uma sequência ACB , por exemplo, podemos escolher E_{AB} como referência [Fig. 23.11(a)], se quisermos um diagrama de fasores das tensões de linha, ou E_{AN} , se estivermos interessados nas tensões de fase [Fig. 23.11(b)]. Para a sequência indicada, os diagramas de fasores seriam os que aparecem na Fig. 23.11. Na notação de fasores,

$$\begin{array}{ll} \text{Tensões de linha} & \left\{ \begin{array}{l} E_{AB} = E_{AB} \angle 0^\circ \quad (\text{referência}) \\ E_{CA} = E_{CA} \angle -120^\circ \\ E_{BC} = E_{BC} \angle +120^\circ \end{array} \right. \\ \\ \text{Tensões de fase} & \left\{ \begin{array}{l} E_{AN} = E_{AN} \angle 0^\circ \quad (\text{referência}) \\ E_{CN} = E_{CN} \angle -120^\circ \\ E_{BN} = E_{BN} \angle +120^\circ \end{array} \right. \end{array}$$

23.5 OS GERADORES TIPO Y LIGADOS A CARGAS TIPO Y

As cargas alimentadas por fontes trifásicas podem ser de dois tipos: Y e Δ . Quando uma carga tipo Y é ligada a um gerador tipo

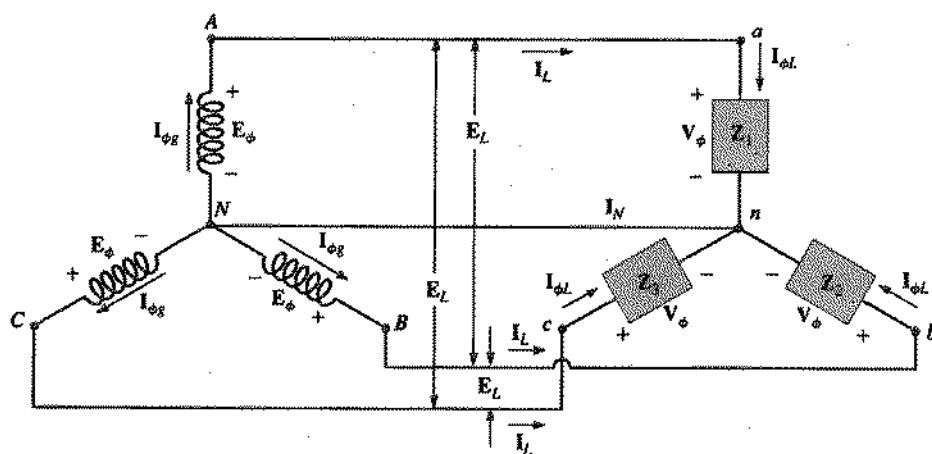
Y , o sistema é chamado de $Y-Y$. A Fig. 23.12 mostra as ligações de um sistema $Y-Y$.

Quando a carga é equilibrada, o fio que liga o neutro do gerador ao neutro da carga pode ser removido sem que o circuito seja afetado. Isso acontece porque se

$$Z_1 = Z_2 = Z_3$$

a corrente I_n é nula (este fato será demonstrado no Exemplo 23.1). Observe que para que a carga seja equilibrada é preciso que o ângulo de fase seja igual para as três impedâncias, uma condição desnecessária no caso de circuitos equilibrados de corrente contínua.

Na prática, se uma fábrica, por exemplo, tivesse apenas cargas trifásicas equilibradas, seria um desperdício usar um condutor para ligar o neutro da fábrica ao neutro do gerador, já que a corrente nesse condutor seria nula. Acontece, porém, que os circuitos de iluminação e os circuitos que alimentam equipamentos elétricos de pequeno porte utilizam apenas uma fase, e mesmo que essas cargas estejam distribuídas uniformemente pelas três fases (como é recomendável), é impossível manter constantemente um equilíbrio perfeito entre as fases, já que as lâmpadas e equipamentos são ligados e desligados de forma independente, perturbando a situação de equilíbrio. O fio neutro é portanto necessário para transportar a corrente resultante de volta

Fig. 23.12 Gerador tipo Y com uma carga tipo Y .

para o gerador. Voltaremos a falar do assunto quando estudarmos os sistemas trifásicos desequilibrados.

Vamos agora discutir o *sistema Y-Y de quatro fios*. As três correntes de fase do gerador são iguais às três correntes de linha, que por sua vez são iguais às três correntes de fase da carga:

$$\mathbf{I}_{\phi_L} = \mathbf{I}_L = \mathbf{I}_{\phi_L} \quad (23.6)$$

Como o neutro do gerador e o neutro da carga estão ligados por um fio, as três tensões de fase do gerador também são iguais às três tensões de fase da carga, mesmo que esta não seja equilibrada:

$$\mathbf{V}_\phi = \mathbf{E}_\phi \quad (23.7)$$

Além disso, como $\mathbf{I}_{\phi_L} = \mathbf{V}_\phi / \mathbf{Z}_{\phi_L}$, os módulos das correntes de fase são iguais se a carga for equilibrada e diferentes se a carga for desequilibrada. O leitor deve se lembrar de que no caso de um gerador do tipo Y o módulo da tensão de linha é igual a $\sqrt{3}$ vezes a tensão de fase. A mesma relação pode ser aplicada à carga, equilibrada ou não, de um sistema Y-Y de quatro fios.

$$|I_L| = \sqrt{3}|V_\phi| \quad (23.8)$$

No caso de uma queda de tensão em um elemento da carga, o primeiro índice se refere ao terminal através do qual a corrente entra no elemento, e o segundo, ao terminal através do qual a corrente deixa o elemento. Em outras palavras, o primeiro índice é, por definição, positivo em relação ao segundo no momento de definir a polaridade da queda de tensão. Esta convenção é usada na Fig. 23.13, na qual a notação do duplo índice foi usada para as tensões do gerador e para as quedas de tensão na carga.

EXEMPLO 23.1 A seqüência de fases do gerador tipo Y da Fig. 23.13 é ABC.

- Determine os ângulos de fase θ_2 e θ_3 .
- Determine o módulo das tensões de linha.
- Determine as correntes de linha.
- Verifique que, como a carga é balanceada, $I_N = 0$.

Soluções

- Para uma seqüência de fases ABC,

$$\theta_2 = -120^\circ \quad \text{e} \quad \theta_3 = +120^\circ$$

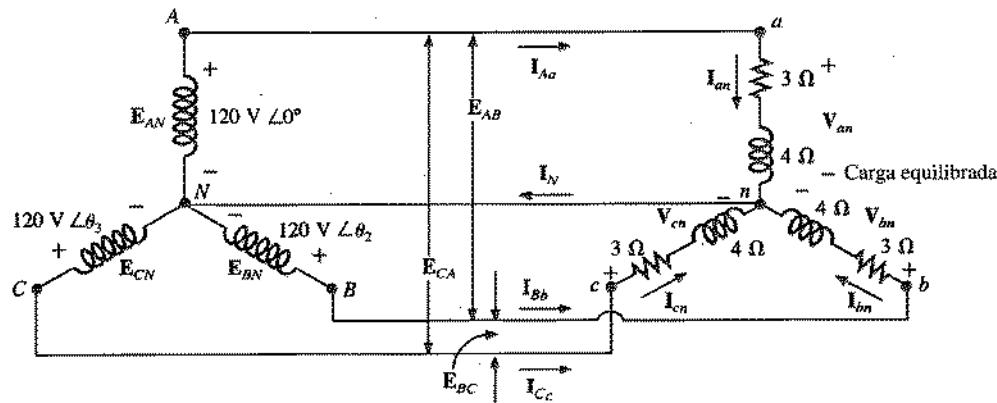


Fig. 23.13 Exemplo 23.1.

$$\mathbf{b. } E_L = \sqrt{3}E_\phi = (1.73)(120 \text{ V}) = 208 \text{ V. Assim,}$$

$$E_{AB} = E_{BC} = E_{CA} = 208 \text{ V}$$

$$\mathbf{c. } \mathbf{V}_\phi = \mathbf{E}_\phi. \text{ Assim,}$$

$$\mathbf{V}_{an} = \mathbf{E}_{AN} \quad \mathbf{V}_{bn} = \mathbf{E}_{BN} \quad \mathbf{V}_{cn} = \mathbf{E}_{CN}$$

$$\mathbf{I}_{\phi_L} = \mathbf{I}_{an} = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_{an}} = \frac{120 \text{ V} \angle 0^\circ}{3 \Omega + j4 \Omega} = \frac{120 \text{ V} \angle 0^\circ}{5 \Omega \angle 53,13^\circ} \\ = 24 \text{ A} \angle -53,13^\circ$$

$$\mathbf{I}_{bn} = \frac{\mathbf{V}_{bn}}{\mathbf{Z}_{bn}} = \frac{120 \text{ V} \angle -120^\circ}{5 \Omega \angle 53,13^\circ} = 24 \text{ A} \angle -173,13^\circ$$

$$\mathbf{I}_{cn} = \frac{\mathbf{V}_{cn}}{\mathbf{Z}_{cn}} = \frac{120 \text{ V} \angle +120^\circ}{5 \Omega \angle 53,13^\circ} = 24 \text{ A} \angle 66,87^\circ$$

$$\text{e como } \mathbf{I}_L = \mathbf{I}_{\phi_L},$$

$$\mathbf{I}_{Aa} = \mathbf{I}_{an} = 24 \text{ A} \angle -53,13^\circ$$

$$\mathbf{I}_{Bb} = \mathbf{I}_{bn} = 24 \text{ A} \angle -173,13^\circ$$

$$\mathbf{I}_{Cc} = \mathbf{I}_{cn} = 24 \text{ A} \angle 66,87^\circ$$

d. Aplicando a lei de Kirchhoff para correntes, temos

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{I}_{Aa} + \mathbf{I}_{Bb} + \mathbf{I}_{Cc}$$

Em forma retangular,

$$\mathbf{I}_{Aa} = 24 \text{ A} \angle -53,13^\circ = 14,40 \text{ A} - j19,20 \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_{Bb} = 24 \text{ A} \angle -173,13^\circ = -23,83 \text{ A} - j2,87 \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_{Cc} = 24 \text{ A} \angle 66,87^\circ = 9,43 \text{ A} + j22,07 \text{ A}$$

$$\Sigma (\mathbf{I}_{Aa} + \mathbf{I}_{Bb} + \mathbf{I}_{Cc}) = 0 + j0$$

e \mathbf{I}_N é de fato igual a zero, como era de se esperar por se tratar de uma carga equilibrada.

23.6 O SISTEMA Y-Δ

Não existe um quarto fio no sistema Y-Δ da Fig. 23.14; qualquer mudança na impedância de uma das fases que desequilibre o sistema faz com que as correntes de linha sejam diferentes.

No caso de uma carga equilibrada,

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3 \quad (23.9)$$

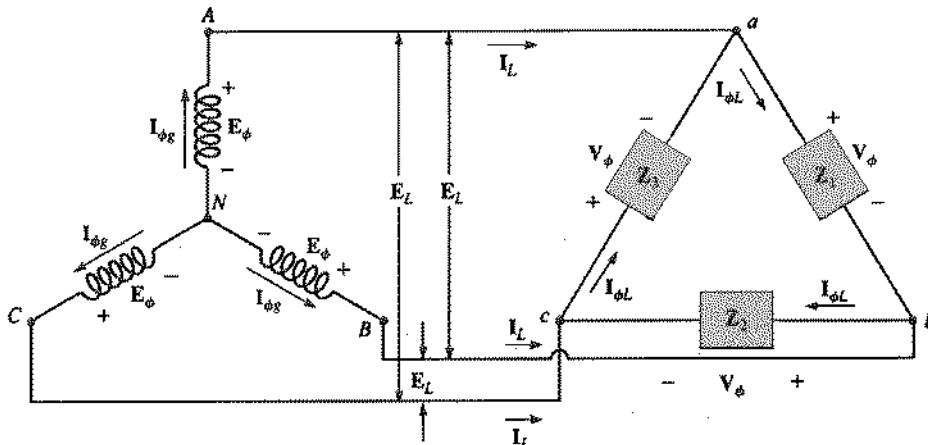


Fig. 23.14 Gerador tipo Y com uma carga tipo em Δ.

As tensões de fase da carga são iguais às tensões de linha do gerador, mesmo que a carga não seja equilibrada:

$$\boxed{V_{\phi} = E_L} \quad (23.10)$$

A relação entre as correntes de linha e as correntes de fase em uma carga tipo Δ equilibrada pode ser obtida usando uma abordagem semelhante à empregada na Seção 23.3 para determinar a relação entre as tensões de linha e as tensões de fase em um gerador tipo Y. Neste caso, porém, utiliza-se a lei de Kirchhoff para correntes em vez da lei de Kirchhoff para tensões.

O resultado é o seguinte:

$$\boxed{I_L = \sqrt{3}I_{\phi}} \quad (23.11)$$

Além disso, o ângulo de fase entre a corrente de linha e a corrente de fase mais próxima é 30° . Uma discussão mais detalhada desta relação entre as correntes de linha e de fase nos sistemas tipo Δ pode ser encontrada na Seção 23.7.

No caso de uma carga equilibrada, os módulos das correntes de linha são todos iguais, e os módulos das correntes de fase também são todos iguais.

EXEMPLO 23.2 Para o sistema trifásico da Fig. 23.15:

- Determine os ângulos de fase θ_2 e θ_3 .
- Determine as correntes de fase da carga.
- Determine o módulo das correntes de linha.

Soluções

- Para uma seqüência ABC,

$$\theta_2 = -120^\circ \quad \text{e} \quad \theta_3 = +120^\circ$$

- b. $V_{\phi} = E_L$. Assim,

$$V_{ab} = E_{AB} \quad V_{ca} = E_{CA} \quad V_{bc} = E_{BC}$$

As correntes de fases são

$$I_{ab} = \frac{V_{ab}}{Z_{ab}} = \frac{150 \text{ V} \angle 0^\circ}{6 \Omega + j8 \Omega} = \frac{150 \text{ V} \angle 0^\circ}{10 \Omega \angle 53,13^\circ} = \\ = 15 \text{ A} \angle -53,13^\circ$$

$$I_{bc} = \frac{V_{bc}}{Z_{bc}} = \frac{150 \text{ V} \angle -120^\circ}{10 \Omega \angle 53,13^\circ} = 15 \text{ A} \angle -173,13^\circ$$

$$I_{ca} = \frac{V_{ca}}{Z_{ca}} = \frac{150 \text{ V} \angle +120^\circ}{10 \Omega \angle 53,13^\circ} = 15 \text{ A} \angle 66,87^\circ$$

c. $I_L = \sqrt{3}I_{\phi} = (1,73)(15 \text{ A}) = 25,95 \text{ A}$. Assim,

$$I_{Aa} = I_{Bb} = I_{Cc} = 25,95 \text{ A}$$

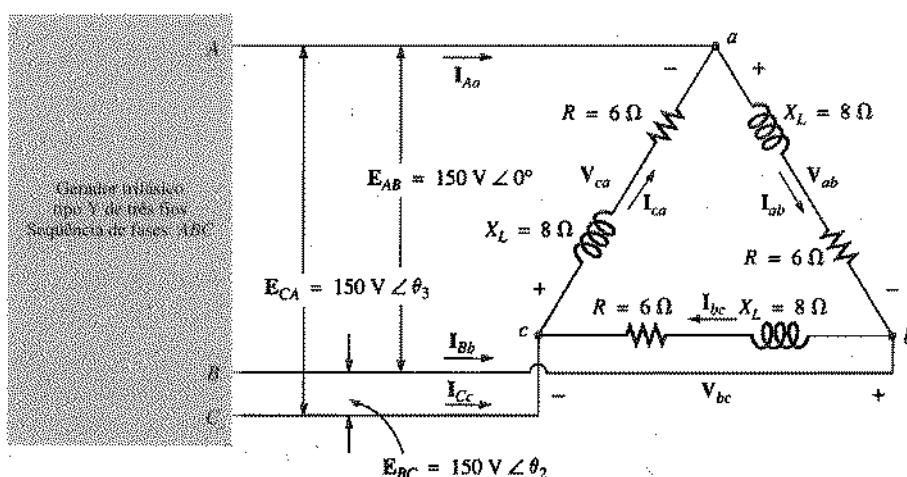
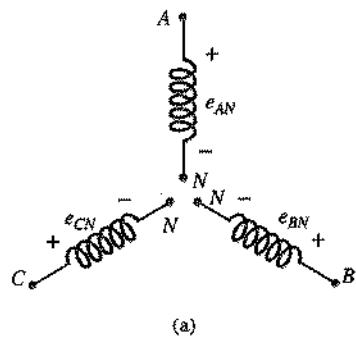


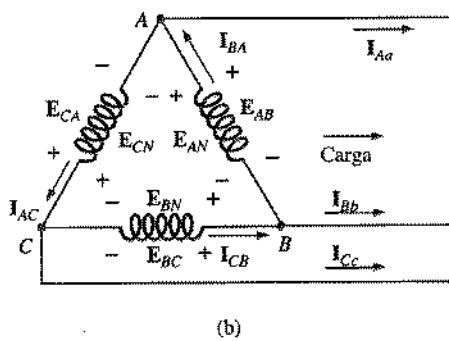
Fig. 23.15 Exemplo 23.2.

23.7 O GERADOR TIPO Δ

Quando os enrolamentos do gerador da Fig. 23.16 (a) são ligados como na Fig. 23.16(b), o sistema é chamado de *gerador trifásico*



(a)



(b)

Fig. 23.16 Gerador tipo Δ.

tipo Δ. Neste sistema, as tensões de fase e de linha são equivalentes e têm o mesmo valor que as tensões induzidas nos enrolamentos do gerador:

$$\left. \begin{array}{l} E_{AB} = E_{AN} \text{ e } e_{AN} = \sqrt{2}E_{AN} \operatorname{sen} \omega t \\ E_{BC} = E_{BN} \text{ e } e_{BN} = \sqrt{2}E_{BN} \operatorname{sen}(\omega t - 120^\circ) \\ E_{CA} = E_{CN} \text{ e } e_{CN} = \sqrt{2}E_{CN} \operatorname{sen}(\omega t + 120^\circ) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Seqüência} \\ \text{de fases} \\ ABC \end{array}$$

ou

$$E_L = E_F \quad (23.12)$$

Observe que, ao contrário do que acontece no sistema tipo Y, no qual estavam disponíveis dois valores diferentes de tensão (a tensão de linha e a tensão de fase), no caso dos sistemas tipo Δ, apenas um valor de tensão pode ser utilizado.

Ao contrário do que acontece com a corrente de linha dos geradores tipo Y, a corrente de linha dos geradores tipo Δ não é igual à corrente de fase. A relação entre as duas correntes pode ser determinada aplicando a lei de Kirchhoff para correntes a um dos nós do circuito e calculando a corrente de linha em termos das correntes de fase; assim, para o nó A,

$$I_{BA} = I_{AA} + I_{AC}$$

ou

$$I_{AA} = I_{BA} - I_{AC} = I_{BA} + I_{CA}$$

A Fig. 23.17 mostra o diagrama fasorial correspondente para o caso de uma carga equilibrada.

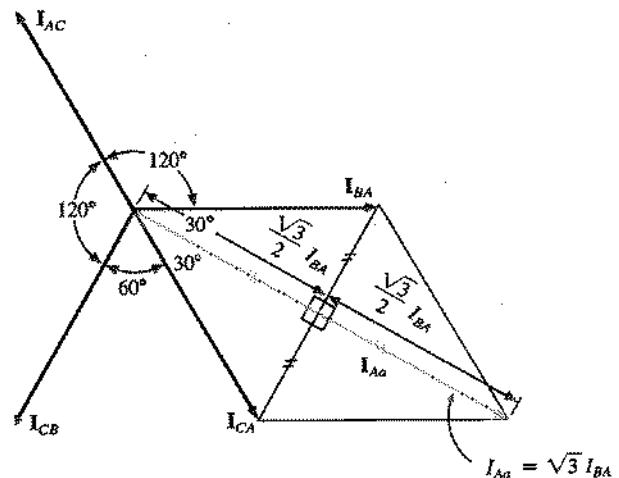


Fig. 23.17 Determinação de uma corrente de linha a partir das correntes de fases de um gerador trifásico tipo Δ.

Usando o mesmo método empregado para determinar a tensão de linha do gerador tipo Y, obtemos:

$$\begin{aligned} I_{AA} &= \sqrt{3}I_{BA} \angle -30^\circ \\ I_{BB} &= \sqrt{3}I_{CB} \angle -150^\circ \\ I_{CC} &= \sqrt{3}I_{AC} \angle 90^\circ \end{aligned}$$

ou seja:

$$I_L = \sqrt{3}I_{ph} \quad (23.13)$$

Além disso, o ângulo de fase entre a corrente de linha e a corrente de fase mais próxima é 30°. O diagrama fasorial das correntes aparece na Fig. 23.18.

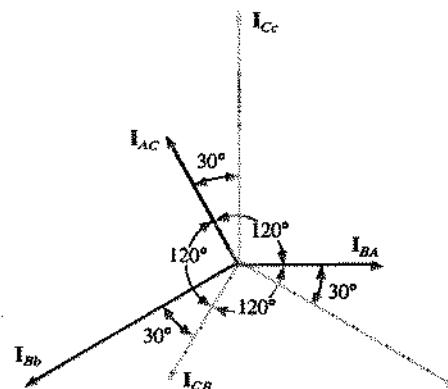


Fig. 23.18 Diagrama fasorial das correntes de um gerador trifásico tipo Δ.

É possível demonstrar também que a soma fasorial das correntes de linha e a soma fasorial das correntes de fase de um gerador tipo Δ ligado a uma carga equilibrada é nula.

Podemos demonstrar, da mesma maneira utilizada para as voltagens de um gerador conectado em Y, que a soma fasorial das correntes de linha ou de fase para sistemas conectados em Δ com cargas balanceadas é sempre zero.



23.8 SEQÜÊNCIA DE FASES NOS GERADORES TIPO Δ

Embora as tensões de linha e de fase dos geradores tipo Δ sejam iguais, é mais comum descrever a seqüência de fases em termos das tensões de linha. O método utilizado é o mesmo já descrito para as tensões de linha dos geradores tipo Y. A Fig. 23.19 mostra, por exemplo, o diagrama fasorial das tensões de linha em um gerador tipo Δ no qual a seqüência de fases é ABC. Ao desenhar um diagrama como este, é preciso tomar cuidado para que o primeiro e o segundo índice das tensões estejam na mesma ordem. Em notação fasorial,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{AB} &= E_{AB} \angle 0^\circ \\ \mathbf{E}_{BC} &= E_{BC} \angle -120^\circ \\ \mathbf{E}_{CA} &= E_{CA} \angle 120^\circ \end{aligned}$$

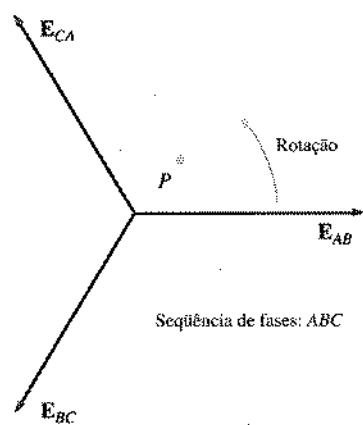


Fig. 23.19 Determinação da seqüência de fases de um gerador trifásico tipo Δ.

23.9 OS SISTEMAS TRIFÁSICOS Δ-Δ E Δ-Y

As equações básicas necessárias para analisar os sistemas Δ-Δ e Δ-Y já foram vistas pelo menos uma vez neste capítulo. Vamos

portanto nos limitar à solução de dois exemplos descritivos, um para uma carga do tipo Δ e outro para uma carga do tipo Y.

EXEMPLO 23.3 Para o sistema Δ-Δ da Fig. 23.20:

- Determine os ângulos de fase θ_2 e θ_3 para a seqüência de fases especificada.
- Determine as correntes de fase da carga.
- Determine o módulo das correntes de linha.

Soluções

- Para uma seqüência de fases ACB,

$$\theta_2 = 120^\circ \quad \text{e} \quad \theta_3 = -120^\circ$$

- $\mathbf{V}_\phi = \mathbf{E}_L$. Assim,

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{E}_{AB} \quad \mathbf{V}_{ca} = \mathbf{E}_{CA} \quad \mathbf{V}_{bc} = \mathbf{E}_{BC}$$

As correntes de fase são

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{ab} &= \frac{\mathbf{V}_{ab}}{\mathbf{Z}_{ab}} = \frac{120 \text{ V} \angle 0^\circ}{(5 \Omega \angle 0^\circ)(5 \Omega \angle -90^\circ)} = \frac{120 \text{ V} \angle 0^\circ}{25 \Omega \angle -90^\circ} \\ &= \frac{120 \text{ V} \angle 0^\circ}{3,54 \Omega \angle -45^\circ} = 33,9 \text{ A} \angle 45^\circ \\ \mathbf{I}_{bc} &= \frac{\mathbf{V}_{bc}}{\mathbf{Z}_{bc}} = \frac{120 \text{ V} \angle 120^\circ}{3,54 \Omega \angle -45^\circ} = 33,9 \text{ A} \angle 165^\circ \\ \mathbf{I}_{ca} &= \frac{\mathbf{V}_{ca}}{\mathbf{Z}_{ca}} = \frac{120 \text{ V} \angle -120^\circ}{3,54 \Omega \angle -45^\circ} = 33,9 \text{ A} \angle -75^\circ \end{aligned}$$

- $I_L = \sqrt{3} I_\phi = (1,73)(34 \text{ A}) = 58,82 \text{ A}$. Assim,

$$I_{Aa} = I_{Bb} = I_{Cc} = 58,82 \text{ A}$$

EXEMPLO 23.4 Para o sistema Δ-Y da Fig. 23.21:

- Determine as tensões de fase da carga.
- Determine o módulo das tensões de linha.

Soluções

- $\mathbf{I}_\phi = \mathbf{I}_i$; assim,

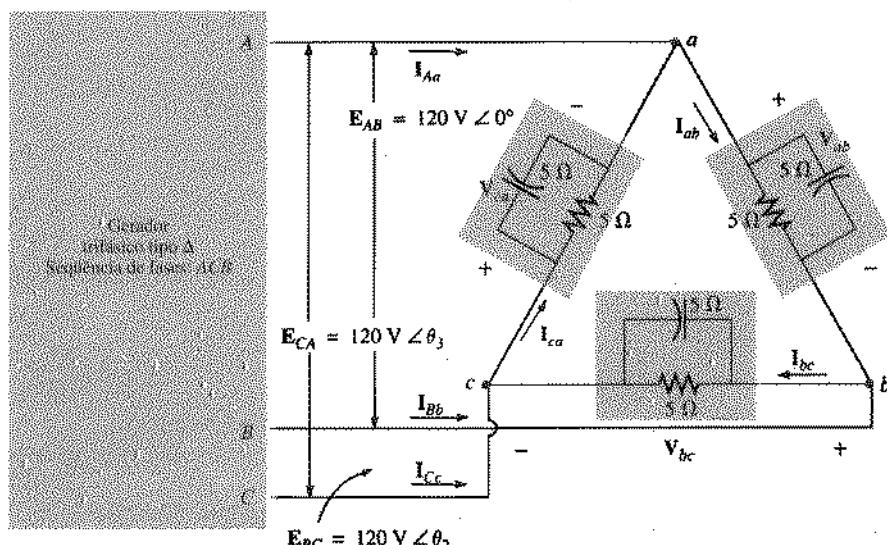
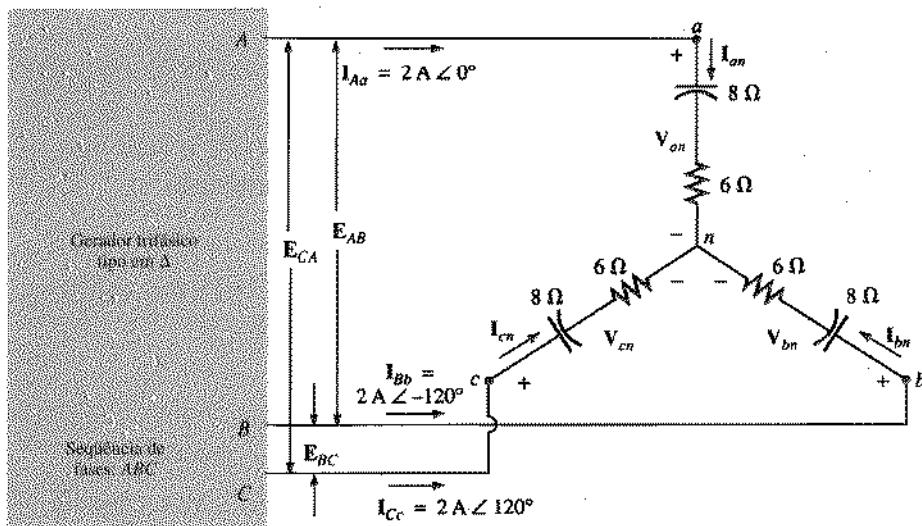


Fig. 23.20 Sistema Δ-Δ do Exemplo 23.3.

Fig. 23.21 Sistema Δ -Y do Exemplo 23.4.

$$I_{an} = I_{Aa} = 2 \text{ A} \angle 0^\circ$$

$$I_{bn} = I_{Bb} = 2 \text{ A} \angle -120^\circ$$

$$I_{cn} = I_{Cc} = 2 \text{ A} \angle 120^\circ$$

As tensões de fases são

$$V_{an} = I_{an}Z_{an} = (2 \text{ A} \angle 0^\circ)(10 \Omega \angle -53,13^\circ) = 20 \text{ V} \angle -53,13^\circ$$

$$V_{bn} = I_{bn}Z_{bn} = (2 \text{ A} \angle -120^\circ)(10 \Omega \angle -53,13^\circ) = 20 \text{ V} \angle -173,13^\circ$$

$$V_{cn} = I_{cn}Z_{cn} = (2 \text{ A} \angle 120^\circ)(10 \Omega \angle -53,13^\circ) = 20 \text{ V} \angle 66,87^\circ$$

b. $E_L = \sqrt{3}V_\phi = (1,73)(20 \text{ V}) = 34,6 \text{ V}$. Assim,

$$E_{BA} = E_{CB} = E_{AC} = 34,6 \text{ V}$$

23.10 POTÊNCIA EM CIRCUITOS TRIFÁSICOS

Carga Equilibrada Tipo Y

Observe a Fig. 23.22.

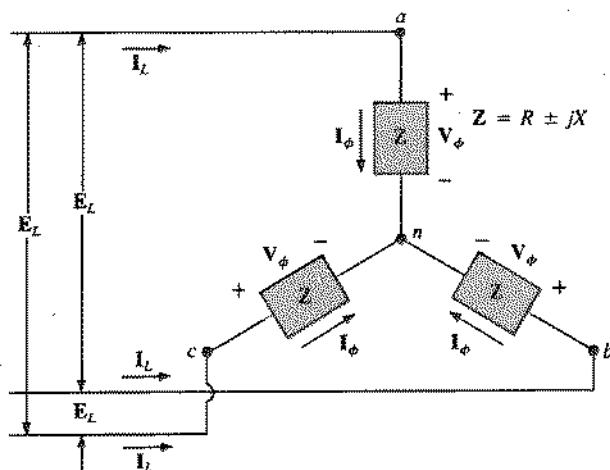


Fig. 23.22 Carga equilibrada tipo Y.

Potência Média A potência média fornecida a cada fase pode ser determinada através da Eq. 23.14, 23.15 ou 23.16.

$$P_\phi = V_\phi I_\phi \cos \theta_{I\phi}^V = I_\phi^2 R_\phi = \frac{V_\phi^2 R}{R_\phi} \quad (\text{watts, W}) \quad (23.14)$$

onde $\theta_{I\phi}^V$ indica que θ é o ângulo de fase entre V_ϕ e I_ϕ . A potência total fornecida à carga equilibrada é

$$P_T = 3P_\phi \quad (\text{W}) \quad (23.15)$$

ou, como $V_\phi = \frac{E_L}{\sqrt{3}}$ e $I_\phi = I_L$

então $P_T = 3 \frac{E_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \theta_{I\phi}^V$

mas $\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)(1) = \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

Portanto,

$$P_T = \sqrt{3}E_L I_L \cos \theta_{I\phi}^V = 3I_L^2 R_\phi \quad (\text{W}) \quad (23.16)$$

Potência Reativa A potência reativa associada a cada fase (em volt-ampéres reativos) é

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \sin \theta_{I\phi}^V = I_\phi^2 X_\phi = \frac{V_\phi^2 X}{X_\phi} \quad (\text{VAR}) \quad (23.17)$$

A potência reativa total da carga é

$$Q_T = 3Q_\phi \quad (\text{VAR}) \quad (23.18)$$

ou

$$Q_T = \sqrt{3}E_L I_L \sin \theta_{I\phi}^V = 3I_L^2 X_\phi \quad (\text{VAR}) \quad (23.19)$$



Potência Aparente A potência aparente associada a cada fase é

$$S_\phi = V_\phi I_\phi \quad (\text{VA}) \quad (23.20)$$

A potência aparente total associada à carga é

$$S_T = 3S_\phi \quad (\text{VA}) \quad (23.21)$$

ou

$$S_T = \sqrt{3}E_L I_L \quad (\text{VA}) \quad (23.22)$$

Fator de Potência O fator de potência do sistema é dado por

$$F_p = \frac{P_T}{S_T} = \cos \theta \quad (\text{adiantado ou atrasado}) \quad (23.23)$$

EXEMPLO 23.5 Para a carga tipo Y da Fig. 23.23:

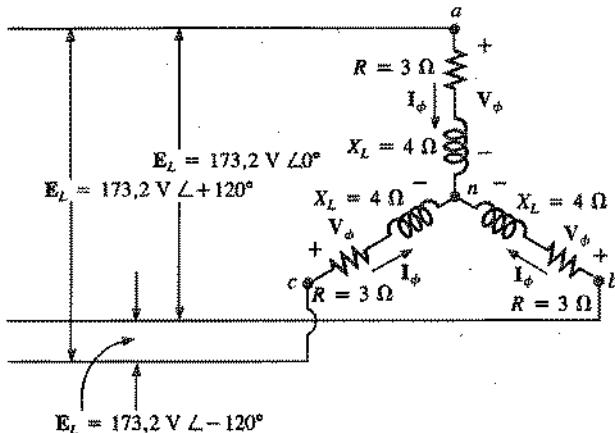


Fig. 23.23 Exemplo 23.5.

- Determine a potência média para cada fase e a potência média total.
- Determine a potência reativa para cada fase e a potência reativa total.
- Determine a potência aparente para cada fase e a potência aparente total.
- Determine o fator de potência da carga.

Soluções

a. A potência média é

$$P_\phi = V_\phi I_\phi \cos \theta_{I_\phi}^\phi = (100 \text{ V})(20 \text{ A}) \cos 53,13^\circ = (2000)(0,6) = 1200 \text{ W}$$

$$P_\phi = I_\phi^2 R_\phi = (20 \text{ A})^2(3 \Omega) = (400)(3) = 1200 \text{ W}$$

$$P_T = \frac{V_L^2}{R_\phi} = \frac{(60 \text{ V})^2}{3 \Omega} = \frac{3600}{3} = 1200 \text{ W}$$

$$P_T = 3P_\phi = (3)(1200 \text{ W}) = 3600 \text{ W}$$

ou

$$P_T = \sqrt{3}E_L I_L \cos \theta_{I_\phi}^\phi = (1,732)(173,2 \text{ V})(20 \text{ A})(0,6) = 3600 \text{ W}$$

b. A potência reativa é

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \sin \theta_{I_\phi}^\phi = (100 \text{ V})(20 \text{ A}) \sin 53,13^\circ = (2000)(0,8) = 1600 \text{ VAR}$$

$$Q_\phi = I_\phi^2 X_\phi = (20 \text{ A})^2(4 \Omega) = (400)(4) = 1600 \text{ VAR}$$

$$Q_T = 3Q_\phi = (3)(1600 \text{ VAR}) = 4800 \text{ VAR}$$

ou

$$Q_T = \sqrt{3}E_L I_L \sin \theta_{I_\phi}^\phi = (1,732)(173,2 \text{ V})(20 \text{ A})(0,8) = 4800 \text{ VAR}$$

c. A potência aparente é

$$S_\phi = V_\phi I_\phi = (100 \text{ V})(20 \text{ A}) = 2000 \text{ VA}$$

$$S_T = 3S_\phi = (3)(2000 \text{ VA}) = 6000 \text{ VA}$$

$$\text{ou } S_T = \sqrt{3}E_L I_L = (1,732)(173,2 \text{ V})(20 \text{ A}) = 6000 \text{ VA}$$

d. O fator de potência é

$$F_p = \frac{P_T}{S_T} = \frac{3600 \text{ W}}{6000 \text{ VA}} = 0,6 \text{ atrasado}$$

Carga Equilibrada Tipo Δ

Observe a Fig. 23.24.

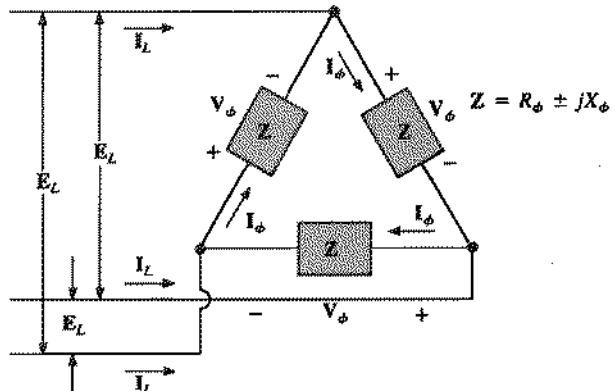


Fig. 23.24 Carga equilibrada tipo Δ.

Potência Média

$$P_\phi = V_\phi I_\phi \cos \theta_{I_\phi}^\phi = I_\phi^2 R_\phi = \frac{V_\phi^2}{R_\phi} \quad (\text{W}) \quad (23.24)$$

$$P_T = 3P_\phi \quad (\text{W}) \quad (23.25)$$

Potência Reativa

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \sin \theta_{I_\phi}^\phi = I_\phi^2 X_\phi = \frac{V_\phi^2}{X_\phi} \quad (\text{VAR}) \quad (23.26)$$

$$Q_T = 3Q_\phi \quad (\text{VAR}) \quad (23.27)$$

Potência Aparente

$$S_\phi = V_\phi I_\phi \quad (\text{VA}) \quad (23.28)$$

$$S_T = 3S_\phi = \sqrt{3}E_\phi I_\phi \quad (\text{VA}) \quad (23.29)$$

Fator de Potência

$$F_p = \frac{P_T}{S_T} \quad (23.30)$$

EXEMPLO 23.6 Para a carga Δ -Y da Fig. 23.25, determine os valores totais da potência média, reativa e aparente. Determine também o fator de potência e indique se é adiantado ou atrasado.

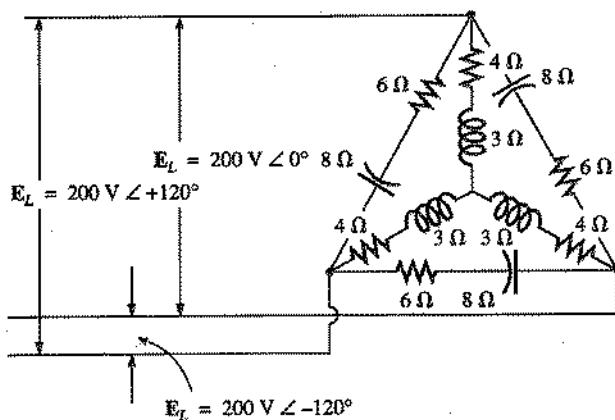


Fig. 23.25 Exemplo 23.6.

Soluções Considere o Δ e o Y separadamente.

Para o Δ :

$$Z_\Delta = 6\Omega - j8\Omega = 10\Omega \angle -53,13^\circ$$

$$I_\phi = \frac{E_L}{Z_\Delta} = \frac{200\text{ V}}{10\Omega} = 20\text{ A}$$

$$P_{T_\Delta} = 3I_\phi^2 R_\phi = (3)(20\text{ A})^2(6\Omega) = 7200\text{ W}$$

$$Q_{T_\Delta} = 3I_\phi^2 X_\phi = (3)(20\text{ A})^2(8\Omega) = 9600\text{ VAR (cap.)}$$

$$S_{T_\Delta} = 3V_\phi I_\phi = (3)(200\text{ V})(20\text{ A}) = 12.000\text{ VA}$$

Para o Y:

$$Z_Y = 4\Omega + j3\Omega = 5\Omega \angle 36,87^\circ$$

$$I_\phi = \frac{E_L/\sqrt{3}}{Z_Y} = \frac{200\text{ V}/\sqrt{3}}{5\Omega} = \frac{116\text{ V}}{5\Omega} = 23,12\text{ A}$$

$$P_{T_Y} = 3I_\phi^2 R_\phi = (3)(23,12\text{ A})^2(4\Omega) = 6414,41\text{ W}$$

$$Q_{T_Y} = 3I_\phi^2 X_\phi = (3)(23,12\text{ A})^2(3\Omega) = 4810,81\text{ VAR (ind.)}$$

$$S_{T_Y} = 3V_\phi I_\phi = (3)(116\text{ V})(23,12\text{ A}) = 8045,76\text{ VA}$$

Para a carga total:

$$P_T = P_{T_\Delta} + P_{T_Y} = 7200\text{ W} + 6414,41\text{ W} = 13.614,41\text{ W}$$

$$Q_T = Q_{T_\Delta} - Q_{T_Y} = 9600\text{ VAR (cap.)} - 4810,81\text{ VAR (ind.)}$$

$$= 4789,19\text{ VAR (cap.)}$$

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = \sqrt{(13.614,41\text{ W})^2 + (4789,19\text{ VAR})^2}$$

$$= 14.432,2\text{ VA}$$

$$F_p = \frac{P_T}{S_T} = \frac{13.614,41\text{ W}}{14.432,20\text{ VA}} = 0,943 \text{ adiantado}$$

EXEMPLO 23.7 As três linhas de transmissão do sistema trifásico de três fios da Fig. 23.26 possuem uma impedância de $15\Omega + j20\Omega$. O sistema fornece uma potência total de 160 kW a 12.000 V a uma carga trifásica equilibrada com um fator de potência atrasado de 0,86.

- Determine o módulo da tensão de linha do E_{AB} gerador.
- Encontre o fator de potência do sistema (linha mais carga).
- Qual é a eficiência do sistema?

Soluções

$$\text{a. } V_\phi(\text{carga}) = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = \frac{12.000\text{ V}}{1,73} = 6936,42\text{ V}$$

$$P_T(\text{carga}) = 3V_\phi I_\phi \cos \theta$$

$$\text{e. } I_\phi = \frac{P_T}{3V_\phi \cos \theta} = \frac{160.000\text{ W}}{3(6936,42\text{ V})(0,86)} = 8,94\text{ A}$$

Como $\theta = \cos^{-1} 0,86 = 30,68^\circ$, se atribuirmos a V_ϕ um ângulo de 0° , ou seja, se fizermos $V_\phi = V_\theta \angle 0^\circ$, um fator de potência de 0,86 atrasado implicará

$$I_\phi = 8,94\text{ A} \angle -30,68^\circ$$

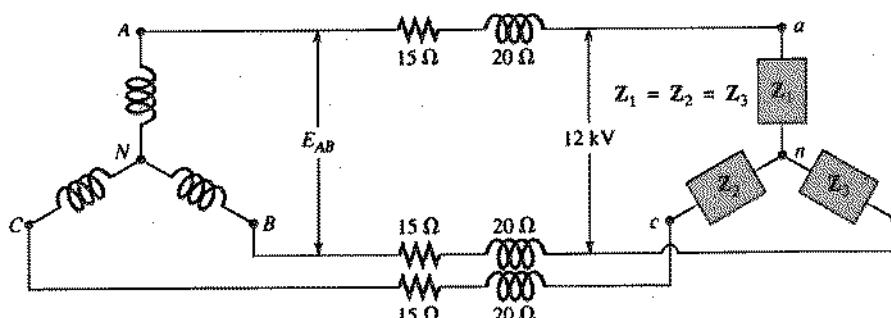


Fig. 23.26 Exemplo 23.7.

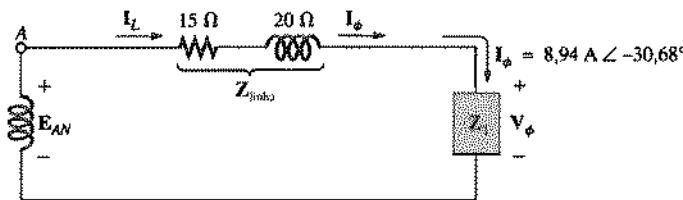


Fig. 23.27 Circuito equivalente para uma das fases do sistema da Fig. 23.26.

A Fig. 23.27 mostra o circuito equivalente para uma das fases. De acordo com a lei de Kirchhoff para tensões,

$$E_{AN} = I_\phi Z_{\text{linha}} + V_\phi$$

ou

$$\begin{aligned} E_{AN} &= I_\phi Z_{\text{linha}} + V_\phi \\ &= (8,94 \text{ A} \angle -30,68^\circ)(25 \Omega \angle 53,13^\circ) + 6936,42 \text{ V} \angle 0^\circ \\ &= 223,5 \text{ V} \angle 22,45^\circ + 6936,42 \text{ V} \angle 0^\circ \\ &= 206,56 \text{ V} + j 85,35 \text{ V} + 6936,42 \text{ V} \\ &= 7142,98 \text{ V} + j 85,35 \text{ V} \\ &= 7143,5 \text{ V} \angle 0,68^\circ \end{aligned}$$

$$\text{então } E_{AB} = \sqrt{3}E_{\phi g} = (1,73)(7143,5 \text{ V}) = 12.358,26 \text{ V}$$

b.

$$\begin{aligned} P_T &= P_{\text{carga}} + P_{\text{linhas}} \\ &= 160 \text{ kW} + 3(I_L)^2 R_{\text{linha}} \\ &= 160 \text{ kW} + 3(8,94 \text{ A})^2 15 \Omega \\ &= 160.000 \text{ W} + 3596,55 \text{ W} \\ &= 163.596,55 \text{ W} \end{aligned}$$

$$\text{e } P_T = \sqrt{3}V_L I_L \cos \theta_T$$

$$\text{ou } \cos \theta_T = \frac{P_T}{\sqrt{3}V_L I_L} = \frac{163.596,55 \text{ W}}{(1,73)(12.358,26 \text{ V})(8,94 \text{ A})}$$

$$\text{e } F_p = 0,856 < 0,86 \text{ da carga}$$

$$\text{c. } \eta = \frac{P_o}{P_i} = \frac{P_o}{P_o + P_{\text{perdas}}} = \frac{160 \text{ kW}}{160 \text{ kW} + 3596,55 \text{ W}} = 0,978 = 97,8\%$$

$$P_{T_A} = P_1 + P_2 + P_3 \quad (23.32)$$

Se a carga dos circuitos das Figs. 23.28 e 23.29 for equilibrada, as potências associadas às três fases serão iguais. Nesse caso, para obter a potência total bastará multiplicar por três a leitura de um dos wattímetros.

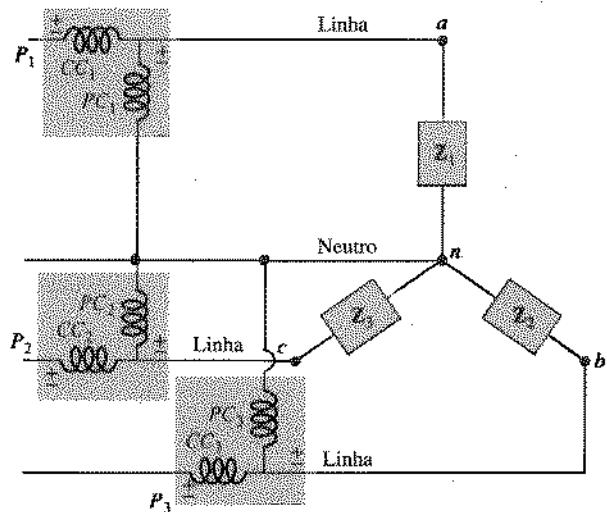


Fig. 23.28 Método dos três medidores aplicado a uma carga tipo Y.

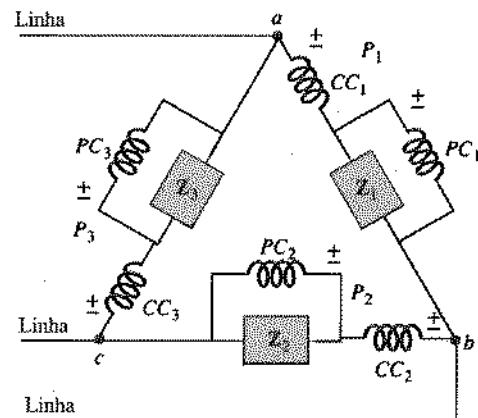


Fig. 23.29 Método dos três medidores de potência aplicado a uma carga tipo Δ.

23.11 O MÉTODO DOS TRÊS WATTÍMETROS

A potência fornecida a uma carga tipo Y, equilibrada ou não, através de um sistema de quatro fios pode ser medida com o auxílio de três wattímetros ligados da forma indicada na Fig. 23.28. Cada wattímetro mede a potência fornecida a uma das fases da carga. As bobinas de potencial dos wattímetros são ligadas em paralelo com a carga, e as bobinas de corrente são ligadas em série com a carga. Para determinar a potência média do sistema, basta somar as leituras dos três wattímetros:

$$P_{T_A} = P_1 + P_2 + P_3 \quad (23.31)$$

No caso de uma carga tipo Δ, equilibrada ou não, os três wattímetros devem ser ligados como na Fig. 23.29. A potência total é a soma das leituras dos três wattímetros:

23.12 O MÉTODO DOS DOIS WATTÍMETROS

A potência fornecida a um circuito trifásico de três fios tipo Y ou tipo Δ, equilibrado ou não, pode ser medida com apenas dois wattímetros se eles forem ligados corretamente e as leituras interpretadas da forma correta. As ligações necessárias aparecem na Fig. 23.30. Um dos terminais da bobina de potencial de um dos wattímetros é ligado a um dos terminais da bobina de potencial do outro wattímetro e a uma das linhas. As bobinas de corrente são ligadas em série com as outras duas linhas. As bobinas de corrente são ligadas em série com as outras duas linhas.

As ligações da Fig. 23.31 também atendem a todos os requisitos. Existe uma terceira forma de ligar os wattímetros, mas ela será deixada como exercício para o leitor.

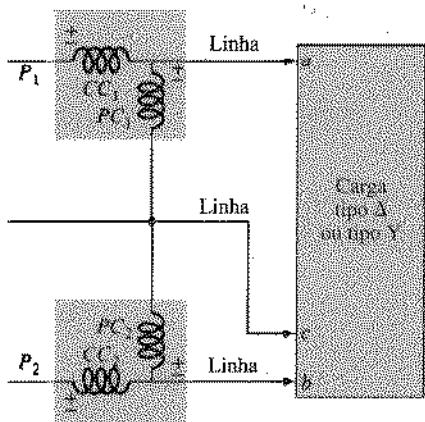


Fig. 23.30 Método dos dois medidores de potência aplicado a cargas tipo Δ ou Y .

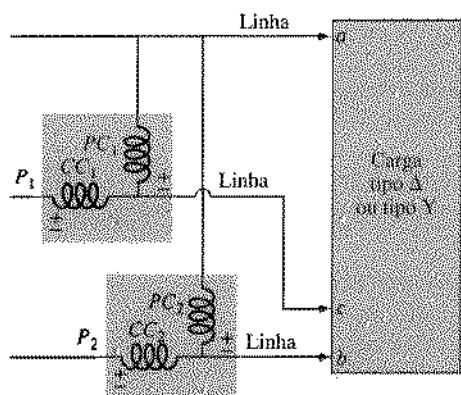


Fig. 23.31 Configuração alternativa para usar o método dos dois wattímetros.

A potência total fornecida à carga é a soma algébrica das leituras dos dois wattímetros. Vamos agora discutir dois métodos para determinar se a potência total é a soma ou a diferença entre as leituras dos wattímetros, supondo que se trate de uma carga *equilibrada*. O primeiro método exige o conhecimento do fator de potência da carga (não importa se adiantado ou atrasado). Uma vez obtida esta informação, ela pode ser aplicada diretamente à curva da Fig. 23.32.

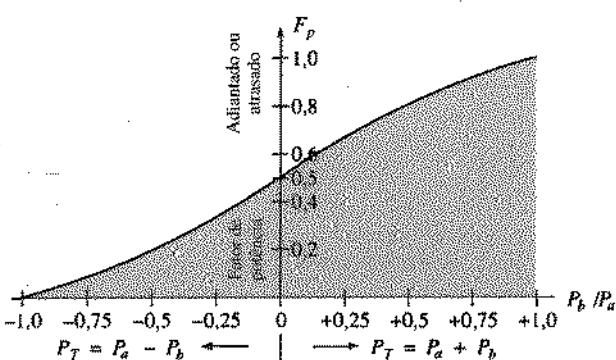


Fig. 23.32 Como verificar se as leituras dos dois wattímetros devem ser somadas ou subtraídas.

A curva da Fig. 23.32 é um gráfico do fator de potência da carga em função da razão P_b/P_a , onde P_b e P_a são os módulos da menor e da maior leitura dos wattímetros, respectivamente. Observe que para um fator de potência maior do que 0,5 a razão é positiva. Isto indica que as leituras dos dois wattímetros são positivas e a potência total é a soma das duas leituras: $P_T = P_a + P_b$. Quando o fator de potência é menor do que 0,5, a razão é negativa. Isto quer dizer que uma das leituras é negativa e a potência total é a diferença entre as duas leituras: $P_T = P_a - P_b$.

Para compreendermos as afirmações acima, basta observarmos que no caso de um fator de potência unitário ($\cos 0^\circ = 1$), a carga é exclusivamente resistiva, $P_a = P_b$ e as leituras dos dois wattímetros são iguais; no caso de um fator de potência nulo ($\cos 90^\circ = 0$), a carga é exclusivamente reativa, $P_a = -P_b$, e as leituras dos dois wattímetros têm o mesmo valor absoluto mas sinais opostos. A transição de uma razão negativa para uma razão positiva ocorre quando o fator de potência da carga é 0,5 ou $\theta = \cos^{-1} 0,5 = 60^\circ$. Para este fator de potência, $P_b/P_a = 0$, de modo que $P_b = 0$ e a leitura P_a é igual à potência total fornecida à carga.

O segundo método para determinar se a potência total é a soma ou a diferença das leituras dos dois wattímetros envolve um teste muito simples. Para aplicar este teste, é preciso que os dois wattímetros estejam indicando leituras positivas. Se a indicação de um dos wattímetros (ou de ambos) for negativa, basta inverter as ligações da bobina de corrente. Para realizar o teste, faça o seguinte:

1. Verifique qual das três linhas não tem uma bobina de corrente ligada em série.
2. Desligue o fio da bobina de potencial do wattímetro de menor leitura que está ligado à linha identificada no item (1).
3. Encoste o fio que foi desligado no item (2) na linha à qual está ligada a bobina de corrente do wattímetro de maior leitura.
4. Se a leitura for negativa (ou, no caso de um wattímetro analógico, se o ponteiro se deslocar para a esquerda), a potência total é a diferença entre as leituras dos dois wattímetros; se a leitura for positiva, a potência total é a soma das duas leituras.

No caso de um sistema *equilibrado*, como

$$P_T = P_a \pm P_b = \sqrt{3} E_L I_L \cos \theta_{I_P}^V$$

o fator de potência da carga pode ser calculado a partir das leituras dos wattímetros e dos módulos da tensão e da corrente de linha:

$$F_p = \cos \theta_{I_P}^V = \frac{P_a + P_b}{\sqrt{3} E_L I_L} \quad (23.33)$$

EXEMPLO 23.8 Para a carga tipo Δ não-equilibrada da Fig. 23.33, com dois wattímetros ligados ao circuito na configuração correta,

- Determine o módulo e o ângulo das correntes de fase.
- Calcule o módulo e o ângulo das correntes de linha.
- Determine as leituras dos dois wattímetros.
- Calcule a potência total recebida pela carga.
- Compare o resultado do item (d) com a potência total calculada utilizando os valores das correntes de fase e dos elementos resisitivos.

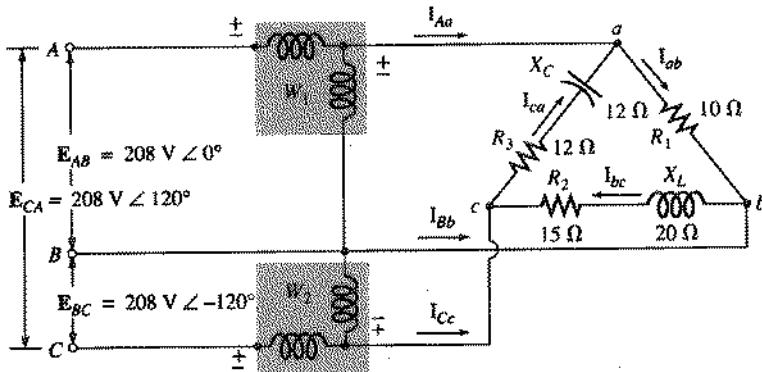


Fig. 23.33 Exemplo 23.8.

Soluções

$$\begin{aligned} \text{a. } I_{ab} &= \frac{V_{ab}}{Z_{ab}} = \frac{E_{AB}}{Z_{ab}} = \frac{208 \text{ V} \angle 0^\circ}{10 \Omega \angle 0^\circ} = 20,8 \text{ A} \angle 0^\circ \\ I_{bc} &= \frac{V_{bc}}{Z_{bc}} = \frac{E_{BC}}{Z_{bc}} = \frac{208 \text{ V} \angle -120^\circ}{15 \Omega + j 20 \Omega} = \frac{208 \text{ V} \angle -120^\circ}{25 \Omega \angle 53,13^\circ} \\ &= 8,32 \text{ A} \angle -173,13^\circ \\ I_{ca} &= \frac{V_{ca}}{Z_{ca}} = \frac{E_{CA}}{Z_{ca}} = \frac{208 \text{ V} \angle +120^\circ}{12 \Omega + j 12 \Omega} = \frac{208 \text{ V} \angle +120^\circ}{16,97 \Omega \angle -45^\circ} \\ &= 12,26 \text{ A} \angle 165^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } I_{Aa} &= I_{ab} - I_{ca} \\ &= 20,8 \text{ A} \angle 0^\circ - 12,26 \text{ A} \angle 165^\circ \\ &= 20,8 \text{ A} - (-11,84 \text{ A} + j 3,17 \text{ A}) \\ &= 20,8 \text{ A} + 11,84 \text{ A} - j 3,17 \text{ A} = 32,64 \text{ A} - j 3,17 \text{ A} \\ &= 32,79 \text{ A} \angle -5,55^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{Bb} &= I_{bc} - I_{ca} \\ &= 8,32 \text{ A} \angle -173,13^\circ - 20,8 \text{ A} \angle 0^\circ \\ &= (-8,26 \text{ A} - j 1 \text{ A}) - 20,8 \text{ A} \\ &= -8,26 \text{ A} - 20,8 \text{ A} - j 1 \text{ A} = -29,06 \text{ A} - j 1 \text{ A} \\ &= 29,08 \text{ A} \angle -178,03^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{Cc} &= I_{ca} - I_{bc} \\ &= 12,26 \text{ A} \angle 165^\circ - 8,32 \text{ A} \angle -173,13^\circ \\ &= (-11,84 \text{ A} + j 3,17 \text{ A}) - (-8,26 \text{ A} - j 1 \text{ A}) \\ &= -11,84 \text{ A} + 8,26 \text{ A} + j(3,17 \text{ A} + 1 \text{ A}) \\ &= -3,58 \text{ A} + j 4,17 \text{ A} \\ &= 5,5 \text{ A} \angle 130,65^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } P_1 &= V_{ab} I_{Aa} \cos \theta_{I_{Aa}}^V, V_{ab} = 208 \text{ V} \angle 0^\circ, I_{Aa} \\ &= 32,79 \text{ A} \angle -5,55^\circ \\ &= (208 \text{ V})(32,79 \text{ A}) \cos 5,55^\circ \\ &= 6788,35 \text{ W} \end{aligned}$$

$$V_{bc} = E_{BC} = 208 \text{ V} \angle -120^\circ$$

$$\text{e portanto } V_{cb} = E_{CB} = 208 \text{ V} \angle -120^\circ + 180^\circ \\ = 208 \text{ V} \angle 60^\circ$$

$$\text{como } I_{Cc} = 5,5 \text{ A} \angle 130,65^\circ$$

$$\begin{aligned} P_2 &= V_{cb} I_{Cc} \cos \theta_{I_{Cc}}^V \\ &= (208 \text{ V})(5,5 \text{ A}) \cos 70,65^\circ \\ &= 379,1 \text{ W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } P_T &= P_1 + P_2 = 6788,35 \text{ W} + 379,1 \text{ W} \\ &= 7167,45 \text{ W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e. } P_T &= (I_{ab})^2 R_1 + (I_{bc})^2 R_2 + (I_{ca})^2 R_3 \\ &= (20,8 \text{ A})^2 10 \Omega + (8,32 \text{ A})^2 15 \Omega + (12,26 \text{ A})^2 12 \Omega \\ &= 4326,4 \text{ W} + 1038,34 \text{ W} + 1803,69 \text{ W} \\ &= 7168,43 \text{ W} \end{aligned}$$

(A pequena diferença se deve a erros de arredondamento.)

23.13 CARGAS NÃO-EQUILIBRADAS EM SISTEMAS TIPO Y DE QUATRO FIOS

Em uma carga não-equilibrada de um sistema tipo Y de quatro fios como o da Fig. 23.34, as condições são tais que as três impedâncias de carga, Z_1 , Z_2 e Z_3 , são diferentes. Como o neutro da fonte está ligado por um fio ao neutro da carga, sejam quais forem as impedâncias da fonte e da carga, as três tensões de fase da carga são iguais às tensões de fase correspondentes do gerador:

$$V_\phi = E_\phi \quad (23.34)$$

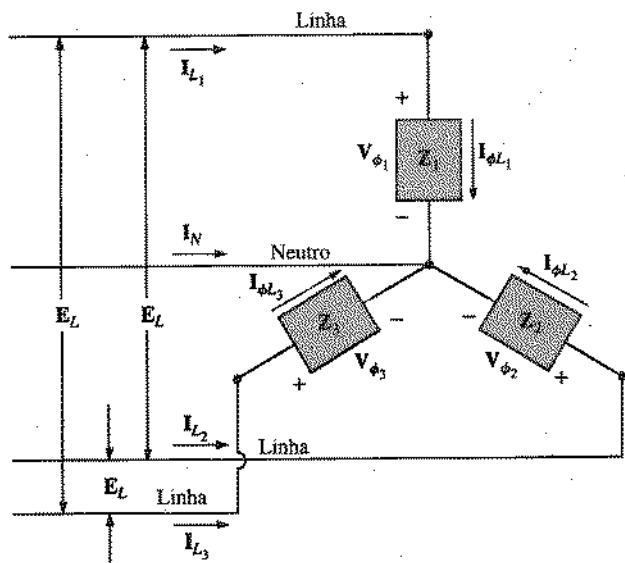


Fig. 23.34 Carga não-equilibrada tipo Y.

Assim, as correntes de fase podem ser determinadas com o auxílio da definição de resistência generalizada:

$$\mathbf{I}_{\phi_1} = \frac{\mathbf{V}_{\phi_1}}{\mathbf{Z}_1} = \frac{\mathbf{E}_{\phi_1}}{\mathbf{Z}_1}, \text{ etc.} \quad (23.35)$$

Para determinar a corrente no fio neutro, basta aplicar a lei de Kirchhoff para correntes ao ponto neutro:

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{I}_{\phi_1} + \mathbf{I}_{\phi_2} + \mathbf{I}_{\phi_3} = \mathbf{I}_{L_1} + \mathbf{I}_{L_2} + \mathbf{I}_{L_3} \quad (23.36)$$

Como a maioria das indústrias utiliza equipamentos trifásicos e monofásicos, as redes de distribuição de energia elétrica normalmente oferecem os dois tipos de tensão, com a tensão monofásica sendo obtida a partir de uma das fases do sistema trifásico. Além disso, como as cargas das três fases estão sempre mudando, costuma-se usar um sistema de quatro fios (com neutro) para manter constante a tensão no final da linha.

O sistema de distribuição industrial da Fig. 23.35 inclui um transformador trifásico que reduz a tensão de linha de 13.800 V para 208 V. As cargas de baixo consumo de energia, como lâmpadas, tomadas de parede, sistemas de alarme etc., utilizam a tensão monofásica de 120 V entre linha e neutro. Cargas maiores como condicionadores de ar, chuveiros elétricos etc. utilizam a tensão monofásica de 208 V entre duas linhas. Motores de grande porte e equipamentos especiais utilizam a tensão trifásica. Na maioria dos países, a legislação exige que os consumidores façam o possível para manter equilibrada a carga total do sistema, assegurando assim o máximo de eficiência na distribuição de energia elétrica.

23.14 CARGAS NÃO-EQUILIBRADAS EM SISTEMAS TIPO Y DE TRÊS FIOS

No caso de um sistema como o da Fig. 23.36, podemos determinar a relação entre as tensões de linha e as tensões de fase aplicando a lei de Kirchhoff às três malhas do circuito:

$$\mathbf{E}_{AB} - \mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} = 0$$

$$\mathbf{E}_{BC} - \mathbf{V}_{bn} + \mathbf{V}_{cn} = 0$$

$$\mathbf{E}_{CA} - \mathbf{V}_{cn} + \mathbf{V}_{an} = 0$$

Aplicando a definição de resistência generalizada, temos:

$$\mathbf{V}_{an} = \mathbf{I}_{an}\mathbf{Z}_1 \quad \mathbf{V}_{bn} = \mathbf{I}_{bn}\mathbf{Z}_2 \quad \mathbf{V}_{cn} = \mathbf{I}_{cn}\mathbf{Z}_3$$

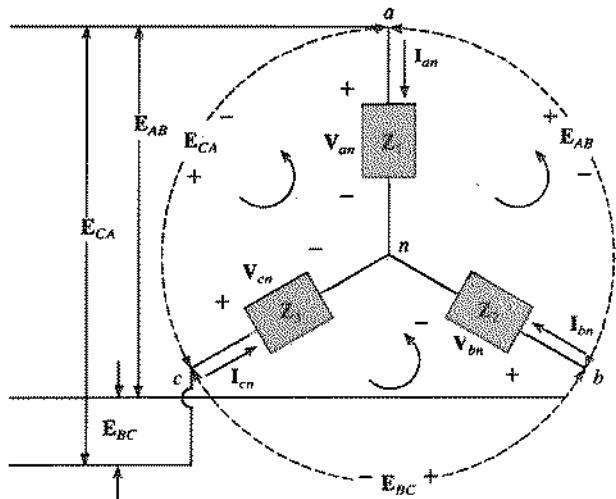


Fig. 23.36 Carga não-equilibrada em sistemas tipo Y de fios.

$$\mathbf{E}_{AB} = \mathbf{I}_{an}\mathbf{Z}_1 - \mathbf{I}_{bn}\mathbf{Z}_2 \quad (23.37a)$$

$$\mathbf{E}_{BC} = \mathbf{I}_{bn}\mathbf{Z}_2 - \mathbf{I}_{cn}\mathbf{Z}_3 \quad (23.37b)$$

$$\mathbf{E}_{CA} = \mathbf{I}_{cn}\mathbf{Z}_3 - \mathbf{I}_{an}\mathbf{Z}_1 \quad (23.37c)$$

Aplicando a lei de Kirchhoff para correntes ao nó n, temos:

$$\mathbf{I}_{an} + \mathbf{I}_{bn} + \mathbf{I}_{cn} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_{bn} = -\mathbf{I}_{an} - \mathbf{I}_{cn}$$

Substituindo \mathbf{I}_{bn} por seu valor nas Eqs. 23.37(a) e 23.37(b), temos:

$$\mathbf{E}_{AB} = \mathbf{I}_{an}\mathbf{Z}_1 - [-(\mathbf{I}_{an} + \mathbf{I}_{cn})]\mathbf{Z}_2$$

$$\mathbf{E}_{BC} = -(\mathbf{I}_{an} + \mathbf{I}_{cn})\mathbf{Z}_2 - \mathbf{I}_{cn}\mathbf{Z}_3$$

que pode ser escrita na forma

$$\mathbf{E}_{AB} = \mathbf{I}_{an}(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2) + \mathbf{I}_{cn}\mathbf{Z}_2$$

$$\mathbf{E}_{BC} = \mathbf{I}_{an}(-\mathbf{Z}_2) + \mathbf{I}_{cn}(-\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)$$

Resolvendo o sistema de equações com o auxílio de determinantes, temos:

$$\mathbf{I}_{an} = \begin{vmatrix} \mathbf{E}_{AB} & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{E}_{BC} & -(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3) \\ \hline \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 & \mathbf{Z}_2 \\ -\mathbf{Z}_2 & -(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3) \end{vmatrix}$$

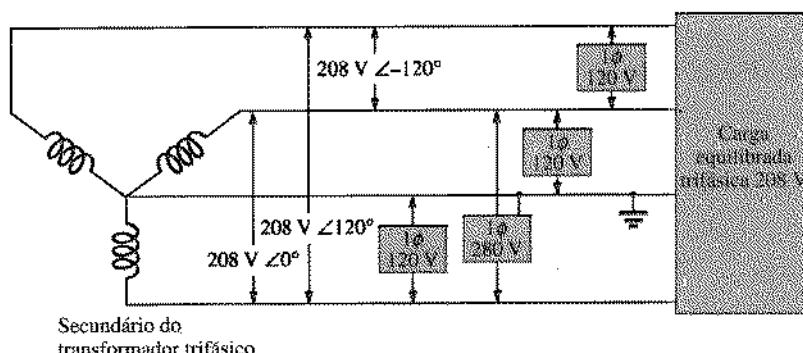


Fig. 23.35 Sistema de distribuição industrial 3φ/1φ, 208 V/120 V.

$$I_{an} = \frac{-(Z_2 + Z_3)E_{AB} - E_{BC}Z_2}{-Z_1Z_2 - Z_1Z_3 - Z_2Z_3 - Z_2^2 + Z_2^2}$$

$$I_{an} = \frac{-Z_2(E_{AB} + E_{BC}) - Z_3E_{AB}}{-Z_1Z_2 - Z_1Z_3 - Z_2Z_3}$$

Aplicando a lei de Kirchhoff para tensões às tensões de linha,

$$E_{AB} + E_{CA} + E_{BC} = 0 \quad \text{ou} \quad E_{AB} + E_{BC} = -E_{CA}$$

Substituindo $E_{AB} + E_{CB}$ por $-E_{CA}$ na equação de I_{an} , temos:

$$I_{an} = \frac{-Z_2(-E_{CA}) - Z_3E_{AB}}{-Z_1Z_2 - Z_1Z_3 - Z_2Z_3}$$

e portanto

$$I_{an} = \frac{E_{AB}Z_3 - E_{CA}Z_1}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3} \quad (23.38)$$

Da mesma forma, é possível mostrar que

$$I_{cn} = \frac{E_{CA}Z_1 - E_{BC}Z_3}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3} \quad (23.39)$$

Substituindo I_{cn} por seu valor no segundo membro da Eq. 23.37(b), obtemos:

$$I_{bn} = \frac{E_{BC}Z_1 - E_{AB}Z_3}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3} \quad (23.40)$$

EXEMPLO 23.9 O indicador de seqüência de fases é um aparelho capaz de indicar a seqüência de fases de um sistema polifásico. A Fig. 23.37 mostra o circuito de um instrumento desse tipo. A seqüência de fases da tensão aplicada é ABC. A lâmpada rotulada como ABC na figura brilha com mais intensidade do que a lâmpada ACB porque é percorrida por uma corrente maior. Para mostrar que isso é verdade, vamos calcular as correntes de fase:

$$Z_1 = X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(377 \text{ rad/s})(16 \times 10^{-6} \text{ F})} = 166 \Omega$$

De acordo com a Eq. (23.39),

$$I_{cn} = \frac{E_{CA}Z_2 - E_{BC}Z_1}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}$$

$$= \frac{(200 \text{ V} \angle 120^\circ)(200 \Omega \angle 0^\circ) - (200 \text{ V} \angle -120^\circ)(166 \Omega \angle -90^\circ)}{(166 \Omega \angle -90^\circ)(200 \Omega \angle 0^\circ) + (166 \Omega \angle -90^\circ)(200 \Omega \angle 0^\circ) + (200 \Omega \angle 0^\circ)(200 \Omega \angle 0^\circ)}$$

$$I_{cn} = \frac{40.000 \text{ V} \angle 120^\circ + 33.200 \text{ V} \angle -30^\circ}{33.200 \Omega \angle -90^\circ + 33.200 \Omega \angle -90^\circ + 40.000 \Omega \angle 0^\circ}$$

Dividindo o numerador e o denominador por 1000 e convertendo ambos para a forma retangular, temos:

$$I_{cn} = \frac{(-20 + j 34,64) + (28,75 - j 16,60)}{40 - j 66,4}$$

$$= \frac{8,75 + j 18,04}{77,52 \angle -58,93^\circ} = \frac{20,05 \angle 64,13^\circ}{77,52 \angle -58,93^\circ}$$

$$I_{cn} = 0,259 \text{ A} \angle 123,06^\circ$$

De acordo com a Eq. (23.40),

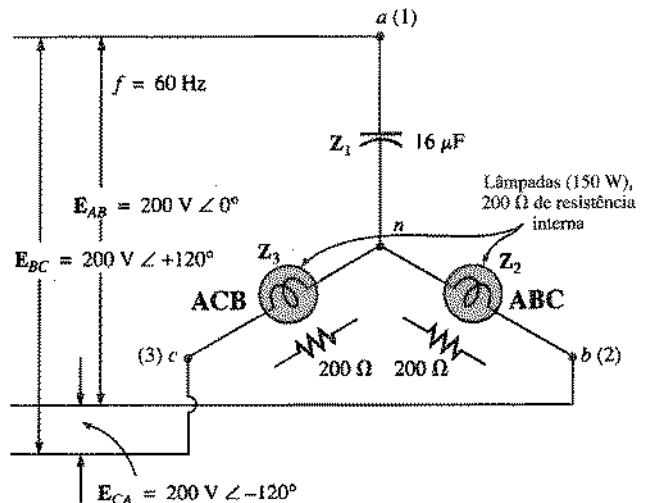


Fig. 23.37 Exemplo 23.9.

$$I_{bn} = \frac{E_{BC}Z_1 - E_{AB}Z_3}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}$$

$$= \frac{(200 \text{ V} \angle -120^\circ)(166 \angle -90^\circ) - (200 \text{ V} \angle 0^\circ)(200 \angle 0^\circ)}{77,52 \times 10^3 \Omega \angle -58,93^\circ}$$

$$I_{bn} = \frac{33.200 \text{ V} \angle -210^\circ - 40.000 \text{ V} \angle 0^\circ}{77,52 \times 10^3 \Omega \angle -58,93^\circ}$$

Dividindo por 1000 e convertendo para a forma retangular, temos:

$$I_{bn} = \frac{-28,75 + j 16,60 - 40,0}{77,52 \angle -58,93^\circ} = \frac{-68,75 + j 16,60}{77,52 \angle -58,93^\circ}$$

$$= \frac{70,73 \angle 166,43^\circ}{77,52 \angle -58,93^\circ} = 0,91 \text{ A} \angle 225,36^\circ$$

e portanto I_{bn} é mais de três vezes maior do que I_{cn} . Assim, a lâmpada que indica a seqüência de fases ABC brilha com maior intensidade do que a lâmpada que indica a seqüência de fases ACB. Se a seqüência de fases da tensão aplicada fosse ACB, a lâmpada que indica esta seqüência de fases brilharia com maior intensidade.

23.15 ANÁLISE COMPUTACIONAL

PSpice (DOS)

Para aplicar corretamente o PSpice a sistemas trifásicos, é preciso tomar cuidado para assegurar o seguinte:

- Que não existam malhas constituídas apenas por fontes de tensão independentes.
- Que todos os nós estejam ligados ao nó de referência por um resistor ou um indutor.

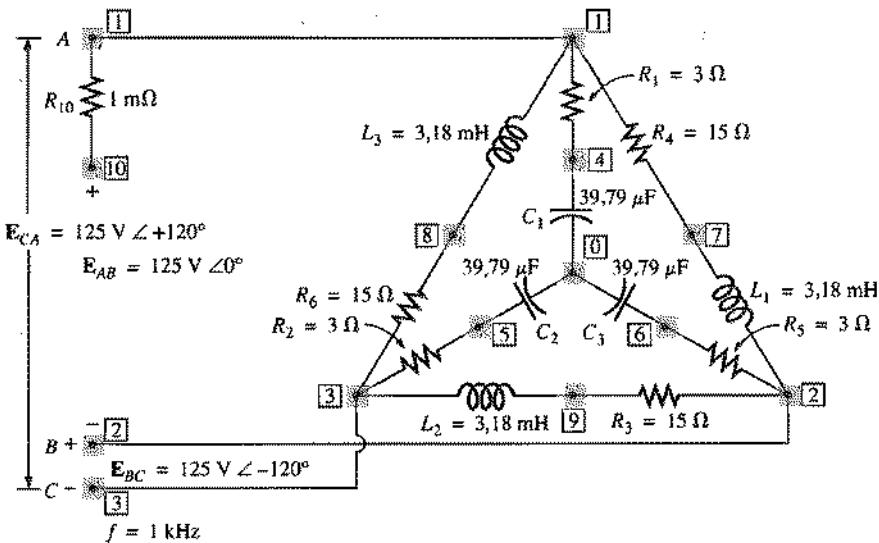


Fig. 23.38 Definição dos parâmetros para uma análise pelo PSpice (DOS).

3. Que o nó de referência seja definido adequadamente.

Ao escrever um arquivo de entrada para o circuito trifásico equilibrado da Fig. 23.38, é preciso ligar um resistor de pequeno valor entre os nós 1 e 2 (R_{10}), evitando assim que se forme uma malha constituída apenas pelas fontes de tensão independentes V_{AB} , V_{BC} e V_{CA} . Como nó de referência, é escolhido o ponto neutro. Finalmente, para assegurar que todos os nós estejam ligados ao nó de referência por um resistor ou um indutor, resistores de grande valor ($10^{30} \Omega$) são ligados em paralelo com os capacitores C_1 , C_2 e C_3 . Esses resistores, que não aparecem na Fig. 23.38, foram chamados de R_7 , R_8 e R_9 no arquivo de entrada da Fig. 23.39.

O circuito da Fig. 23.38 é o mesmo que aparece no Problema 42 deste capítulo, com as reatâncias do indutor e do capacitor calculadas para a frequência de 1 kHz. Observe na listagem do arquivo de saída da Fig. 23.39 que as correntes nos ramos capacitivos têm um módulo de 1,443 A e estão defasadas entre si de 120° . As correntes nos ramos indutivos têm módulo de 5 A

e também estão defasadas entre si de 120° . As correntes nos ramos capacitivos estão adiantadas em relação às tensões de linha, enquanto as correntes nos ramos indutivos estão atrasadas em relação às tensões de linha.

O segundo sistema trifásico a ser analisado com o auxílio do PSpice é a carga não-equilibrada da Fig. 23.40. No arquivo de entrada da Fig. 23.41 foi necessário incluir um resistor de pequeno valor entre os nós 1 e 2 (R_{21}) e um resistor de valor elevado em paralelo com o capacitor (R_4).

Os resultados são:

$$\begin{aligned} I_1 &= 10,71 \text{ A} \angle 29,58^\circ \\ I_2 &= 6,512 \text{ A} \angle 42,3^\circ \\ I_3 &= 17,12 \text{ A} \angle -145,6^\circ \end{aligned}$$

Observe que, como o circuito não é equilibrado, as correntes de fase têm módulos diferentes e não estão defasadas entre si de 120° , como acontece nos sistemas equilibrados.

Chapter 23 - Three Phase System (balanced)

**** CIRCUIT DESCRIPTION

```

V1 10 2 AC 125V 0DEG
R10 10 2 1M
V2 2 3 AC 125V -120DEG
V3 3 1 AC 125V +120DEG
R1 1 4 3
R2 3 5 3
R3 2 6 3
C1 4 0 39.79UF
C2 5 0 39.79UF
C3 6 0 39.79UF
R7 4 0 1E30
R8 6 0 1E30
R9 5 0 1E30
R4 1 7 15
R5 2 9 15
R6 3 8 15
L1 7 2 3 .18MH
L2 2 3 .18MH
L3 3 1 .18MH
.AC LIN 1 1KH 1KH
.PRINT AC IM(R1) IM(R2) IM(R3)
.PRINT AC IP(R1) IP(R2) IP(R3)
.PRINT AC IM(R4) IM(R5) IM(R6)
.PRINT AC IP(R4) IP(R5) IP(R6)
.OPTIONS NOPAGE
.END

```

**** AC ANALYSIS

TEMPERATURE = 27.000 DEG C

FREQ	IM(R1)	IM(R2)	IM(R3)
1.000E+03	1.443E+01	1.443E+01	1.443E+01

**** AC ANALYSIS

TEMPERATURE = 27.000 DEG C

FREQ	IP(R1)	IP(R2)	IP(R3)
1.000E+03	2.313E+01	1.431E+02	-9.687E+01

**** AC ANALYSIS

TEMPERATURE = 27.000 DEG C

FREQ	IM(R4)	IM(R5)	IM(R6)
1.000E+03	5.003E+00	5.003E+00	5.003E+00

**** AC ANALYSIS

TEMPERATURE = 27.000 DEG C

FREQ	IP(R4)	IP(R5)	IP(R6)
1.000E+03	-5.310E+01	-1.731E+02	6.690E+01

Fig. 23.39 Arquivos de entrada e saída para a análise da carga trifásica da Fig. 23.38 pelo PSpice.

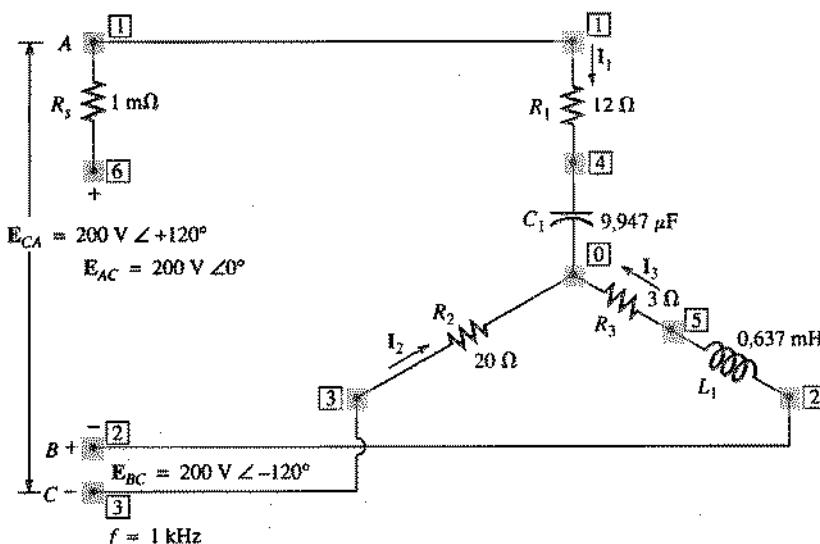


Fig. 23.40 Definição dos parâmetros para uma análise pelo PSpice (DOS).

Chapter 23 - Three Phase Systems (unbalanced)

**** CIRCUIT DESCRIPTION

```

V1 6 2 AC 200V 0
R21 6 1 1M
V2 2 3 AC 200V -120
V3 3 1 AC 200V -240
R1 1 4 12
C1 4 0 9.947UF
R2 3 0 20
R3 5 0 3
R4 4 0 1E30
L1 2 5 0.637MH
.AC LIN 1 1KH 1KH
.PRINT AC IM(R1) IP(R1)
.PRINT AC IM(R2) IP(R2)
.PRINT AC IM(R3) IP(R3)
.OPTIONS NOPAGE
.END

```

**** AC ANALYSIS

TEMPERATURE = 27.000 DEG C

FREQ	IM(R1)	IP(R1)
1.000E+03	1.071E+01	2.958E+01

**** AC ANALYSIS

TEMPERATURE = 27.000 DEG C

FREQ	IM(R2)	IP(R2)
1.000E+03	6.512E+00	4.230E+01

**** AC ANALYSIS

TEMPERATURE = 27.000 DEG C

FREQ	IM(R3)	IP(R3)
1.000E+03	1.712E+01	-1.456E+02

Fig. 23.41 Arquivos de entrada e saída para a análise da carga trifásica da Fig. 23.40 pelo PSpice.



PROBLEMAS

SEÇÃO 23.5 Geradores Tipo Y Ligados a Cargas Tipo Y

1. Uma carga Y equilibrada com uma resistência de $10\ \Omega$ por fase é ligada a um gerador trifásico tipo Y de quatro fios com uma tensão de linha de 208 V. Calcule o módulo
 - a. da tensão de fase do gerador.
 - b. da tensão de fase da carga.
 - c. da corrente de fase da carga.
 - d. da corrente de linha.
2. Repita o Problema 1 se as resistências da carga forem substituídas por resistores de $12\ \Omega$ em série com reatâncias capacitivas de $16\ \Omega$.
3. Repita o Problema 1 se as resistências da carga forem substituídas por resistores de $10\ \Omega$ em paralelo com reatâncias capacitivas de $10\ \Omega$.
4. A seqüência de fases do sistema Y-Y da Fig. 23.42 é ABC.
 - a. Determine os ângulos θ_2 e θ_3 .
 - b. Determine as tensões de fase, em forma fasorial.
 - c. Determine as correntes de fase, em forma fasorial.
 - d. Desenhe o diagrama fasorial das correntes determinadas no item (c) e demonstre que a soma fasorial das três correntes é zero.
 - e. Determine o módulo das correntes de linha.
 - f. Determine o módulo das tensões de linha.

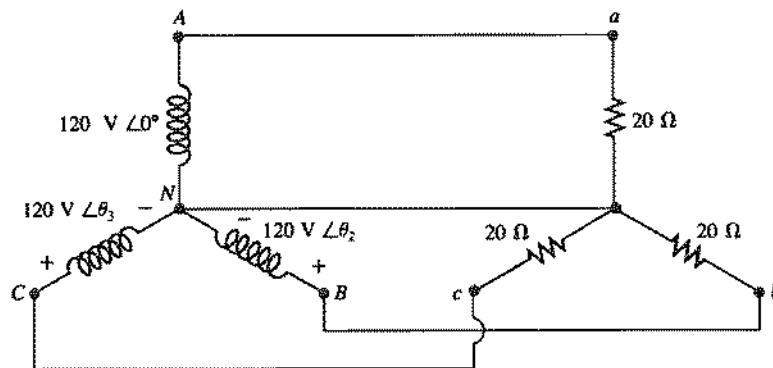


Fig. 23.42 Problema 4.

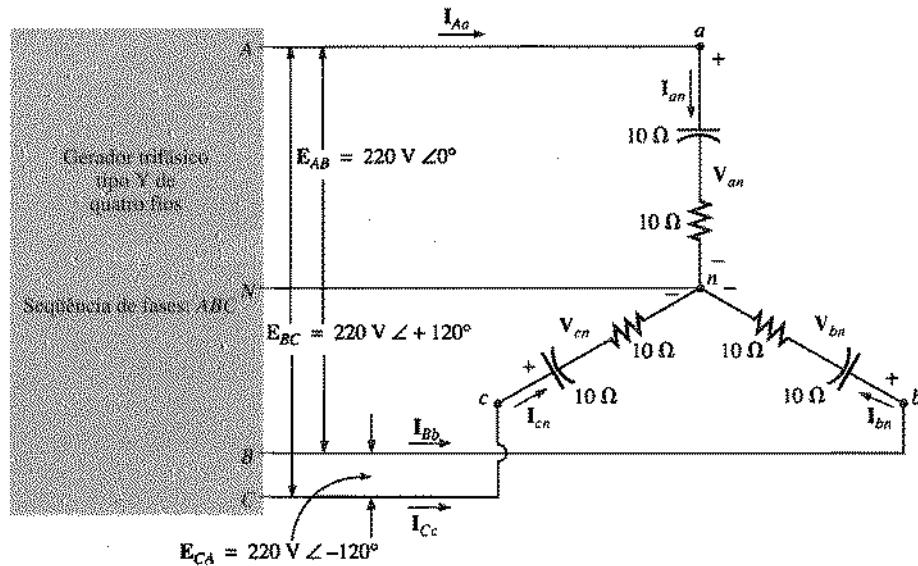


Fig. 23.43 Problemas 7, 44 e 51.

5. Repita o Problema 4 se as resistências da carga forem substituídas por resistores de $9\ \Omega$ em série com reatâncias indutivas de $12\ \Omega$.
6. Repita o Problema 4 se as resistências da carga forem substituídas por resistores de $6\ \Omega$ em paralelo com reatâncias capacitivas de $8\ \Omega$.
7. Para o sistema da Fig. 23.43, determine o módulo das tensões e correntes desconhecidas.
- *8. Determine o módulo da tensão E_{ab} no circuito trifásico equilibrado da Fig. 23.44.
- *9. Para o sistema Y-Y da Fig. 23.45:
 - a. Encontre o módulo e o ângulo de fase das tensões E_{an} , E_{bn} e E_{cn} .
 - b. Determine o módulo e o ângulo de fase das correntes I_{an} , I_{bn} e I_{cn} .
 - c. Encontre o módulo e o ângulo de fase das correntes I_{ab} , I_{bc} e I_{ca} .
 - d. Determine o módulo e o ângulo de fase das tensões V_{an} , V_{bn} e V_{cn} .

SEÇÃO 23.6 O Sistema Y-Δ

10. Uma carga tipo Δ equilibrada com uma resistência de $20\ \Omega$ por ramo é ligada a um gerador trifásico tipo Y de três fios com uma tensão de linha de 208 V. Calcule o módulo
 - a. da tensão de fase do gerador.
 - b. da tensão de fase da carga.
 - c. da corrente de fase da carga.
 - d. da corrente de linha.
11. Repita o Problema 10 se as resistências da carga forem substituídas por resistores de $6,8\ \Omega$ em série com reatâncias indutivas de $14\ \Omega$.

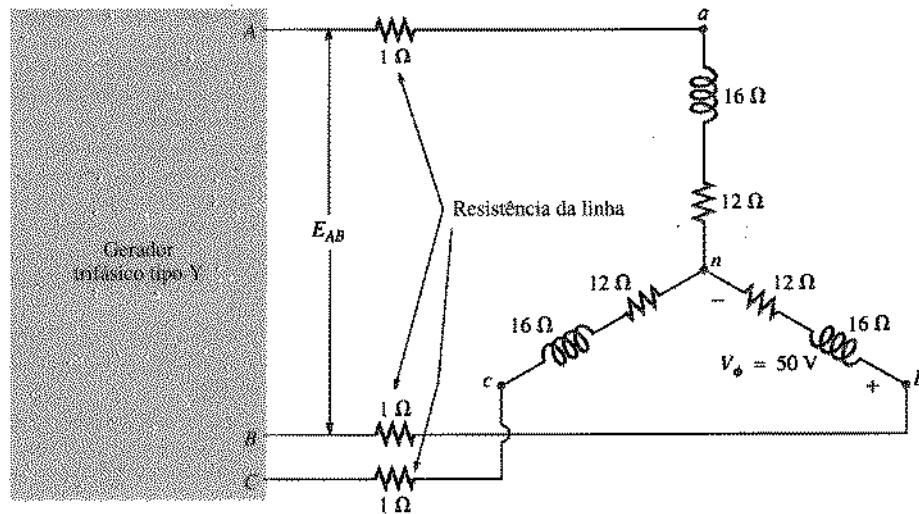


Fig. 23.44 Problema 8.

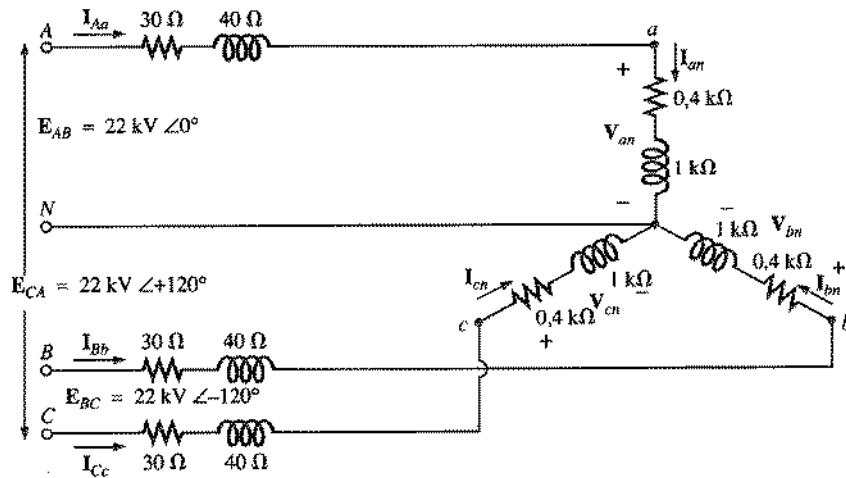


Fig. 23.45 Problemas 9 e 53.

12. Repita o Problema 10 se as resistências da carga forem substituídas por resistências de 18Ω em paralelo com reatâncias capacitivas de 18Ω .

13. A seqüência de fases do sistema Y-Δ da Fig. 23.46 é ABC.

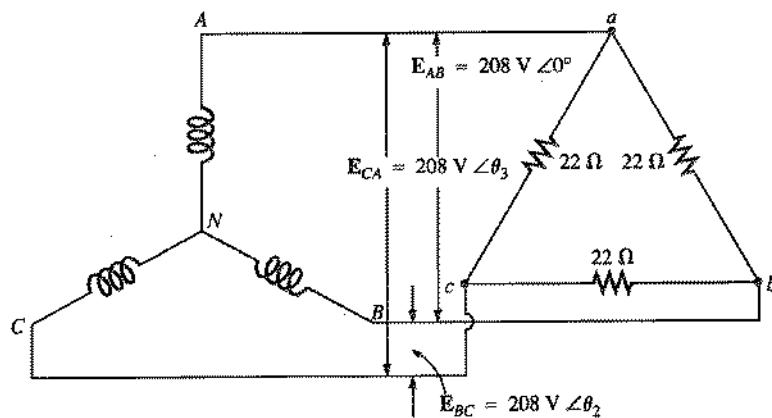


Fig. 23.46 Problemas 13 e 45.



- a. Determine os ângulos θ_2 e θ_3 .
 b. Determine as tensões de fase da carga em forma fasorial.
 c. Desenhe o diagrama fasorial das tensões encontradas no item (b) e demonstre que a soma das três tensões é zero.
 d. Determine as correntes de fase em forma fasorial.
 e. Determine o módulo das correntes de linha.
 f. Determine o módulo das tensões de fase do gerador.
 14. Repita o Problema 13 se as resistências da carga forem substituídas por resistências de $100\ \Omega$ em série com reatâncias capacitivas de $100\ \Omega$.
 15. Repita o Problema 14 se as resistências da carga forem substituídas por resistências de $3\ \Omega$ em paralelo com reatâncias indutivas de $4\ \Omega$.
 16. Para o sistema da Fig. 23.47, determine o módulo das tensões e correntes desconhecidas.

SEÇÃO 23.9 Os Sistemas Trifásicos $\Delta-\Delta$ e $\Delta-Y$

18. Uma carga tipo Y equilibrada com uma resistência de $30\ \Omega$ por ramo é ligada a um gerador trifásico Δ com uma tensão de linha de $208\ V$. Calcule o módulo
 a. da tensão de fase do gerador.
 b. da tensão de fase da carga.
 c. da corrente de fase da carga.
 d. da corrente de linha.
 19. Repita o Problema 18 se as resistências da carga forem substituídas por resistências de $12\ \Omega$ em série com reatâncias indutivas de $12\ \Omega$.
 20. Repita o Problema 18 se as resistências da carga forem substituídas por resistores de $15\ \Omega$ em paralelo com reatâncias capacitivas de $20\ \Omega$.

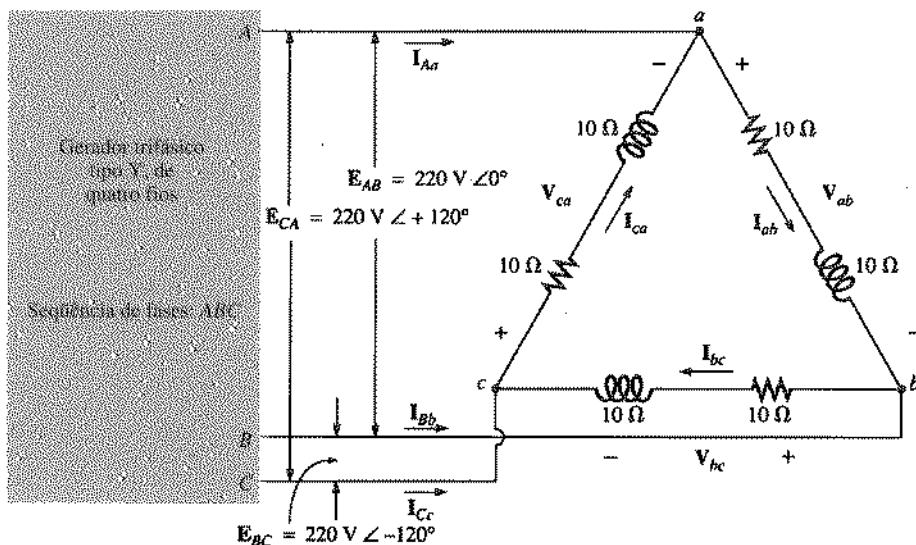


Fig. 23.47 Problemas 16 e 52.

- *17. Para a carga tipo Δ da Fig. 23.48,
 a. Encontre o módulo e o ângulo de fase das correntes de fase I_{ab} , I_{bc} e I_{ca} .
 b. Calcule o módulo e o ângulo de fase das correntes de linha I_{Aa} , I_{Bb} e I_{Cc} .
 c. Determine o módulo e o ângulo de fase das tensões E_{ab} , E_{bc} e E_{ca} .
 *21. Para o sistema da Fig. 23.49, determine o módulo das tensões e correntes desconhecidas.
 22. Repita o Problema 21 se as resistências da carga forem substituídas por resistores de $10\ \Omega$ em série com reatâncias indutivas de $20\ \Omega$.
 23. Repita o Problema 21 se as resistências da carga forem substituídas por resistores de $20\ \Omega$ em paralelo com reatâncias capacitivas de $15\ \Omega$.

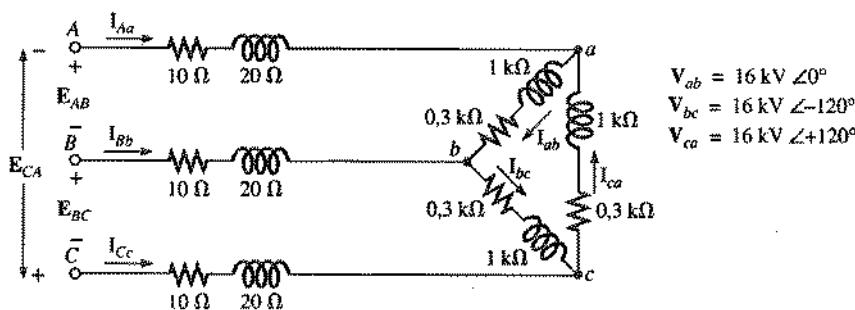


Fig. 23.48 Problema 17.

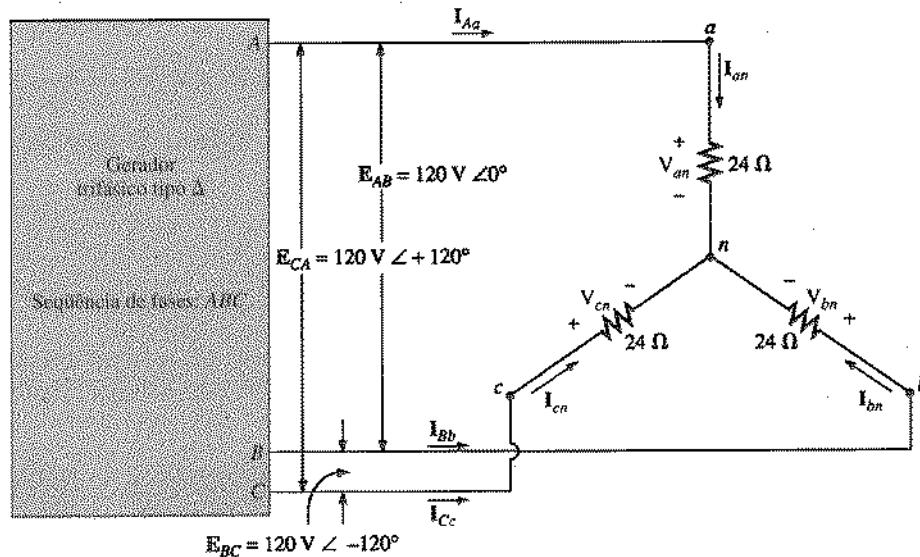


Fig. 23.49 Problema 21.

24. Uma carga do tipo Δ equilibrada com uma resistência de 220Ω por ramo é ligada a um gerador trifásico tipo Δ com uma tensão de linha de 440 V . Calcule o módulo
 - da tensão de fase do gerador.
 - da tensão de fase da carga.
 - da corrente de fase da carga.
 - da corrente de linha.
25. Repita o Problema 24 se as resistências da carga forem substituídas por resistências de 12Ω em série com reatâncias capacitivas de 9Ω .
26. Repita o Problema 24 se as resistências da carga forem substituídas por resistências de 22Ω em paralelo com reatâncias indutivas de 22Ω .
27. A sequência de fases do sistema Δ - Δ da Fig. 23.50 é ABC.
 - Determine os ângulos θ_2 e θ_3 .
 - Determine as tensões de fase da carga em forma fasorial.
 - Desenhe o diagrama fasorial das tensões encontradas no item (b) e determine que a soma das três tensões é zero.
 - Determine as correntes de fase da carga em forma fasorial.
 - Determine o módulo das correntes de linha.
28. Repita o Problema 25 se as resistências de carga forem substituídas por resistências de 12Ω em série com reatâncias indutivas de 16Ω .

29. Repita o Problema 25 se as resistências de carga forem substituídas por resistências de 20Ω em paralelo com reatâncias capacitivas de 20Ω .

SEÇÃO 23.10 Potência

30. Determine a potência média, a potência reativa, a potência aparente e o fator de potência no circuito trifásico do Problema 2.
31. Determine a potência média, a potência reativa, a potência aparente e o fator de potência no circuito trifásico do Problema 4.
32. Determine a potência média, a potência reativa, a potência aparente e o fator de potência no circuito trifásico do Problema 7.
33. Determine a potência média, a potência reativa, a potência aparente e o fator de potência no circuito trifásico do Problema 12.
34. Determine a potência média, a potência reativa, a potência aparente e o fator de potência no circuito trifásico do Problema 14.
35. Determine a potência média, a potência reativa, a potência aparente e o fator de potência no circuito trifásico do Problema 16.
36. Determine a potência média, a potência reativa, a potência aparente e o fator de potência no circuito trifásico do Problema 20.
37. Determine a potência média, a potência reativa, a potência aparente e o fator de potência no circuito trifásico do Problema 22.

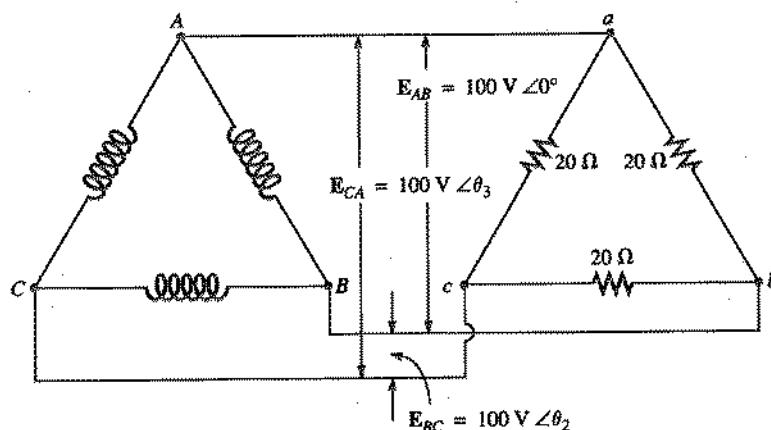


Fig. 23.50 Problema 27.

38. Determine a potência média, a potência reativa, a potência aparente e o fator de potência no circuito trifásico do Problema 26.
39. Determine a potência média, a potência reativa, a potência aparente e o fator de potência no circuito trifásico do Problema 28.
40. Uma carga trifásica equilibrada tipo Y tem uma tensão de linha de 200 V e dissipava 4800 W com um fator de potência de 0,8 atrasado. Determine a impedância por fase em notação retangular.
41. Uma carga trifásica equilibrada tipo Y tem uma tensão de linha de 208 V e dissipava 1200 W com um fator de potência de 0,6 adiantado. Determine a impedância de cada fase em notação retangular.
- *42. Determine a potência média, a potência reativa, a potência aparente e o fator de potência no sistema da Fig. 23.51.

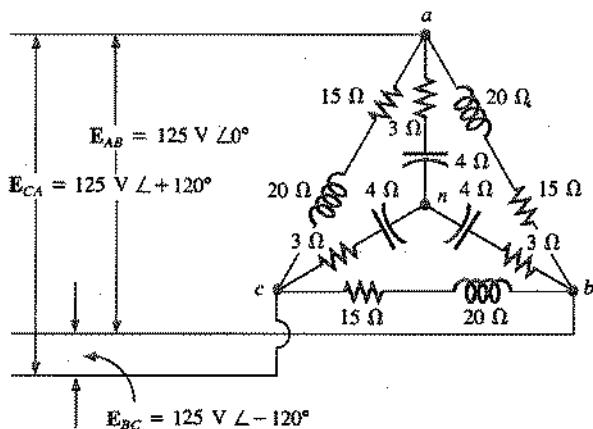


Fig. 23.51 Problema 42.

- *43. O sistema Y-Y da Fig. 23.52 possui uma carga equilibrada e uma impedância de linha $Z_{\text{linha}} = 4 \Omega + j20 \Omega$. Se a tensão de linha do gerador é 16.000 V e a potência total fornecida à carga é 1200 kW com uma corrente de 80 A, determine:
- O módulo das tensões de fase do gerador.
 - O módulo das correntes de linha.
 - A potência total fornecida pela fonte.
 - O fator de potência do conjunto linha-carga.
 - O módulo e o ângulo de fase da corrente I_{AN} se $E_{AN} = E_{AN} \angle 0^\circ$.
 - O módulo e o ângulo de fase da tensão de fase V_{an} .
 - A impedância da carga por fase em coordenadas retangulares.
 - A diferença entre o fator de potência da carga e o fator de potência de todo o sistema (incluindo Z_{linha}).
 - A eficiência do sistema.

SEÇÃO 23.11 O Método dos Três Wattímetros

44. a. Indique as ligações necessárias para medir a potência média fornecida à carga da Fig. 23.43, usando três wattímetros.

- b. Determine a potência média dissipada pela carga e as leituras dos três wattímetros.
45. Repita o Problema 44 para o circuito da Fig. 23.46.

SEÇÃO 23.12 O Método dos Dois Wattímetros

46. a. Para o sistema de três fios da Fig. 23.53, indique as ligações corretas de um segundo wattímetro para que seja possível mediar a potência média total fornecida à carga.
- b. Se a leitura de um dos wattímetros é 200 W e a leitura do outro é 85 W, qual é a potência total dissipada se o fator de potência da carga é 0,8 adiantado?
- c. Repita o item (b) se o fator de potência da carga for 0,2 atrasado e as leituras dos wattímetros forem 200 W e 100 W.

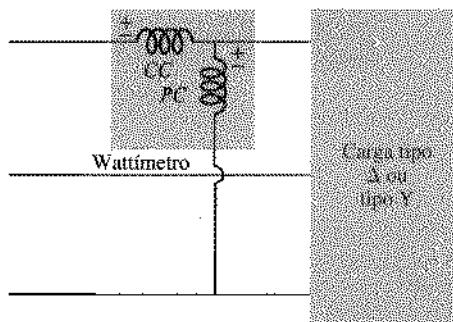


Fig. 23.53 Problema 46.

47. Indique três formas diferentes de ligar dois wattímetros para medir a potência média total fornecida à carga do Problema 16.
- *48. Para o sistema Y-Δ da Fig. 23.54:
- Determine o módulo e o ângulo de fase das correntes de fase.
 - Encontre o módulo e o ângulo de fase das correntes de linha.
 - Determine as leituras dos dois wattímetros.
 - Encontre a potência média total fornecida à carga.

SEÇÃO 23.13 Cargas Não-Equilibradas em Sistemas Tipo Y de Quatro Fios

- *49. Para o sistema da Fig. 23.55:
- Calcule o módulo das tensões de fase da carga.
 - Encontre o módulo das correntes de fase da carga.
 - Determine a potência média, a potência reativa, a potência aparente e o fator de potência do sistema.
 - Determine as correntes de fase em forma fasorial.
 - Determine a corrente de neutro I_n a partir dos resultados do item (c).

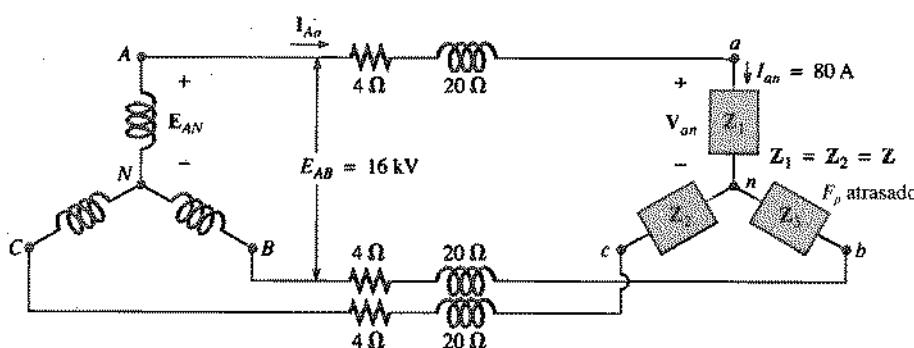


Fig. 23.52 Problema 43.

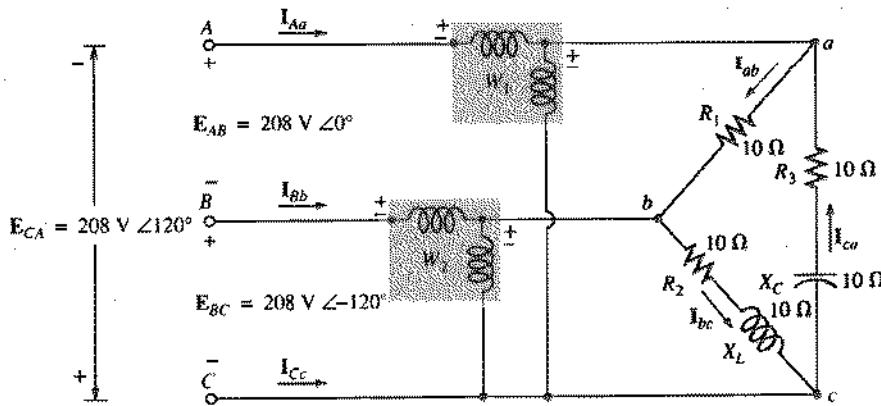


Fig. 23.54 Problemas 48 e 54.

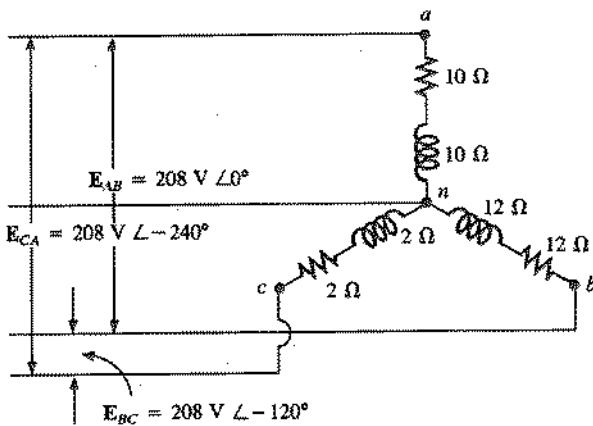


Fig. 23.55 Problema 49.

SEÇÃO 23.14 Cargas Não-Equilibradas em Sistemas Tipo Y de Três Fios

- *50. Para o sistema trifásico de três fios da Fig. 23.56, determine o módulo da corrente de fase da carga, a potência média, a potência reativa, a potência aparente e o fator de potência.

SEÇÃO 23.15 Análise Computacional

PSpice (DOS)

51. Escreva o arquivo de entrada para determinar as tensões e correntes de fase no circuito da Fig. 23.43.
52. Escreva o arquivo de entrada para determinar as correntes de fase no circuito da Fig. 23.47.
53. Escreva o arquivo de entrada para determinar as tensões e correntes de fase no circuito da Fig. 23.45.
54. Escreva o arquivo de entrada para determinar as correntes de fase no circuito da Fig. 23.54.

Linguagens de Programação (C++, BASIC, PASCAL etc.)

55. Escreva um programa para calcular o módulo de todas as tensões e correntes de uma carga equilibrada do tipo Y a partir das tensões de linha e da impedância por fase.
56. Repita o Problema 55 para uma carga do tipo Δ.
57. Escreva um programa para calcular, para uma carga equilibrada tipo Y,
 - a. o módulo das correntes e tensões na carga.
 - b. a potência real, reativa e aparente por fase recebida pela carga.
 - c. a potência real, reativa e aparente total recebida pela carga.
 - d. o fator de potência da carga.
58. Repita o Problema 57 para uma carga equilibrada tipo Δ.

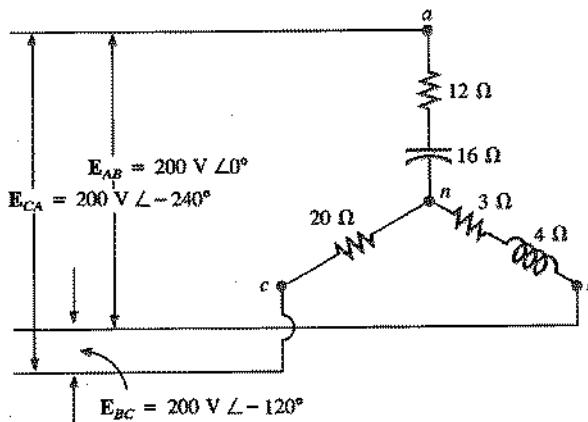


Fig. 23.56 Problema 50.



GLOSSÁRIO

Carga polifásica não-equilibrada Carga cuja impedância não é a mesma para todas as fases.

Corrente de fase Corrente em um dos ramos de um sistema polifásico.

Corrente de linha Corrente que vai do gerador para a carga em um sistema polifásico.

Fio neutro Condutor que liga o ponto neutro do gerador ao ponto neutro da carga em um sistema polifásico.

Gerador monofásico Gerador que produz apenas uma tensão senoidal para cada revolução do rotor.

Gerador polifásico Gerador que produz mais de uma tensão senoidal para cada revolução do rotor.

Gerador tipo (Δ) Gerador trifásico no qual as ligações entre as três fases lembram a forma da letra grega delta (Δ).

Gerador tipo (Y) Gerador trifásico no qual as ligações entre as três fases lembram a forma da letra Y.

Método dos dois wattímetros Método para determinar a potência total em circuito trifásico com o auxílio de dois wattímetros.

Método dos três wattímetros Método para determinar a potência total em um circuito trifásico com o auxílio de três wattímetros.

Seqüência de fases Ordem na qual as tensões senoidais produzidas por um gerador polifásico se sucedem no tempo.

Tensão de fase Tensão entre os terminais de um dos ramos de um sistema polifásico.

Tensão de linha Tensão entre as linhas de um sistema polifásico.