

DISPOSITIVOS ELETRÔNICOS

e teoria de circuitos

Parte 3

8^a Edição

Robert L. Boylestad
Louis Nashelsky

Editora

www.saraiva.com.br | 0800 774 7747 | 11 3002 2013



Teoremas da Análise de Circuitos

9.1 INTRODUÇÃO

Apresentaremos neste capítulo os teoremas fundamentais da análise de circuitos, que são os teoremas da *superposição*, de *Thévenin*, de *Norton*, da *transferência máxima de potência*, da *substituição*, de *Millman* e da *reciprocidade*. Para cada um deles serão consideradas algumas aplicações. É importante termos uma compreensão clara desses teoremas, pois eles serão aplicados com frequência no restante deste curso.

9.2 TEOREMA DA SUPERPOSIÇÃO

Este teorema pode ser utilizado, como os métodos do capítulo anterior, para encontrar a solução de problemas que envolvem circuitos com duas ou mais fontes que não estejam em série nem em paralelo. A vantagem mais evidente deste método é dispensar o uso de ferramentas matemáticas, como os determinantes, para determinar o valor das incógnitas (tensões ou correntes). Em vez disso, neste método, o efeito de cada fonte é levado em conta separadamente, e o valor das grandezas procuradas é obtido efetuando a soma algébrica desses efeitos individuais.

O enunciado do teorema da superposição é o seguinte:

A corrente que atravessa, ou a tensão entre os terminais de um elemento de um circuito linear bilateral é igual à soma algébrica das correntes ou das tensões produzidas independentemente por cada uma das fontes.

Algumas vezes, é possível, ao aplicarmos o teorema, considerar o efeito de duas fontes simultaneamente, reduzindo assim o número de circuitos a ser analisado. Em geral, no entanto,

$$\frac{\text{número de circuitos}}{\text{a serem analisados}} = \frac{\text{número de fontes}}{\text{independente}} \quad (9.1)$$

Para levar em conta separadamente os efeitos de cada fonte é necessário que estas sejam removidas e substituídas sem afetar o resultado final. Quando, ao aplicarmos este teorema, desejamos remover uma fonte de tensão, devemos igualar a ddp entre os terminais desta fonte a zero (a fonte deve ser “curto-circuitada”); se uma fonte de corrente tiver que ser removida, seus terminais deverão ficar isolados entre si (circuito aberto). Qualquer resistência ou condutância interna associada a essas fontes deve ser mantida no circuito.

A Fig. 9.1 ilustra as substituições no caso de fontes ideais, e a Fig. 9.2 ilustra as substituições para o caso de fontes reais, que possuem uma resistência interna.

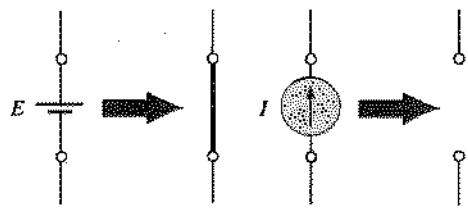


Fig. 9.1 Remoção dos efeitos de fontes ideais.

A corrente total que atravessa qualquer parte do circuito é igual à soma algébrica das correntes que seriam produzidas separadamente por todas as fontes. Em um circuito com duas fontes, por exemplo, se elas produzem correntes com sentidos opostos no mesmo resistor, a intensidade da corrente resultante é dada pela diferença das duas correntes, e seu sentido é o da corrente de maior intensidade. Se as correntes produzidas pelas duas fontes têm o mesmo sentido, a intensidade da corrente resultante é a soma da intensidade das duas correntes; o sentido é o mesmo das duas correntes.

O mesmo princípio pode ser usado para determinar a diferença de potencial entre dois pontos de um circuito e pode ser aplicado a circuitos com um número arbitrário de fontes.

O princípio da superposição não pode ser usado para calcular a potência dissipada em um circuito, já que a dissipação de potência em um resistor varia com o quadrado da corrente ou tensão, sendo portanto um efeito não-linear. A corrente que atravessa o resistor R da Fig. 9.3(a), por exemplo, em um circuito com duas fontes é I_1 , se levarmos em conta apenas o efeito de uma das fontes. A corrente produzida pela segunda fonte é I_2 , como ilustra a Fig. 9.3(b). Aplicando o teorema da superposição, obtemos para a corrente total no resistor, que denotaremos por I_T [Fig. 9.3(c)]:

$$I_T = I_1 + I_2$$

A potência fornecida ao resistor no caso da Fig. 9.3(a) é

$$P_1 = I_1^2 R$$

enquanto, no caso da Fig. 9.3(b), para o mesmo resistor temos

$$P_2 = I_2^2 R$$

Se supusermos que a potência total fornecida ao resistor [Fig. 9.3(c)] pode ser obtida simplesmente somando as potências fornecidas por cada uma das fontes, teremos:

ou $P_T = P_1 + P_2 = I_1^2 R + I_2^2 R = I_T^2 R$
 $I_T^2 = I_1^2 + I_2^2$

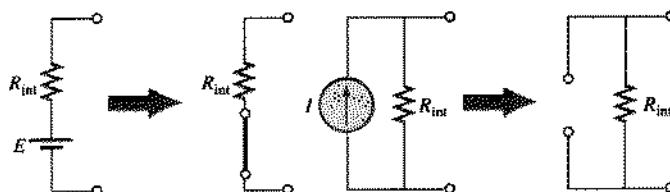


Fig. 9.2 Remoção dos efeitos de fontes reais.

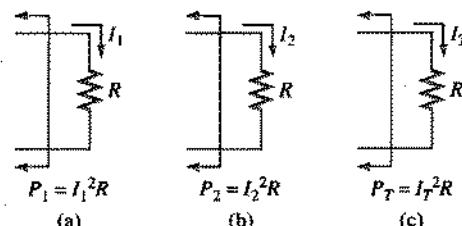


Fig. 9.3 Demonstração do fato de que o teorema da superposição não se aplica ao cálculo de potências.

Esta última relação entre os valores das correntes é, no entanto, incorreta, o que pode ser demonstrado elevando ao quadrado a corrente total, obtida através do teorema da superposição:

$$I_T^2 = (I_1 + I_2)^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2$$

que difere da expressão obtida quando simplesmente somamos as duas potências.

Deste modo, em geral,

a potência total fornecida a um elemento resistivo deve ser determinada utilizando a corrente total que o atravessa ou a tensão total entre seus terminais, e não simplesmente somando as potências fornecidas pelas fontes separadamente.

EXEMPLO 9.1 Determine I_1 para o circuito da Fig. 9.4.

Solução: Fazendo $E=0$ V no circuito da Fig. 9.4, obtemos o circuito da Fig. 9.5(a), no qual a bateria de 30 V foi substituída por um curto-círcuito.

Como vemos na Fig. 9.5(a), toda a corrente fornecida pela fonte de 3 A passa pelo ramo onde está o curto-círcuito, e assim $I'_1 = 0$ A. Se aplicarmos a regra dos divisores de corrente,

$$I'_1 = \frac{R_{sc}I}{R_{sc} + R_1} = \frac{(0 \Omega)I}{0 \Omega + 6 \Omega} = 0 \text{ A}$$

Por outro lado, se fizermos I igual a zero ampères, obteremos o circuito da Fig. 9.5(b), no qual a fonte de corrente foi substituída por um circuito aberto. De acordo com a definição de resistência,

$$I''_1 = \frac{E}{R_1} = \frac{30 \text{ V}}{6 \Omega} = 5 \text{ A}$$

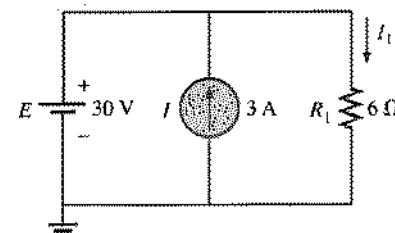
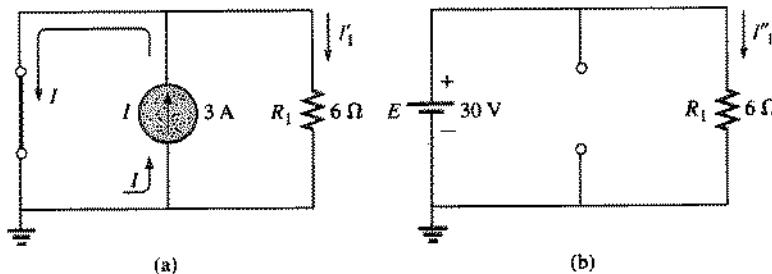


Fig. 9.4 Exemplo 9.1.

Fig. 9.5 (a) Contribuição de I para I_1 , (b) Contribuição de E para I_1 .

Como I' e I'' têm o mesmo sentido, a corrente I_1 é dada pela soma destas duas correntes, ou seja,

$$I_1 = I'_1 + I''_1 = 0 \text{ A} + 5 \text{ A} = 5 \text{ A}$$

Note que neste caso a fonte de corrente não afeta a corrente que atravessa o resistor de 6Ω . A ddp entre os terminais do resistor é 30 V , pois ele está em paralelo com a fonte de tensão.

EXEMPLO 9.2 Usando o teorema da superposição, calcule a corrente que atravessa o resistor de 4Ω da Fig. 9.6. Observe que este é um circuito de duas fontes, semelhante aos estudados no Cap. 8.

Solução: Levando em conta somente os efeitos da fonte de 54 V (Fig. 9.7):

$$R_T = R_1 + R_2 \parallel R_3 = 24 \Omega + 12 \Omega \parallel 4 \Omega = 24 \Omega + 3 \Omega = 27 \Omega$$

$$I = \frac{E_1}{R_T} = \frac{54 \text{ V}}{27 \Omega} = 2 \text{ A}$$

Utilizando a regra dos divisores de corrente,

$$I'_3 = \frac{R_2 I}{R_2 + R_3} = \frac{(12 \Omega)(2 \text{ A})}{12 \Omega + 4 \Omega} = \frac{24 \text{ A}}{16} = 1,5 \text{ A}$$

Considerando agora somente os efeitos da fonte de 48 V (Fig. 9.8):

$$R_T = R_3 + R_1 \parallel R_2 = 4 \Omega + 24 \Omega \parallel 12 \Omega = 4 \Omega + 8 \Omega = 12 \Omega$$

$$I''_3 = \frac{E_2}{R_T} = \frac{48 \text{ V}}{12 \Omega} = 4 \text{ A}$$

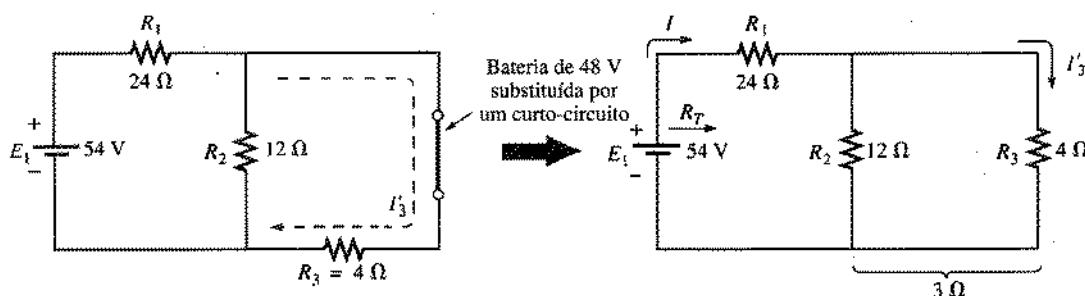
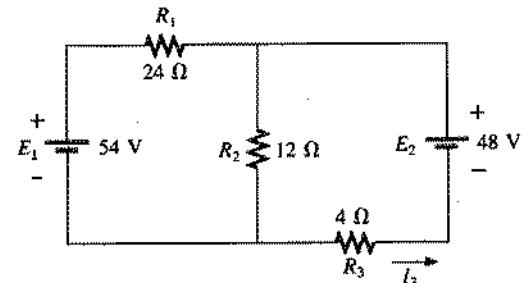
Fig. 9.7 Efeito de E_1 sobre a corrente I_3 .

Fig. 9.6 Exemplo 9.2.

A corrente resultante no resistor de 4Ω será então (Fig. 9.9):

$$I_3 = I''_3 - I'_3 = 4 \text{ A} - 1,5 \text{ A} = 2,5 \text{ A} \quad (\text{no sentido de } I''_3)$$

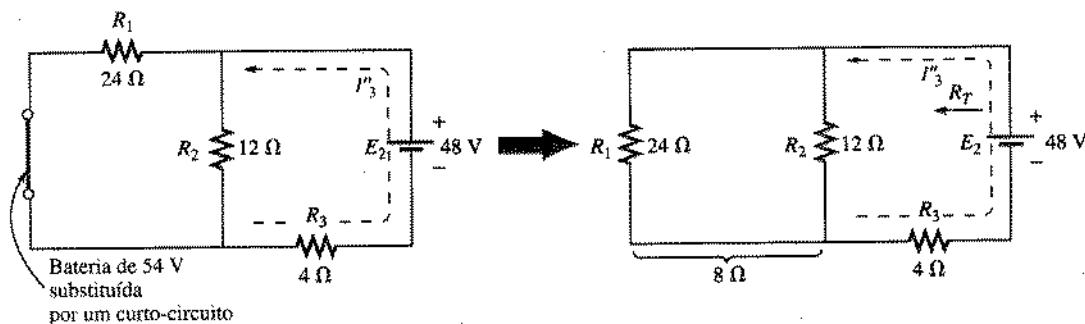
EXEMPLO 9.3

- Utilizando o teorema da superposição, determine a corrente no resistor de 6Ω do circuito da Fig. 9.10.
- Verifique que o teorema da superposição não pode ser usado para calcular a potência total dissipada no circuito.

Soluções: a. Considerando apenas o efeito da fonte de 36 V (Fig. 9.11):

$$I'_2 = \frac{E}{R_T} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{36 \text{ V}}{12 \Omega + 6 \Omega} = 2 \text{ A}$$

Considerando o efeito isolado da fonte de 9 A (Fig. 9.12):
Aplicando a regra dos divisores de tensão,

Fig. 9.8 Efeito de E_2 sobre a corrente I_3 .Fig. 9.9 Valor resultante de I_3 .

$$I''_2 = \frac{R_1 I}{R_1 + R_2} = \frac{(12\Omega)(9\text{ A})}{12\Omega + 6\Omega} = \frac{108\text{ A}}{18} = 6\text{ A}$$

A corrente total no resistor de 6Ω (Fig. 9.13) é

$$I_2 = I'_2 + I''_2 = 2\text{ A} + 6\text{ A} = 8\text{ A}$$

b. A potência dissipada no resistor de 6Ω é

$$\text{Potência} = I^2 R = (8\text{ A})^2(6\Omega) = 384\text{ W}$$

Por outro lado, uma *utilização equivocada* do princípio da superposição nos levaria a

$$P_1 = (I'_2)^2 R = (2\text{ A})^2(6\Omega) = 24\text{ W}$$

$$P_2 = (I''_2)^2 R = (6\text{ A})^2(6\Omega) = 216\text{ W}$$

$$P_1 + P_2 = 240\text{ W} \neq 384\text{ W}$$

Isto ocorre porque $2\text{ A} + 6\text{ A} = 8\text{ A}$, mas

$$(2\text{ A})^2 + (6\text{ A})^2 \neq (8\text{ A})^2$$

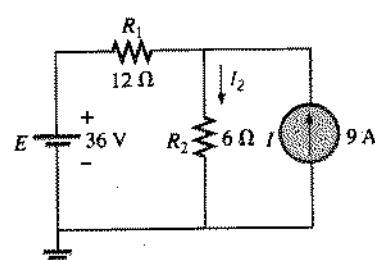
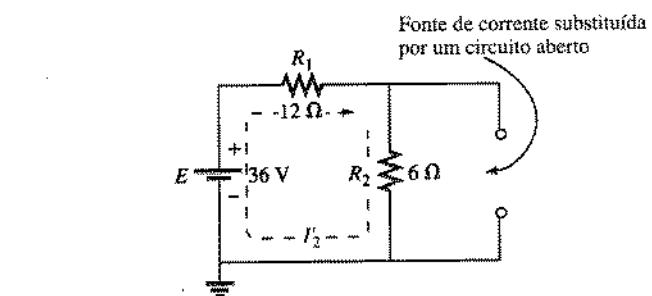
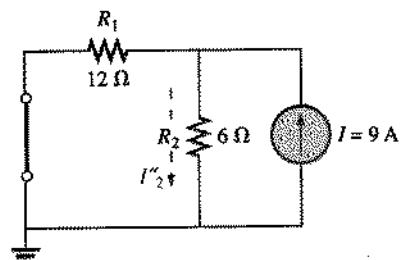


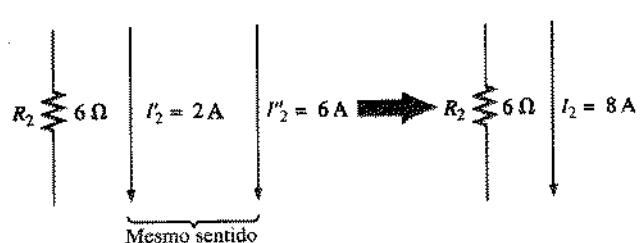
Fig. 9.10 Exemplo 9.3.

Fig. 9.11 Contribuição de E para I_2 .Fig. 9.12 Contribuição I para I_2 .

Conforme ressaltamos anteriormente, o teorema da superposição não pode ser usado para calcular a potência total porque a potência é uma função quadrática da corrente ou da tensão ($I^2 R$ ou V^2/R).

A Fig. 9.14 mostra um gráfico da potência dissipada no resistor de 6Ω em função da corrente.

É evidente que $x + y \neq z$ ou $24\text{ W} + 216\text{ W} \neq 384\text{ W}$, e portanto o princípio da superposição não se aplica. No entanto,

Fig. 9.13 Valor resultante de I_2 .

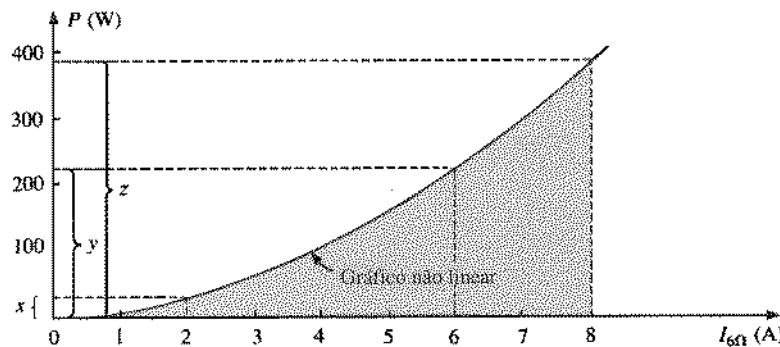


Fig. 9.14 Gráfico da potência fornecida ao resistor de 6Ω em função da corrente que o atravessa.

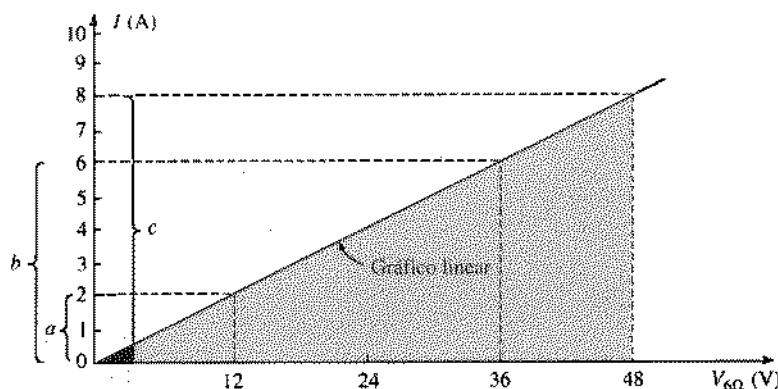


Fig. 9.15 Gráfico de I em função de V para o resistor de 6Ω .

para uma relação linear, como a que existe entre a tensão e a corrente para o resistor de 6Ω , é válido o princípio da superposição, como ilustra o gráfico da Fig. 9.15, no qual $a + b = c$ ou $2 A + 6 A = 8 A$.

EXEMPLO 9.4 Utilizando o teorema da superposição, determine a corrente I_2 que atravessa o resistor de $12 \text{ k}\Omega$ da Fig. 9.16.

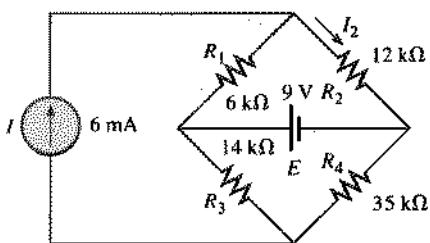


Fig. 9.16 Exemplo 9.4.

Solução: Levando em conta apenas o efeito da fonte de corrente de 6 mA (Fig. 9.17):

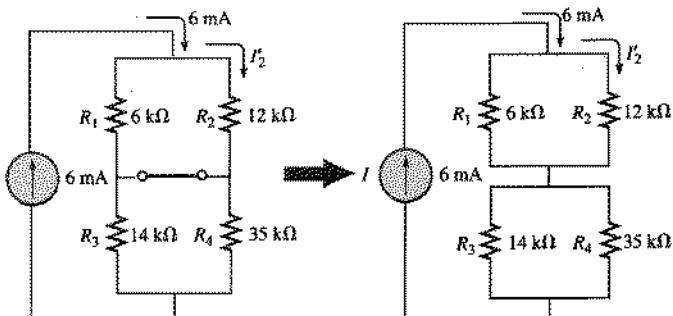


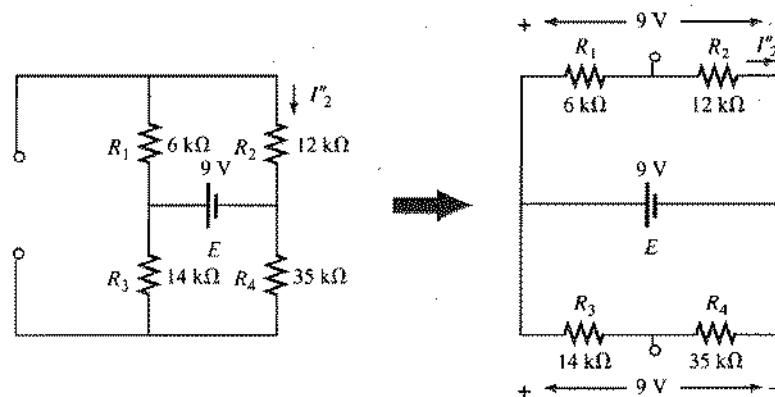
Fig. 9.17 Efeito da fonte de corrente I sobre a corrente I_2 .

Regra dos divisores de corrente:

$$I'_2 = \frac{R_1 I}{R_1 + R_2} = \frac{(6 \text{ k}\Omega)(6 \text{ mA})}{6 \text{ k}\Omega + 12 \text{ k}\Omega} = 2 \text{ mA}$$

Levando em conta somente o efeito da fonte de tensão de 9 V (Fig. 9.18):

$$I''_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{9 \text{ V}}{6 \text{ k}\Omega + 12 \text{ k}\Omega} = 0,5 \text{ mA}$$

Fig. 9.18 Efeito da fonte de tensão E sobre a corrente I_2 .

Como I'_1 e I''_2 atravessam R_2 no mesmo sentido, a corrente desejada é a soma das duas:

$$\begin{aligned}I_2 &= I'_1 + I''_2 \\&= 2 \text{ mA} + 0,5 \text{ mA} \\&= 2,5 \text{ mA}\end{aligned}$$

EXEMPLO 9.5 Encontre a corrente no resistor de 2Ω do circuito da Fig. 9.19. Como existem três fontes, será preciso analisar três circuitos diferentes

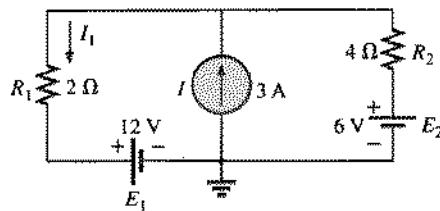
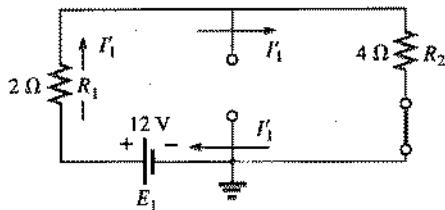
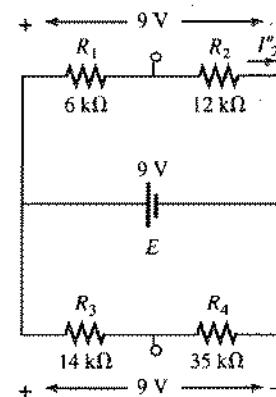


Fig. 9.19 Exemplo 9.5.

Solução: Levando em conta apenas o efeito da fonte de 12 V (Fig. 9.20):

$$I'_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_2} = \frac{12 \text{ V}}{2 \Omega + 4 \Omega} = \frac{12 \text{ V}}{6 \Omega} = 2 \text{ A}$$

Fig. 9.20 Efeito de E_1 sobre a corrente I .Fig. 9.22 Efeito de I sobre a corrente I_1 .

Considerando somente o efeito da fonte de 6 V (Fig. 9.21):

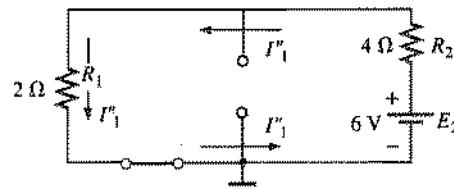
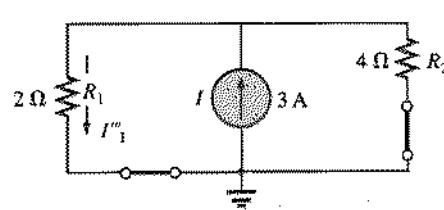
$$I''_1 = \frac{E_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \text{ V}}{2 \Omega + 4 \Omega} = \frac{6 \text{ V}}{6 \Omega} = 1 \text{ A}$$

Levando em conta apenas o efeito da fonte de corrente de 3 A (Fig. 9.22),

$$I'''_1 = \frac{R_2 I}{R_1 + R_2} = \frac{(4 \Omega)(3 \text{ A})}{2 \Omega + 4 \Omega} = \frac{12 \text{ A}}{6} = 2 \text{ A}$$

Na Fig. 9.23 é ilustrada a obtenção da corrente total no resistor de 2Ω . Temos:

$$\begin{aligned}&\text{Mesmo sentido que } I_1 \text{ na Fig. 9.19} \quad \text{Sentido oposto ao de } I_1 \text{ na Fig. 9.19} \\I_1 &= I'_1 + I''_1 - I'''_1 \\&= 1 \text{ A} + 2 \text{ A} - 2 \text{ A} = 1 \text{ A}\end{aligned}$$

Fig. 9.21 Efeito de E_2 sobre a corrente I_1 .Fig. 9.23 Efeito de I sobre a corrente I_1 .

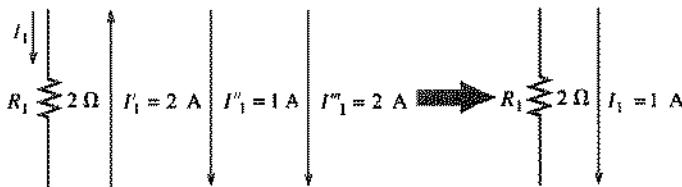
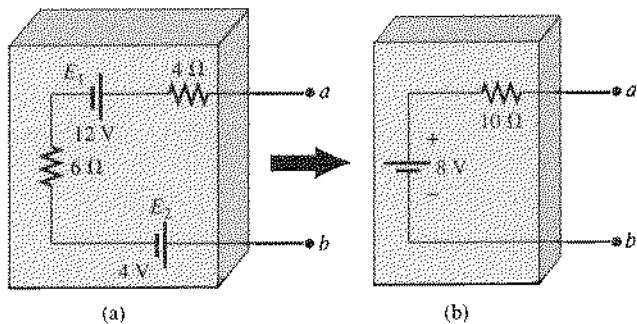
Fig. 9.23 Valor resultante de I_1 .

Fig. 9.25 Efeito da aplicação do teorema de Thévenin.

9.3 TEOREMA DE THÉVENIN

O teorema de Thévenin afirma que:

Qualquer circuito de corrente contínua linear bilateral de dois terminais pode ser substituído por um circuito equivalente constituído por uma fonte de tensão e um resistor em série, como na Fig. 9.24.

Na Fig. 9.25(a), por exemplo, o circuito no interior da caixa só está ligado ao exterior por dois terminais, a que denominamos a e b . Utilizando o teorema de Thévenin, é possível substituir tudo que existe no interior da caixa por uma fonte e um resistor, como na Fig. 9.25(b), sem mudar as características do circuito entre os terminais a e b . Em outras palavras, qualquer carga ligada aos terminais a e b se comportará da mesma forma se estiver ligada ao circuito da Fig. 9.25(a) ou ao circuito da Fig. 9.25(b). Nos dois casos, a carga receberá a mesma corrente, tensão e potência. Na discussão que se segue, é importante não esquecer que

a equivalência associada ao teorema de Thévenin se refere somente aos terminais — a disposição interna e as características do circuito original e as do seu equivalente de Thévenin são em geral bem diferentes.

O cálculo do equivalente de Thévenin para o circuito da Fig. 9.25(a) é bem simples; basta efetuar a combinação apropriada das baterias e resistores em série. Observe a completa equivalência entre o circuito da Fig. 9.25(b) e o da Fig. 9.25(a) e também a sua semelhança com a configuração de Thévenin na Fig. 9.24. Vamos agora estabelecer um método que nos permitirá estender este procedimento a configurações mais complexas, terminando sempre com um circuito relativamente simples como o da Fig. 9.24.

Na maioria dos casos, existem outros elementos ligados à direita dos terminais a e b da Fig. 9.25. Para aplicar o teorema, o circuito a ser reduzido à sua forma equivalente de Thévenin deve ser isolado da forma indicada na Fig. 9.25, e os dois terminais

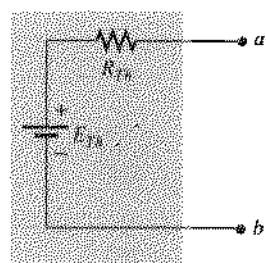


Fig. 9.24 Circuito equivalente de Thévenin.

“de ligação” identificados. Uma vez que tenhamos obtido o circuito equivalente de Thévenin, a tensão, a corrente e a resistência medidas entre os dois terminais “de ligação” serão as mesmas, não interessando se à esquerda de a e b temos o circuito original ou o seu equivalente de Thévenin. Nos dois casos, qualquer carga ligada à direita dos terminais a e b na Fig. 9.25 receberá a mesma corrente e a mesma tensão.

Utilizando esse teorema, podemos atingir dois objetivos importantes. Primeiro, como também acontece com todos os métodos descritos anteriormente, podemos calcular qualquer tensão ou corrente em um circuito linear com uma, duas ou qualquer outro número de fontes. Em segundo lugar, podemos nos concentrar em uma parte específica de um circuito, substituindo o resto do circuito por um equivalente de Thévenin. Na Fig. 9.26, por exemplo, após obtermos o circuito equivalente de Thévenin para a parte sombreada, podemos calcular facilmente a corrente no resistor variável R_C e a tensão entre seus terminais para qualquer valor que R_C possa assumir. Isto é demonstrado no Exemplo 9.6.



Francês (Meaux, Paris) (1857-1927)
Engenheiro telegráfico, oficial e educador
Polytechnique e École Supérieure de
Télégraphie.

Cortesia da Bibliothèque
École Polytechnique, Paris,
França

Embora tenha trabalhado ativamente no estudo e no projeto de sistemas telegráficos (incluindo transmissões subterrâneas), capacitores cilíndricos e eletromagnetismo, Thévenin é mais conhecido por um teorema apresentado pela primeira vez em 1883, na revista científica francesa *Journal de Physique — Théorique et Appliquée*. O título do artigo era “Sur un nouveau théorème d'électricité dynamique” (Sobre um novo teorema da eletricidade dinâmica), e foi originalmente denominado teorema do gerador equivalente. Existem indícios de que um teorema semelhante foi introduzido por Hermann von Helmholtz em 1853. Helmholtz, no entanto, aplicou o teorema somente à fisiologia animal, e não a sistemas geradores ou de comunicação; deste modo, não recebeu o crédito que merecia neste campo. No começo da década de 1920, a AT&T realizou alguns trabalhos pioneiros utilizando o conceito de circuito equivalente, e seus empregados podem ter sido os primeiros a chamar o teorema de teorema de Thévenin. Na verdade, o teorema equivalente ao teorema de Thévenin para fontes de corrente, hoje conhecido como teorema de Norton, foi formulado por um engenheiro da AT&T, Edward L. Norton. O Comandante Thévenin era também um exímio esquiador e chegou a trabalhar como fiscal em uma competição internacional de esqui realizada em Chamonix, França, em 1912.

LEON-CHARLES THÉVENIN

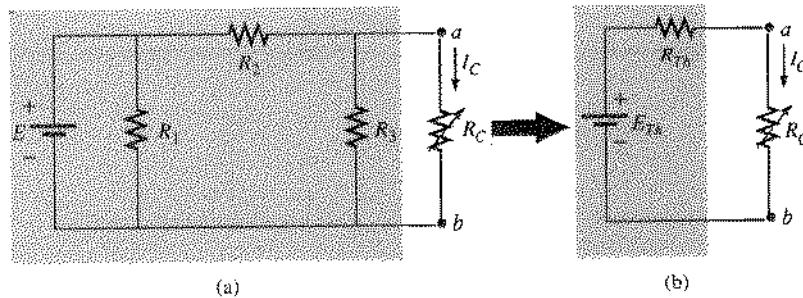


Fig. 9.26 Substituição de um circuito complexo pelo circuito equivalente de Thévenin.

Antes de examinarmos as etapas envolvidas na aplicação deste teorema, é importante fazermos alguns comentários adicionais para garantir que as implicações do teorema de Thévenin sejam compreendidas com clareza. Na Fig. 9.26, todo o circuito, com exceção de R_C , deve ser substituído por uma bateria e um resistor em série, como na Fig. 9.24. Os valores desses dois componentes do circuito equivalente de Thévenin devem ser tais que o resistor R_C se comporte, no circuito da Fig. 9.26(a), da mesma forma que no circuito da Fig. 9.26(b). Em outras palavras, a corrente que atravessa o resistor R_C e a ddp entre seus terminais devem ser as mesmas para os dois circuitos, qualquer que seja o valor de R_C .

Para obter os valores correntes de R_{Th} e E_{Th} , devemos executar a seqüência de passos que aparece a seguir.

Passos preliminares:

1. Isole a parte do circuito para a qual deseja obter um equivalente de Thévenin. No caso da Fig. 9.26(a), por exemplo, seria necessário remover temporariamente o resistor R_C .
2. Assinale claramente os dois terminais do circuito remanescente. (A importância disto ficará óbvia quando estudarmos circuitos mais complexos.)

R_{Th} :

3. Para calcular R_{Th} , elimine todas as fontes (substituindo as fontes de tensão por curto-circuitos e as fontes de corrente por circuitos abertos) e em seguida determine a resistência equivalente entre os dois terminais escolhidos. (Se o circuito original incluir as resistências internas de fontes de tensão e/ou fontes de corrente, estas resistências devem ser mantidas quando as fontes forem eliminadas.)

E_{Th} :

4. Para calcular E_{Th} , introduza todas as fontes de volta no circuito e em seguida determine a ddp entre os dois terminais escolhidos (é neste ponto que costuma acontecer a maior parte das confusões e erros. Tenha sempre em mente que a diferença de potencial deve ser calculada com o circuito aberto entre os terminais assinalados no 2.º passo).

Conclusão:

5. Desenhe o circuito equivalente de Thévenin e recoloque entre os terminais de circuito equivalente a parte que foi removida no 1.º passo. No caso da Fig. 9.26 (a), por exemplo, o resistor R_C seria colocado entre os terminais do circuito equivalente de Thévenin, como na Fig. 9.26 (b).

EXEMPLO 9.6 Encontre o circuito equivalente de Thévenin para a parte sombreada do circuito da Fig. 9.27. Em seguida, determine a corrente que atravessa R_C supondo que esta resistência vale 2 Ω, 10 Ω e 100 Ω.

Solução:

O 1.º e 2.º passos levam ao circuito da Fig. 9.28. Note que o resistor de carga R_C foi removido e os dois terminais foram rotulados como a e b .

3.º passo: Substituindo a fonte de tensão E_1 por um curto-circuito, obtemos o circuito da Fig. 9.29(a), no qual

$$R_{Th} = R_1 \parallel R_2 = \frac{(3\Omega)(6\Omega)}{3\Omega + 6\Omega} = 2\Omega$$

Começamos agora a perceber a necessidade de assinalar claramente os dois terminais. É entre eles que medimos a resistência.

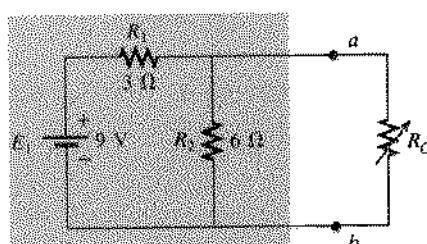


Fig. 9.27 Exemplo 9.6.

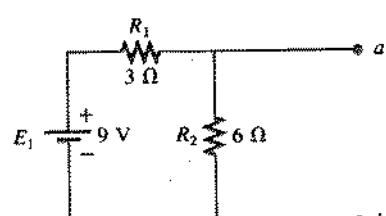
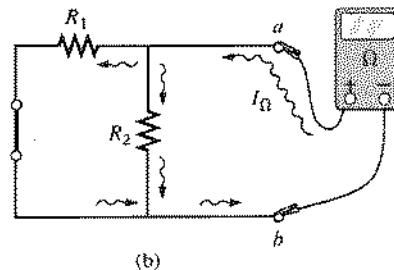
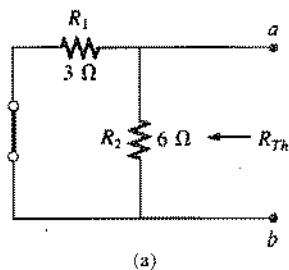


Fig. 9.28 Identificação dos terminais de saída para aplicação do teorema de Thévenin.

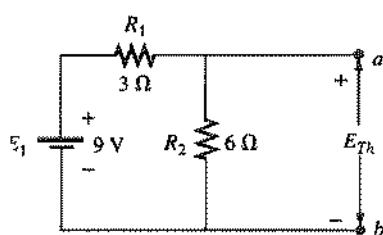
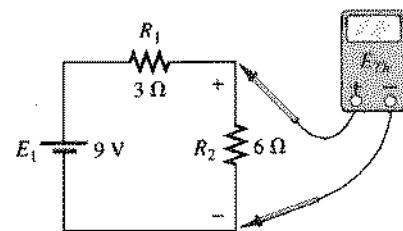
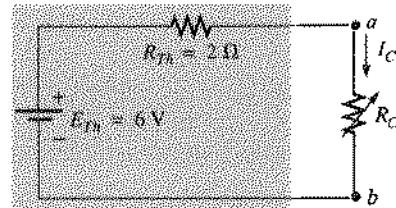
Fig. 9.29 Determinação de R_{Th} para o circuito da Fig. 9.28.

cia de Thévenin. Esta não é a resistência total ligada à fonte, como na maior parte dos problemas do Cap. 7. Se ao tentar calcular R_{Th} você tiver dificuldade em perceber se as resistências estão em série ou em paralelo, lembre-se de que o ohmímetro determina o valor da resistência submetendo o circuito a uma pequena corrente e medindo o valor da ddp resultante. Esta corrente gerada pelo ohmímetro entra no circuito da Fig. 9.29(a) pelo terminal a ; ao chegar à junção entre R_1 e R_2 , a corrente se divide da forma indicada na Fig. 9.29 (b). O fato de que a corrente se divide em duas, que voltam a se combinar na junção inferior, mostra que os resistores estão em paralelo do ponto de vista do ohmímetro. Assim, o caminho da corrente aplicada pelo ohmímetro revela a forma como os resistores estão ligados aos dois terminais de interesse e portanto como a resistência da Thévenin pode ser determinada. Tenha este fato sempre em mente ao analisar os exemplos desta seção.

4.º passo: Introduza novamente a fonte de tensão (Fig. 9.30). Neste exemplo, a tensão de circuito aberto E_{Th} é igual à ddp entre os terminais de resistor de 6Ω . Aplicando a regra dos divisores de tensão,

$$E_{Th} = \frac{R_2 E_1}{R_2 + R_1} = \frac{(6\Omega)(9V)}{6\Omega + 3\Omega} = \frac{54V}{9} = 6V$$

É importante reconhecer que E_{Th} é a tensão de circuito aberto entre os pontos a e b . Lembre-se de que um circuito aberto pode ter qualquer tensão entre seus terminais, mas a corrente que o atravessa é, obviamente, nula. Além disso, também deve ser nula a corrente em qualquer elemento ligado em série a um circuito aberto. O uso de um voltímetro para medir E_{Th} é ilustrado na Fig. 9.31. Note que o medidor está conectado aos terminais de R_2 , pois E_{Th} e V_{R_2} estão em paralelo.

Fig. 9.30 Determinação de E_{Th} para o circuito da Fig. 9.28.Fig. 9.31 Medida de E_{Th} para o circuito da Fig. 9.28.Fig. 9.32 Substituição do circuito externo a R_C na Fig. 9.27 pelo circuito equivalente de Thévenin.

5.º passo: (Fig. 9.32):

$$I_C = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_C}$$

$$R_C = 2\Omega: \quad I_C = \frac{6V}{2\Omega + 2\Omega} = 1,5A$$

$$R_C = 10\Omega: \quad I_C = \frac{6V}{2\Omega + 10\Omega} = 0,5A$$

$$R_C = 100\Omega: \quad I_C = \frac{6V}{2\Omega + 100\Omega} = 0,059A$$

Se não pudéssemos usar o teorema de Thévenin, teríamos que analisar novamente todo o circuito da Fig. 9.27 para determinar o valor de I_C cada vez que o valor de R_C fosse alterado.

EXEMPLO 9.7 Determine o circuito equivalente de Thévenin para a parte sombreada do circuito da Fig. 9.33.

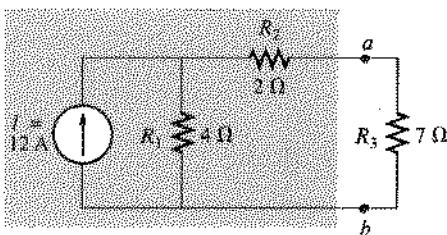


Fig. 9.33 Exemplo 9.7.

Solução:

O 1.^o e 2.^o passos aparecem na Fig. 9.34.

O 3.^o passo está ilustrado na Fig. 9.35. Substituímos a fonte de corrente por um circuito aberto e determinamos a resistência entre os terminais *a* e *b*.

Neste caso, se conectássemos um ohmímetro entre os terminais *a* e *b*, ele enviaria uma corrente de prova que passaria diretamente por R_1 e R_2 , com a mesma intensidade. Logo, R_1 e R_2 estão em série, e a resistência de Thévenin é a soma das duas resistências.

$$R_{Th} = R_1 + R_2 = 4 \Omega + 2 \Omega = 6 \Omega$$

4.^o passo (Fig. 9.36): Como existe um circuito aberto entre *a* e *b*, a corrente entre estes dois terminais é nula, assim como a que percorre o resistor de 2 Ω. Logo, a queda de tensão em R_2 é

$$V_2 = I_2 R_2 = (0)R_2 = 0 \text{ V}$$

e

$$E_{Th} = V_1 = I_1 R_1 = IR_1 = (12 \text{ A})(4 \Omega) = 48 \text{ V}$$

O 5.^o passo está ilustrado na Fig. 9.37.

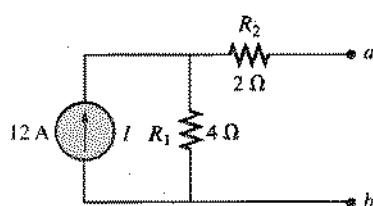
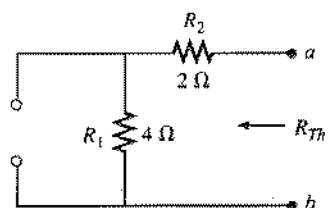
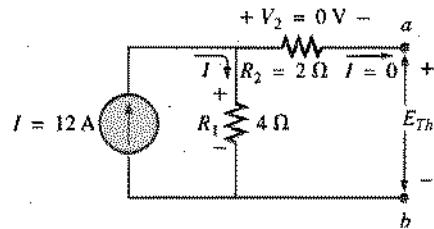
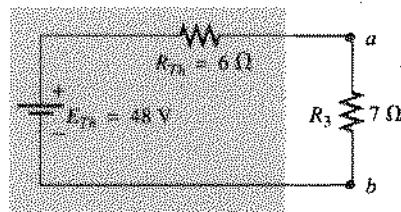


Fig. 9.34 Identificação dos terminais de saída para o circuito da Fig. 9.33.

Fig. 9.35 Determinação de R_{Th} para o circuito da Fig. 9.34.Fig. 9.36 Determinação de E_{Th} para o circuito da Fig. 9.34.Fig. 9.37 Substituição do circuito externo ao resistor R_3 na Fig. 9.33 pelo circuito equivalente de Thévenin.

EXEMPLO 9.8 Determine o circuito equivalente de Thévenin para a parte sombreada do circuito da Fig. 9.38. Observe que, como ilustra este exemplo, não há necessidade de que a parte do circuito que não é alterada esteja no “final” do circuito.

Solução:

1.^o e 2.^o passos: Veja a Fig. 9.39.

3.^o passo: Veja a Fig. 9.40. O 1.^o e 2.^o passos são relativamente fáceis de aplicar, mas devemos agora tomar o cuidado de analisar o circuito do “ponto de vista” dos terminais *a* e *b* ao calcularmos a resistência e a tensão de Thévenin. Na Fig. 9.40, todos os elementos remanescentes estão em paralelo, e o circuito pode ser redesenhadado da forma indicada.

$$R_{Th} = R_1 \parallel R_2 = \frac{(6 \Omega)(4 \Omega)}{6 \Omega + 4 \Omega} = \frac{24 \Omega}{10} = 2,4 \Omega$$

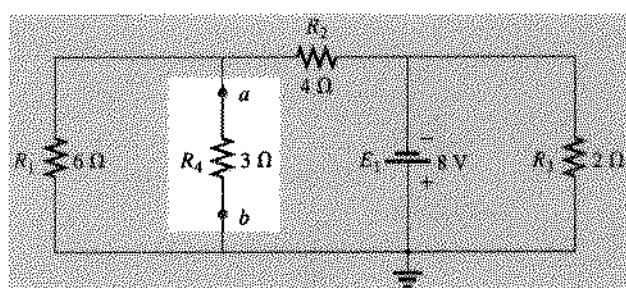


Fig. 9.38 Exemplo 9.8.

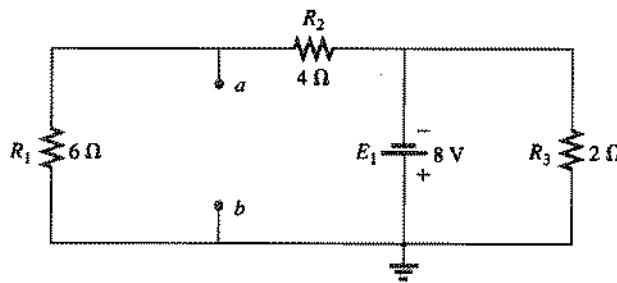
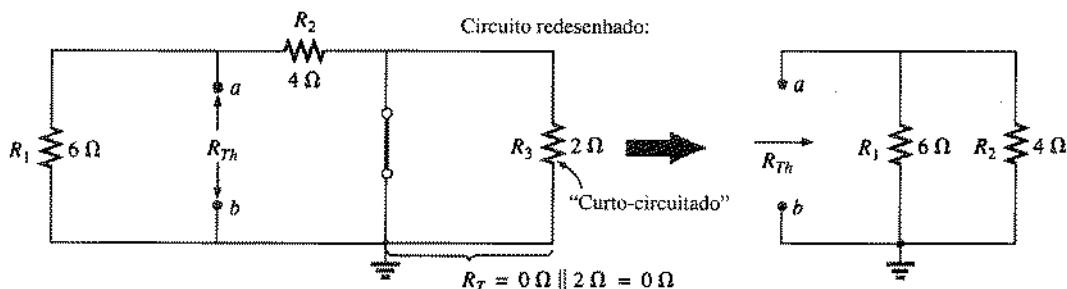
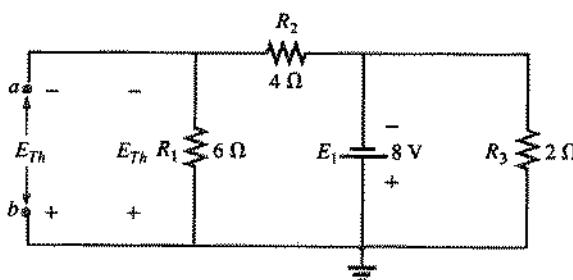
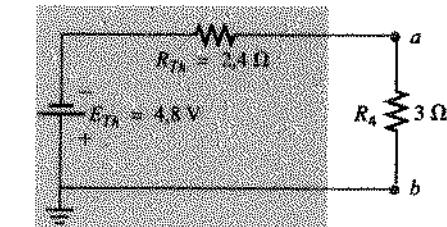


Fig. 9.39 Identificação dos terminais de saída para o circuito da Fig. 9.38.

Fig. 9.40 Determinação de R_{Th} para o circuito da Fig. 9.39.

4.^º passo: Veja a Fig. 9.41. Agora podemos redesenhar o circuito do modo ilustrado na Fig. 9.42; como componentes em paralelo estão sujeitos à mesma ddp, a tensão entre os terminais da combinação em série de R_1 e R_2 é E_1 ou 8 V. Aplicando a regra dos divisores de tensão,

$$E_{Th} = \frac{R_1 E_1}{R_1 + R_2} = \frac{(6 \Omega)(8 \text{ V})}{6 \Omega + 4 \Omega} = \frac{48 \text{ V}}{10} = 4,8 \text{ V}$$

Fig. 9.41 Determinação de E_{Th} para o circuito da Fig. 9.39.Fig. 9.43 Substituição do circuito externo ao resistor R_4 na Fig. 9.38 pelo circuito equivalente de Thévenin.

5.^º passo: Veja a Fig. 9.43.

Após o Exemplo 9.8, a importância de assinalar claramente os terminais deve ter se tornado óbvia. Observe que não há necessidade de que a voltagem de Thévenin tenha a mesma polaridade que o circuito equivalente inicial.

EXEMPLO 9.9 Determine o circuito equivalente de Thévenin para a parte sombreada de circuito em ponte da Fig. 9.44.

Solução:

Os 1.^º e 2.^º passos estão ilustrados na Fig. 9.45.

3.^º passo: Veja a Fig. 9.46. Neste caso, a substituição da fonte de tensão E por um curto-círcuito faz com que os pontos c e c' na Fig. 9.46(a) fiquem ao mesmo potencial, o que permite “dobrar” o circuito tendo como eixo a reta horizontal que liga a e b . O resultado é o circuito da Fig. 9.46(b).

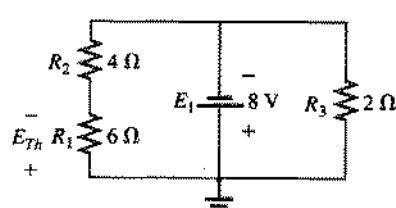


Fig. 9.42 Circuito da Fig. 9.41 redesenhado.

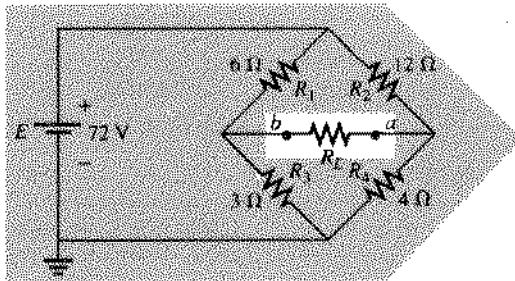


Fig. 9.44 Exemplo 9.9.

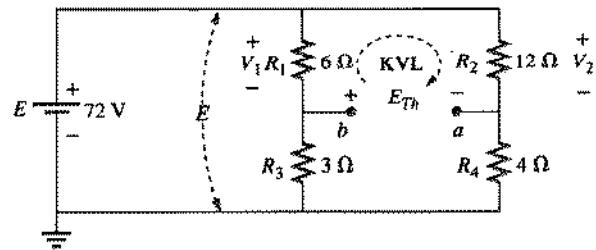
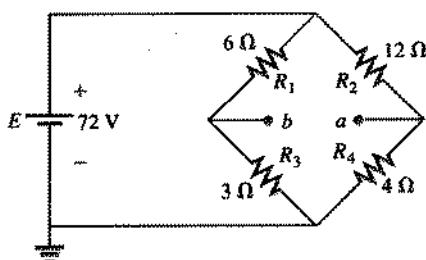
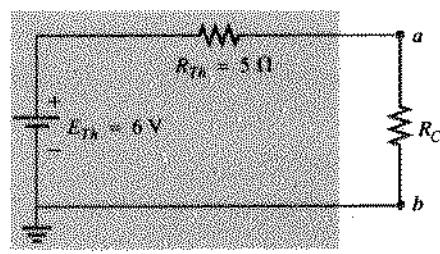
Fig. 9.47 Determinação de E_{Th} para o circuito da Fig. 9.45.

Fig. 9.45 Identificação dos terminais de saída para aplicar o teorema de Thévenin ao circuito da Fig. 9.44.

Fig. 9.48 Substituição do circuito externo ao resistor R_C da Fig. 9.44 pelo circuito equivalente de Thévenin.

$$\begin{aligned}R_{Th} &= R_{a-b} = R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4 \\&= 6\Omega \parallel 3\Omega + 4\Omega \parallel 12\Omega \\&= 2\Omega + 3\Omega = 5\Omega\end{aligned}$$

$$\Sigma_C V = +E_{Th} + V_1 - V_2 = 0$$

$$E_{Th} = V_2 - V_1 = 54V - 48V = 6V$$

4.º passo: Redesenhemos o circuito como ilustra a Fig. 9.47. Como a e b não estão diretamente conectados, o resultado é um circuito com três ramos em paralelo. As tensões V_1 e V_2 podem ser obtidas com o auxílio da regra dos divisores de tensão:

$$V_1 = \frac{R_1 E}{R_1 + R_3} = \frac{(6\Omega)(72V)}{6\Omega + 3\Omega} = \frac{432V}{9} = 48V$$

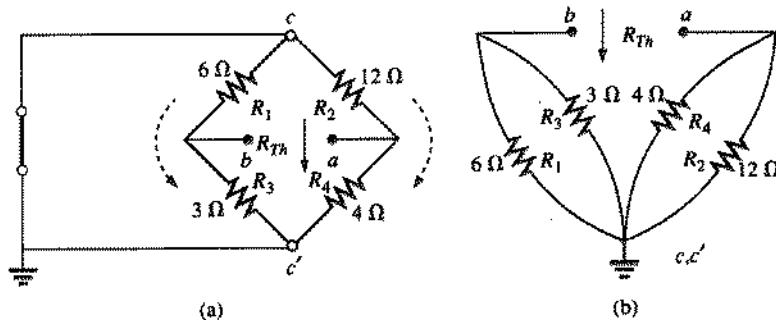
$$V_2 = \frac{R_2 E}{R_2 + R_4} = \frac{(12\Omega)(72V)}{12\Omega + 4\Omega} = \frac{864V}{16} = 54V$$

Supondo correta a polaridade indicada na figura para E_{Th} e aplicando a lei de Kirchhoff para tensões à malha superior no sentido horário, obtemos

5.º passo: Veja a Fig. 9.48.

A aplicação do teorema de Thévenin não está restrita apenas a uma fonte, como aconteceu nos exemplos anteriores. Ele pode ser aplicado a qualquer combinação de fontes, como veremos no próximo exemplo. Pode também acontecer que tenhamos de utilizar um dos métodos que estudamos anteriormente, como o das malhas ou da superposição, para encontrar o circuito equivalente de Thévenin.

EXEMPLO 9.10 (Duas fontes). Determine o circuito equivalente de Thévenin para a parte sombreada do circuito da Fig. 9.49.

Fig. 9.46 Determinação de R_{Th} para o circuito da Fig. 9.45.

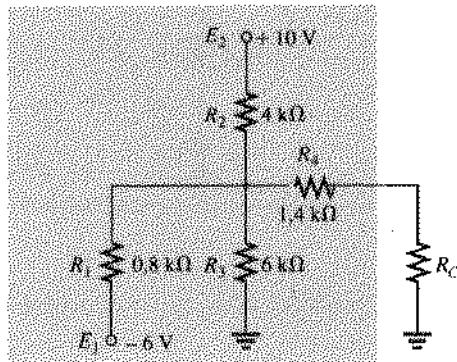


Fig. 9.49 Exemplo 9.10.

Solução: Redesenhemos o circuito e aplicamos os passos 1 e 2 da forma ilustrada na Fig. 9.50.

3.^o passo: Veja a Fig. 9.51.

$$\begin{aligned} R_{Th} &= R_4 + R_1 \parallel R_2 \parallel R_3 \\ &= 1.4 \text{ k}\Omega + 0.8 \text{ k}\Omega \parallel 4 \text{ k}\Omega \parallel 6 \text{ k}\Omega \\ &= 1.4 \text{ k}\Omega + 0.8 \text{ k}\Omega \parallel 2.4 \text{ k}\Omega \\ &= 1.4 \text{ k}\Omega + 0.6 \text{ k}\Omega \\ &= 2 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

4.^o passo: Aplicando o teorema da superposição, vamos considerar primeiro os efeitos da fonte de tensão E_1 . Observe a Fig. 9.52. O circuito aberto faz com que tenhamos $V_4 = I_4 R_4 = (0)R_4 = 0 \text{ V}$ e

$$\begin{aligned} E'_{Th} &= V_3 \\ R'_T &= R_2 \parallel R_3 = 4 \text{ k}\Omega \parallel 6 \text{ k}\Omega = 2.4 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Aplicando a regra dos divisores de tensão,

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{R'_T E_1}{R'_T + R_1} = \frac{(2.4 \text{ k}\Omega)(6 \text{ V})}{2.4 \text{ k}\Omega + 0.8 \text{k}\Omega} = \frac{14.4 \text{ V}}{3.2} = 4.5 \text{ V} \\ \text{e} \quad E'_{Th} &= V_3 = 4.5 \text{ V} \end{aligned}$$

Para a fonte E_2 , a aplicação do método da superposição resulta no circuito da Fig. 9.53. Novamente temos $V_4 = I_4 R_4 = (0)R_4 = 0 \text{ V}$ e

$$\begin{aligned} E''_{Th} &= V_3 \\ R'_T &= R_1 \parallel R_3 = 0.8 \text{ k}\Omega \parallel 6 \text{ k}\Omega = 0.706 \text{ k}\Omega \\ \text{e} \quad V_3 &= \frac{R'_T E_2}{R'_T + R_2} = \frac{(0.706 \text{ k}\Omega)(10 \text{ V})}{0.706 \text{ k}\Omega + 4 \text{ k}\Omega} = \frac{7.06 \text{ V}}{4.706} = 1.5 \text{ V} \\ \text{e} \quad E''_{Th} &= V_3 = 1.5 \text{ V} \end{aligned}$$

Como E'_{Th} e E''_{Th} têm polaridades opostas,

$$\begin{aligned} E_{Th} &= E'_{Th} - E''_{Th} \\ &= 4.5 \text{ V} - 1.5 \text{ V} \\ &= 3 \text{ V} \quad (\text{polaridade de } E'_{Th}) \end{aligned}$$

5.^o passo: Veja a Fig. 9.54.

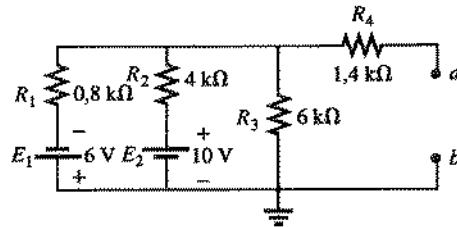
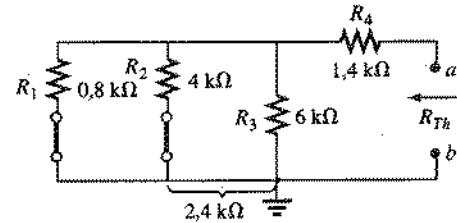
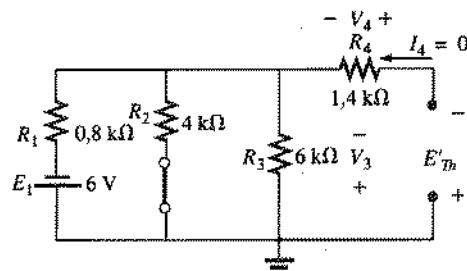
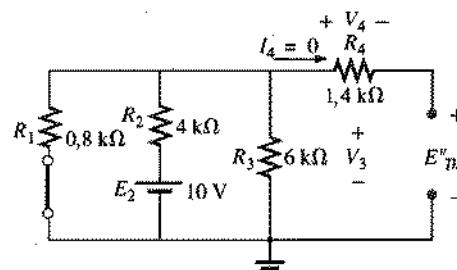
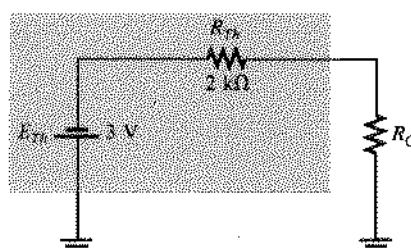
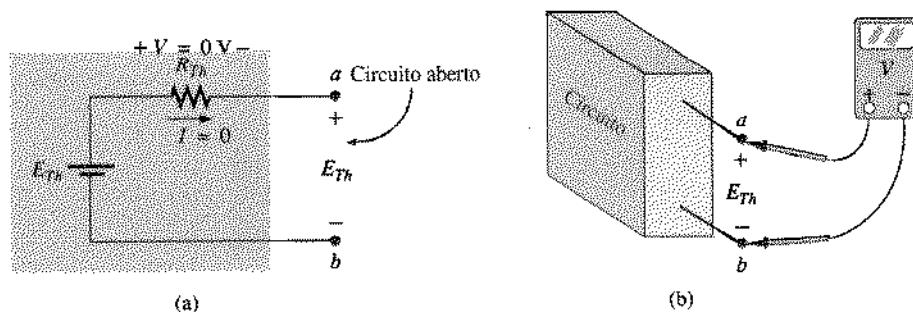


Fig. 9.50 Identificação dos terminais de saída para o circuito da Fig. 9.49.

Fig. 9.51 Determinação de R_{Th} para o circuito da Fig. 9.50.Fig. 9.52 Contribuição de E_1 para E_{Th} no circuito da Fig. 9.50.Fig. 9.53 Contribuição de E_2 para E_{Th} no circuito da Fig. 9.50.Fig. 9.54 Substituição do circuito externo ao resistor R_C da Fig. 9.49 pelo circuito equivalente de Thévenin.



Fig. 9.55 Determinação experimental de E_{Th} .

Métodos Experimentais

Existem duas abordagens experimentais para determinar os parâmetros de um circuito equivalente de Thévenin. Elas são idênticas no que diz respeito à medida da tensão de Thévenin, mas bem diferentes no que se refere à determinação da resistência de Thévenin.

Medida Direta de E_{Th} e R_{Th} Para qualquer circuito real, podemos determinar o valor de E_{Th} experimentalmente medindo a tensão de circuito aberto entre os terminais da carga, como na Fig. 9.55; $E_{Th} = V_{ab}$. Podemos determinar em seguida o valor de R_{Th} completando o circuito com uma R_C variável, como o potenciômetro da Fig. 9.56(b). Variamos R_C até que a ddp entre os terminais da carga seja a metade do valor sem carga, ou seja, $V_C = E_{Th}/2$. Para o circuito em série da Fig. 9.56(a), quando a tensão na carga se reduz à metade do valor de circuito aberto, as tensões entre os terminais de R_{Th} e R_C devem ser iguais. Se medirmos o valor de R_C [como na Fig. 9.56(c)], obteremos também o valor de R_{Th} , já que a tensão entre os terminais de R_{Th} só será

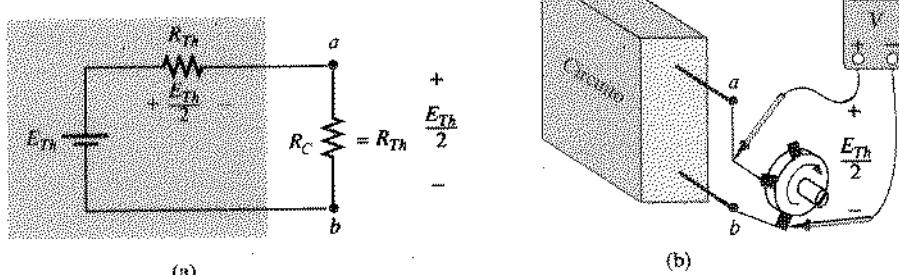
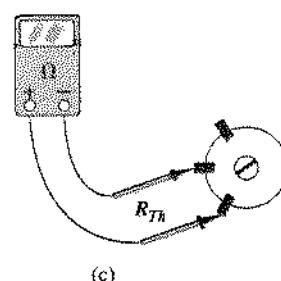
igual a V_C se $R_{Th} = R_C$, pois a corrente que atravessa as duas resistências é a mesma.

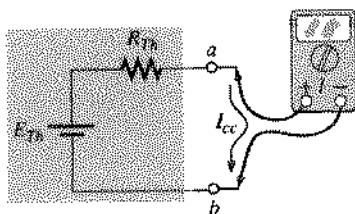
Medida de V_{ca} e I_{cc} A tensão de Thévenin é novamente obtida medindo-se a tensão de circuito aberto entre os terminais de interesse, ou seja, $E_{Th} = V_{ca}$. Para determinar R_{Th} , curto-circuitamos os terminais de interesse, como na Fig. 9.57, e medimos a corrente neste ramo do circuito com um amperímetro. Utilizando a definição de resistência, a corrente de curto-circuito é dada por

$$I_{cc} = \frac{E_{Th}}{R_{Th}}$$

e a resistência de Thévenin é

$$R_{Th} = \frac{E_{Th}}{I_{cc}}$$

Fig. 9.56 Determinação experimental de R_{Th} .

Fig. 9.57 Medida de I_{cc} .

Como, $E_{Th} = V_{ca}$, temos:

$$R_{Th} = \frac{V_{ca}}{I_{cc}} \quad (9.2)$$



Americano (Rockland, Maine; Summit, Nova Jersey) (1898-1983)
Engenheiro elétrico, cientista, inventor
Chefe de Departamento da Bell Laboratories
Fellow da American Acoustical Society e do Institute of Radio Engineers

Embora seus interesses principais fossem a teoria dos circuitos de comunicações e a transmissão de dados em alta velocidade por linhas telefônicas, Edward L. Norton é mais conhecido pelo desenvolvimento do duplo circuito equivalente de Thévenin, atualmente conhecido como circuito equivalente de Norton. De fato, Norton e seus colaboradores na AT&T, no começo da década de 1920, estiveram entre os primeiros a utilizar o circuito equivalente de Thévenin e a se referir ao teorema como teorema de Thévenin. Norton propôs em 1926 o circuito equivalente com uma fonte de corrente e um resistor em paralelo para facilitar o projeto de instrumentos de gravação que eram essencialmente operados por corrente. Ele começou sua carreira em telefonia em 1922 no Departamento de Engenharia da Western Electric Company, que mais tarde se transformou na Bell Laboratories. Realizou pesquisas nas áreas de teoria de circuitos, sistemas acústicos, aparelhos eletromagnéticos e transmissão de dados. Graduado pelo MIT e pela Columbia University, obteve dezenove patentes com seus trabalhos.

EDWARD L. NORTON

Cortesia dos arquivos da AT&T

9.4 TEOREMA DE NORTON

Na Seção 8.3 demonstramos que para qualquer fonte de tensão em série com uma resistência interna é possível determinar uma fonte de corrente equivalente. O circuito com fonte de corrente análogo ao circuito de Thévenin, ilustrado na Fig. 9.58, pode ser obtido com o auxílio do teorema de Norton. Ele também pode ser obtido utilizando-se as técnicas de conversão descritas na Seção 8.3.

O teorema de Norton afirma que:

Qualquer circuito de corrente contínua linear bilateral de dois terminais pode ser substituído por um circuito equivalente formado por uma fonte de corrente e um resistor em paralelo, como na Fig. 9.58.

A discussão do teorema de Thévenin com relação ao circuito equivalente também pode ser aplicada ao circuito equivalente de Norton.

Para obter os valores corretos de R_N e I_M , devemos executar a sequência de passos que aparece a seguir.

Passos Preliminares:

1. Isolé a parte do circuito para a qual deseja obter o equivalente de Norton.
2. Assinale claramente os dois terminais do circuito remanescente.

R_N :

3. Para calcular R_N elimine todas as fontes (substituindo as fontes de tensão por curto-circuitos e as fontes de corrente por circuitos abertos) e em seguida determine a resistê-

cia equivalente entre os dois terminais escolhidos. (Se o circuito original incluir as resistências internas de fontes de tensão e/ou fontes de correntes, estas resistências devem ser mantidas quando as fontes forem eliminadas.) Como $R_N = R_{Th}$, este passo é idêntico ao que foi descrito quando discutimos o teorema de Thévenin.

I_N :

4. Para calcular I_N introduza todas as fontes de volta no circuito e em seguida determine a corrente de curto-circuito entre os dois terminais escolhidos. Esta corrente é a mesma que seria medida por um amperímetro conectado entre os terminais escolhidos.

Conclusão:

5. Desenhe o circuito equivalente de Norton e recoloque entre os terminais de circuito equivalente a parte que foi removida no 1.º passo.

Podemos também obter o circuito equivalente de Norton a partir do circuito equivalente de Thévenin e vice-versa, utilizando as técnicas de transformação discutidas anteriormente e ilustradas na Fig. 9.59.

EXEMPLO 9.11 Encontre o circuito equivalente de Norton para a parte sombreada do circuito na Fig. 9.60.

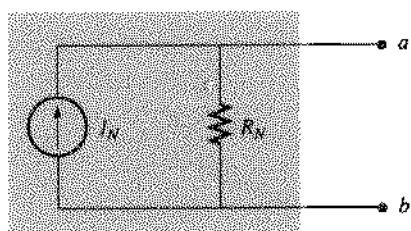


Fig. 9.58 Circuito equivalente de Norton.

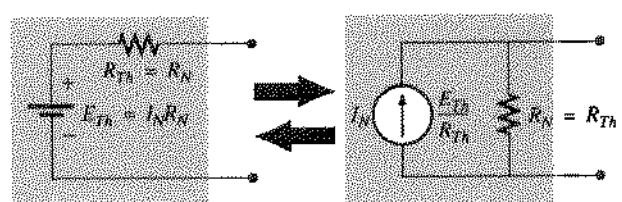


Fig. 9.59 Conversão entre circuitos equivalentes de Norton e de Thévenin.

Th

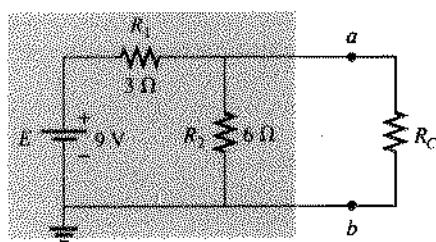
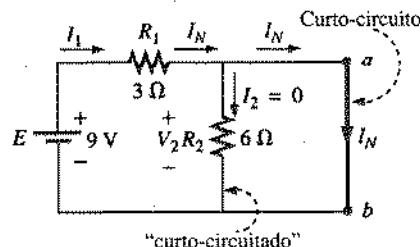


Fig. 9.60 Exemplo 9.11.

Fig. 9.63 Determinação de I_N para o circuito da Fig. 9.61.

Solução:

Os passos 1 e 2 estão ilustrados na Fig. 9.61.

O 3.^º passo está ilustrado na Fig. 9.62 e

$$R_N = R_1 \parallel R_2 = 3 \Omega \parallel 6 \Omega = \frac{(3 \Omega)(6 \Omega)}{3 \Omega + 6 \Omega} = \frac{18 \Omega}{9} = 2 \Omega$$

O 4.^º passo está ilustrado na Fig. 9.63. O curto-círcuito entre os terminais a e b está em paralelo com R_2 , eliminando qualquer efeito desta resistência. Assim, I_N é a corrente que atravessa R_1 , e toda tensão da bateria aparece entre os terminais de R_1 , já que

$$V_2 = I_2 R_2 = (0)6 \Omega = 0 \text{ V}$$

Logo,

$$I_N = \frac{E}{R_1} = \frac{9 \text{ V}}{3 \Omega} = 3 \text{ A}$$

5.^º passo: Veja a Fig. 9.64. O circuito inicial é o mesmo do Exemplo 9.6, usado para ilustrar o uso do teorema de Thévenin. Con-

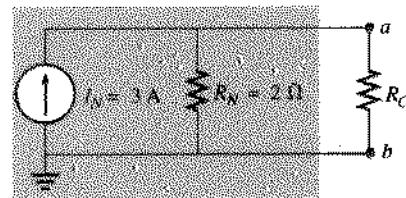
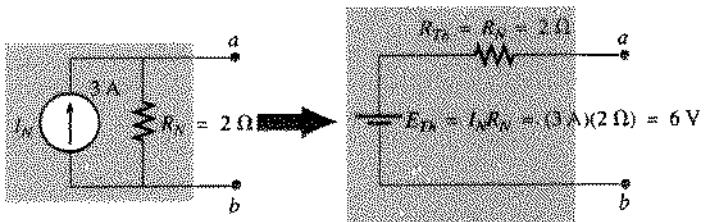
Fig. 9.64 Substituição do circuito externo ao resistor R_C na Fig. 9.60 pelo circuito equivalente de Norton.

Fig. 9.65 Conversão do circuito equivalente de Norton da Fig. 9.64 em um circuito equivalente de Thévenin.

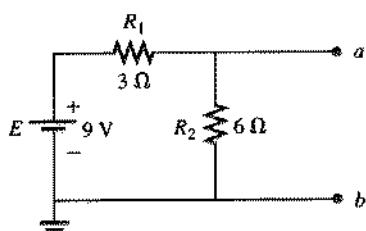


Fig. 9.61 Identificação dos terminais de saída para o circuito da Fig. 9.60.

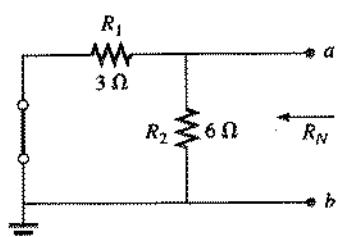
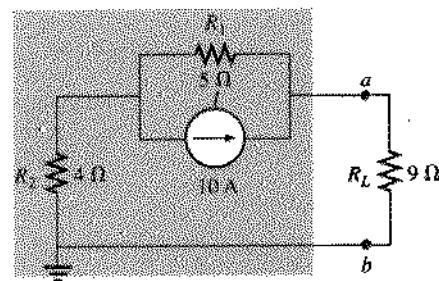
Fig. 9.62 Determinação de R_N para o circuito da Fig. 9.61.

Fig. 9.66 Exemplo 9.12.

vertendo a fonte de corrente do circuito equivalente de Norton em fonte de corrente, obtemos, como seria de se esperar, um circuito idêntico ao circuito equivalente de Thévenin determinado no Exemplo 9.6 (Fig. 9.65).

EXEMPLO 9.12 Encontre o circuito equivalente de Norton para o circuito externo ao resistor de 9 Ω na Fig. 9.66.

Solução:

Passos 1 e 2: Veja a Fig. 9.67.

3.º passo: De acordo com a Fig. 9.68,

$$R_N = R_1 + R_2 = 5 \Omega + 4 \Omega = 9 \Omega$$

4.º passo: Como vemos na Fig. 9.69, a corrente de Norton é a mesma que atravessa o resistor de 4Ω . Utilizando a regra dos divisores de corrente,

$$I_N = \frac{R_1 I}{R_1 + R_2} = \frac{(5 \Omega)(10 \text{ A})}{5 \Omega + 4 \Omega} = \frac{50 \text{ A}}{9} = 5,556 \text{ A}$$

5.º passo: Veja a Fig. 9.70.

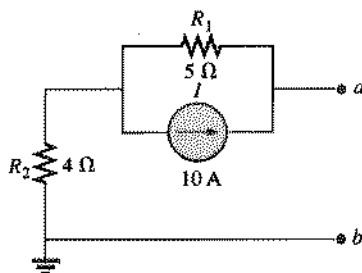


Fig. 9.67 Identificação dos terminais de saída para o circuito da Fig. 9.66.

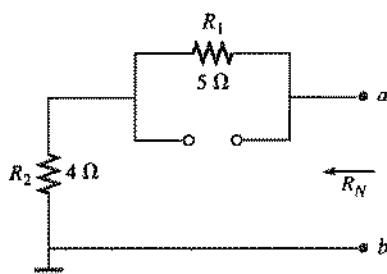


Fig. 9.68 Determinação de R_N para o circuito da Fig. 9.67.

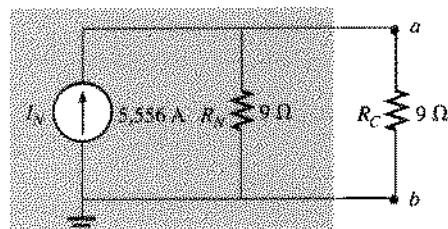


Fig. 9.70 Substituição do circuito externo ao resistor R_C na Fig. 9.66 pelo circuito equivalente de Norton.

EXEMPLO 9.13 (Duas fontes). Encontre o circuito equivalente de Norton para a parte do circuito à esquerda dos pontos a e b na Fig. 9.71.

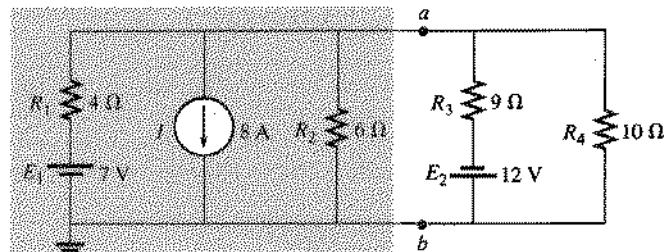


Fig. 9.71 Exemplo 9.13.

Solução:

Passos 1 e 2: Veja a Fig. 9.72.

O 3.º passo está ilustrado na Fig. 9.73 e

$$R_N = R_1 \parallel R_2 = 4 \Omega \parallel 6 \Omega = \frac{(4 \Omega)(6 \Omega)}{4 \Omega + 6 \Omega} = \frac{24 \Omega}{10} = 2,4 \Omega$$

4.º passo: (Utilizando o teorema de superposição). Para a bateria de 7 V (Fig. 9.74),

$$I'_N = \frac{E_1}{R_1} = \frac{7 \text{ V}}{4 \Omega} = 1,75 \text{ A}$$

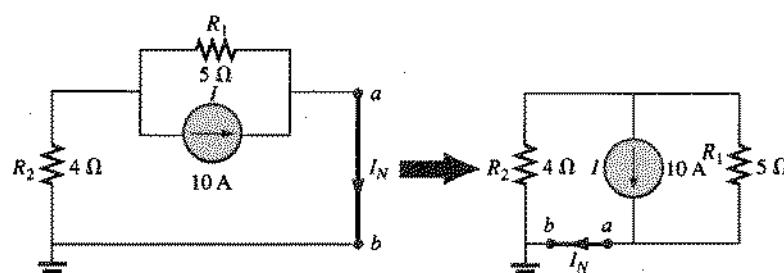


Fig. 9.69 Determinação de I_N para o circuito da Fig. 9.67.

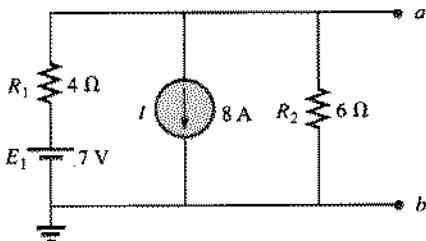


Fig. 9.72 Identificação dos terminais de saída do circuito da Fig. 9.71.

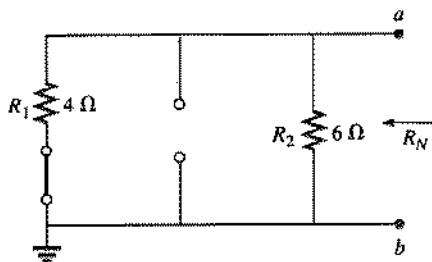


Fig. 9.73 Determinação de R_N para o circuito da Fig. 9.72.

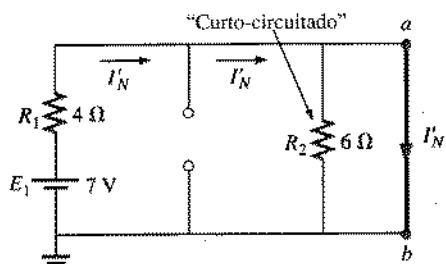


Fig. 9.74 Contribuição da fonte de tensão E_1 para I_N

No caso da fonte de 8 A (Fig. 9.75), verificamos que tanto R_1 quanto R_2 foram “curto-circuitadas” pela ligação direta entre a e b e

$$I''_N = I = 8 \text{ A}$$

O resultado é

$$I_N = I''_N - I'_N = 8 \text{ A} - 1,75 \text{ A} = 6,25 \text{ A}$$

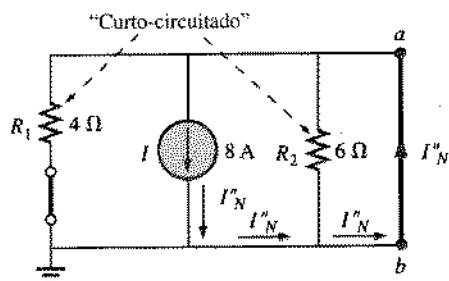


Fig. 9.75 Contribuição da fonte de corrente I para I_N

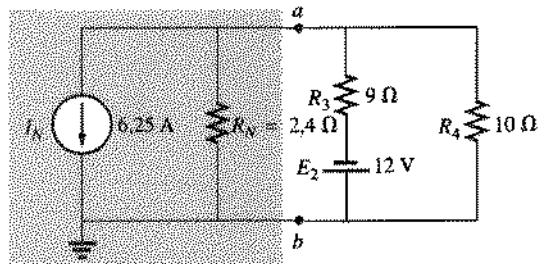


Fig. 9.76 Substituição do circuito à esquerda dos terminais ab na Fig. 9.71 pelo circuito equivalente de Norton.

5.º passo: Veja a Fig. 9.76.

Método Experimental

A corrente de Norton é medida utilizando-se a técnica já descrita para medir a corrente de curto-circuito no caso do circuito equivalente de Thévenin. Como as resistências de Norton e Thévenin são iguais, o mesmo método experimental pode ser usado nos dois casos.

9.5 TEOREMA DA TRANSFERÊNCIA MÁXIMA DE POTÊNCIA

O teorema da transferência máxima de potência afirma o seguinte:

A potência transferida a uma carga por um circuito de corrente contínua linear bilateral será máxima quando a resistência desta carga for exatamente igual à resistência de Thévenin do circuito ligado a esta carga.

No caso do circuito da Fig. 9.77, a potência fornecida à carga será máxima quando

$$R_C = R_{TH} \quad (9.3)$$

Com base nas considerações anteriores, sabemos que é possível obter um circuito equivalente de Thévenin para qualquer elemento ou grupo de elementos de um circuito linear bilateral de corrente contínua. Deste modo, se considerarmos a relação entre o circuito equivalente de Thévenin e o teorema da transferência máxima de potência estaremos, em essência, estudando o efeito total de qualquer circuito sobre um resistor R_C , como na Fig. 9.77.

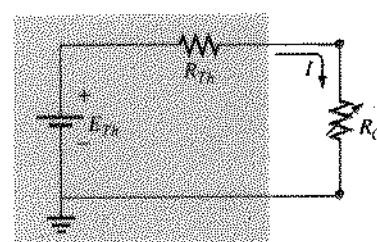


Fig. 9.77 Ilustração das condições para transferência máxima de potência a uma carga utilizando o circuito equivalente de Thévenin.

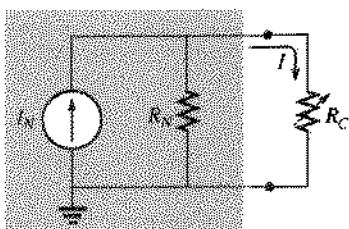


Fig. 9.78 Ilustração das condições para transferência máxima de potência a uma carga utilizando o circuito equivalente de Norton.

No caso do circuito equivalente de Norton da Fig. 9.78, a potência fornecida à carga será máxima quando

$$R_C = R_N \quad (9.4)$$

O resultado acima é muito usado na análise de circuitos transistorizados, pois o circuito equivalente para transistores utilizado com mais frequência emprega uma fonte de corrente em vez de uma fonte de tensão.

Para o circuito da Fig. 9.77,

$$I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_C}$$

$$\text{e} \quad P_C = I^2 R_C = \left(\frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_C} \right)^2 R_C$$

e assim

$$P_C = \frac{E_{Th}^2 R_C}{(R_{Th} + R_C)^2}$$

Vamos agora considerar um exemplo no qual $E_{Th} = 60 \text{ V}$ e $R_{Th} = 9 \Omega$ (Fig. 9.79).

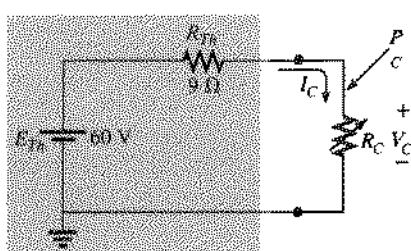


Fig. 9.79 Circuito equivalente de Thévenin usado para confirmar a validade do teorema da transferência máxima de potência.

A potência fornecida à carga é dada por:

$$P_C = \frac{E_{Th}^2 R_C}{(R_{Th} + R_C)^2} = \frac{3,600 R_C}{(9 \Omega + R_C)^2}$$

logo

$$I_C = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_C} = \frac{60 \text{ V}}{9 \Omega + R_C}$$

e

$$V_C = \frac{R_C(60 \text{ V})}{R_{Th} + R_C} = \frac{R_C(60 \text{ V})}{9 \Omega + R_C}$$

A Tabela 9.1 mostra os valores de P_C para vários valores de R_C . Se traçarmos o gráfico de P_C em função de R_C , utilizando os dados da Tabela 9.1 para R_C compreendido entre $0,1 \Omega$ a 30Ω , obteremos o gráfico da Fig. 9.80.

Observe que P_C é realmente máxima quando $R_C = R_{Th} = 9 \Omega$. A potência cresce com mais rapidez para atingir o valor máximo do que decresce após atingir o máximo; em outras palavras, uma pequena variação da resistência da carga quando R_C é menor que R_{Th} tem um efeito maior sobre a potência fornecida à carga do que a mesma variação quando R_C é maior do que R_{Th} .

Se traçarmos os gráficos de V_C e I_C em função de R_C (Fig. 9.81), veremos que ambas variam de modo não-linear com R_C ; a tensão entre os terminais aumenta quando R_C aumenta, enquanto a corrente na carga diminui. Observe que as variações mais acentuadas em V_C e I_C acontecem novamente para $R_C < R_{Th}$. Como está assinalado no gráfico, quando $R_C = R_{Th}$, $V_C = E_{Th}/2$ e $I_C = I_{max}/2$, onde $I_{max} = E_{Th}/R_{Th}$.

A eficiência de operação em corrente contínua de um sistema é definida como a razão entre a potência dissipada pela carga e a potência fornecida pela fonte, isto é,

$$\eta \% = \frac{P_C}{P_F} \times 100\% \quad (9.5)$$

Para a situação ilustrada na Fig. 9.77,

$$\eta \% = \frac{P_C}{P_F} \times 100\% = \frac{I_C^2 R_C}{I_C^2 R_T} \times 100\%$$

e

$$\eta \% = \frac{R_C}{R_{Th} + R_C} \times 100\%$$

Quando R_C é pequena em comparação com R_{Th} , $R_{Th} \gg R_C$ e $R_{Th} + R_C \approx R_{Th}$; assim,

$$\eta \% \approx \frac{R_C}{R_{Th}} \times 100\% = \underbrace{\left(\frac{1}{R_{Th}} \right) R_C}_{\text{constante}} \times 100\% = k R_C \times 100\%$$

Nesse caso, portanto, a eficiência é relativamente baixa (pois k é pequeno) e aumenta quase linearmente com R_C .

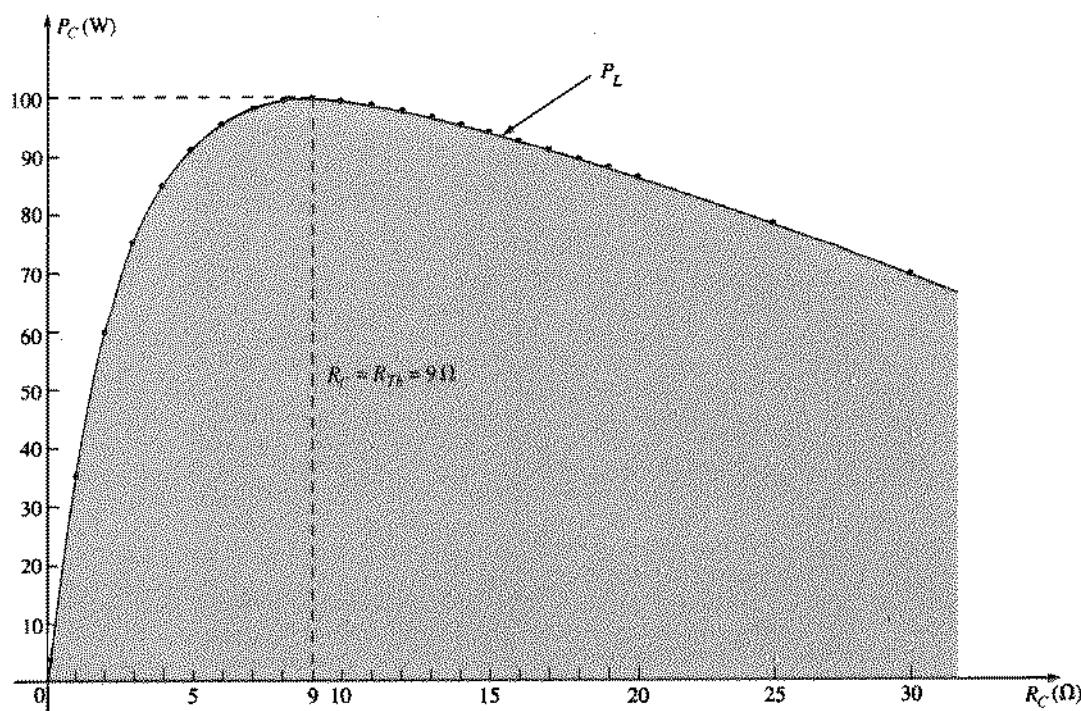
Quando a resistência da carga R_C é muito maior que R_{Th} , temos $R_{Th} + R_C \approx R_C$ e

$$\eta \% = \frac{R_C}{R_C} \times 100\% = 100\%$$

Assim, a eficiência aumenta linearmente com R_C , e com muita rapidez, para pequenos valores de R_C . Para valores maiores de R_C , a eficiência aumenta mais lentamente, tendendo a 100% para valores muito grandes de R_C , como se pode ver na Fig. 9.82. É preciso não esquecer, porém, que a eficiência depende apenas da relação entre P_C e P_F e não aos valores individuais dessas grandezas. Quando R_C é suficientemente grande para que a eficiência se aproxime de 100%, a potência fornecida à carga pode ser tão pequena que na prática não vale a pena trabalhar nessas con-

Tabela 9.1

$R_C(\Omega)$	$P_C(W)$	$I_C(A)$	$V_C(V)$
0,1	4,35	6,59	0,66
0,2	8,51	6,52	1,30
0,5	19,94	6,32	3,16
1	36,00	6,00	6,00
2	59,50	5,46	10,91
3	75,00	5,00	15,00
4	85,21	4,62	18,46
5	91,84	Aumenta	21,43
6	96,00	4,00	24,00
7	98,44	3,75	26,25
8	99,65	3,53	28,23
9 (R_{fb})	100,00	(Máximo)	30,00 ($E_m/2$)
10	99,72	3,16	31,58
11	99,00	3,00	33,00
12	97,96	2,86	34,29
13	96,69	2,73	35,46
14	95,27	2,61	36,52
15	93,75	2,50	37,50
16	92,16	2,40	38,40
17	90,53	Diminui	39,23
18	88,89	2,22	40,00
19	87,24	2,14	40,71
20	85,61	2,07	41,38
25	77,86	1,77	44,12
30	71,00	1,54	46,15
40	59,98	1,22	48,98
100	30,30	0,55	55,05
500	6,95	0,12	58,94
1.000	1,54	0,06	59,47

Fig. 9.80 P_C em função de R_C para o circuito da Fig. 9.79.

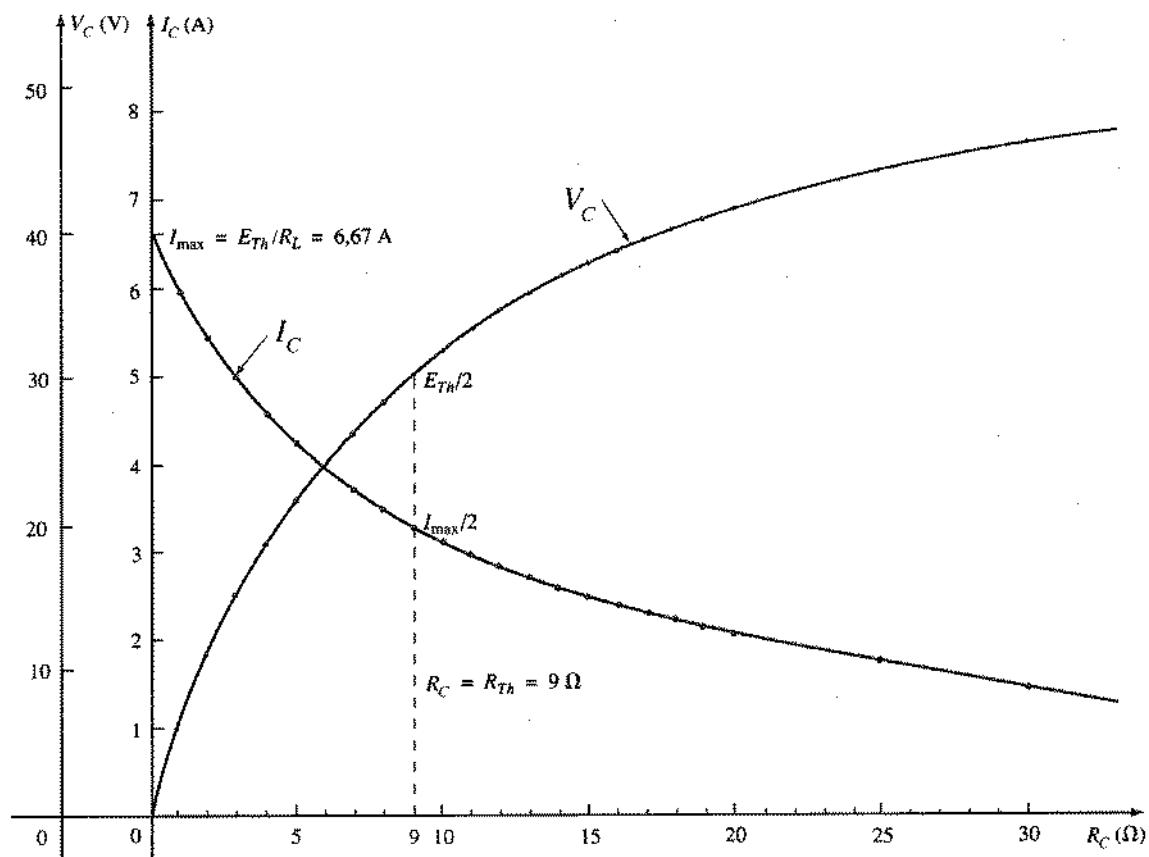


Fig. 9.81 V_C e I_C em função de R_C para o circuito da Fig. 9.79.

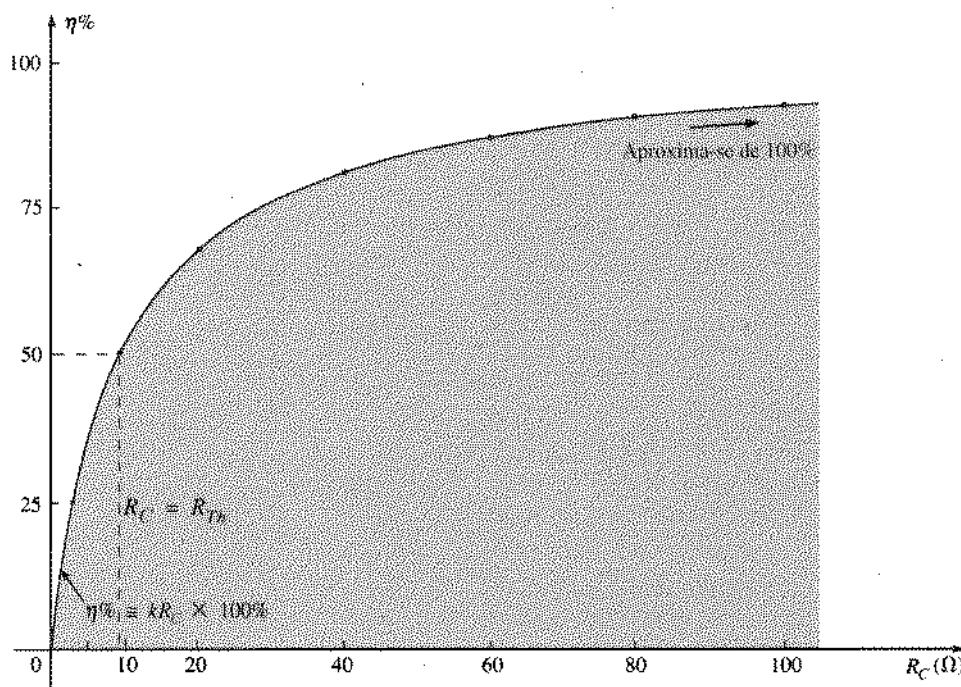


Fig. 9.82 Eficiência de operação em função de R_C

dições. Observe na Tabela 9.1 que para $R_C = 1.000 \Omega$ a potência fornecida à carga corresponde a apenas 3,54% da potência máxima possível, embora a eficiência seja

$$\eta\% = \frac{R_C}{R_{Th} + R_C} \times 100\% = \frac{1.000}{1.009} \times 100\% = 99,11\%$$

Quando $R_C = R_{Th}$,

$$\eta\% = \frac{R_C}{R_{Th} + R_C} \times 100\% = \frac{R_C}{2R_C} \times 100\% = 50\%$$

Quando a potência fornecida à carga é a máxima possível, a eficiência é de apenas 50%, isto é, apenas metade da potência fornecida pela fonte é utilizada pela carga.

Uma eficiência relativamente baixa, como 50%, pode ser tolerada em situações em que os valores de potência envolvidos são relativamente pequenos, como em muitos sistemas eletrônicos. Quando, porém, as potências envolvidas são elevadas, tais como nas usinas geradoras de eletricidade, uma eficiência de 50% não é aceitável. Na verdade, as empresas de eletricidade investem grandes somas em pesquisas com o objetivo de aumentar de alguns pontos percentuais a eficiência de geração e transmissão de energia elétrica. Se a eficiência de uma usina geradora de 10 GW aumenta de 94% para 95% (um aumento de apenas 1%), isso representa uma produção adicional de 0,1 GW, ou 100 milhões de watts, de energia elétrica — o que não é de se desprezar!

Considere uma variação da resistência da carga de 9Ω para 20Ω . Vemos na Fig. 9.80 que neste caso a potência cai de 100 W para 85,61 W (uma queda de 14,4%), mas a eficiência aumenta de 31% para 69% (um aumento de 38%), como mostra a Fig. 9.82. Deste modo, devemos encontrar para cada caso uma solução de compromisso para a qual a eficiência seja razoavelmente alta sem reduzir a potência fornecida à carga a valores insignificantes.

A Fig. 9.83 mostra um gráfico semilog de P_C e da potência fornecida pela fonte $P_F = E_{Th}I_C$ em função de R_C para $E_{Th} = 60 \text{ V}$ e $R_{Th} = 9 \Omega$. O uso de uma escala logarítmica para o eixo horizontal permite a consideração de uma faixa de valores muito maior de R_C do que nas Figs. 9.80, 9.81 e 9.82.

Fica agora bastante claro que o gráfico de P_C tem um máximo (em $R_C = R_{Th}$), enquanto P_F decresce monotonicamente com R_C . Observe, em particular, que para baixos valores de R_C apenas uma pequena fração da potência fornecida pela fonte é consumida pela carga. Na verdade, mesmo quando $R_C = R_{Th}$, a fonte gera o dobro da potência consumida pela carga. Para valores de R_C maiores que R_{Th} , as duas curvas se aproximam até praticamente coincidirem para valores muito elevados de R_C . Na faixa que vai de $R_C = R_{Th} = 9 \Omega$ até $R_C = 100 \Omega$, os valores de P_C e P_F são relativamente próximos, o que sugere que esta é uma faixa adequada de operação, pois a maior parte da potência gerada pela fonte é consumida pela carga e os valores de potência são ainda consideráveis.

Quando a transferência de potência é máxima ($R_C = R_{Th}$), a potência fornecida à carga é

$$I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_C} = \frac{E_{Th}}{2R_{Th}}$$

$$P_C = I^2 R_C = \left(\frac{E_{Th}}{2R_{Th}} \right)^2 R_{Th} = \frac{E_{Th}^2 R_{Th}}{4R_{Th}^2}$$

e

$$P_{C_{max}} = \frac{E_{Th}^2}{4R_{Th}} \quad (\text{watts, W}) \quad (9.6)$$

Para o circuito equivalente de Norton da Fig. 9.78,

$$P_{C_{max}} = \frac{I_N^2 R_N}{4} \quad (\text{W}) \quad (9.7)$$

EXEMPLO 9.14 Um gerador de corrente contínua, uma bateria e uma fonte de alimentação são conectados a uma carga resistiva R_C da forma indicada nas Figs. 9.84(a), (b) e (c), respectivamente

- Determine em cada caso o valor de R_C para que a potência fornecida à carga seja máxima.
- Obtenha o valor de R_C para que a eficiência seja de 75%.

Solução:

- Para o gerador de corrente contínua,

$$R_C = R_{Th} = R_{int} = 2,5 \Omega$$

Para a bateria,

$$R_C = R_{Th} = R_{int} = 0,5 \Omega$$

Para a fonte de alimentação,

$$R_C = R_{Th} = R_{int} = 40 \Omega$$

- Para o gerador de corrente contínua,

$$\eta = \frac{P_o}{P_r} \quad (\eta \text{ em forma decimal})$$

$$\eta = \frac{R_C}{R_{Th} + R_C}$$

$$\eta(R_{Th} + R_C) = R_C$$

$$\eta R_{Th} + \eta R_C = R_C$$

$$R_C(1 - \eta) = \eta R_{Th}$$

e

$$R_C = \frac{\eta R_{Th}}{1 - \eta} \quad (9.8)$$

$$R_C = \frac{0,75(2,5 \Omega)}{1 - 0,75} = 7,5 \Omega$$

Para a bateria,

$$R_L = \frac{0,75(0,5 \Omega)}{1 - 0,75} = 1,5 \Omega$$

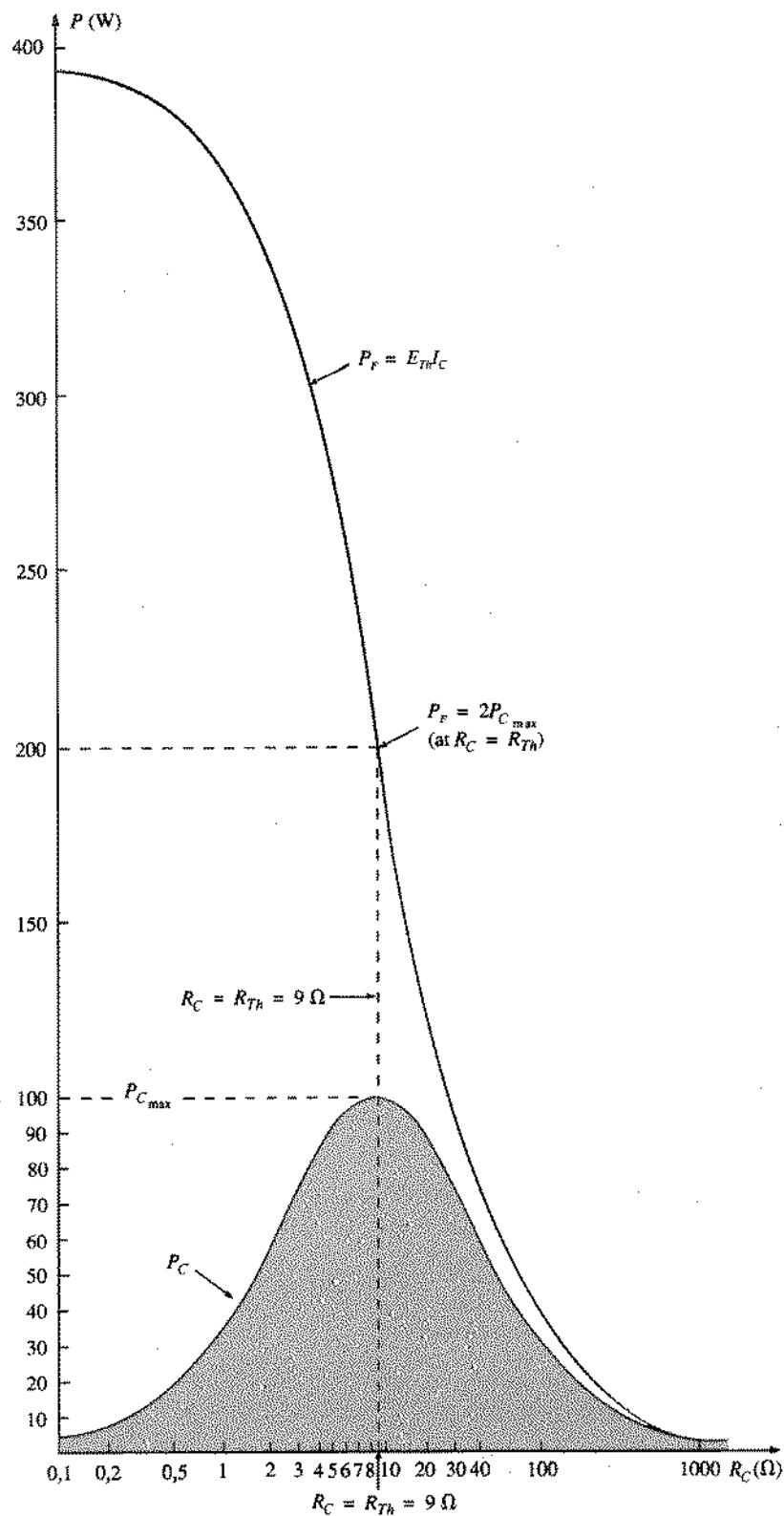


Fig. 9.83 P_f e P_C em função de R_C para o circuito da Fig. 9.79.

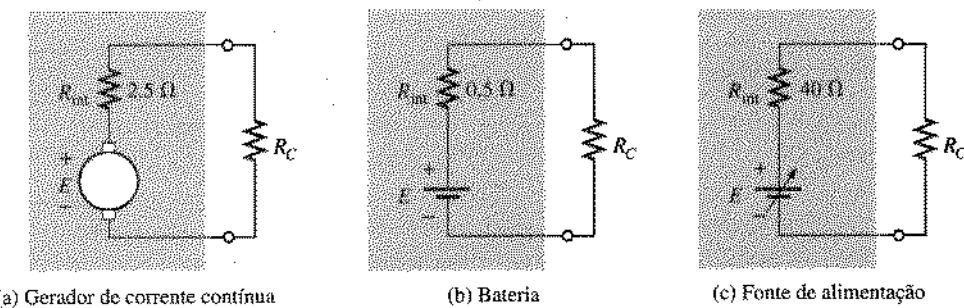


Fig. 9.84 Exemplo 9.14.

Para a fonte de alimentação,

$$R_C = \frac{0.75(40 \Omega)}{1 - 0.75} = 120 \Omega$$

Os resultados do exemplo anterior mostram que é válida a seguinte forma modificada do teorema da transferência máxima de potência:

Para cargas ligadas diretamente a uma fonte de tensão contínua, a potência fornecida à carga será máxima quando a resistência interna da fonte for igual à resistência da carga, ou seja, quando

$$R_C = R_{\text{int}} \quad (9.9)$$

EXEMPLO 9.15 A análise de um circuito transistorizado teve como resultado o circuito equivalente da Fig. 9.85. Determine a R_C necessária para que a carga dissipe a maior potência possível, e calcule esta potência.

Solução: Eq.(9.4):

$$R_C = R_F = 40 \text{ k}\Omega$$

Eq.(9.7):

$$P_{C_{\max}} = \frac{I_N^2 R_N}{4} = \frac{(10 \text{ mA})^2 (40 \text{ k}\Omega)}{4} = 1 \text{ W}$$

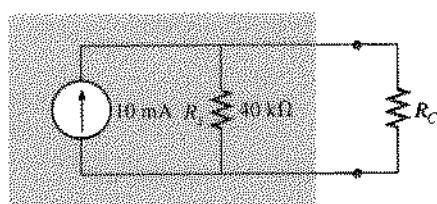


Fig. 9.85 Exemplo 9.15.

EXEMPLO 9.16 Determine, para o circuito da Fig. 9.86, o valor de R_C que faz com que a potência a ela fornecida seja máxima, e calcule o valor desta potência.

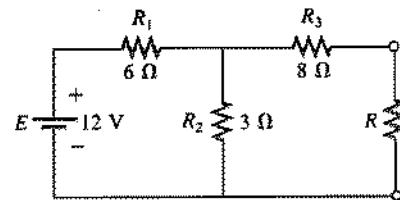


Fig. 9.86 Exemplo 9.16.

Solução: Observe a Fig. 9.87:

$$R_{Th} = R_3 + R_1 \parallel R_2 = 8 \Omega + \frac{(6 \Omega)(3 \Omega)}{6 \Omega + 3 \Omega} = 8 \Omega + 2 \Omega$$

e

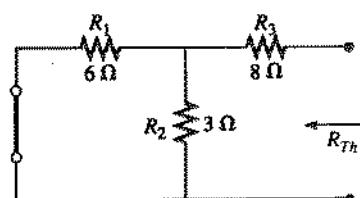
$$R = R_{Th} = 10 \Omega$$

Observe agora a Fig. 9.88.

$$E_{Th} = \frac{R_2 E}{R_2 + R_1} = \frac{(3 \Omega)(12 \text{ V})}{3 \Omega + 6 \Omega} = \frac{36 \text{ V}}{9} = 4 \text{ V}$$

e pela equação (9.6).

$$P_{C_{\max}} = \frac{E_{Th}^2}{4R_{Th}} = \frac{(4 \text{ V})^2}{4(10 \Omega)} = 0.4 \text{ W}$$

Fig. 9.87 Determinação de R_{th} para o circuito externo a R na Fig. 9.86.

EXEMPLO 9.17 Determine no circuito da Fig. 9.89 o valor de R_C que torna máxima a potência por ela consumida e o valor desta potência.

Solução: Veja a Fig. 9.90.

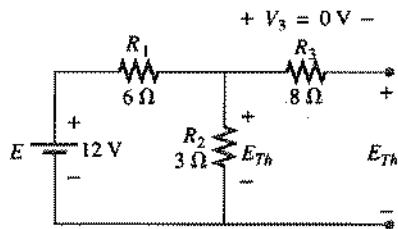
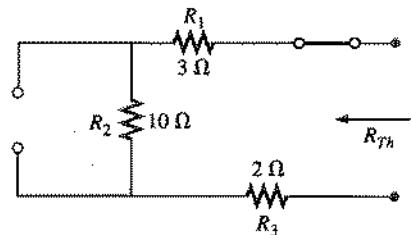
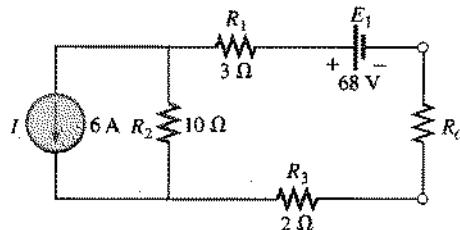
Fig. 9.88 Determinação de E_{Th} para o circuito externo a R na Fig. 9.86.Fig. 9.90 Determinação de R_{Th} para o circuito externo a R_C na Fig. 9.89.

Fig. 9.89 Exemplo 9.17.

$$R_{Th} = R_1 + R_2 + R_3 = 3\Omega + 10\Omega + 2\Omega = 15\Omega$$

e

$$R_C = R_{Th} = 15\Omega$$

Observe a Fig. 9.91, onde

$$V_1 = V_3 = 0V$$

e

$$V_2 = I_2 R_2 = IR_2 = (6A)(10\Omega) = 60V$$

Aplicando a lei de Kirchhoff para tensões,

$$\Sigma_C V = -V_2 - E_1 + E_{Th} = 0$$

e

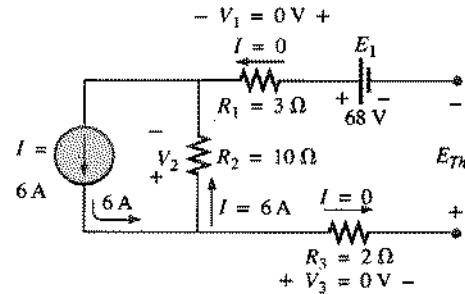
$$E_{Th} = V_2 + E_1 = 60V + 68V = 128V$$

Logo,

$$P_{C_{max}} = \frac{E_{Th}^2}{4R_{Th}} = \frac{(128V)^2}{4(15\Omega)} = 273,07W$$

9.6 TEOREMA DE MILLMAN

O teorema de Millman permite reduzir um número qualquer de fontes de tensão em paralelo a apenas uma. No caso da Fig. 9.92, por exemplo, as três fontes podem ser reduzidas a uma. Isto nos permite obter a corrente em R_C ou a ddp entre seus terminais sem a necessidade de aplicar métodos como o das malhas, o dos nós, o da superposição e outros. A melhor maneira de apresentar o

Fig. 9.91 Determinação de E_{Th} para o circuito externo a R_C na Fig. 9.89.

teorema é aplicá-lo a um circuito específico como o da Fig. 9.92. A aplicação do teorema é feita basicamente em três passos.

1.º passo: Transforme todas as fontes de tensão em fontes de corrente utilizando o método descrito na Seção 8.3. No caso do circuito da Fig. 9.92, o resultado desta conversão aparece na Fig. 9.93.

2.º passo: Combine as fontes de corrente em paralelo do modo descrito na Seção 8.4. A Fig. 9.94 ilustra o circuito resultante, no qual

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3 \quad G_T = G_1 + G_2 + G_3$$

3.º passo: Converta a fonte de corrente resultante em fonte de tensão. Deste modo obtemos o circuito desejado, como ilustra a Fig. 9.95.

O teorema de Millman afirma em geral que, para um número qualquer de fontes de tensão em paralelo,

$$E_{eq} = \frac{I_T}{G_T} = \frac{\pm I_1 \pm I_2 \pm I_3 \pm \dots \pm I_N}{G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_N}$$

ou

$$E_{eq} = \frac{\pm E_1 G_1 \pm E_2 G_2 \pm E_3 G_3 \pm \dots \pm E_N G_N}{G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_N} \quad (9.10)$$

Os sinais positivos e negativos aparecem na Eq.(9.10) para levar em conta os casos em que as fontes não têm todas a mesma polaridade (veja o Exemplo 9.18).

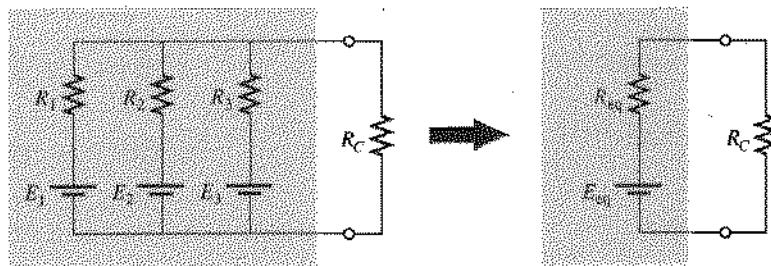


Fig. 9.92 Ilustração do efeito da aplicação do teorema de Millman.

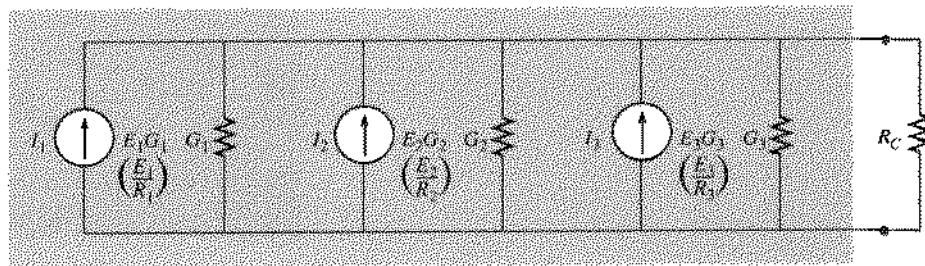


Fig. 9.93 Conversão de todas as fontes da Fig. 9.92 em fontes de corrente.

A resistência equivalente é dada por

$$R_{eq} = \frac{1}{G_T} = \frac{1}{G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_N} \quad (9.11)$$

Em termos de valores de resistência,

$$E_{eq} = \frac{\pm \frac{E_1}{R_1} \pm \frac{E_2}{R_2} \pm \frac{E_3}{R_3} \pm \dots \pm \frac{E_N}{R_N}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_N}} \quad (9.12)$$

e

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_N}} \quad (9.13)$$

Como o número de passos necessário para a aplicação do teorema é relativamente pequeno, o estudante pode preferir

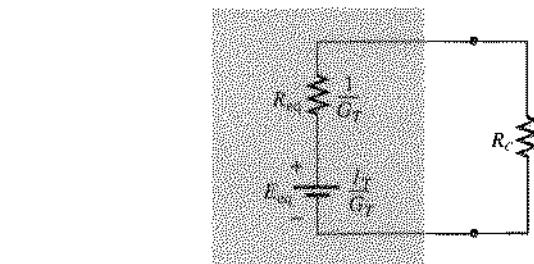


Fig. 9.95 Conversão da fonte de corrente da Fig. 9.94 em uma fonte de tensão.

executá-los separadamente em vez de memorizar as Equações de 9.10 a 9.13.

EXEMPLO 9.18 Utilizando o teorema de Millman, determine a tensão entre os terminais do resistor R_C na Fig. 9.96, bem como a corrente que o atravessa.

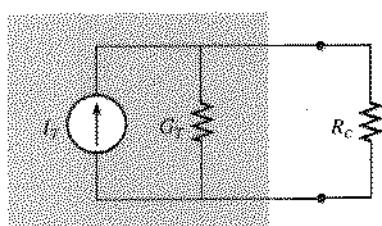


Fig. 9.94 Redução de todas as fontes de corrente da Fig. 9.93 a uma única fonte.

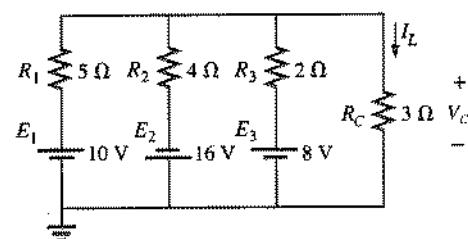


Fig. 9.96 Exemplo 9.18.

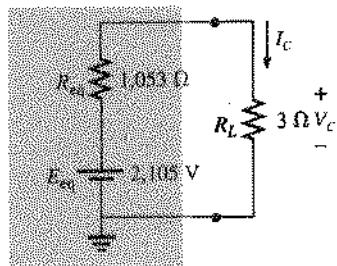


Fig. 9.97 Resultado da aplicação do teorema de Millman ao circuito da Fig. 9.96.

Solução: Pela Eq.(9.12),

$$E_{eq} = \frac{+ \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

O termo E_2/R_2 é negativo porque a polaridade da fonte E_2 é oposta à das outras duas. Tomamos como sentido positivo o das correntes geradas pelas fontes E_1 e E_3 . A condutância total não é afetada por estas considerações, e

$$E_{eq} = \frac{+ \frac{10 \text{ V}}{5 \Omega} - \frac{16 \text{ V}}{4 \Omega} + \frac{8 \text{ V}}{2 \Omega}}{\frac{1}{5 \Omega} + \frac{1}{4 \Omega} + \frac{1}{2 \Omega}} = \frac{2 \text{ A} - 4 \text{ A} + 4 \text{ A}}{0,2 \text{ S} + 0,25 \text{ S} + 0,5 \text{ S}} \\ = \frac{2 \text{ A}}{0,95 \text{ S}} = 2,105 \text{ V}$$

com

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{5 \Omega} + \frac{1}{4 \Omega} + \frac{1}{2 \Omega}} = \frac{1}{0,95 \text{ S}} = 1,053 \Omega$$

A fonte resultante é vista na Fig. 9.97, e

$$I_C = \frac{2,105 \text{ V}}{1,053 \Omega + 3 \Omega} = \frac{2,105 \text{ V}}{4,053 \Omega} = 0,519 \text{ A}$$

com

$$V_C = I_C R_C = (0,519 \text{ A})(3 \Omega) = 1,557 \text{ V}$$

EXEMPLO 9.19 Vamos agora considerar um problema do mesmo tipo que analisamos utilizando os métodos das malhas e dos nós no Cap. 8. O método das malhas foi aplicado ao circuito da Fig. 9.98 (Exemplo 8.12). Vamos utilizar o teorema de Millman para calcular a corrente no resistor de 2Ω e comparar o resultado com o obtido anteriormente.

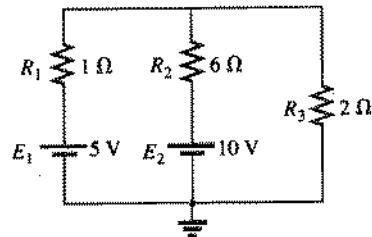


Fig. 9.98 Exemplo 9.19.

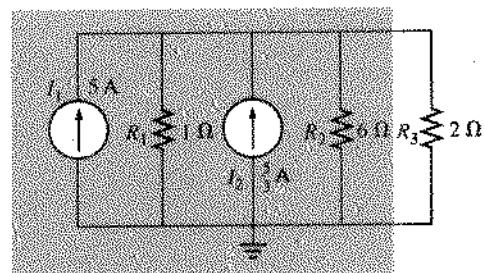


Fig. 9.99 Conversão das fontes da Fig. 9.98 em fontes de corrente.

Solução:

- a. Vamos primeiro resolver o problema passo a passo e depois, no item (b), aplicar a Equação (9.12). A conversão das fontes em fontes de corrente resulta no circuito da Fig. 9.99. Combinando os ramos com fontes e condutâncias em paralelo (Fig. 9.100) obtemos,

$$I_T = I_1 + I_2 = 5 \text{ A} + \frac{5}{3} \text{ A} = \frac{15}{3} \text{ A} + \frac{5}{3} \text{ A} = \frac{20}{3} \text{ A}$$

$$G_T = G_1 + G_2 = 1 \text{ S} + \frac{1}{6} \text{ S} = \frac{6}{6} \text{ S} + \frac{1}{6} \text{ S} = \frac{7}{6} \text{ S}$$

Transformando a fonte de corrente em fonte de tensão (Fig. 9.101), obtemos

$$E_{eq} = \frac{I_T}{G_T} = \frac{\frac{20}{3} \text{ A}}{\frac{7}{6} \text{ S}} = \frac{(6)(20)}{(3)(7)} \text{ V} = \frac{40}{7} \text{ V}$$

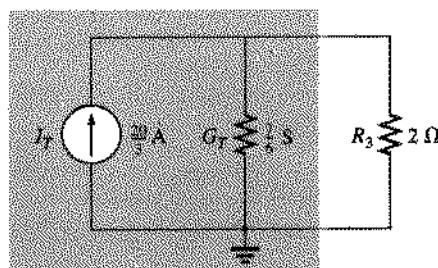


Fig. 9.100 Redução das fontes de corrente da Fig. 9.99 a uma única fonte.

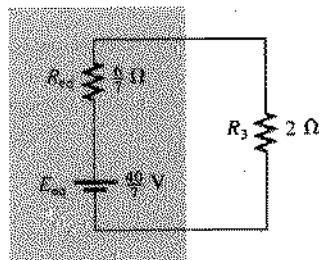


Fig. 9.101 Conversão da fonte de corrente da Fig. 9.100 em fonte de tensão.

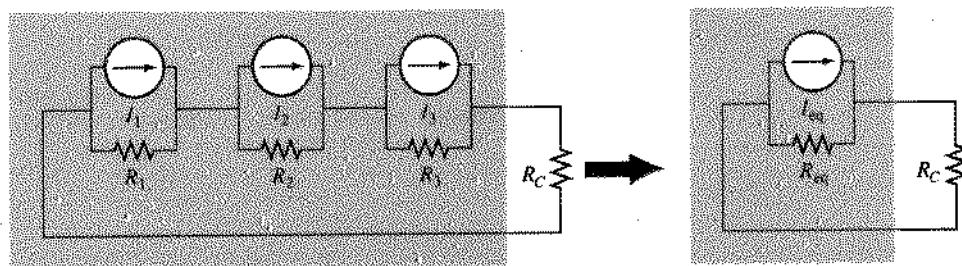


Fig. 9.102 Ilustração do dual do teorema de Millman.

$$R_{eq} = \frac{1}{G_T} = \frac{1}{\frac{7}{6}} = \frac{6}{7} \Omega$$

$$I_{eq} = \frac{I_1(R_1) + I_2(R_2) + I_3(R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (9.14)$$

de modo que

$$I_{2\Omega} = \frac{E_{eq}}{R_{eq} + R_3} = \frac{\frac{40}{7} V}{\frac{6}{7} \Omega + 2 \Omega} = \frac{\frac{40}{7} V}{\frac{6}{7} \Omega + \frac{14}{7} \Omega} = \frac{40 V}{20 \Omega} = 2 A$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 \quad (9.15)$$

o que concorda com o resultado obtido no Exemplo 8.18.
b. Vamos agora aplicar simplesmente a Eq. (9.12):

$$E_{eq} = \frac{\frac{5}{1 \Omega} + \frac{10}{6 \Omega}}{\frac{1}{1 \Omega} + \frac{1}{6 \Omega}} = \frac{\frac{30}{6 \Omega} + \frac{10}{6 \Omega}}{\frac{6}{6 \Omega} + \frac{1}{6 \Omega}} = \frac{40}{7} V$$

9.7 TEOREMA DA SUBSTITUIÇÃO

O enunciado do teorema da substituição é o seguinte:

Se a corrente que atravessa um ramo qualquer de um circuito bilateral de corrente contínua e a tensão entre os terminais do mesmo ramo são conhecidas, ele pode ser substituído por qualquer combinação de componentes que mantenham inalteradas a tensão e a corrente associadas ao ramo.

Em termos mais simples, o teorema afirma que dois ramos são equivalentes se são atravessados pela mesma corrente e apresentam a mesma ddp entre seus terminais. Considere o circuito da Fig. 9.103, no qual são conhecidas a tensão e a corrente associadas ao ramo ab. Alguns ramos equivalentes a ab, obtidos através do teorema da substituição, aparecem na Fig. 9.104.

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{1 \Omega} + \frac{1}{6 \Omega}} = \frac{1}{\frac{6}{6 \Omega} + \frac{1}{6 \Omega}} = \frac{1}{\frac{7}{6} \Omega} = \frac{6}{7} \Omega$$

que coincidem com os valores obtidos no item (a).

O dual do teorema de Millman (Fig. 9.92) está ilustrado na Fig. 9.102. É fácil mostrar que I_{eq} e R_{eq} (Fig. 9.102) são dadas por

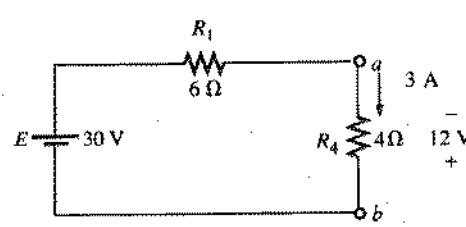


Fig. 9.103 Ilustração do teorema da substituição.

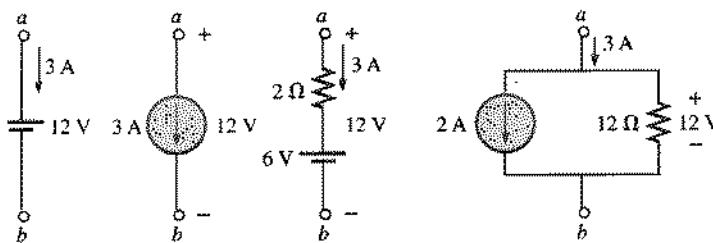


Fig. 9.104 Ramos equivalentes ao ramo ab da Fig. 9.103.

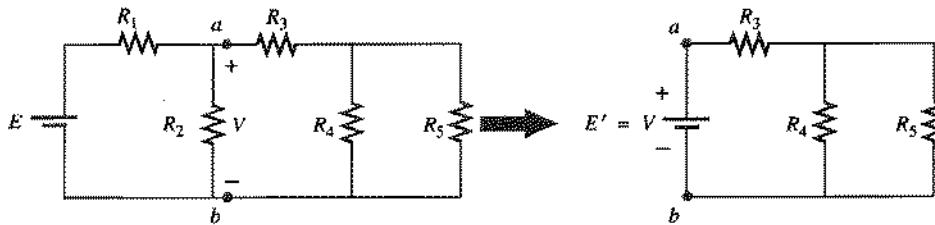


Fig. 9.105 Exemplo de aplicação do teorema da substituição a um circuito complexo, substituindo uma tensão conhecida por uma fonte de tensão.

Observe que todos os ramos equivalentes estão submetidos à mesma ddp e são atravessados pela mesma corrente. Observe também que, como é óbvio, se substituirmos qualquer um dos ramos equivalentes da Fig. 9.104 no circuito da Fig. 9.103, a resposta do restante do circuito não sofrerá alteração. As fontes equivalentes da Fig. 9.104 ilustram o fato de que

uma ddp e uma corrente conhecida em um circuito podem ser substituídas, respectivamente, por uma fonte de tensão e uma fonte de corrente ideal.

Note que este teorema não pode ser utilizado para *resolver* problemas envolvendo circuitos com duas ou mais fontes que não estejam em série ou em paralelo. Para que possamos aplicá-lo é necessário conhecer uma tensão ou uma corrente que deve ser obtida com o uso das técnicas discutidas anteriormente. A Fig. 9.105 ilustra uma aplicação deste teorema. Observe que a tensão conhecida V foi substituída por uma fonte, permitindo isolar a parte do circuito que inclui R_3 , R_4 e R_5 . Você deve se lembrar de que este foi essencialmente o método empregado para analisar os circuitos em cascata.

A Fig. 9.106 mostra um circuito equivalente ao que acabamos de analisar com uma fonte de corrente ideal substituindo uma corrente conhecida, o que permite isolar de R_4 e R_5 .

O leitor também deve se lembrar de que, quando discutimos os circuitos em ponte, mostramos que os ramos em que $V = 0$ e $I = 0$ podiam ser substituídos, respectivamente, por um curto-circuito e um circuito aberto. Esta substituição é um exemplo muito particular de aplicação do teorema da substituição.

9.8 TEOREMA DA RECIPROCIDADE

O teorema da reciprocidade só é aplicável a circuitos que contenham apenas uma fonte. Assim, não pode ser usado para analisar a maioria dos circuitos que discutimos até agora neste capítulo. O teorema afirma o seguinte:

A corrente I em um ramo de um circuito com uma única fonte de tensão localizada em outro ramo qualquer do mesmo circuito é igual à corrente no ramo em que se encontrava a fonte se ela for transferida para o ramo no qual a corrente I foi originalmente medida.

Podemos, em outras palavras, intercambiar as localizações da fonte de tensão e da corrente sem que o valor da corrente sofra qualquer alteração. Para que o teorema seja válido, é necessário que a polaridade da fonte e o sentido da corrente tenham a mesma correspondência antes e depois da troca de localizações.

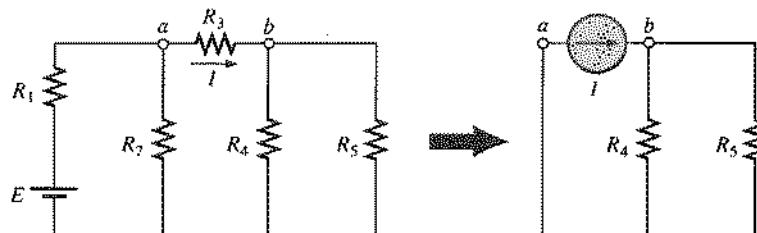


Fig. 9.106 Exemplo de aplicação do teorema da substituição a um circuito complexo, substituindo uma corrente conhecida por uma fonte de tensão.

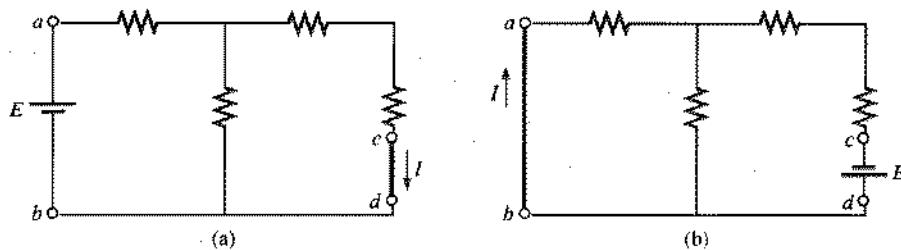


Fig. 9.107 Ilustração do teorema da reciprocidade.

No circuito da Fig. 9.107(a) foi determinada a corrente I produzida pela fonte de tensão E . Se permutarmos as localizações de I e de E , como ilustra a Fig. 9.107(b), a corrente I terá o mesmo valor antes e depois da operação. Para demonstrar a validade desta afirmativa, e consequentemente do teorema, considere o circuito da Fig. 9.108, no qual foram associados valores numéricos aos elementos do circuito da Fig. 9.107.

A resistência total é dada por

$$\begin{aligned} R_T &= R_1 + R_2 \parallel (R_3 + R_4) = 12\Omega + 6\Omega \parallel (2\Omega + 4\Omega) \\ &= 12\Omega + 6\Omega \parallel 6\Omega = 12\Omega + 3\Omega = 15\Omega \end{aligned}$$

Logo

$$I_F = \frac{E}{R_T} = \frac{45\text{ V}}{15\Omega} = 3\text{ A}$$

e também

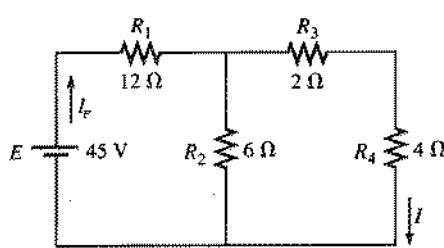
$$I = \frac{3\text{ A}}{2} = 1,5\text{ A}$$

Para o circuito da Fig. 9.109, que corresponde ao circuito da Fig. 9.107(b), obtemos

$$\begin{aligned} R_T &= R_4 + R_3 + R_1 \parallel R_2 \\ &= 4\Omega + 2\Omega + 12\Omega \parallel 6\Omega = 10\Omega \end{aligned}$$

e

$$I_F = \frac{E}{R_T} = \frac{45\text{ V}}{10\Omega} = 4,5\text{ A}$$

Fig. 9.108 Determinação da corrente I produzida por uma fonte E .

de modo que

$$I = \frac{(6\Omega)(4,5\text{ A})}{12\Omega + 6\Omega} = \frac{4,5\text{ A}}{3} = 1,5\text{ A}$$

que concorda com o valor obtido anteriormente.

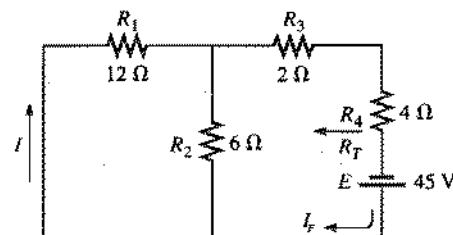
A utilidade desse teorema pode ser mais bem apreciada se considerarmos um circuito complexo como o da Fig. 9.110.

9.9 ANÁLISE COMPUTACIONAL

Uma vez que tenhamos compreendido os princípios básicos da aplicação de um pacote de software ou de uma linguagem, passamos a ter a oportunidade de ser criativos e inovadores. Depois de anos de contato com as linguagens e através de um mecanismo de tentativa e erro, os programadores profissionais desenvolvem, em geral, um conjunto de inovações que não são apenas funcionais mas também muito interessantes, podendo-se quase dizer que se assemelham a obras de arte. Agora que já tomamos contato com algumas das operações básicas associadas ao PSpice, apresentaremos nos programas a seguir alguns novos artifícios. Incluímos também um programa em BASIC, cujo formato é semelhante ao que utilizamos nos capítulos anteriores. A única inovação digna de nota é a elaboração de uma tabela para mostrar os valores de algumas grandezas do circuito em função da resistência de carga.

PSpice(DOS)

Superposição Vamos agora aplicar esta técnica ao circuito da Fig. 9.111, que foi analisado anteriormente no Exemplo 9.3, o que permitirá compararmos as soluções. O arquivo de entrada

Fig. 9.109 Intercâmbio entre E e I da Fig. 9.108 para demonstrar a validade do teorema da reciprocidade.

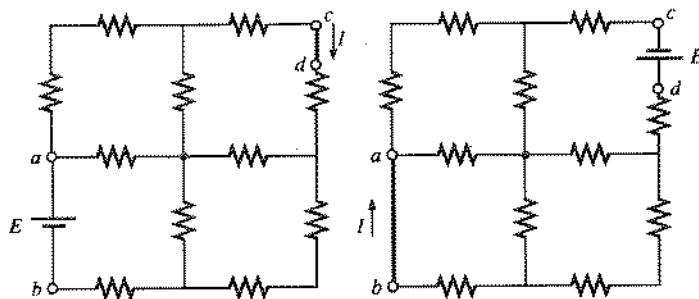


Fig. 9.110 Exemplo da utilidade do teorema da reciprocidade.

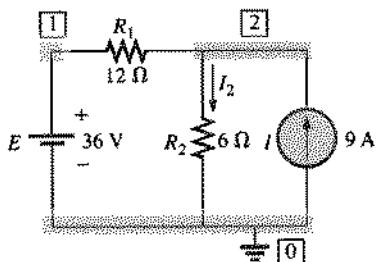


Fig. 9.111 Identificação dos nós do circuito do Exemplo 9.3.

para este circuito é dado na Fig. 9.112 juntamente com o valor resultante para a corrente I_{R_2} .

Para calcularmos a contribuição somente da fonte de tensão para I_{R_2} , a única modificação necessária no arquivo de entrada da Fig. 9.112 é anular a fonte de corrente, como vemos no arquivo de entrada da Fig. 9.113. Obtemos $I'_2 = 2$ A, exatamente como no Exemplo 9.3.

Para calcularmos somente os efeitos da fonte de corrente, fazemos a tensão de entrada igual a zero, como ilustra o arquivo de entrada na Fig. 9.114. Observe, no entanto, que a declaração .DC deve ser reescrita para a fonte à qual estará associado um valor específico. O valor obtido para I'_2 é 6 A, novamente confirmando os resultados do Exemplo 9.3. A adição de I'_2 e I''_2 fornece uma corrente total de 8 A, que concorda com o resultado obtido no caso na Fig. 9.112.

Teorema de Thévenin Vamos usar um artifício interessante para calcular a resistência de Thévenin. O mesmo artifício pode ser empregado em outras situações, mesmo que não se trate de uma aplicação explícita do teorema de Thévenin. Tomaremos como exemplo o circuito da Fig. 9.115, que foi analisado anteriormente no Exemplo 9.10.

Observe no arquivo de entrada da Fig. 9.116 que uma resistência de valor muito elevado foi especificada entre os terminais 4 e 0 para simular um circuito aberto. O PSpice não reconhece nós isolados, exigindo que todos os nós estejam ligados ao nó de referência (a terra, no caso) através de pelo menos um ramo.

O arquivo de saída da Fig. 9.116 mostra que a tensão de circuito aberto E_{Th} é -3V, em concordância com a solução do Exemplo 9.10. O sinal negativo significa que o nó 4 está a um potencial mais baixo que o nó 0 de referência.

Para determinar R_{Th} , aplicamos uma fonte de corrente de 1 A ao circuito da Fig. 9.115, como na Fig. 9.117(a), depois de eliminar as fontes de tensão, especificando zero volts para todas elas. Podemos determinar a resistência R da Fig. 9.117(b) utilizando a tensão resultante V_R e a definição de resistência:

$$R = \frac{V_R}{I} = \frac{V_R}{1 \text{ A}} \quad (9.16)$$

Na Eq. 9.16, como $I = 1 \text{ A}$, o valor numérico de R em ohms é o mesmo que o da tensão V_R em volts. Logo, quando pedimos

CHAPTER 9 / SUPERPOSITION

***** CIRCUIT DESCRIPTION

```
VE 1 0 36V
R1 1 2 12
R2 2 0 6
IS 0 2 9A
.DC VE 36 36 1
.PRINT DC I(R2)
.OPTIONS NOPAGE
.END
```

***** DC TRANSFER CURVES

TEMPERATURE = 27.000 DEG C

VE	I(R2)
3.60E+01	2.000E+01

Fig. 9.112 Arquivos de entrada e de saída para o circuito da Fig. 9.111, incluindo as duas fontes.

CHAPTER 9, SUPERPOSITION

**** CIRCUIT DESCRIPTION

```
VE 1 0 36V
R1 1 2 12
R2 2 0 6
IS 0 2 9A
.DC VE 36 36 1
.PRINT DC I(R2)
.OPTIONS NOPAGE
.END
```

**** DC TRANSFER CURVES

TEMPERATURE = 27.000 DEG C

VE I(R2)

1.600E+01 2.000E+00

Fig. 9.113 Arquivos de entrada e de saída para o circuito da Fig. 9.111, somente com a fonte de tensão.

CHAPTER 9, SUPERPOSITION

**** CIRCUIT DESCRIPTION

```
VE 1 0 0V
R1 1 2 12
R2 2 0 6
IS 0 2 9A
.DC VE 9 9 1
.PRINT DC I(R2)
.OPTIONS NOPAGE
.END
```

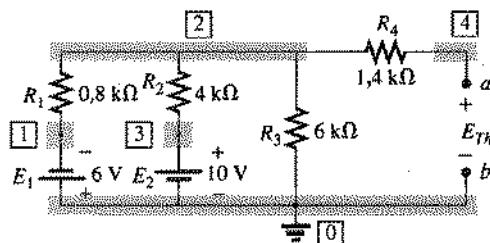
**** DC TRANSFER CURVES

TEMPERATURE = 27.000 DEG C

VE I(R2)

0.000E+00 6.000E+00

Fig. 9.114 Arquivos de entrada e de saída para o circuito da Fig. 9.111, somente com a fonte de corrente.

Fig. 9.115 Utilização do PSpice para determinar E_{Th} no circuito do Exemplo 9.10.

```
Chapter 9 - Thevenin's Theorem E(th)

***** CIRCUIT DESCRIPTION *****

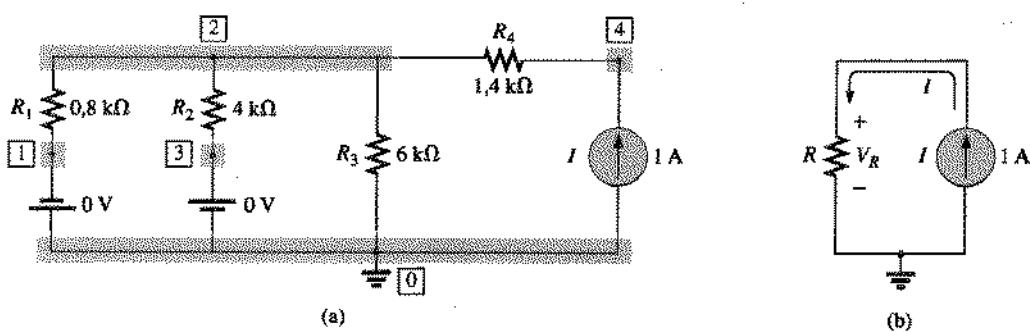
V1 0 1 DC 6V
V2 3 0 DC 10V
R1 1 2 .8K
R2 2 3 4K
R3 2 0 6K
R4 2 4 1.4K
RL 4 0 1E30
.DC V1 6 6 1
.PRINT DC V(4,0)
.OPTIONS NOPAGE
.END

***** DC TRANSFER CURVES *****

TEMPERATURE = 27.000 DEG C

V1 V(4,0)
6.000E+00 -3.000E+00
```

Fig. 9.116 Arquivos de entrada e de saída para o circuito da Fig. 9.115.

Fig. 9.117 Preparação do circuito da Fig. 9.115 para determinar R_{Th} .

Chapter 9 - Thevenin's Theorem E(th)

**** CIRCUIT DESCRIPTION

```
V1 0 1 DC 0V
V2 3 0 DC 0V
R1 1 2 .8K
R2 2 3 4K
R3 2 0 6K
R4 2 4 1.4K
.DC 11 1 1
.PRINT DC V(4,0)
 OPTIONS NOPAGE
.END
```

**** DC TRANSFER CURVES

TEMPERATURE = 27.000 DEG C

I1	V(4,0)
1.000E+00	2.000E+03

Fig. 9.118 Arquivos de entrada e de saída para o circuito da Fig. 9.117.

o valor de $V(4,0)$ no arquivo de entrada da Fig. 9.118, obtemos também o valor de R_{th} . O arquivo de saída da Fig. 9.118 mostra que $V_R = 2 \text{ kV}$, o que interpretamos como significando que $R_{th} = 2 \text{ k}\Omega$, o mesmo valor obtido no Exemplo 9.10.

PSpice (Windows)

Tudo que já fizemos neste capítulo com o PSpice (DOS) pode ser feito no PSpice (Windows) utilizando uma abordagem muito semelhante. Nesta sessão do PSpice (Windows) vamos apresentar um método para que o programa estabeleça um conjunto de valores para um parâmetro e construa o gráfico de uma grandeza em função deste parâmetro, utilizando o comando **Probe**. No circuito da Fig. 9.79, por exemplo, temos um resistor variável cuja resistência pode assumir valores entre 1 e 30 Ω . A potência fornecida à carga para cada valor de R_C é obtida para fornecer os dados necessários ao traçado do gráfico da Fig. 9.80. A

versão esquemática da Fig. 9.79 aparece na Fig. 9.119, com uma diferença notável em relação aos esquemas que vimos anteriormente — o resistor de carga **RL*** não tem um valor fixo, sendo denominado **{Rval}**. Associamos este formato ao resistor clicando duas vezes sobre o valor do resistor e depois escrevendo **{Rval}** com o teclado. O resistor variável pode receber qualquer nome, mas as chaves devem sempre aparecer no formato indicado. A seqüência **Draw-Get New Part-Browse-special.lib-PARAM-OK** causará o aparecimento do símbolo **PARAMETER** no esquema, que pode ser colocado em uma posição conveniente. Uma vez que ele tenha sido colocado, aparecerá a mensagem **PARAMETERS**; clicando duas vezes sobre **PARAMETERS** aparecerá uma caixa de diálogo onde **Name 1** deve ser escolhido como **Rval** seguido por **SaveAttr**. Devemos então escolher o primeiro valor, **VALUE1** como 1, representando o primeiro valor do resistor de carga, entrando em seguida com **SaveAttr-OK**. Para entrarmos com a faixa de valores a ser associada ao resistor da carga usamos a sequência **Analysis-Setup-DC Sweep-Global Parameter-Linear**.

O comando **DC Sweep** especifica uma série de cálculos em corrente contínua, enquanto **Linear** estabelece um intervalo fixo entre os valores de **RL**. Se **Start Value** for escolhido como sendo 1 Ω , o gráfico resultante começará em 1 em vez de zero. Como o 0 não é permitido como dado de entrada, escolha o valor 0,001 para **Start Value**. No gráfico este ponto aparecerá bem próximo de 0 Ω . Por causa disso devemos escolher para **Final Value** o valor 30,001; se não fizermos isto, o programa efetuará o último cálculo em 29 Ω em vez de em 30 Ω como na Fig. 9.80. O valor de **Increment** será especificado como 1 para obtermos um grá-

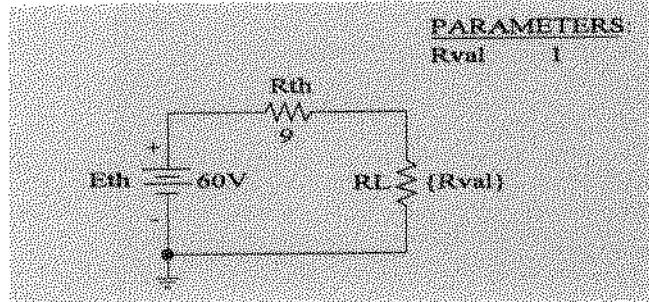


Fig. 9.119 Versão esquemática da Fig. 9.79.

*Como o programa utiliza termos em inglês, aqui tivemos que manter a inicial **L** (**load**) para carga. O mesmo acontece nas Figs. 9.120 e 9.121. (N. T.)

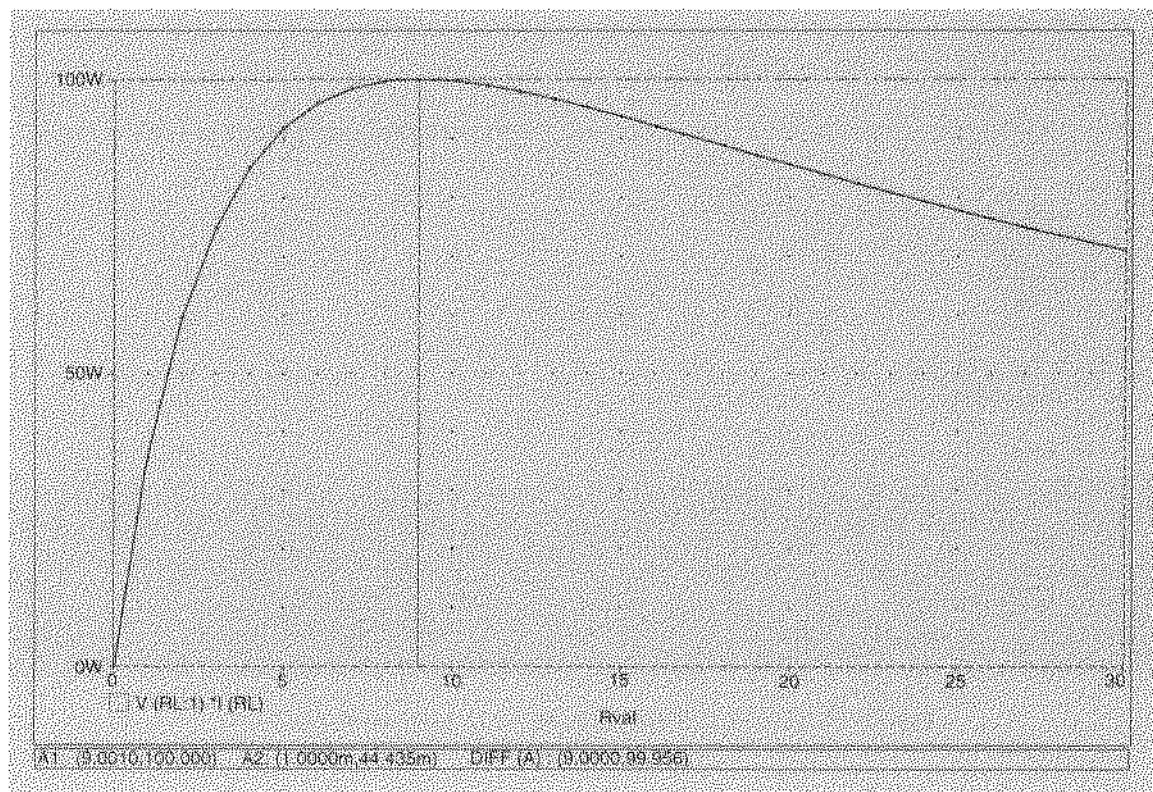


Fig. 9.120 Potência fornecida a R_c em função de R_c para circuito da Fig. 9.119.

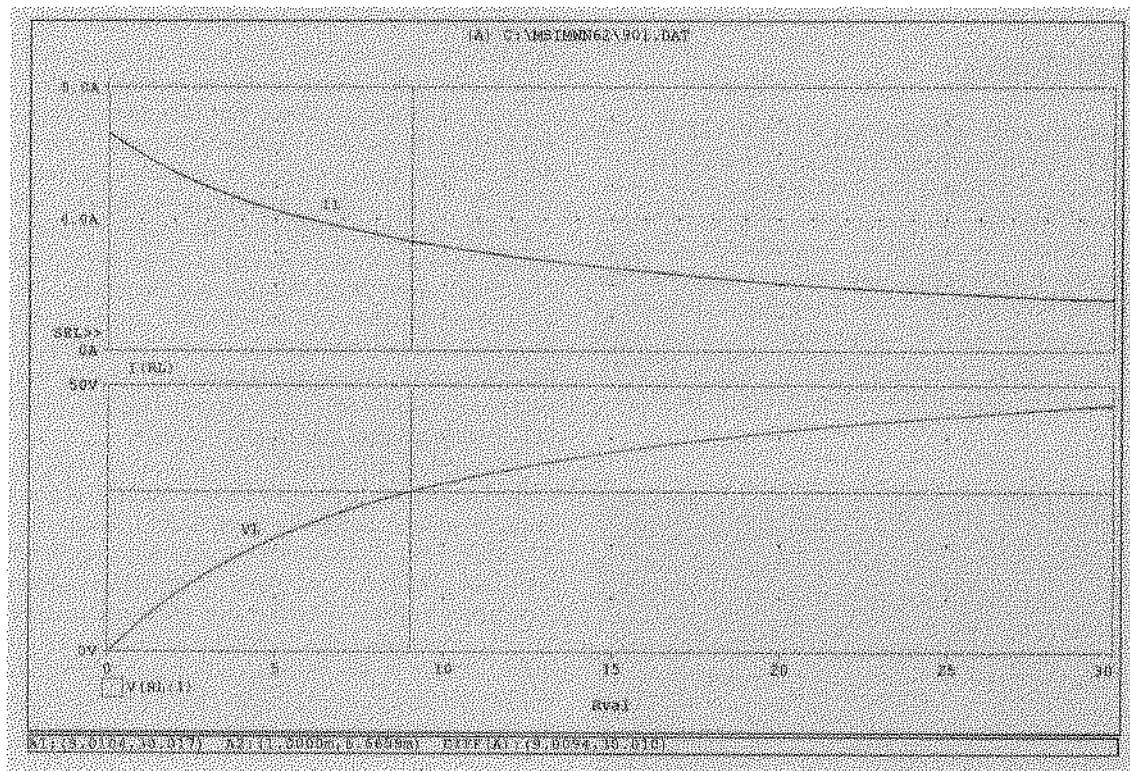


Fig. 9.121 V_c e I_c em função de R_c para o circuito da Fig. 9.119.

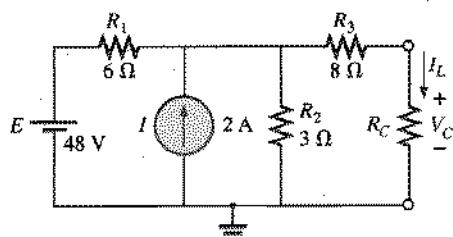


Fig. 9.122 Circuito para o qual desejamos determinar E_{Th} e R_{Th} utilizando um programa em BASIC.

fico com 31 pontos. Finalmente, clique um OK e a análise poderá ser iniciada com o comando **Analysis-Simulate**.

Quando o esquema gerado por **Probe** aparecer, a seqüência **Trace-Add-Trace Command-V(RL:1)*I(RL)-OK** irá gerar um gráfico da potência fornecida à carga em função de sua resistência, como vemos na Fig. 9.120. A notação **V(RL:1)** e **I(RL)** é estabelecida pelo esquema e aparece na lista da caixa de diálogo. O gráfico confirma os resultados da Fig. 9.80 com um valor máximo de 100 W. A linha vertical assinalando o máximo foi obtida utilizando **Tools-Cursor-Display**, pressionando em seguida o botão esquerdo do mouse com o cursor colocado sobre o esquema. Retornando a **Tools-Cursor-Max** colocamos o cursor no valor máximo da curva. A caixa de diálogo **Cursor** na parte

inferior da figura revela que o valor máximo da potência é 100 W e que ele ocorre em 9Ω . O comando **Probe** limita os valores no eixo horizontal em 35Ω , fazendo com que o gráfico seja interrompido antes de chegar ao final da escala. Podemos mudar a faixa de variação de R_L para $0-30\Omega$ utilizando **Plot-X-Axis Setting-User Defined-0 a 30**.

Podemos obter um gráfico de V_L em função da resistência da carga utilizando **Trace-Add-V(RL:1)-OK** como vemos na Fig. 9.121. Utilizando **Tools-Cursor-Display**, seguido por um clique no botão esquerdo do mouse, criamos um **Cursor** que pode ser colocado em 9Ω para mostrar o valor da tensão neste ponto. Este valor é 30 V, que é a metade da tensão da fonte (como deve ser no caso de transferência máxima de potência). O símbolo **VL** é introduzido por **Tools-Label-Text-VL-OK**. Podemos obter também o gráfico de I_L em função da resistência da carga utilizando **Plot-Add-Trace-Add-I(RL)-OK**, introduzindo o símbolo como no caso anterior. A escala horizontal pode novamente ser reduzida ao máximo de 30Ω . Quando estiver trabalhando com mais de um gráfico, preste atenção na localização do símbolo **SEL>>**; é ele que indica qual é o gráfico “ativo”, isto é, qual é a curva que está sendo computada ou modificada. Para escolher outra curva, basta clicar uma vez sobre ela.

BASIC

O programa em BASIC da Fig. 9.123, além de analisar o circuito da Fig. 9.122, também fornece os valores de R_{Th} e E_{Th}

```

10 REM ***** PROGRAM 9-1 *****
10 REM *****
10 REM Program to tabulate changes in load levels for
10 REM a range of load values using Thevenin's theorem
10 REM *****
10 REM
100 PRINT "For the network of Fig. 9.122"
110 PRINT "enter the following data:"
120 PRINT
130 INPUT "R1"; R1: REM Enter 0 if resistor non-existent
140 INPUT "R2"; R2: REM Enter 1E30 if resistor non-existent
150 INPUT "R3"; R3: REM Enter 0 if resistor non-existent
160 INPUT "RL"; RL
170 INPUT "Supply voltage, E="; E
180 INPUT "and supply current, I="; I
190 PRINT
200 REM Determine Rth
210 RT = R2 + R1 * R2 / (R1 + R2)
220 REM Use superposition to determine Eth
230 E1 = R2 * E / (R1 + R2)
240 I2 = R2 * I / (R1 + R2)
250 E2 = R1 * R2 * I / (R1 + R2)
260 ET = E1 + E2
270 PRINT "Using Thevenin's Theorem"
280 PRINT "Rth="; RT; "ohms"
290 PRINT "and Eth="; ET; "volts"
300 PRINT
310 PRINT TAB(7); "RL"; TAB(19); "IL"; TAB(25); "VL";
320 PRINT TAB(15); "EL"; TAB(45); "PD"; TAB(55); "N"
330 FOR RL = RT / 5 TO 2 * RT STEP RT / 5
340 IL = ET / (RT + RL)
350 VL = IL * RL
360 PL = IL * 2 * RL
370 PD = ET * IL
380 N = 100 * PL / PD
390 IF RL = RT THEN PRINT "Rth="
400 PRINT TAB(5); RL; TAB(15); IL; TAB(25); VL;
410 PRINT TAB(3); PL; TAB(45); PD; TAB(55); N
420 NEXT RL
430 END

```

Fig. 9.123 Arquivos de entrada e de saída em BASIC para o circuito da Fig. 9.122.

For the network of Fig. 9.122 enter the following data:					
$R_1 = ?$	6				
$R_2 = ?$	3				
$R_3 = ?$	8				
$R_L = ?$	10				
Supply voltage, $E = ?$	48				
and supply current, $I = ?$	2				
Using Thevenin's Theorem:					
$R_{th} = 10$ ohms					
and $E_{th} = 30$ volts					
R_L	I_L	V_L	P_L	P_D	$\eta\%$
2	1.666667	3.333333	5.555556	31.333333	16.66667
4	1.428572	5.714286	8.163265	78.571429	28.571429
6	1.25	7.5	9.375	25	37.5
8	1.111111	8.888889	9.876444	72.222222	44.444444
$R_{th} = 10$	10	10	20	50	
12	9.090909	10.909090	9.917356	18.181818	54.545454
14	8.333333	11.666667	9.722222	16.666667	58.333333
16	7.692308	12.307692	9.867456	15.183662	61.510471
18	7.142857	12.857143	9.183674	14.285714	64.285714
20	6.666667	13.333333	8.888889	12.333333	66.666666

Fig. 9.123 Arquivos de entrada e de saída em BASIC para o circuito da Fig. 9.122. (continuação)

uma tabela de valores dos parâmetros de saída que vai de $R_{th}/5$ até $2R_{th}$ em incrementos de $R_{th}/5$ (linha 330). Como R_{th} vale 10 Ω, a faixa de variação de R_C vai de 2 Ω a 20 Ω em intervalos de 2 Ω. As linhas de 130 a 180 solicitam os parâmetros do circuito, enquanto as linhas de 200 a 210 calculam R_{th} . A determinação de E_{th} é feita da linha 220 à linha 260 utilizando o teorema da superposição; a impressão de E_{th} e R_{th} é feita da linha 270 até a linha 290. As linhas 310 e 320 criam um cabeçalho para a listagem, com o comando TAB simplesmente especificando a margem esquerda do texto e os espaços entre as colunas. A faixa de variação de R_C é especificada na linha 330, e todos os cálculos necessários são efetuados nas linhas de 340 a 360. A linha 390 especifica que se R_C foi igual a R_{th} , o comentário " $R_{th} =$ " deverá ser introduzido no início da linha correspondente, como vemos na figura. As linhas 400 e 410 efetuam a impressão dos valores de todas as grandezas, enquanto a linha 420 envia o programa de volta à linha 330 para repetir os cálculos com o valor seguinte de R_C .

Note que obtemos a potência máxima quando $R_C = R_{th} = 10$ Ω, e nestas condições temos uma eficiência de 50%. PF simboliza a potência fornecida pela fonte, enquanto PL simboliza a potência recebida pela carga.

PROBLEMAS

SEÇÃO 9.2 Teorema da Superposição

1. a. Utilizando o teorema da superposição, calcule as correntes nos resistores do circuito da Fig. 9.124.
 b. Calcule as potências fornecidas pelas duas fontes a R_1 .
 c. Utilizando o valor da corrente total que atravessa R_1 , calcule a potência total dissipada por R_1 .
 d. Podemos aplicar a superposição para calcular esta potência? Explique.
2. Calcule a corrente I no resistor de 10 Ω, usando o teorema da superposição, para os circuitos na Fig. 9.125.

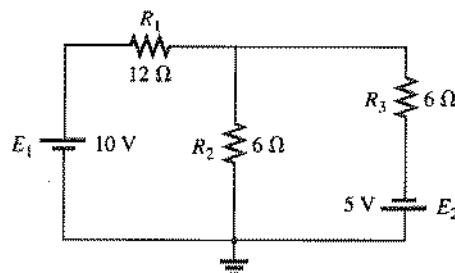
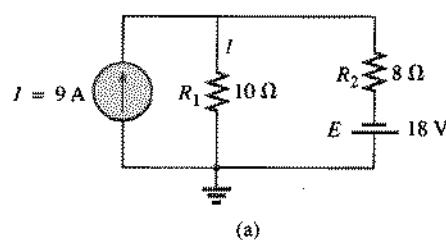
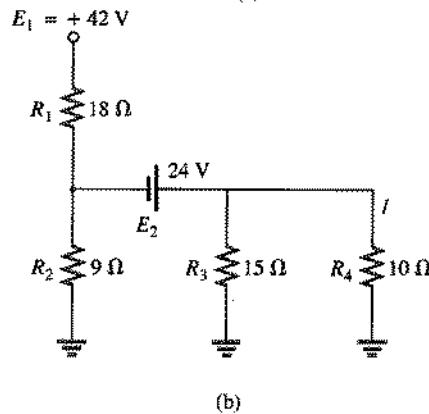


Fig. 9.124 Problema 1.



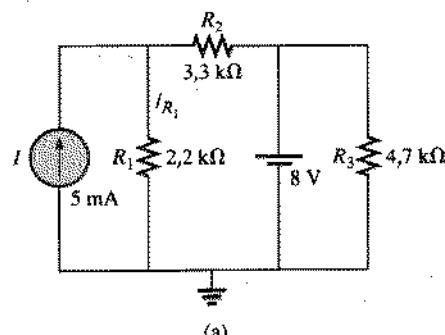
(a)



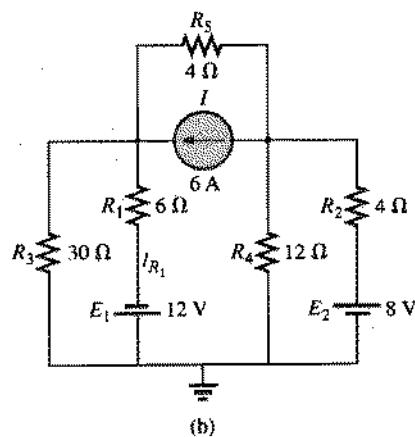
(b)

Fig. 9.125 Problemas 2, 37 e 44.

- *3. Obtenha, utilizando o teorema da superposição, a corrente em R_1 nos circuitos da Fig. 9.126.



(a)



(b)

Fig. 9.126 Problema 3.

4. Calcule a tensão V_1 no circuito da Fig. 9.127, usando o teorema da superposição.

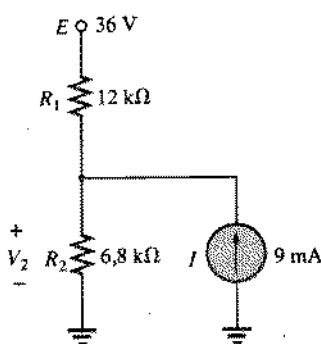


Fig. 9.127 Problemas 4 e 40.

SEÇÃO 9.3 Teorema de Thévenin

5. a. Desenhe o circuito equivalente de Thévenin para o circuito externo ao resistor R da Fig. 9.128.
b. Calcule a corrente em R para R igual a 2,30 e 100 Ω.

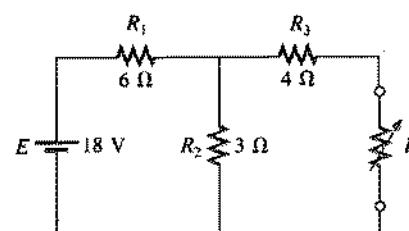
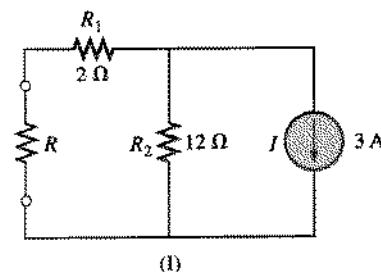
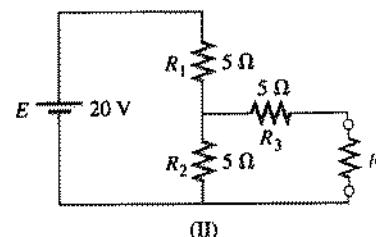


Fig. 9.128 Problema 5.

6. a. Desenhe o circuito equivalente de Thévenin para o circuito externo ao resistor R nos circuitos da Fig. 9.129.
b. Calcule a potência fornecida a R para R igual a 2 Ω e 100 Ω.



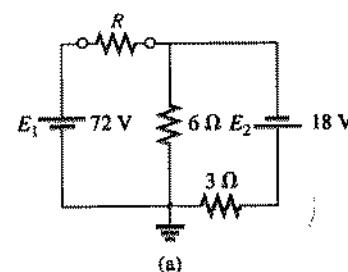
(I)



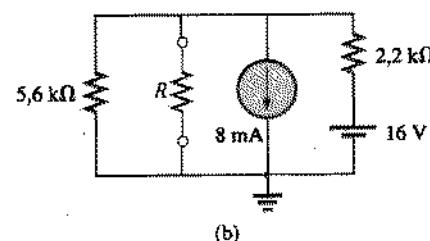
(II)

Fig. 9.129 Problemas 6, 13, 19 e 38.

7. Desenhe o circuito equivalente de Thévenin para o circuito externo ao resistor R nos circuitos da Fig. 9.130.



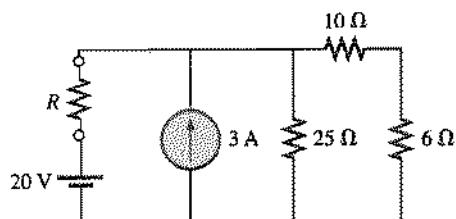
(a)



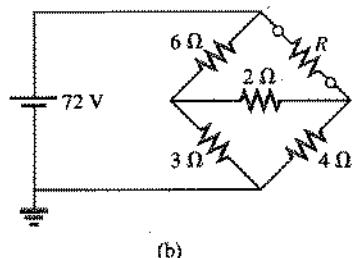
(b)

Fig. 9.130 Problemas 7, 14 e 20.

- *8. Desenhe o circuito equivalente de Thévenin para o circuito externo ao resistor R nos circuitos da Fig. 9.131.



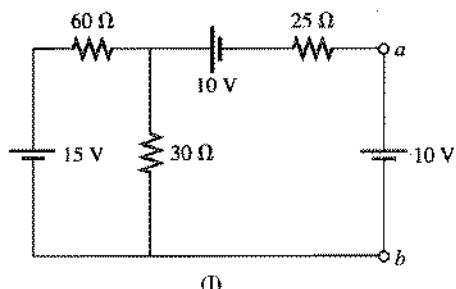
(a)



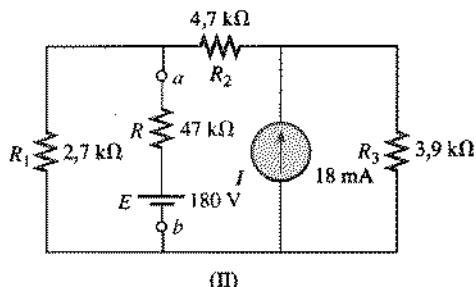
(b)

Fig. 9.131 Problemas 8, 15, 21, 39, 41, 42 e 45.

- *9. Desenhe o circuito equivalente de Thévenin para as partes dos circuitos da Fig. 9.132 externas aos pontos a e b .



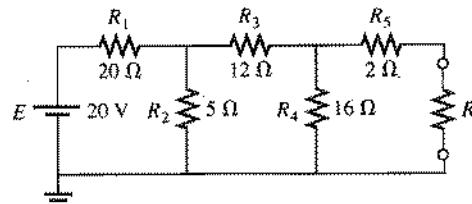
(I)



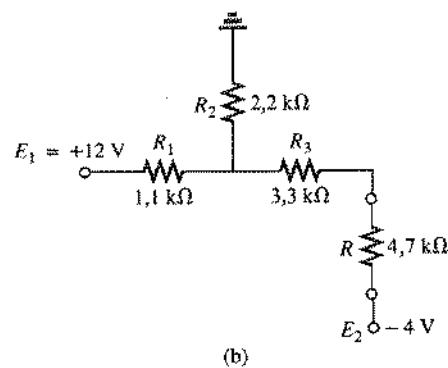
(II)

Fig. 9.132 Problemas 9 e 16.

- *10. Desenhe o circuito equivalente de Thévenin para o circuito externo ao resistor R nos circuitos da Fig. 9.133.



(a)



(b)

Fig. 9.133 Problemas 10 e 17.

- *11. Desenhe o circuito equivalente de Thévenin para a parte do circuito externa ao resistor de carga R_C da Fig. 9.134.

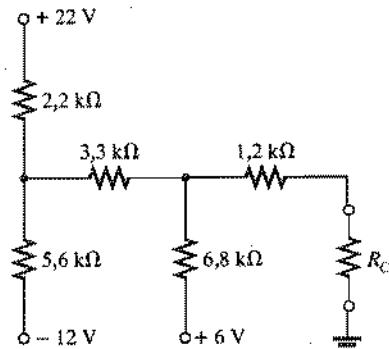


Fig. 9.134 Problema 11.

- *12. Para o circuito com um transistor da Fig. 9.135,

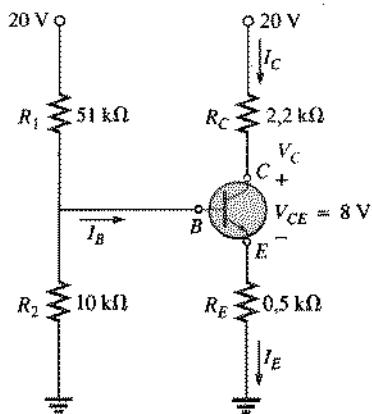


Fig. 9.135 Problema 12.

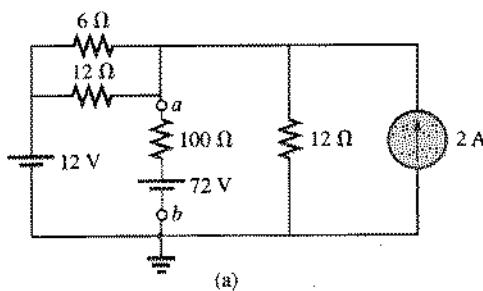
- Desenhe o circuito equivalente de Thévenin para a parte do circuito à esquerda do terminal da base (B).
- Sabendo que $I_C = I_E$ e $V_{CE} = 8\text{ V}$, calcule I_E .
- Usando os resultados das partes (a) e (b), calcule a corrente de base I_B para $V_{BE} = 0,7\text{ V}$.
- Qual o valor da tensão V_C ?

SEÇÃO 9.4 Teorema de Norton

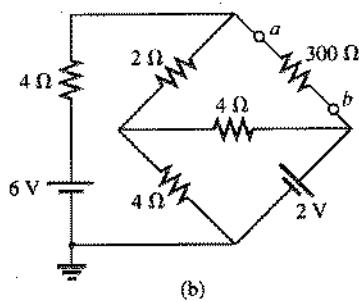
- Desenhe o circuito equivalente de Norton para o circuito externo ao resistor R nos circuitos da Fig. 9.129.
- a. Encontre o equivalente de Norton para o circuito externo ao resistor R nos circuitos da Fig. 9.130.
- b. Faça a conversão para o circuito equivalente de Thévenin e compare os valores assim obtidos de E_{Th} e R_{Th} com os encontrados no Problema 7.
- Desenhe o circuito equivalente de Thévenin para a parte do circuito externa ao resistor R nos circuitos da Fig. 9.131.
- a. Desenhe o circuito equivalente de Thévenin para a parte do circuito externa ao resistor R nos circuitos da Fig. 9.132.
- b. Faça a conversão para o circuito equivalente de Thévenin e compare os valores assim obtidos de E_{Th} e R_{Th} com os encontrados no Problema 9.
- Desenhe o circuito equivalente de Norton para a parte do circuito externa ao resistor R nos circuitos da Fig. 9.133.
- Desenhe o circuito equivalente de Norton para as partes dos circuitos da Fig. 9.136 externas ao ramo ab .

SEÇÃO 9.5 Teorema da Transferência Máxima de Potência

- a. Encontre, para os circuitos da Fig. 9.129, o valor de R que torna máxima a potência dissipada em R .
- b. Calcule o valor desta potência para cada circuito.
- a. Encontre, nos circuitos da Fig. 9.130, o valor de R que torna máxima a potência dissipada em R .
- b. Calcule o valor desta potência para cada circuito.
- Para os circuitos da Fig. 9.131, encontre o valor de R que torna máxima a potência dissipada em R e o valor desta potência.



(a)



(b)

Fig. 9.136 Problemas 18 e 43.

- No circuito da Fig. 9.137, calcule o valor de R que torna máxima a potência dissipada em R .
- Determine o valor desta potência.
- Trace um gráfico da potência dissipada em R em função de R para R igual a $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 2$ vezes o valor obtido no item (a).

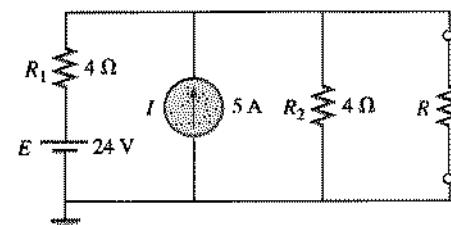


Fig. 9.137 Problemas 22 e 46.

- *23. Determine a resistência R_1 na Fig. 9.138 para que a potência dissipada em R_4 seja máxima. Pense!

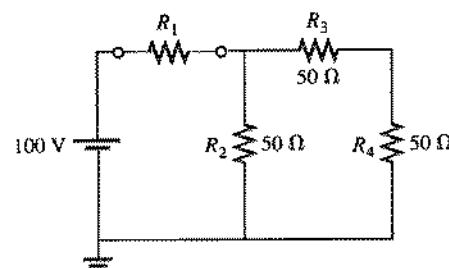


Fig. 9.138 Problema 23.

- *24. a. Qual o valor de R_2 na Fig. 9.139 para que a potência dissipada em R_3 seja máxima?
b. É possível fazer alguma afirmativa geral acerca de situações como as descritas neste problema e no anterior?

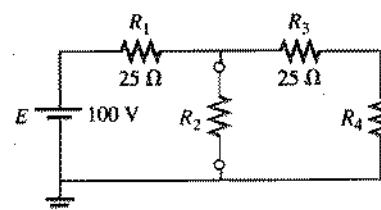


Fig. 9.139 Problema 24.

- 25*. Determine o valor de R no circuito da Fig. 9.140 que torna máxima a potência fornecida ao resistor de 100Ω .

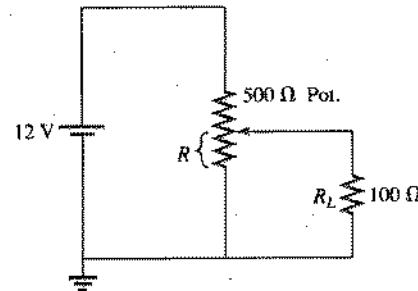


Fig. 9.140 Problema 25.

SEÇÃO 9.6 Teorema de Millman

26. Calcule, usando o teorema de Millman, a tensão entre os terminais de R_C e a corrente que o atravessa, no circuito da Fig. 9.141.

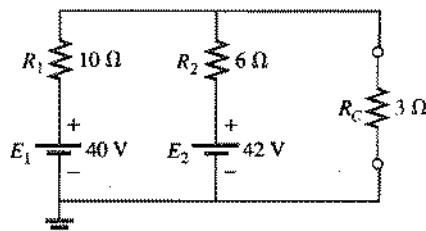


Fig. 9.141 Problema 26.

27. Repita o Problema 26 para o circuito da Fig. 9.142.

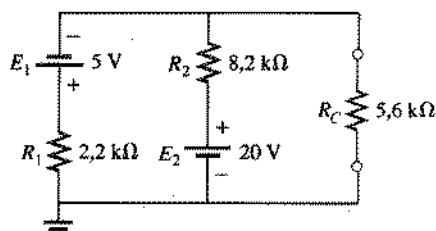


Fig. 9.142 Problema 27.

28. Repita o Problema 26 para o circuito da Fig. 9.143.

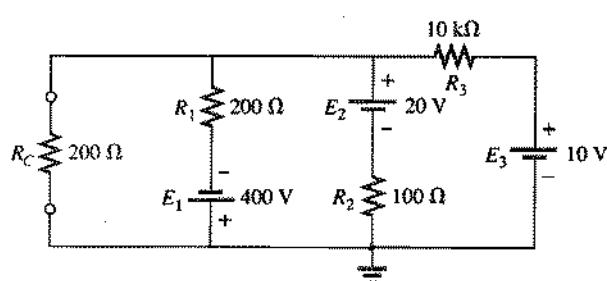


Fig. 9.143 Problema 28.

29. Utilizando o dual do teorema de Millman, calcule a corrente no resistor R_C na Fig. 9.144 e a ddp entre seus terminais.

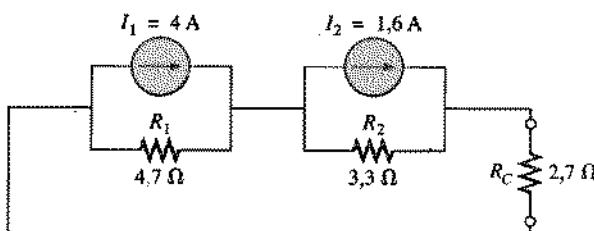


Fig. 9.144 Problema 29.

- *30. Refaça o Problema 29 para o circuito da Fig. 9.145.

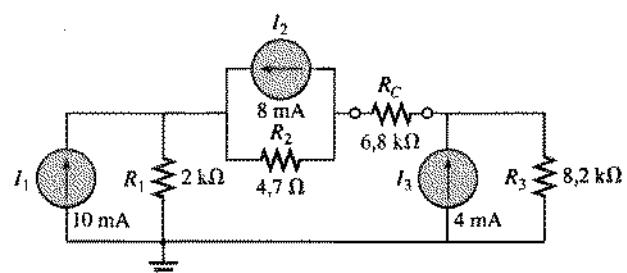


Fig. 9.145 Problema 30.

SEÇÃO 9.7 Teorema da Substituição

31. Usando o teorema da substituição, desenhe três ramos equivalentes ao ramo ab do circuito da Fig. 9.146.

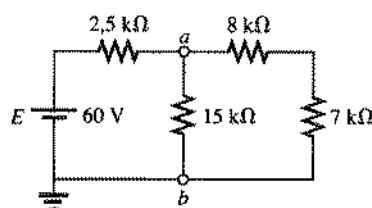


Fig. 9.146 Problema 31.

32. Repita o Problema 31 para o circuito da Fig. 9.147.

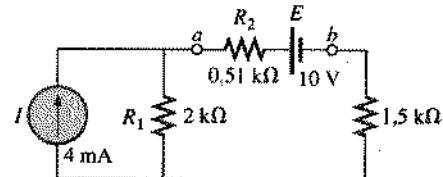


Fig. 9.147 Problema 32.

- *33. Repita o Problema 31 para o circuito da Fig. 9.148. Cuidado!

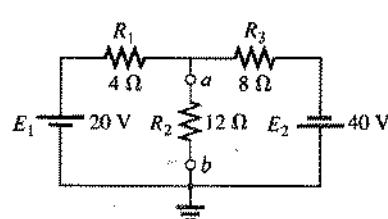
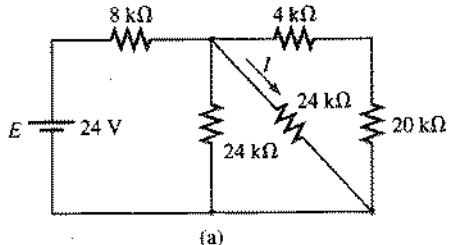


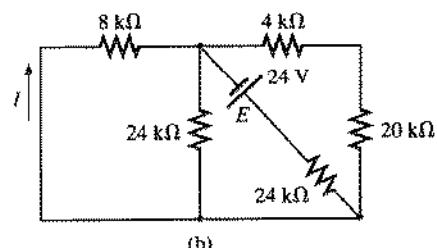
Fig. 9.148 Problema 33.

SEÇÃO 9.8 Teorema da Reciprocidade

34. a. Determine a corrente I no circuito da Fig. 9.149(a).
 b. Repita o item (a) para o circuito da Fig. 9.149(b).
 c. Suas respostas são compatíveis com o teorema da reciprocidade?



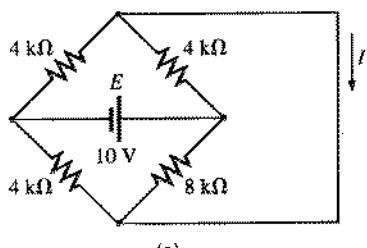
(a)



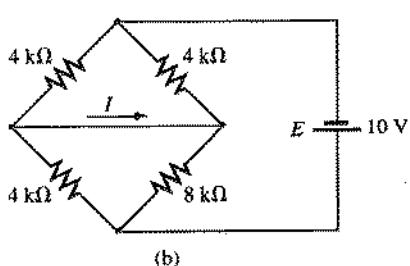
(b)

Fig. 9.149 Problema 34.

35. Repita o Problema 34 para os circuitos da Fig. 9.150.



(a)



(b)

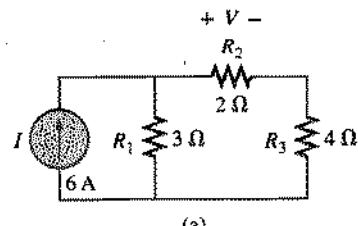
Fig. 9.150 Problema 35.

36. a. Determine a tensão V para o circuito da Fig. 9.151(a).
 b. Repita o item (a) para o circuito da Fig. 9.151(b).
 c. Suas soluções concordam com o dual do teorema da reciprocidade?

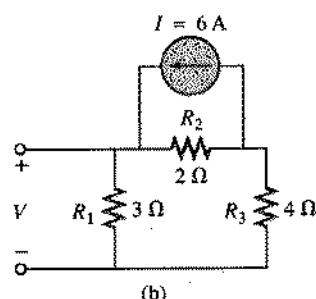
SEÇÃO 9.9 Análise Computacional

PSpice (DOS)

37. Escreva o arquivo de entrada necessário para calcular a corrente I e as correntes parciais que a constituem no circuito da Fig. 9.125(b), usando o teorema da superposição.



(a)



(b)

Fig. 9.151 Problema 36.

38. Escreva o arquivo de entrada necessário para determinar o circuito equivalente de Thévenin para a parte do circuito da Fig. 9.192(II) externa ao resistor R .
 39. Escreva o arquivo de entrada necessário para determinar o circuito equivalente de Norton do circuito externo ao resistor R na Fig. 9.131(a).

PSpice (Windows)

40. Determine, utilizando um esquema, a tensão V_2 e as tensões parciais que para ela contribuem no circuito da Fig. 9.127.
 41. Utilizando um esquema, determine o circuito equivalente de Thévenin para o circuito da Fig. 9.131(b).
 *42. a. Utilizando um esquema, obtenha o gráfico da potência fornecida ao resistor R da Fig. 9.131(a), para R variando de 1 a 50 Ω.
 b. Determine, a partir do gráfico, o valor de R que torna máxima a potência dissipada por R e o valor desta potência.
 c. Compare os resultados da parte (a) com a solução numérica
 d. Construa o gráfico V_R e I_R em função de R e determine seus valores quando a potência fornecida a R é máxima.
 *43. Substitua o resistor de 300 Ω da Fig. 9.131(b) por um resistor variável e faça um gráfico da potência dissipada por ele em função do seu valor. Determine a faixa de valores para a resistência por tentativa e erro em vez de resolver o circuito analiticamente. Use os resultados para determinar o circuito equivalente de Norton. A corrente de Norton pode ser obtida a partir da máxima potência transferida para a carga.

Linguagens de Programação (C++, BASIC, PASCAL etc.)

44. Escreva um programa para determinar a corrente no resistor de 10 Ω da Fig. 9.125(a) (para quaisquer valores dos componentes) utilizando o teorema de superposição.
 45. Escreva um programa para resolver o Problema 8, circuito (b), para quaisquer valores dos componentes.
 *46. Escreva um programa para resolver o Problema 22 e montar uma tabela da potência dissipada em R para os valores enumerados no item (c).

GLOSSÁRIO

.PROBE Comando do PSpice para obter arquivos de saída contendo gráficos e valores que não seriam obtidos de outro modo.

Teorema de Millman Método que emprega conversões de fonte para determinar variáveis desconhecidas em circuitos com várias malhas.

Teorema de Norton Teorema que permite reduzir qualquer circuito de corrente contínua linear de dois terminais a uma fonte de corrente e um resistor em paralelo.

Teorema da reciprocidade Teorema segundo o qual, em circuitos com uma única fonte, a corrente em qualquer ramo é igual à corrente no ramo onde a fonte estava originalmente, se esta mesma fonte for transferida para o ramo em que a corrente foi medida inicialmente.

Teorema da substituição Teorema segundo o qual se a corrente que atravessa qualquer ramo de um circuito de corrente contínua bilate-

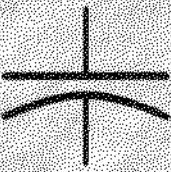
ral e a ddp entre os terminais deste ramo são conhecidas, podemos substituí-lo por qualquer combinação de elementos que mantenham inalteradas a corrente e a ddp.

Teorema da superposição Teorema aplicável a circuitos lineares, segundo o qual podemos considerar os efeitos de cada fonte de modo independente. A tensão e a corrente resultantes são obtidas através da soma algébrica das correntes e das tensões produzidas individualmente pelas fontes.

Teorema da transferência máxima de potência Teorema usado para determinar a resistência de uma carga para que a potência fornecida a esta mesma carga seja máxima.

Teorema de Thévenin Teorema que permite a redução de qualquer circuito de corrente contínua linear de dois terminais a uma fonte de tensão e um resistor em série.

10



Capacitores

10.1 INTRODUÇÃO

Até aqui, o único elemento passivo que encontramos foi o resistor. Vamos considerar agora dois outros elementos passivos, o *capacitor* e o *indutor*, que são bem diferentes do resistor no que diz respeito à sua função, princípio de funcionamento e estrutura interna.

Ao contrário do resistor, esses dois elementos apenas exibem seu comportamento característico quando ocorrem variações de tensão ou corrente no circuito em que se encontram. Além disso, se considerarmos a situação *ideal*, não dissipam energia, como o resistor, mas a armazemam e podem devolvê-la mais tarde ao circuito.

Para podermos estudar esses elementos com a profundidade que merecem, vamos dedicar todo este capítulo ao capacitor e o Cap. 12 ao indutor. Como os efeitos eletromagnéticos são fatores importantes no projeto de indutores, este tópico será estudado no Cap. 11.

10.2 O CAMPO ELÉTRICO

Já mencionamos no Cap. 2 que existe uma força de atração ou repulsão entre dois corpos carregados. Iremos agora examinar este fenômeno de forma mais detalhada, considerando o campo elétrico que existe na região em torno de qualquer corpo carregado. Este campo elétrico é representado pelas linhas de campo, que são traçadas para indicar a intensidade do campo elétrico em qualquer ponto em torno do corpo carregado; isto é, quanto maior a densidade das linhas de campo, mais intenso é o campo elétrico. Na Fig. 10.1, a intensidade do campo elétrico é maior na posição *a* do que na *b*. Utilizaremos como símbolo para o fluxo destas linhas de campo através de uma superfície qualquer a letra grega ψ (psi). O fluxo por unidade de área (densidade do fluxo ou *deslocamento elétrico*) será representado pela letra maiúscula D e definido por*

$$D = \frac{\psi}{A} \quad (\text{fluxo/unidade de área}) \quad (10.1)$$

* O conceito de *fluxo* de um campo vetorial já deve ser familiar ao estudante a partir do estudo da *lei de Gauss* no curso de Física básica. Quando aplicada ao estudo dos capacitores com dielétricos entre suas placas, esta lei foi utilizada na forma $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon Q$, onde ϵ é a *permisividade elétrica* do meio dielétrico e Q é a carga no interior da superfície ao longo da qual calculamos a integral. O vetor *deslocamento elétrico* \mathbf{D} é definido por $\epsilon \mathbf{E}$. A integral de superfície que aparece na lei de Gauss acima exprime a definição geral do fluxo. A expressão (10.1) do texto é uma forma simplificada que só é válida quando as linhas de campo forem perpendiculares à superfície através da qual estamos calculando o fluxo. Somente estes casos especiais mais simples aparecem neste e em outros capítulos deste livro. (*N. do T.*)

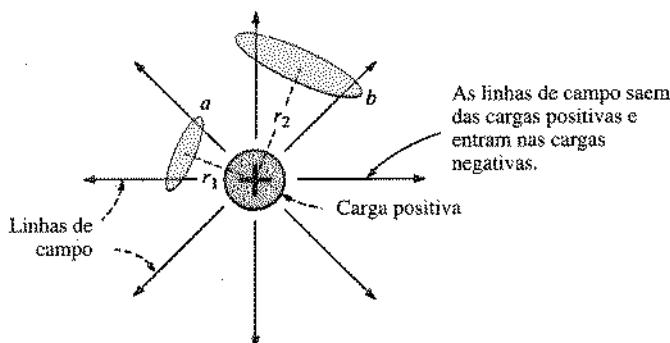


Fig. 10.1 Distribuição de linhas de campo em torno de uma carga positiva isolada.

Quanto maior a carga Q em coulombs, maior é o número de linhas de campo por unidade de área que entram e saem da carga, independentemente do meio em que esta se encontra, e portanto maior o fluxo por unidade de área através de qualquer superfície nas proximidades da carga. Assim, podemos igualar as duas grandezas:⁴

$$\boxed{\psi = \frac{Q}{r}} \quad (\text{coulombs, C}) \quad (10.2)$$

Por definição, a intensidade do campo elétrico em um ponto é a força a que está submetida uma carga unitária positiva neste ponto, ou seja,

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{F}{Q}} \quad (\text{newtons/coulomb, N/C}) \quad (10.3)$$

De acordo com a lei de Coulomb, a força exercida sobre uma carga positiva unitária ($Q_2 = 1 \text{ C}$) por uma carga Q_1 situada a r metros de distância é dada por

$$F = \frac{kQ_1Q_2}{r^2} = \frac{kQ_1(1)}{r^2} = \frac{kQ_1}{r^2} \quad (k = 9 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)$$

Substituir esta força F na Eq. 10.3 leva a

$$\mathcal{E} = \frac{F}{Q_2} = \frac{kQ_1/r^2}{1}$$

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{kQ_1}{r^2}} \quad (\text{N/C}) \quad (10.4)$$

Podemos concluir portanto que a intensidade do campo elétrico a qualquer distância r de uma carga pontual de Q coulombs é diretamente proporcional ao valor da carga e inversamente proporcional ao quadrado da distância a que a carga se encontra. O termo ao quadrado no denominador faz com que a intensidade do campo elétrico diminua rapidamente com a distância. No caso da Fig. 10.1, substituindo as distâncias r_1 e r_2 na Eq. 10.4 temos

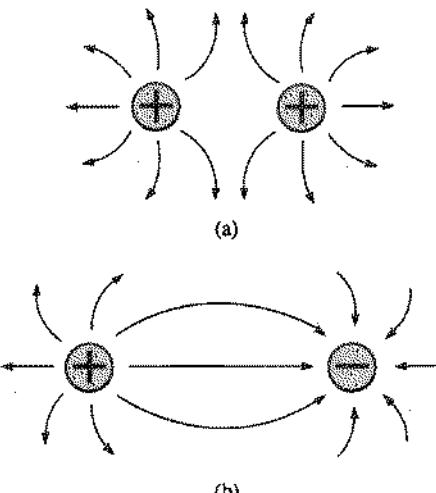


Fig. 10.2 Distribuição de linhas de campo: (a) cargas de mesmo tipo; (b) cargas de tipos opostos.

uma confirmação de nossa conclusão anterior de que a intensidade do campo elétrico em a é maior do que em b .

As linhas de força sempre se dirigem de um corpo positivamente carregado para um corpo negativamente carregado, sempre começam ou terminam perpendicularmente às superfícies carregadas e nunca se cruzam.

Para duas cargas de polaridades opostas e mesmo valor absoluto, a distribuição do fluxo é semelhante à que aparece na Fig. 10.2.

A atração e repulsão entre cargas podem ser explicadas em termos do campo elétrico e suas linhas de força. Na Fig. 10.2(a) as linhas de força não se dirigem de uma carga a outra, mas tendem a agir como um separador, evitando que as cargas se atraiam e causando um efeito de repulsão. Como o campo elétrico é mais intenso (a densidade das linhas de campo é maior) nas proximidades das cargas, quanto mais tentarmos aproximar as duas cargas, maior a força de repulsão entre elas. Na Fig. 10.2(b), as linhas de campo que começam na carga positiva terminam na carga negativa. Uma lei básica da física afirma que as linhas de campo tendem a ter o menor comprimento possível. Desse modo, as duas cargas irão se atrair. Novamente, quanto mais próximas as cargas, maior a atração entre elas, devido ao aumento da intensidade do campo elétrico.⁵

10.3 CAPACITÂNCIA

Até aqui só consideramos distribuições esféricas de carga, mas a análise pode ser estendida a superfícies carregadas de qualquer formato e tamanho. Na Fig. 10.3, por exemplo, duas placas paralelas, feitas de um material condutor e separadas por um espaço

⁴ Esta tendência das linhas de campo a ter comprimento mínimo é um caso particular do princípio da ação mínima, estudado em cursos avançados de Mecânica Clássica. Entretanto, a explicação do comportamento das cargas em termos de linhas de campo, proposta inicialmente por Faraday, não deve fazer com que o leitor se esqueça de um fato muito importante: as linhas de campo não possuem realidade física, sendo apenas uma representação geométrica conveniente para os campos. (N. do T.)

* Trata-se de uma forma qualitativa e um pouco vaga e inexata de justificar a lei de Gauss (veja a nota anterior). (N. do T.)

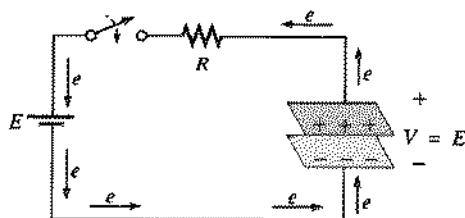


Fig. 10.3 Circuito simples com duas placas.

ço vazio, estão ligadas a uma bateria através de um resistor e uma chave. Se as placas estão inicialmente descarregadas e a chave está aberta, as placas permanecem descarregadas. No momento em que a chave é fechada, elétrons começam a sair da placa superior e se acumular na placa inferior, depois de passarem pelo resistor e pela bateria. A corrente é inicialmente elevada, limitada apenas pela resistência do circuito. Com o tempo, porém, a corrente diminui, como será demonstrado daqui a pouco. Após um certo tempo temos uma carga positiva na placa superior. Os elétrons se acumulam na placa inferior com a mesma rapidez com que deixam a placa superior. Esta transferência de elétrons continua até que a diferença de potencial entre as placas seja exatamente igual à tensão da bateria. O resultado final é uma carga positiva na placa superior e uma carga negativa na placa inferior, muito semelhantes, sob vários aspectos, às cargas esféricas da Fig. 10.2(b).

Este elemento, constituído apenas por duas placas condutoras paralelas separadas por um material isolante (neste caso, o ar), é chamado de *capacitor*. Capacitância é uma medida da quantidade de carga que o capacitor pode armazenar em suas placas — em outras palavras, de sua capacidade de armazenamento.

Um capacitor possui uma capacitância de 1 farad se uma carga de 1 coulomb for depositada em suas placas por uma diferença de potencial de 1 volt entre elas.

O farad recebeu este nome em homenagem a Michael Faraday (Fig. 10.4), um químico e físico inglês do século XIX. Na prática ele se mostra, entretanto, uma unidade de medida muito grande para a maioria das aplicações; assim, é mais comum usarmos o microfarad (10^{-6}) ou o picofarad (10^{-12}). Expressa em forma de equação, a capacitância é definida por



Inglês (Londres)
(1791-1867)
Químico e Físico
Experimental
Doutor Honoris Causa
por Oxford em 1832

Cortesia da
Smithsonian Institution.
Foto número 51147.

Um grande cientista experimental, que nunca recebeu educação formal, começou sua carreira como técnico de laboratório do Royal Institute, em Londres. Interessado no estudo da interação entre campos elétricos e magnéticos, descobriu a *lei da indução*, a partir da observação de que campos magnéticos variáveis no tempo produzem campos elétricos (princípio em que se baseiam os geradores elétricos, utilizados até hoje). Descobriu também as *correntes auto-induzidas* e introduziu os conceitos de *linhas e campos de força magnética*. Recebeu mais de cem prêmios acadêmicos e científicos, tendo se tornado um Fellow da Royal Society ainda muito jovem, aos 32 anos.

Fig. 10.4 Michael Faraday

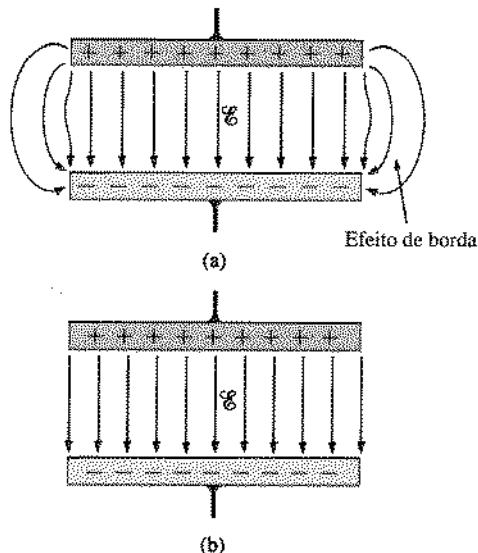
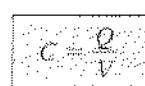


Fig. 10.5 Distribuição das linhas de campo na região entre as placas de um capacitor: (a) incluindo o efeito de borda; (b) ideal.



$$C = \text{farads (F)} \quad Q = \text{coulombs (C)} \quad V = \text{volts (V)} \quad (10.5)$$

Capacitores diferentes com a mesma tensão aplicada entre as placas adquirirem cargas diferentes — cargas maiores para os que possuem maior capacitância e vice-versa.

Uma vista em seção reta das placas paralelas com a distribuição das linhas de campo aparece na Fig. 10.5(a). O número de linhas de campo por unidade de área (D) entre as duas placas é bastante uniforme. Nas bordas, as linhas de campo apresentam uma deformação para fora das placas, um fenômeno conhecido como *efeito de borda*. Este efeito, que reduz a capacitância, pode ser ignorado na maioria das aplicações práticas.* Na análise que se segue, vamos supor que todas as linhas de campo que deixam a placa positiva vão diretamente para a placa negativa, mantendo-se perpendiculares à superfície das placas [Fig. 10.5(b)].

Se uma diferença de potencial de V volts é aplicada entre duas placas separadas por uma distância d , a intensidade do campo elétrico na região entre as placas é dada por



$$(\text{volts/metro, V/m}) \quad (10.6)$$

A uniformidade da distribuição de linhas de campo na Fig. 10.5(b) também indica que a intensidade do campo elétrico é a mesma em qualquer ponto da região entre as placas.

Podem ser obtidos diferentes valores de capacitância para o mesmo par de placas paralelas inserindo-se certos materiais isolantes entre elas. Na Fig. 10.6(a), foi colocado um material isolante entre duas placas paralelas submetidas a uma diferença de potencial de V volts.

Como o material é isolante, os elétrons não conseguem deixar seus átomos e migrar para a placa positiva. Os componentes

* Quanto maiores forem as dimensões lineares das placas comparadas com a distância entre elas, melhor será esta aproximação. (N. do T.)

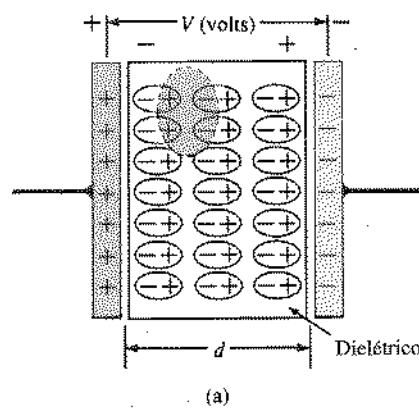


positivos (prótons) e negativos (elétrons) de cada átomo se rearranjam, porém, formando *dipolos*.

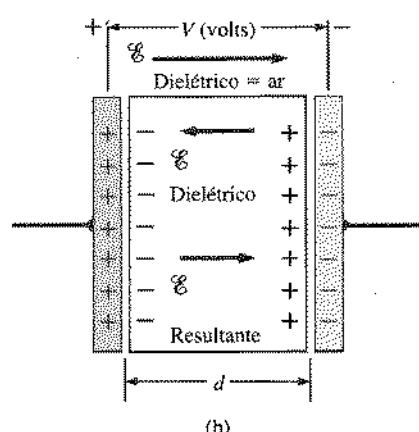
Quando os dipolos se alinharam, como na Fig. 10.6(a), o material está *polarizado*. Um exame mais minucioso deste material polarizado mostra que os componentes negativos e positivos dos dipolos adjacentes se cancelam. Observe a região envolvida por uma linha tracejada na Fig. 10.6(a). Entretanto, as cargas positivas na superfície mais próxima da placa negativa do capacitor e as cargas negativas na superfície mais próxima da placa positiva do capacitor não se cancelam, o que resulta no aparecimento de um campo elétrico no interior do isolante [$\mathcal{E}_{\text{dielétrico}}$, Fig. 10.6(b)]. O campo elétrico total entre as placas ($\mathcal{E}_{\text{total}} = \mathcal{E}_{\text{ar}} - \mathcal{E}_{\text{dielétrico}}$) diminui de intensidade quando o dielétrico é introduzido.

O objetivo do dielétrico, portanto, é criar um campo elétrico com o sentido oposto ao do campo elétrico criado pelas cargas das placas. Por esse motivo, dizemos que o material isolante é um *dielétrico*, *di para oposição e elétrico para campo elétrico*.

Em qualquer dos casos — com ou sem o dielétrico —, se a diferença de potencial entre as placas for mantida constante e a distância entre elas não mudar, o campo elétrico total, que é determinado pela expressão $E = V/d$, deverá permanecer inalterado. Acabamos de afirmar, no entanto, que este mesmo campo tende a diminuir com a inserção de um dielétrico. Para compensar esse fato e garantir que o campo elétrico se mantenha constante, a quantidade de carga nas placas deve aumentar. (Veja a Eq. 10.11, mais adiante.) Esta carga adicional para a mesma di-



(a)



(b)

diferença de potencial entre as placas aumenta a capacidade, como demonstra a seguinte equação:

$$C \uparrow = \frac{Q}{V}$$

Se colocarmos diferentes materiais entre as placas do mesmo capacitor, diferentes quantidades de carga serão depositadas nas placas. Acontece que $\psi = Q$, de modo que o dielétrico determina o número de linhas de campo entre as duas placas e portanto a densidade de fluxo ($D = \psi/A$), já que A não varia.

A razão entre a densidade de fluxo e a intensidade do campo elétrico no dielétrico é chamada de *permisividade do dielétrico*:

$$\epsilon = \frac{D}{\mathcal{E}}$$

(farads/metro, F/m) (10.7)

A permissividade é uma medida da facilidade com que o dielétrico “permite” o estabelecimento de linhas de campo no seu interior. Quanto maior o valor da permissividade, maior a quantidade de cargas depositadas nas placas e, consequentemente, maior a densidade de fluxo para uma área constante.

Para o vácuo, o valor de ϵ (representado por ϵ_0) é $8,85 \times 10^{-12}$ F/m. A razão entre a permissividade de qualquer dielétrico e a do vácuo é chamada de *permisividade relativa*, ϵ_r . Ela simplesmente compara, com boa aproximação, a permissividade do dielétrico com a do ar. Em forma de equação,

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

(10.8)

O valor de ϵ para qualquer material é, assim, dado por

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

Observe que ϵ_r é uma grandeza adimensional. A Tabela 10.1 mostra os valores da permissividade relativa (ou **constante dielétrica**, como é muitas vezes chamada) para vários materiais isolantes.

Substituindo D e \mathcal{E} na Eq. 10.7, temos

$$\epsilon = \frac{D}{\mathcal{E}} = \frac{\psi/A}{V/d} = \frac{Q/A}{V/d} = \frac{Qd}{VA}$$

mas

$$C = \frac{Q}{V}$$

e, dessa forma,

$$\epsilon = \frac{Cd}{A}$$

e

$$C = \epsilon \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

(F)

(10.9)

ou

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} = 8,85 \times 10^{-12} \epsilon_r \frac{A}{d}$$

(F) (10.10)

onde A é a área das placas em metros quadrados, d é a distância entre as placas em metros e ϵ_r é a permissividade re-

Fig. 10.6 Efeito de um dielétrico sobre a distribuição do campo na região entre as placas de um capacitor: (a) alinhamento dos dipolos no dielétrico; (b) componentes do campo elétrico entre as placas de um capacitor quando um dielétrico está presente.



Tabela 10.1
Permissividade relativa (constante dielétrica)
de várias substâncias

Dielétrico	ϵ_r (Valores Médios)
Vácuo	1,0
Ar	1,0006
Teflon	2,0
Papel parafinado	2,5
Borracha	3,0
Óleo de transformador (ascarel)	4,0
Mica	5,0
Porcelana	6,0
Baquelite	7,0
Vidro	7,5
Água destilada	80,0
Titanato de bário e estrôncio (cerâmica)	7500,0

lativa. A capacidade, portanto, aumenta quando a área das placas aumenta, quando a distância entre as placas diminui e quando o dielétrico é substituído por outro que possua um maior valor de ϵ_r .

$$d = \frac{\epsilon A}{C}$$

Substituindo d pelo seu valor na Eq. (10.6), temos:

$$\mathcal{E} = \frac{V}{d} = \frac{V}{\epsilon A/C} = \frac{CV}{\epsilon A}$$

Mas $Q = CV$, de modo que

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{Q}{\epsilon A}} \quad (\text{V/m}) \quad (10.11)$$

o que nos permite calcular a intensidade do campo elétrico entre as placas a partir da permissividade ϵ , da carga Q e área das placas, A . Temos também

$$\frac{C = \epsilon A/d}{C_o = \epsilon_0 A/d} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r$$

$$\boxed{C = \epsilon_r C_o} \quad (10.12)$$

Assim, para o mesmo par de placas paralelas, a capacidade obtida quando colocamos entre as placas um dielétrico de permissividade relativa ϵ_r é ϵ_r maior do que se existisse vácuo (ou, aproximadamente, se existisse ar) entre as placas. Um dos métodos experimentais mais populares para determinar o valor de ϵ_r se baseia nesta relação entre ϵ_r e as capacidades com e sem o dielétrico.

EXEMPLO 10.1 Determine as capacidades de todos os capacitores que estão do lado direito da Fig. 10.7.

- $C = 3(5 \mu\text{F}) = 15 \mu\text{F}$
- $C = \frac{1}{2}(0,1 \mu\text{F}) = 0,05 \mu\text{F}$
- $C = 2,5(20 \mu\text{F}) = 50 \mu\text{F}$
- $C = (5)^{\frac{4}{(1/8)}}(1000 \text{ pF}) = (160)(1000 \text{ pF}) = 0,16 \mu\text{F}$

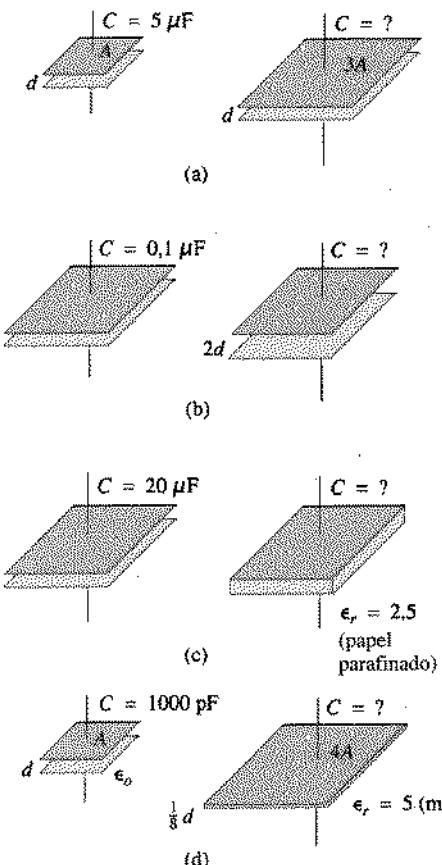


Fig. 10.7 Exemplo 10.1.

EXEMPLO 10.2 Para o capacitor da Fig. 10.8:

- Determine a capacidade.
- Determine a intensidade do campo elétrico entre as placas se elas forem submetidas a uma ddp de 450 V.
- Encontre a carga resultante em cada placa.

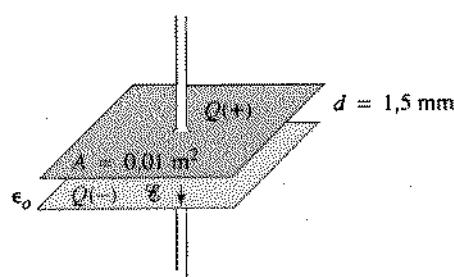


Fig. 10.8 Exemplo 10.2.

**Soluções:**

$$\text{a. } C_o = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m})(0,01 \text{ m}^2)}{1,5 \times 10^{-3} \text{ m}} = 59,0 \times 10^{-12} \text{ F}$$

$$= 59 \text{ pF}$$

$$\text{b. } \mathcal{E} = \frac{V}{d} = \frac{450 \text{ V}}{1,5 \times 10^{-3} \text{ m}}$$

$$\cong 300 \times 10^3 \text{ V/m}$$

$$\text{c. } C = \frac{Q}{V}$$

ou

$$Q = CV = (59,0 \times 10^{-12} \text{ F})(450 \text{ V})$$

$$= 26,550 \times 10^{-9} \text{ C}$$

$$= 26,55 \text{ nC}$$

EXEMPLO 10.3 Uma placa de mica de 1,5 mm possui a mesma área das placas do Exemplo 10.2 e é inserida entre elas.

- Encontre a intensidade do campo elétrico entre as placas.
- Encontre a carga em cada placa.
- Encontre a capacidade.

Soluções:

- a. \mathcal{E} é dado por

$$\mathcal{E} = \frac{V}{d} = \frac{450 \text{ V}}{1,5 \times 10^{-3} \text{ m}}$$

$$\cong 300 \times 10^3 \text{ V/m}$$

b. $Q = \frac{Q}{\epsilon A}$ ou

$$Q = \epsilon \mathcal{E} A = \epsilon_0 \mathcal{E} A$$

$$= (5)(8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m})(300 \times 10^3 \text{ V/m})(0,01 \text{ m}^2)$$

$$= 132,75 \times 10^{-9} \text{ C} = 132,75 \text{ nC}$$

(cinco vezes maior do que se houvesse ar entre as placas)

c. $C = \epsilon_0 C_o$

$$= (5)(59 \times 10^{-12} \text{ F}) = 295 \text{ pF}$$

10.4 RIGIDEZ DIELÉTRICA

Para cada dielétrico existe um valor de campo elétrico que, se aplicado ao material, irá destruir algumas ligações moleculares internas, possibilitando o aparecimento de uma corrente. A tensão por unidade de comprimento (intensidade do campo elétrico) necessária para que haja uma corrente em um dielétrico é uma indicação de sua *rigidez dielétrica* e é chamada de *tensão de ruptura*. Quando a ruptura ocorre, o capacitor passa a ter características muito semelhantes às de um condutor. Um exemplo típico de ruptura é o raio, que ocorre quando a diferença de potencial entre uma nuvem e a Terra se torna tão grande que pode haver escoamento de cargas de uma para a outra através da atmosfera, que se comporta como o dielétrico.

A rigidez dielétrica média para vários dielétricos aparece na Tabela 10.2 (1 mil = 0,001 pol.). A permissividade relativa aparece entre parênteses para enfatizar a importância de considerar os dois fatores no projeto de capacitores. Observe em particular o titanato de bário e estrôncio e a mica, que são os materiais que

apresentam, respectivamente, a maior permissividade relativa e a maior rigidez dielétrica.

Tabela 10.2
Rigidez dielétrica de alguns materiais

Dielétrico	Rigidez Dielétrica (Valor Médio), em Volts/Mil	(ϵ_r)
Ar	75	(1,006)
Titanato de bário e estrôncio (cerâmica)	75	(7500)
Porcelana	200	(6,0)
Óleo de transformador	400	(4,0)
Baquelite	400	(7,0)
Borracha	700	(3,0)
Papel parafinado	1300	(2,5)
Teflon	1500	(2,0)
Vidro	3000	(7,5)
Mica	5000	(5,0)

EXEMPLO 10.4 Encontre a tensão máxima que pode ser aplicada aos terminais de um capacitor de $0,2 \mu\text{F}$ com uma área das placas de $0,3 \text{ m}^2$. O dielétrico é a porcelana. Suponha uma relação linear entre a rigidez dielétrica e a espessura do dielétrico.

Solução:

$$C = 8,85 \times 10^{-12} \epsilon_r \frac{A}{d}$$

$$\text{ou } d = \frac{8,85 \epsilon_r A}{10^{12} C} = \frac{(8,85)(6)(0,3 \text{ m}^2)}{(10^{12})(0,2 \times 10^{-6} \text{ F})} = 7,965 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$\cong 79,65 \mu\text{m}$$

Convertendo milímetros para mils, temos

$$79,65 \mu\text{m} \left(\frac{10^{-6} \text{ m}}{\mu\text{m}} \right) \left(\frac{39,371 \text{ mils}}{\text{m}} \right) \left(\frac{1000 \text{ mils}}{1 \text{ pol.}} \right) = 3,136 \text{ mils}$$

rigidez dielétrica = 200 V/mil

Dessa forma, $\left(\frac{200 \text{ V}}{\text{mils}} \right) (3,136 \text{ mils}) = 627,20 \text{ V}$

10.5 CORRENTE DE FUGA

Consideramos, até agora, que iria ocorrer um fluxo de elétrons em um dielétrico somente quando a tensão aplicada excedesse a tensão de ruptura. Este é o caso ideal, mas, na prática, existem elétrons livres em todos os dielétricos devido, entre outras causas, a impurezas e a forças internas no material.

Quando aplicamos uma tensão entre as placas de um capacitor, uma corrente de fuga, causada pelos elétrons livres, flui de uma placa para outra. Normalmente, entretanto, essa corrente é tão pequena que pode ser ignorada para a maioria das aplicações práticas. Este efeito é representado por um resistor em paralelo

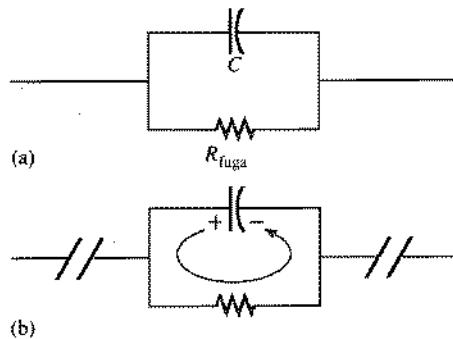


Fig. 10.9 Demonstração do efeito da corrente de fuga.

com o capacitor, como vemos na Fig. 10.9(a), cujo valor é, tipicamente, maior que 100 megohms ($M\Omega$). Há alguns capacitores, entretanto — como os eletrolíticos —, que permitem a passagem de correntes de fuga consideravelmente altas. Quando carregados e depois desconectados do circuito, estes capacitores perdem a carga em poucos segundos devido ao fluxo da carga (corrente de fuga) de uma placa para a outra [Fig. 10.9(b)].

10.6 TIPOS DE CAPACITORES

Como os resistores, todos os capacitores podem ser classificados em duas categorias: fixos e variáveis. O símbolo de um capacitor fixo é

, e o de um variável é . A linha curva representa a placa que é normalmente conectada ao ponto de potencial mais baixo.

Capacitores Fixos

Atualmente, existem no comércio vários tipos de capacitores fixos. Alguns dos mais comuns são os de mica, cerâmica, eletrolíticos, de tântalo e de filme de poliéster. O *capacitor de mica* típico é constituído basicamente por placas de mica separadas por lâminas metálicas, que constituem as placas. As placas são conectadas a dois terminais, como vemos na Fig. 10.10. A área total é a área de uma das lâminas multiplicada pelo número de lâminas. O sistema é encapsulado em um plástico isolante, como vemos na Fig. 10.11(a). O capacitor de mica exibe excelentes características mesmo quando submetido a grandes variações de temperatura e altas tensões (sua rigidez dielétrica é da ordem de 5000 V/mil). A corrente de fuga também é muito pequena (o valor de R_{fuga} é cerca de 1000 $M\Omega$).

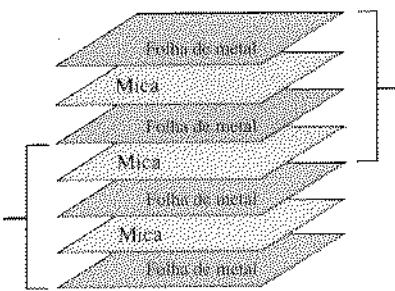


Fig. 10.10 Estrutura básica de um capacitor de mica.

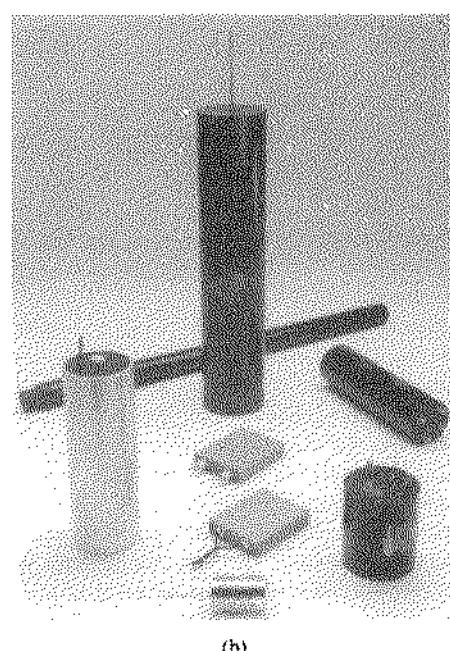
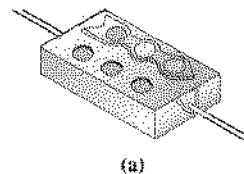


Fig. 10.11 Capacitores de mica. (Foto (b) cortesia de Custom Electronics Inc.)

Os capacitores de mica são normalmente fabricados com capacidades entre alguns picofarads e $0,2 \mu F$ e tensões de trabalho de 100 V ou mais. O código de cores para os capacitores de mica da Fig. 10.11(a) pode ser encontrado no Apêndice D.

Um segundo tipo de capacitor de mica aparece na Fig. 10.11(b). Observe em particular o capacitor cilíndrico no canto inferior esquerdo da figura. É possível “enrolar” a mica para conseguir essa forma cilíndrica através de um processo no qual as impurezas solúveis da mica natural são removidas, o que resulta em uma estrutura semelhante ao papel, graças às forças de coesão da mica natural. Este tipo de mica é denominado *mica reconstituída*, embora a terminologia não signifique “reciclada” ou “de segunda mão”. Para alguns dos capacitores que aparecem na fotografia, estão disponíveis diferentes valores de capacidade entre diferentes pares de terminais.

Existem várias formas e tamanhos diferentes de *capacitor de cerâmica*, dois dos quais aparecem na Fig. 10.12(a). A estrutura básica, porém, é praticamente a mesma para todos, como se pode ver nas Figs. 10.12(b) e 10.13. Camadas metálicas de cobre ou prata são depositadas dos dois lados de uma base de cerâmica e constituem as placas do capacitor. Os terminais são então conectados às placas através de eletrodos. Aplica-se em seguida uma camada isolante de cerâmica ou plástico sobre as placas e o dieletônico. Os capacitores de cerâmica também possuem uma corrente de fuga muito baixa (R_{fuga} é da ordem de $1000 M\Omega$) e podem ser usados em circuitos de corrente alternada ou contínua.

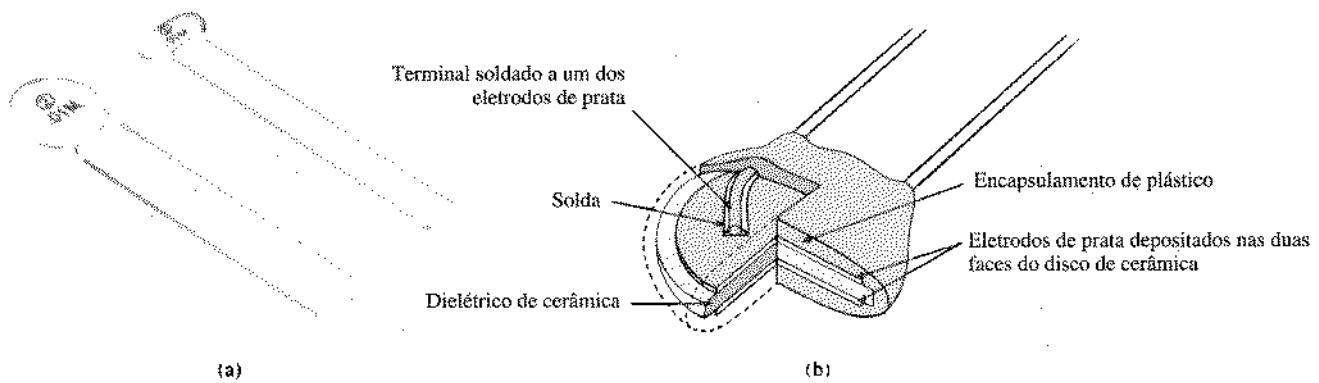


Fig. 10.12 Capacitores de disco de cerâmica: (a) fotografia; (b) estrutura interna.

Eles podem ser encontrados com valores que vão de alguns picofarads até cerca de $2 \mu\text{F}$ e com tensões de trabalho extremamente altas, como 5000 V ou mais.

Nos últimos anos vem crescendo o interesse por capacitores monolíticos, como os que vemos na Fig. 10.14(a), devido à sua aplicação em circuitos híbridos [circuitos que usam componentes discretos e também circuitos integrados (CI)]. Também vem crescendo o uso de circuitos do tipo microstrip (strip-line), como o da Fig. 10.14(b). A figura mostra, em corte, a posição dos pequenos capacitores na microstrip. O L e o H da Fig. 10.14(a) indicam o valor da capacitância. Assim, por exemplo, a letra H em preto representa 16 unidades de capacitância (em picofarads) ou 16 pF. Se for usada a cor azul, aplica-se um multiplicador de 100, o que resulta em um valor de 1600 pF. Embora os tamanhos sejam semelhantes, o tipo de material cerâmico utilizado controla o valor da capacitância.

O capacitor eletrolítico é usado mais frequentemente nas situações em que capacitâncias da ordem de um a milhares de microfarads se fazem necessárias. Esse tipo de capacitor normalmente é empregado em circuitos de corrente contínua, porque apresenta boas características de isolamento quando a tensão é aplicada com uma certa polaridade, mas se comporta quase como um curto-circuito quando a tensão é aplicada com a polaridade oposta. Entretanto, existem capacitores eletrolíticos que podem

ser usados em circuitos de corrente alternada (como o do motor de arranque dos automóveis, por exemplo) e em casos nos quais a tensão aplicada ao capacitor muda de polaridade por curtos períodos de tempo.

A estrutura básica de um capacitor eletrolítico consiste em um rolo de folha de alumínio com uma face coberta por óxido de alumínio; o alumínio é a placa positiva, e o óxido é o dielétrico. Uma camada de papel ou gaze saturada de eletrólito é colocada sobre o óxido de alumínio. Outra folha de alumínio sem a cobertura de óxido é então colocada sobre esta camada para formar a

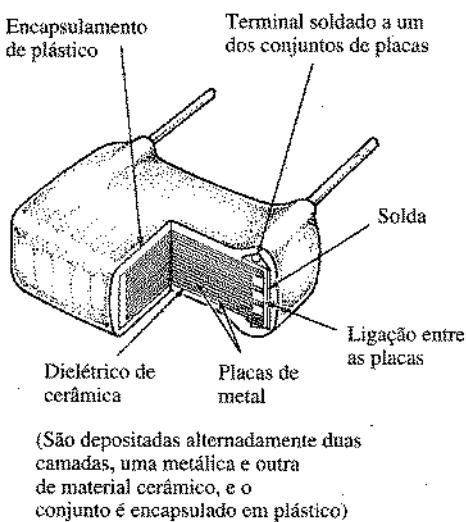


Fig. 10.13 Capacitor de cerâmica multicamada com terminais radiais.

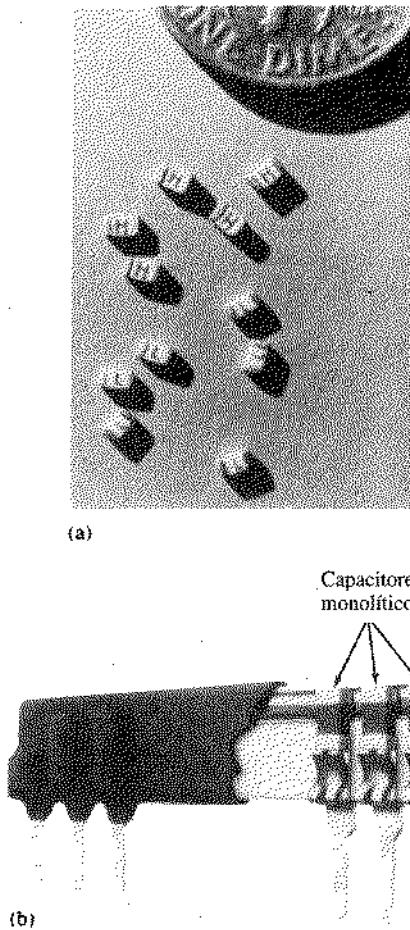
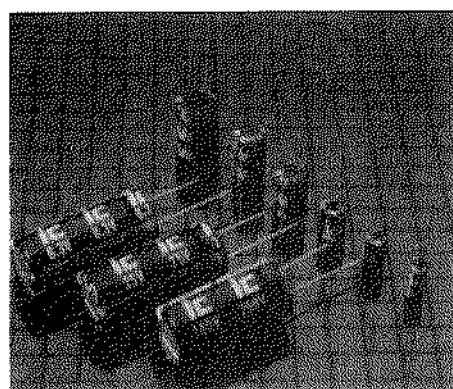


Fig. 10.14 Capacitores monolíticos. (Cortesia de Viramont, Inc.)

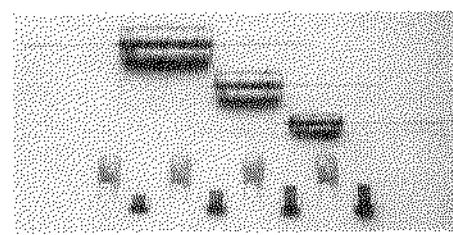
placa negativa. Na maioria dos casos, a placa negativa é conectada diretamente ao invólucro de alumínio, que serve como terminal negativo para conexões externas. Devido ao tamanho do rolo de folha de alumínio, a área total desse capacitor é grande; devido ao uso de um óxido como dielétrico, a distância entre as placas é extremamente pequena. O terminal negativo do capacitor eletrolítico é normalmente aquele que não possui nenhuma informação impressa. O terminal positivo é indicado por desenhos como +, Δ, □ etc. Devido à necessidade de se conhecer a polaridade, o símbolo para um capacitor eletrolítico normalmente é .

Outras especificações importantes dos capacitores eletrolíticos são a *tensão de trabalho* e a *tensão de pico*. A *tensão de trabalho* é a tensão que pode ser aplicada entre os terminais do capacitor por longos períodos de tempo sem que ele seja danificado. A *tensão de pico* é a máxima tensão contínua que pode ser aplicada por curtos períodos de tempo. Os capacitores eletrolíticos costumam apresentar baixas tensões de ruptura e correntes de fuga relativamente elevadas (R_{fuga} da ordem de $1\text{ M}\Omega$). Podemos ver vários tipos de capacitores eletrolíticos na Fig. 10.15. Eles podem ser encontrados em valores que vão de alguns microfarads até milhares de microfarads, e com tensões de trabalho tão altas quanto 500 V. Altos valores de tensão, entretanto, estão normalmente associados aos menores valores de capacitância.

Existem dois tipos de *capacitores de tântalo*: os de dielétrico sólido e os de dielétrico úmido. Nos dois casos, tântalo em pó com alto grau de pureza é compactado em uma forma retangular



(a)



(b)

Fig. 10.15 Capacitores eletrolíticos: (a) Capacitores com terminais radiais, projetados para funcionar durante 2000 horas a 85 °C. Faixa de capacitâncias: 0,1 — 15.000 μF com tensões de trabalho de 6,3 a 250 V. (Cortesia da Illinois Capacitor, Inc.) (b) Capacitores eletrolíticos de alumínio sólido, fabricados em três configurações: com terminais axiais, encapsulado em plástico e para montagem em placa de circuito impresso. (Cortesia da Philips Components, Inc.)

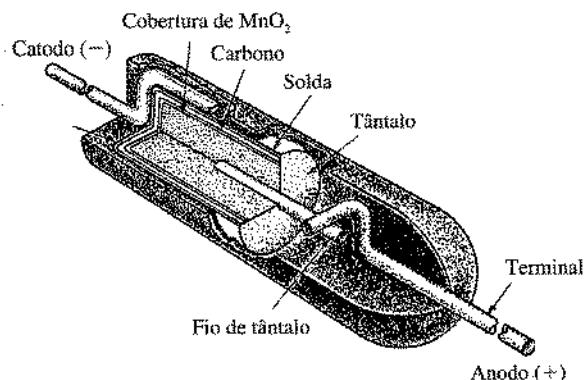


Fig. 10.16 Capacitor de tântalo. (Cortesia de Union Carbide Corp.)

ou cilíndrica, como na Fig. 10.16. O terminal do anodo (+) é então introduzido, como vemos na figura. Em seguida, a peça é sinterizada (tratada termicamente) no vácuo, em altas temperaturas, tornando-se extremamente porosa. O resultado é um material com uma superfície muito grande em relação ao volume. Através de imersão em uma solução ácida, é produzida uma camada muito fina de dióxido de magnésio (MnO_2) que cobre todos os poros do material. Adiciona-se um eletrólito para estabelecer contato entre a camada de óxido e o catodo; o resultado é um capacitor de tântalo sólido. Quando é utilizado um ácido “úmido”, o capacitor resultante é chamado de capacitor de tântalo de dielétrico úmido.

O último tipo de capacitor fixo que discutiremos é o *capacitor de filme de poliéster*, cuja estrutura básica aparece na Fig. 10.17. Ele consiste simplesmente em duas folhas de metal separadas por uma folha de poliéster — Mylar®, por exemplo. A camada externa de poliéster se comporta como um invólucro isolante. As folhas de metal são ligadas a terminais que se projetam axial ou radialmente para fora do invólucro. O uso de um rolo garante uma grande área para as placas, enquanto o emprego de um dielétrico de plástico permite que a distância entre as placas seja bem pequena.

Dados como a capacitância e a tensão de trabalho são impressos no invólucro do capacitor, se este for suficientemente grande para isso. No caso dos capacitores menores, é usado um código de cores (veja Apêndice E). Uma faixa (normalmente preta) é às vezes impressa nas proximidades do terminal que está ligado à folha de metal mais próxima da superfície. O terminal mais próximo desta faixa deve ser sempre ligado ao ponto de menor potencial. Este tipo de capacitor pode ser usado em circuitos de corrente contínua e alternada. A resistência de fuga é da ordem de $100\text{ M}\Omega$. Capacitores de filme de poliéster podem ser vistos

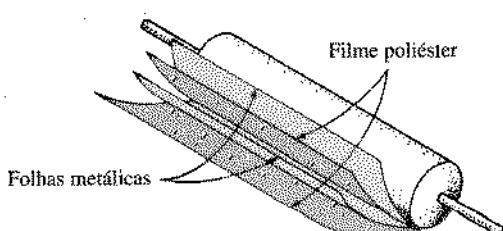


Fig. 10.17 Capacitor de filme de poliéster.

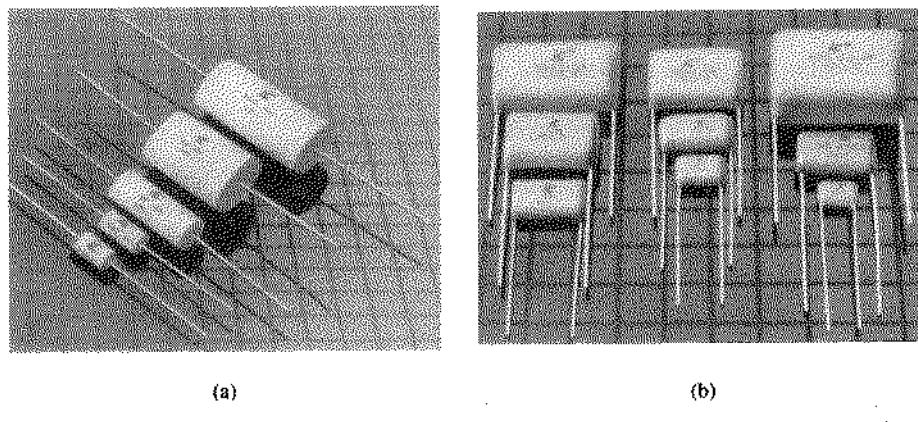


Fig. 10.18 Capacitores de filme de poliéster: (a) de terminais axiais; (b) de terminais radiais. (Cortesia de Illinois Capacitor, Inc.)

na Fig. 10.18. Os de contatos axiais são fabricados com valores de capacitância de $0,1 \mu\text{F}$ a $18 \mu\text{F}$, com tensões de trabalho até 630 V. A variedade de contatos radiais apresenta valores de capacitância de $0,01 \mu\text{F}$ a $10 \mu\text{F}$, com tensões de trabalho de até 1000 V.

Capacitores Variáveis

A Fig. 10.19 mostra os tipos mais comuns de capacitores variáveis. O dielétrico desses capacitores é o ar. No capacitor da Fig. 10.19(a), a capacitância é modificada girando-se o eixo, o que faz variar a área comum às placas fixas e móveis. Quanto maior essa área comum, maior a capacitância, como podemos deduzir da Eq. 10.10. A capacitância do capacitor de ajuste (*trimmer*) da Fig. 10.19(b) é mudada girando-se o parafuso, o que faz variar a distância entre as placas e consequentemente a capacitância.

Medidas e Testes

A Fig. 10.20 mostra um medidor digital de capacitância; para usá-lo, basta ligar o capacitor aos terminais do aparelho, com a polaridade correta.

A melhor maneira de verificar o estado de um capacitor é usar um medidor projetado para realizar os testes necessários. Entretanto, um medidor de resistência pode identificar um capacitor cujo dielétrico se deteriorou (especialmente os capacitores de papel e eletrolíticos). Quando o dielétrico está em mau estado,

ele deixa de ser um bom isolante e a resistência entre as placas se torna relativamente pequena. Depois de certificar-se de que o capacitor está descarregado, ligue um medidor de resistância aos seus terminais, como na Fig. 10.21. Em um capacitor no qual a polaridade das ligações é importante (como os eletrolíticos, por exemplo), a polaridade do medidor deve estar de acordo com a do capacitor. Uma leitura de resistência baixa (de zero a algumas centenas de ohms) normalmente indica que o capacitor está defeituoso.

O teste acima não funciona em todos os casos, pois alguns capacitores só funcionam mal quando são submetidos a tensões relativamente altas. O teste pode identificar, porém, os capacitores cujo isolamento entre as placas se tornou deficiente.

Tipos e Valores Mais Comuns

A escala de valores-padrão para capacitores utiliza os mesmos multiplicadores numéricos que são adotados no caso dos resistores. Os capacitores mais comuns têm valores de capacitância numericamente iguais aos da resistência dos resistores mais comuns, isto é, os que permitem obter qualquer valor dentro do intervalo de tolerâncias (5%, 10% e 20%) como na Tabela 3.8. Assim, os valores comerciais incluem $0,1 \mu\text{F}$, $0,15 \mu\text{F}$, $0,22 \mu\text{F}$, $0,33 \mu\text{F}$, $0,47 \mu\text{F}$, $0,68 \mu\text{F}$, $1 \mu\text{F}$, $1,5 \mu\text{F}$, $2,2 \mu\text{F}$, $3,3 \mu\text{F}$, $4,7 \mu\text{F}$ e assim por diante.

A Fig. 10.22 tem o objetivo de familiarizar o leitor com os vários tipos de capacitores. Em outras palavras, ela o ajudará a identificar os tipos de capacitores mais comuns e conhecer seus

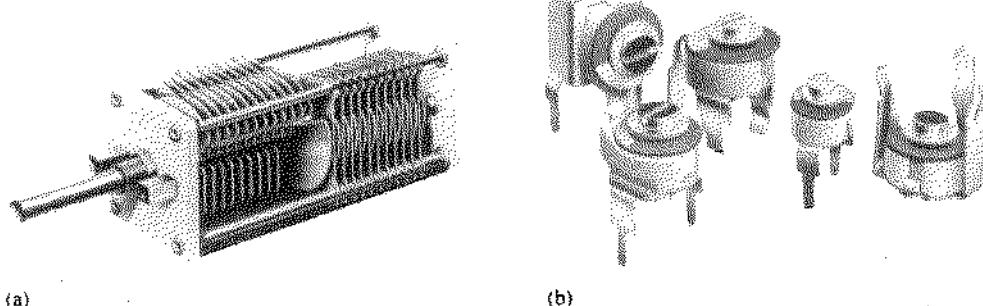


Fig. 10.19 Capacitores de ar variáveis. (Parte (a) cortesia da James Millen Manufacturing Co; parte (b) cortesia de Johnson Manufacturing Co.)



Fig. 10.20 Medidor digital de capacidades. (Cortesia da BK PRECISION, Maxtec International Corp.)

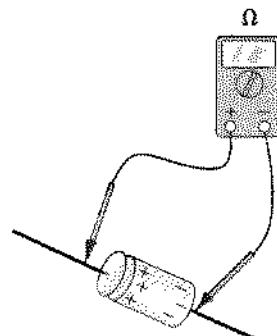


Fig. 10.21 Testando o dielétrico de um capacitor eletrolítico.

<p>Tipo: Eletrolítico Miniatura Axial Valores usuais: 0,1 μF a 15000 μF. Tensão de Operação Típica: 5 V a 450 V. Tolerância: $\pm 20\%$. Descrição: Possui polaridade, é utilizado em fontes de alimentação, filtros e como isolador de CC.</p>	<p>Tipo: de Mica. Valores usuais: 10 pF a 0,001 μF. Tensão de Operação Típica: 50 V a 500 V. Tolerância: $\pm 5\%$. Descrição: Não possui polaridade, utilizado em osciladores e em circuitos que necessitam de componentes imunes a grandes variações de temperatura e tensão.</p>
<p>Tipo: Eletrolítico Miniatura Radial Valores usuais: 0,1 μF a 15000 μF. Tensão de Operação Típica: 5 V a 450 V. Tolerância: $\pm 20\%$. Descrição: Possui polaridade, é utilizado em fontes de alimentação, filtros e como isolador de CC.</p>	<p>Tipo: de Mylar. Valores usuais: 0,001 μF a 0,68 μF. Tensão de Operação Típica: 50 V a 600 V. Tolerância: $\pm 22\%$. Descrição: Não possui polaridade; utilizado em todos os tipos de circuitos; resistente à umidade.</p>
<p>Tipo: Disco de Cerâmica Valores usuais: 10 pF a 0,047 μF. Tensão de Operação Típica: 100 V a 6 kV. Tolerância: $\pm 15\%$, $\pm 10\%$. Descrição: Não possui polaridade; sua capacidade varia muito pouco com a temperatura. Utilizado em osciladores, em filtros de ruído, no acoplamento de circuitos e em circuitos ressonantes.</p>	<p>Tipo: de Partida de Motores Valores usuais: 0,25 μF a 1200 μF. Tensão de Operação Típica: 240 V a 660 V. Tolerância: $\pm 10\%$. Descrição: Não possui polaridade; utilizado para a partida de motores, nas fontes de alimentação de lâmpadas de alta intensidade e em filtros de baixa frequência.</p>
<p>Tipo: de Tántalo. Valores usuais: 0,047 μF a 420 μF. Tensão de Operação Típica: 6,3 V a 50 V. Tolerância: $\pm 10\%$, $\pm 20\%$. Descrição: Possui polaridade, sua corrente de fuga é muito baixa. É usado em fontes de alimentação e filtros de ruído de alta frequência.</p>	<p>Tipo: Variável de Ajuste (<i>Trimmer</i>) Valores usuais: 1,5 pF a 600 pF. Tensão de Operação Típica: 5 V a 100 V. Tolerância: $\pm 10\%$. Descrição: Não possui polaridade; utilizado em osciladores, circuitos de sintonia e filtros de baixa frequência.</p>
<p>Tipo: Plano Valores usuais: 10 pF a 10 μF. Tensão de Operação Típica: 6,3 V a 16 V. Tolerância: $\pm 10\%$. Descrição: Existem modelos com e sem polaridade. É usado em todos os tipos de circuitos. Ocupa um espaço relativamente grande nas placas de circuito impresso.</p>	<p>Tipo: Variável de Sintonia Valores usuais: 10 pF a 600 pF. Tensão de Operação Típica: 5 V a 100 V. Tolerância: $\pm 10\%$. Descrição: Não possui polaridade, utilizado em osciladores e circuitos de sintonia de receptores de rádio.</p>

Fig. 10.22 Tipos de capacitores.

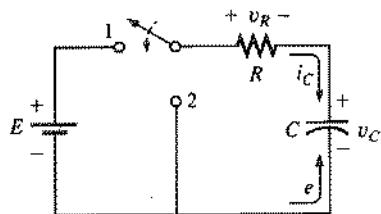


Fig. 10.23 Circuito simples para carregar um capacitor.

valores típicos e aplicações mais comuns. A figura certamente não esgota o assunto, mas proporciona ao leitor uma boa ideia do que existe atualmente no mercado.

10.7 CIRCUITOS CAPACITIVOS: FASE DE CARGA

O modo como um capacitor adquire sua carga foi discutido na Seção 10.3. Vamos agora examinar o que acontece com as tensões e a corrente no circuito da Fig. 10.23 depois que a chave é colocada na posição 1.

No instante em que fechamos a chave, a bateria começa a remover elétrons da placa superior e depositá-los na placa inferior, dando origem a uma carga positiva na placa superior e a uma carga negativa na placa inferior. A transferência de elétrons é muito rápida inicialmente, ficando mais lenta à medida que a ddp entre os terminais do capacitor se aproxima da tensão da bateria. Quando a tensão entre os terminais do capacitor se iguala à tensão da bateria, os elétrons deixam de circular. Nesse momento, a carga das placas é dada por $Q = CV_C = CE$.

A variação da corrente e da tensão com o tempo aparece nas Figs. 10.24 e 10.25, respectivamente. Quando a chave é fechada em $t = 0$ s, a corrente sobe bruscamente para um valor limitado apenas pela resistência do circuito e em seguida começa a diminuir à medida que as placas se carregam (Fig. 10.24), rapidamente a princípio e depois cada vez mais devagar.

Como a tensão entre as placas está relacionada à carga das placas pela equação $v_c = q/C$, v_c aumenta com o tempo (Fig. 10.25). Naturalmente, quando a taxa de escoamento das cargas (I) diminui, a tensão aumenta mais devagar.

Finalmente, a tensão entre as placas se torna igual à tensão da bateria e a corrente deixa de circular; está encerrada a *fase de carga*. Neste momento, o capacitor adquire as características de um circuito aberto: existe uma ddp entre as placas sem que haja corrente no circuito. Como se pode ver na Fig. 10.26, a tensão entre os terminais do capacitor neste caso é a tensão da fonte, pois

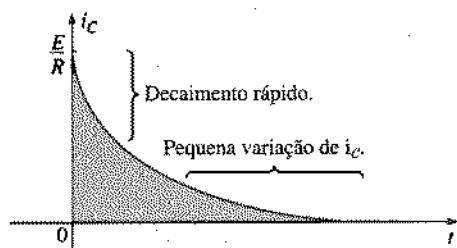
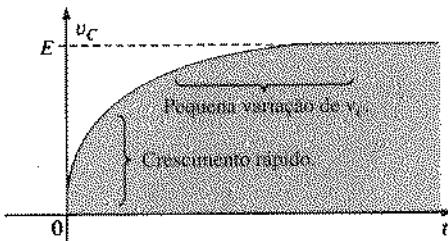
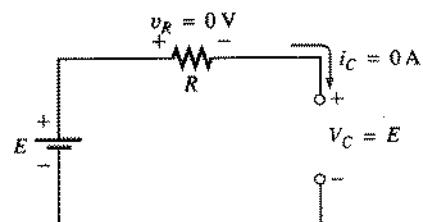
Fig. 10.24 i_C durante a fase de carga.Fig. 10.25 v_C durante a fase de carga.

Fig. 10.26 Após a fase de carga, o capacitor pode ser substituído por um circuito aberto.

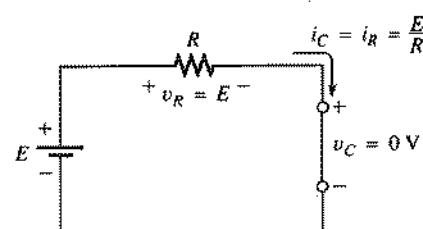


Fig. 10.27 No momento em que a chave é fechada, o capacitor pode ser substituído por um curto-círcuito.

$i = i_C = i_R = 0$ A e $v_R = i_R R = (0)R = 0$ V. No futuro, lembre-se de que:

Nos circuitos de corrente contínua, os capacitores podem ser substituídos por circuitos abertos depois que termina a fase de carga.

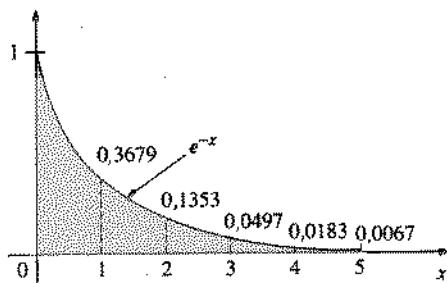
Voltando ao momento em que a chave é fechada, podemos também concluir que o capacitor se comporta nesse instante como um curto-círcuito (Fig. 10.27). A corrente $i = i_C = i_R = E/R$, e a tensão $v_C = E - v_R = E - i_R R = E - (E/R)R = E - E = 0$ V em $t = 0$ s.

É possível demonstrar*

$$i_C = \frac{E - v_{RC}}{R} e^{-t/RC} \quad (10.13)$$

O fator $e^{-t/RC}$ é uma função exponencial da forma e^{-x} , onde $x = -t/RC$ e $e = 2,71828\dots$ Um gráfico de e^{-x} para $x \geq 0$ pode ser

*Veja, por exemplo, D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física* (LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1996), Vol. 3, p. 146. (N. do T.)

Fig. 10.28 A função e^{-x} ($x \geq 0$).

visto na Fig. 10.28. Exponenciais são funções matemáticas com as quais todos os estudantes de física e engenharia devem estar familiarizados. Elas aparecerão em muitas das análises deste e de outros cursos.

No momento, nosso interesse pela função e^{-x} se limita a valores de x maiores que zero, como vemos na curva da Fig. 10.24. Todas as calculadoras científicas modernas possuem a função e^x . Para obter e^{-x} , o sinal de x precisa ser trocado usando a tecla de sinal antes que a tecla da função exponencial seja apertada. A Tabela 10.3 mostra os valores de e^{-x} para vários valores de x . Observe que e^{-x} diminui rapidamente à medida que x aumenta.

O fator RC na Eq. 10.13 é chamado de *constante de tempo* do sistema e tem dimensão de tempo:

$$RC = \left(\frac{V}{I}\right)\left(\frac{\Omega}{V}\right) = \left(\frac{X}{\text{Q/t}}\right)\left(\frac{\text{Q}}{V}\right) = t$$

Seu símbolo é a letra grega tau (τ), e sua unidade de medida é o segundo; assim,

$$\tau = RC \quad (\text{segundos, s}) \quad (10.14)$$

Se substituirmos $\tau = RC$ na função exponencial $e^{-t/RC}$, obtemos $e^{-t/\tau}$. Após a passagem de uma constante de tempo, $e^{-t/\tau} = e^{-1} = 0,3679$, ou seja, a função é igual a 36,79% do valor máximo, 1. Em $t = 2\tau$, $e^{-t/\tau} = e^{-2t/\tau} = e^{-2} = 0,1353$ ou seja, o valor da função cai para somente 13,53% do valor máximo.

O valor percentual de $i_c/i_{max} = e^{-t/\tau}$ e a variação percentual de i_c/i_{max} aparecem nas Tabelas 10.4 e 10.5 para vários valores de t ,

Tabela 10.3
Valores de e^{-x} para alguns valores de x

$x = 0$	$e^{-0} = e^0 = \frac{1}{e^0} = \frac{1}{1} = 1$
$x = 1$	$e^{-1} = \frac{1}{e^1} = \frac{1}{2,71828} = 0,3679$
$x = 2$	$e^{-2} = \frac{1}{e^2} = \frac{1}{7,38905} = 0,1353$
$x = 5$	$e^{-5} = \frac{1}{e^5} = \frac{1}{148,413} = 0,00674$
$x = 10$	$e^{-10} = \frac{1}{e^{10}} = \frac{1}{3,72 \times 10^4} = 0,0000273$
$x = 100$	$e^{-100} = \frac{1}{e^{100}} = \frac{1}{3,72 \times 10^{36}} = 2,72 \times 10^{-38}$

Tabela 10.4

i_c/i_{max} em função de t (fase de carga)

t	Corrente (%)
0	100%
1 τ	36,8%
2 τ	13,5%
3 τ	5,0%
4 τ	1,8%
5 τ	0,67%
6 τ	0,24%
	Menos que 1% de máx.

Tabela 10.5

Variação de i_c/i_{max} em função de $nt - (n - 1)\tau$

(0 → 1) τ	63,2%
(1 → 2) τ	23,3%
(2 → 3) τ	8,6%
(3 → 4) τ	3,0%
(4 → 5) τ	1,2%
(5 → 6) τ	0,4% ← Menos de 1%

expressos como múltiplos da constante de tempo τ . Note que a corrente cai de 63,2% (100% — 36,8%) na primeira constante de tempo mas somente 0,4% entre a quinta e a sexta constante. A taxa de variação de i_c é portanto muito sensível à constante de tempo determinada pelos parâmetros do circuito, R e C . Por esta razão, o gráfico universal de constantes de tempo da Fig. 10.29 foi incluído neste livro para permitir estimativas mais precisas do valor da função e^{-x} para um número específico de constantes de tempo porque suas escalas são normalizadas. No eixo dos y , a corrente é expressa como uma fração da corrente máxima; no eixo dos x , o tempo é expresso como um certo número de constantes de tempo.

Retornando à Eq. 10.13, observamos que o multiplicador E/R é o valor máximo da corrente i_c , como se pode ver também na Fig. 10.24. Fazendo $t = 0$ na Eq. 10.13, temos

$$i_c = \frac{E}{R} e^{-t/RC} = \frac{E}{R} e^{-0} = \frac{E}{R}$$

o que confirma nossa conclusão.

Para valores crescentes de t , os valores de $e^{-t/\tau}$, e consequentemente os valores de i_c , diminuem rapidamente, como vemos na Fig. 10.30. Como o valor de i_c é menor que 1% do valor máximo após cinco constantes de tempo, iremos supor em análises futuras o seguinte:

A corrente i_c em um circuito capacitivo de corrente contínua é praticamente zero após terem se passado cinco constantes de tempo na fase de carga.

Como os valores de C estão normalmente na faixa de microfarads ou picofarads, a constante de tempo $\tau = RC$ nunca é maior que alguns segundos, a menos que R seja extremamente grande.

Vamos agora voltar nossa atenção para a tensão entre os terminais do capacitor durante a fase de carga. É possível demonstrar que essa tensão é dada pela equação

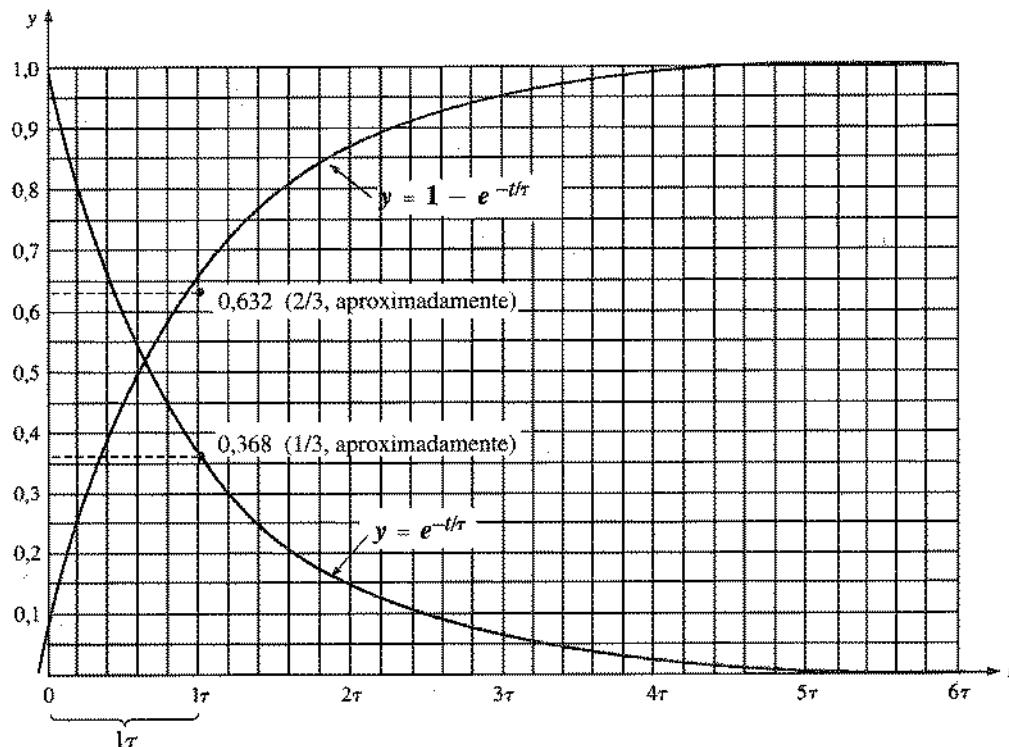


Fig. 10.29 Gráfico universal de constantes de tempo.

$$v_C = E(1 - e^{-t/RC})$$

(10.15)

a tensão entre os terminais de um capacitor não pode mudar instantaneamente.

Note a presença do mesmo fator $e^{-t/RC}$ e da função $(1 - e^{-t/RC})$ que aparece na Fig. 10.29. Como $e^{-t/\tau}$ é uma função monotonicamente decrescente, o fator $(1 - e^{-t/\tau})$ aumenta com o tempo e tende para o valor máximo de 1, como vemos na Fig. 10.29. Além disso, como E é o fator multiplicativo, podemos concluir que, para todos os efeitos práticos, a tensão v_C é E volts após cinco constantes de tempo da fase de carga. A Fig. 10.31 mostra um gráfico de v_C em função de t .

Se mantivermos R constante e reduzirmos C , o produto RC e o tempo equivalente a cinco constantes de tempo irão diminuir. A Fig. 10.32 mostra a variação de v_C com o tempo para três valores de C . O produto RC tem sempre um valor diferente de zero, embora em alguns casos possa ser extremamente pequeno. Por esse motivo,

Na verdade, a capacidade de um circuito é também uma medida do quanto o circuito se opõe à mudança da tensão entre os seus terminais. Quanto maior a capacidade, maior a constante de tempo e mais tempo será necessário para que a tensão atinja o valor final; compare as três curvas da Fig. 10.32.

A carga que se acumula nas placas durante a fase de carga pode ser calculada fazendo-se a seguinte substituição na Eq. 10.15:

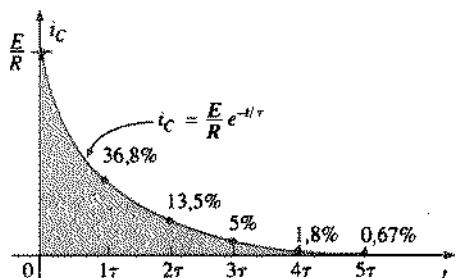
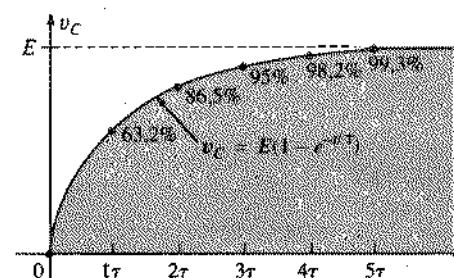
$$v_C = \frac{q}{C}$$

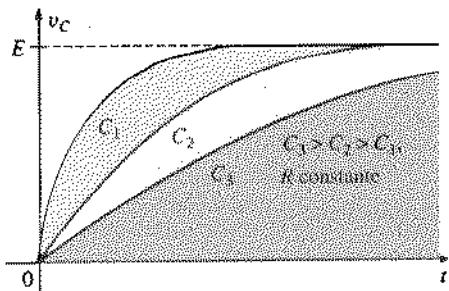
onde

$$q = Cv_C = CE(1 - e^{-t/RC})$$

carga

(10.16)

Fig. 10.30 i_C em função de t durante a fase de carga.Fig. 10.31 v_C em função de t durante a fase de carga.

Fig. 10.32 Efeito de C na fase de carga.

o que mostra que a carga aumenta rapidamente a princípio mas varia de menos de 1% após cinco constantes de tempo.

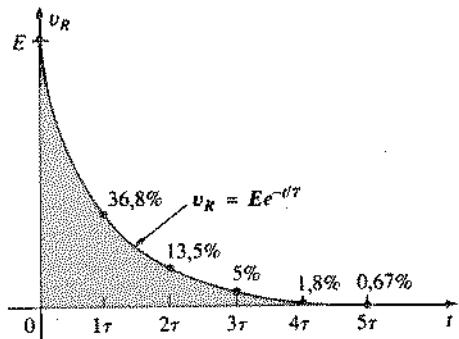
A ddp entre os terminais do resistor pode ser calculada utilizando a definição de resistência:

$$v_R = i_R R = R i_C = R \frac{E}{R} e^{-\tau/t}$$

ou

$$v_R = E e^{-\tau/t} \quad (10.17)$$

Um gráfico de v_R em função do tempo aparece na Fig. 10.33.

Fig. 10.33 v_R em função de t durante a fase de carga.

Aplicando a lei de Kirchhoff para tensões ao circuito da Fig. 10.23, temos

$$v_C = E - v_R$$

Substituindo v_R por seu valor, dado pela Eq. 10.17:

$$v_C = E - E e^{-\tau/t}$$

Colocando E em evidência, temos $v_C = E(1 - e^{-\tau/t})$, equação que já havíamos obtido anteriormente (veja Eq. 10.15).

EXEMPLO 10.5

- a. Encontre as expressões matemáticas para os valores de v_C , i_C e v_R em função do tempo no circuito da Fig. 10.34 quando a chave é colocada na posição 1. Pinte as curvas de v_C , i_C e v_R em função de t .

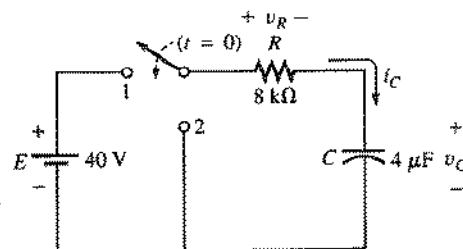


Fig. 10.34 Exemplo 10.5.

- b. Quanto tempo devemos esperar até que possamos supor, para todos os efeitos práticos, que $i_C \approx 0$ A e $v_C \approx E$ volts?

Soluções:

a. $\tau = RC = (8 \times 10^3 \Omega)(4 \times 10^{-6} \text{ F}) = 32 \times 10^{-3} \text{ s} = 32 \text{ ms}$
Pela Eq. (10.15),

$$v_C = E(1 - e^{-\tau/t}) = 40(1 - e^{-t/(32 \times 10^{-3})})$$

Pela Eq. (10.13),

$$\begin{aligned} i_C &= \frac{E}{R} e^{-\tau/t} = \frac{40 \text{ V}}{8 \text{ k}\Omega} e^{-t/(32 \times 10^{-3})} \\ &= (5 \times 10^{-3}) e^{-t/(32 \times 10^{-3})} \end{aligned}$$

Pela Eq. (10.17),

$$v_R = E e^{-\tau/t} = 40 e^{-t/(32 \times 10^{-3})}$$

As curvas aparecem na Fig. 10.35.

b. $5\tau = 5(32 \text{ ms}) = 160 \text{ ms}$

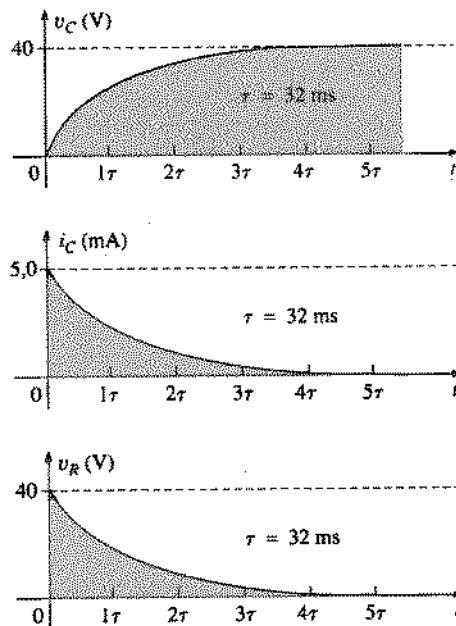


Fig. 10.35 Formas de onda para o circuito da Fig. 10.34.

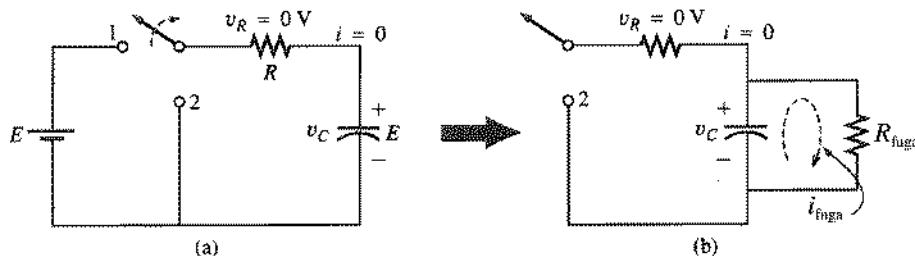


Fig. 10.36 Efeito da corrente de fuga no comportamento de um capacitor no estado estacionário.

Quando a tensão entre os terminais do capacitor se torna igual à tensão de bateria E , o capacitor está totalmente carregado e permanece indefinidamente neste estado se não forem feitas mudanças no circuito.

Se a chave do circuito da Fig. 10.23 for aberta, como na Fig. 10.36(a), o capacitor conservará sua carga por um período de tempo determinado pela corrente de fuga [Fig. 10.36(b)]. Para capacitores como os de mica e cerâmica, a corrente de fuga ($i_{\text{fuga}} = v_C/R_{\text{fuga}}$) é muito pequena, o que permite ao capacitor reter sua carga, e portanto a diferença de potencial entre suas placas, por um longo tempo. No caso dos capacitores eletrolíticos, que possuem correntes de fuga muito altas, a descarga ocorre muito mais rapidamente. Em qualquer caso, para assegurar que um capacitor está completamente descarregado, ele deve ter seus terminais curto-circuitados por um fio ou chave de fenda antes de ser manuseado.

10.8 CIRCUITOS CAPACITIVOS: FASE DE DESCARGA

O circuito da Fig. 10.23 foi projetado para carregar e descarregar o capacitor. Quando a chave é colocada na posição 1, o capacitor se carrega com a tensão da fonte, como vimos na seção anterior. Em qualquer instante do processo de carga, se movermos a chave para a posição 2, o capacitor começará a se descarregar com a mesma constante de tempo $\tau = RC$. A tensão estabelecida pela carga entre os terminais do capacitor dá origem a uma corrente elétrica que descarrega gradualmente o capacitor. Em outras palavras, o capacitor se comporta como uma bateria cuja tensão de saída diminui com o tempo. Note em particular que a corrente i_C circula agora no sentido inverso, o que muda a polaridade da ddp entre os terminais de R .

Se o capacitor for carregado até a ddp entre seus terminais ser igual à tensão da bateria, como na Fig. 10.37, a equação para a tensão entre os terminais do capacitor será a seguinte:

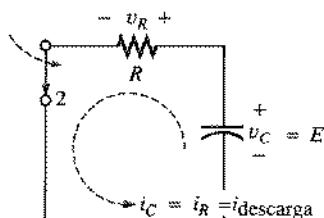


Fig. 10.37 Ilustração da descarga de um circuito capacitivo.

$$v_C = E e^{-t/RC} \quad \text{descarga} \quad (10.18)$$

que emprega a função e^{-x} e a mesma constante de tempo usada anteriormente. A curva resultante tem a mesma forma que as curvas de i_C e v_R da seção anterior. Durante a fase de descarga, a corrente i_C também diminui com o tempo, de acordo com a seguinte equação:

$$i_C = \frac{E}{R} e^{-t/RC} \quad \text{descarga} \quad (10.19)$$

Como $v_R = v_C$

$$v_R = E e^{-t/RC} \quad \text{descarga} \quad (10.20)$$

Para todos os efeitos práticos, o capacitor se descarrega totalmente após transcorridas cinco constantes de tempo. Se a chave for colocada alternadamente nas posições 1 e 2 a cada cinco constantes de tempo, as curvas de v_C , i_C e v_R terão o aspecto da Fig. 10.38. Para cada curva, o sentido da corrente e a polaridade da

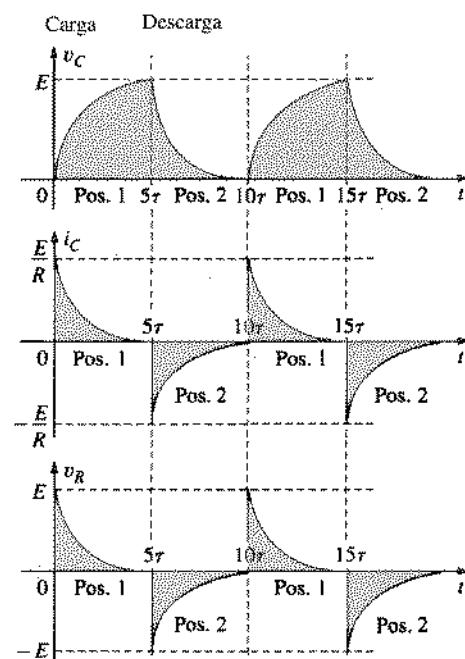


Fig. 10.38 Ciclos de carga e descarga para o circuito da Fig. 10.23.

tensão são os indicados na Fig. 10.23. Como a polaridade de v_C é a mesma nas fases de carga e descarga, toda a curva está acima do eixo horizontal. A corrente i_C troca de sentido quando o capacitor começa a se descarregar, o que resulta em um pulso negativo para a corrente e para a voltagem v_R na segunda metade do ciclo. Note que a tensão v_C não sofre variações bruscas, o que acontece com a corrente i_C toda vez que a chave muda de posição.

EXEMPLO 10.6 Depois que v_C do Exemplo 10.5 atingiu o valor final de 40 V, a chave é colocada na posição 2, como na Fig. 10.39. Encontre as expressões matemáticas para a variação de v_C , i_C e v_R depois que a chave é fechada. Construa os gráficos de v_C , i_C e v_R usando os sentidos e polaridades definidos na Fig. 10.34. Considere $t = 0$ quando a chave é colocada na posição 2.

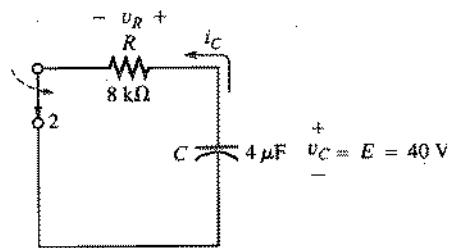


Fig. 10.39 Exemplo 10.6.

Solução:

$$\tau = 32 \text{ ms}$$

Pela Eq. (10.18).

$$v_C = E e^{-t/\tau} = 40 e^{-t/(32 \times 10^{-3})}$$

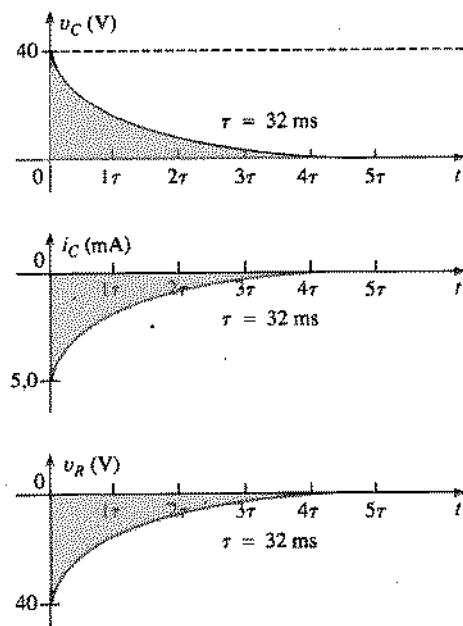


Fig. 10.40 Formas de onda para o circuito da Fig. 10.39.

Pela Eq. (10.19).

$$i_C = -\frac{E}{R} e^{-t/\tau} = -(5 \times 10^{-3}) e^{-t/(32 \times 10^{-3})}$$

Pela Eq. (10.20).

$$v_R = -E e^{-t/\tau} = -40 e^{-t/(32 \times 10^{-3})}$$

As curvas aparecem na Fig. 10.40.

A discussão e os exemplos anteriores se aplicam somente a situações nas quais o capacitor se carrega até que a tensão entre seus terminais seja igual à tensão da bateria. Quando a fase de carga é interrompida antes que a tensão da fonte seja atingida, a tensão entre os terminais do capacitor no início da fase de descarga será menor e a equação para a tensão no capacitor durante a descarga será

$$v_C = V_i e^{-t/\tau_{RC}} \quad (10.21)$$

onde V_i é a tensão no início da fase de descarga. A equação para a corrente de descarga nesse caso será

$$i_C = \frac{V_i}{R} e^{-t/\tau_{RC}} = I_i e^{-t/\tau_{RC}} \quad (10.22)$$

O uso das equações acima será ilustrado nos Exemplos 10.7 e 10.8.

EXEMPLO 10.7

- a. Encontre a expressão matemática para a tensão entre os terminais do capacitor da Fig. 10.41 se a chave for colocada na posição 1 em $t = 0$ s.

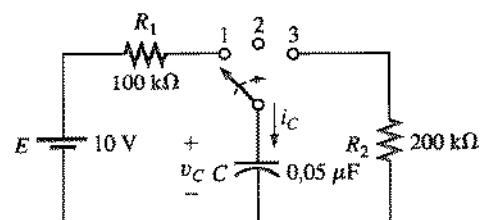


Fig. 10.41 Exemplo 10.7.

- b. Repita o item (a) para i_C .
c. Encontre as expressões matemáticas para v_C e i_C se a chave for colocada na posição 2 após 30 ms (supondo que a resistência de fuga do capacitor seja infinita).
d. Encontre as expressões matemáticas para a tensão v_C e a corrente i_C se a chave for colocada na posição 3 em $t = 48$ ms.
e. Represente graficamente as expressões obtidas nos itens anteriores, plotando v_C e i_C em função do tempo e tomando como positivos a polaridade e o sentido da corrente indicados na Fig. 10.41.

**Soluções:**

a. Fase de carga:

$$v_C = E(1 - e^{-t/\tau})$$

$$\tau = R_1 C = (100 \times 10^3 \Omega)(0.05 \times 10^{-6} \text{ F}) = 5 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$= 5 \text{ ms}$$

$$v_C = 10(1 - e^{-t/(5 \times 10^{-3})})$$

$$b. i_C = \frac{E}{R_1} e^{-t/\tau}$$

$$= \frac{10 \text{ V}}{100 \times 10^3 \Omega} e^{-t/(5 \times 10^{-3})}$$

$$i_C = (0.1 \times 10^{-3}) e^{-t/(5 \times 10^{-3})}$$

c. Fase de armazenamento:

$$v_C = E = 10 \text{ V}$$

$$i_C = 0 \text{ A}$$

d. Fase de descarga (começando em 48 ms com $t = 0$ s nas equações abaixo):

$$v_C = E e^{-t/\tau'}$$

$$\tau' = R_2 C = (200 \times 10^3 \Omega)(0.05 \times 10^{-6} \text{ F}) = 10 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$= 10 \text{ ms}$$

$$v_C = 10 e^{-t/(10 \times 10^{-3})}$$

$$i_C = -\frac{E}{R_2} e^{-t/\tau'}$$

$$= -\frac{10 \text{ V}}{200 \times 10^3 \Omega} e^{-t/(10 \times 10^{-3})}$$

$$i_C = -(0.05 \times 10^{-3}) e^{-t/(10 \times 10^{-3})}$$

e. Veja a Fig. 10.42.

EXEMPLO 10.8

- Encontre uma expressão matemática para a tensão entre os terminais do capacitor da Fig. 10.43 em função do tempo se a chave é colocada na posição 1 em $t = 0$ s.
- Repita o item (a) para i_C .
- Encontre a expressão matemática para v_C e i_C em função do tempo se a chave é colocada na posição 2 depois de passar τ segundos na posição 1, onde τ é a constante de tempo para a carga do capacitor.
- Pinte as equações obtidas nos itens (a) a (c) usando a polaridade e o sentido da corrente definidos na Fig. 10.43.

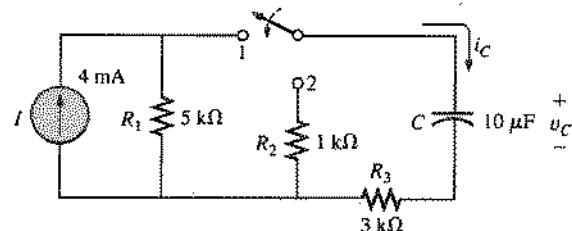


Fig. 10.43 Exemplo 10.8.

Soluções:

- Fase de carga:* Convertendo a fonte de corrente em fonte de tensão, temos o circuito da Fig. 10.44.

$$v_C = E(1 - e^{-t/\tau})$$

$$\tau = (R_1 + R_3)C = (5 \text{ k}\Omega + 3 \text{ k}\Omega)(10 \times 10^{-6} \text{ F})$$

$$= 80 \text{ ms}$$

$$v_C = 20(1 - e^{-t/(80 \times 10^{-3})})$$

$$b. i_C = \frac{E}{R_1 + R_3} e^{-t/\tau}$$

$$= \frac{20 \text{ V}}{8 \text{ k}\Omega} e^{-t/(80 \times 10^{-3})}$$

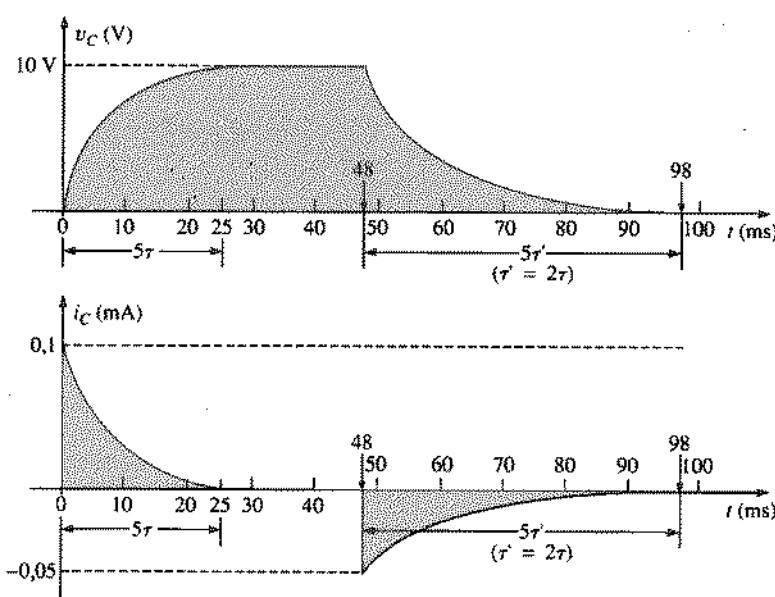


Fig. 10.42 Formas de onda para o circuito da Fig. 10.41.

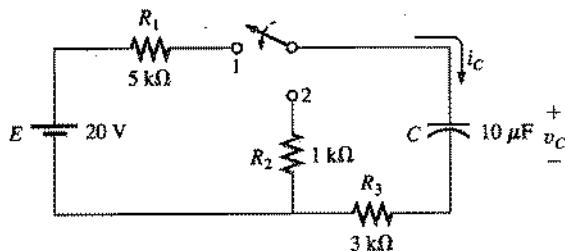
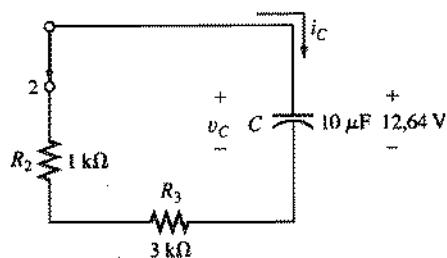


Fig. 10.44 Fase de carga para o circuito da Fig. 10.43.

Fig. 10.45 O circuito da Fig. 10.44 quando a chave é colocada na posição 2 em $t = t_1$.

c. em $t = t_1$, $v_C = 0,632E = 0,632(20\text{ V}) = 12,64\text{ V}$ (Fig. 10.45). Nesse caso, $v_C = V_i e^{-t/\tau_2}$.

$$\text{com } \tau_2 = (R_2 + R_3)C = (1\text{ k}\Omega + 3\text{ k}\Omega)(10 \times 10^{-6}\text{ F}) = 40\text{ ms}$$

$$\text{e } v_C = 12,64 e^{-t/(40 \times 10^{-3})}$$

Em $t = t_1$, $i_C = (0,368)(2,5\text{ mA}) = 0,92\text{ mA}$. A partir desse instante, a corrente passa a ser dada por

$$\begin{aligned} i_C &= -I_i e^{-t/\tau_2} \\ &= -\frac{V_i}{R_2 + R_3} e^{-t/\tau_2} = -\frac{12,64\text{ V}}{1\text{ k}\Omega + 3\text{ k}\Omega} e^{-t/(40 \times 10^{-3})} \\ i_C &= -3,16 \times 10^{-3} e^{-t/(40 \times 10^{-3})} \end{aligned}$$

d. Veja a Fig. 10.46.

10.9 VALORES INICIAIS

Em todos os exemplos examinados nas seções anteriores, o capacitor estava descarregado até que a chave fosse fechada. Vamos examinar agora o efeito de uma carga inicial e consequentemente de uma ddp ($V = Q/C$) entre as placas no instante em que fechamos a chave. A tensão entre os terminais do capacitor neste instante é chamada de valor *initial* (Fig. 10.47). Uma vez que a chave é fechada, começa a fase transiente, que só termina, para todos os efeitos práticos, após cinco constantes de tempo. A região que se segue à resposta transiente e na qual o valor da tensão entre os terminais do capacitor se mantém praticamente constante é chamada de *estado estacionário* ou regime permanente, e o valor da tensão nessa região é chamado de valor *estacionário* ou valor *final*. O valor estacionário é encontrado substituindo o capacitor por um circuito aberto equivalente e determinando a tensão entre as placas. Usando a equação para o transiente apresentada na seção anterior, podemos escrever uma equação para v_C que seja válida para todo o intervalo de tempo da Fig. 10.47:

$$v_C = V_i + (V_f - V_i)(1 - e^{-t/\tau})$$

Multiplicando e reagrupando os termos, temos:

$$\begin{aligned} v_C &= V_i + V_f e^{-t/\tau} - V_i + V_i e^{-t/\tau} \\ &= V_f e^{-t/\tau} + V_i e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

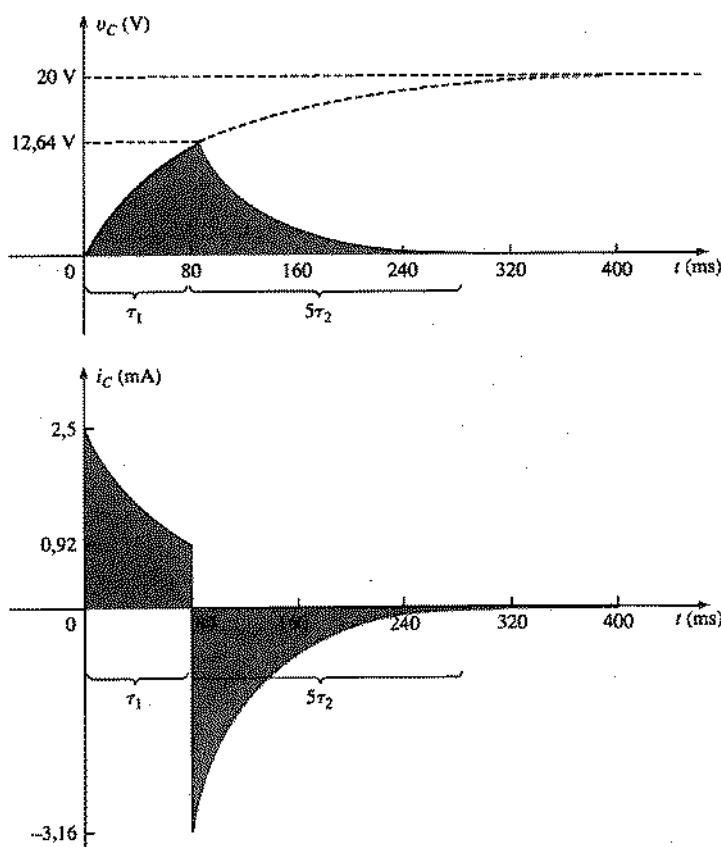


Fig. 10.46 Formas de onda para o circuito da Fig. 10.43.

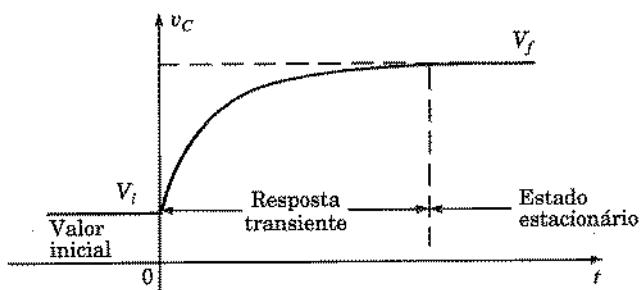


Fig. 10.47 Regiões associadas a uma resposta transiente.



ou

$$v_C = V_f + (V_i - V_f)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (10.23)$$

Se você quiser fazer o gráfico da forma de onda^a da tensão v_C desde o valor inicial até o valor final, comece por traçar retas paralelas ao eixo horizontal nos valores inicial e final e em seguida acrescente a resposta transiente (que depende da constante de tempo) entre os dois valores. O exemplo a seguir serve para ilustrar o método.

EXEMPLO 10.9 O capacitor da Fig. 10.48 tem uma ddp inicial de 4 volts entre suas placas.

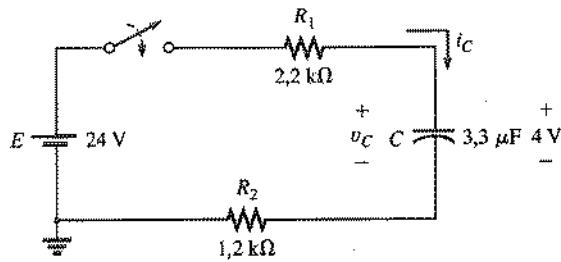


Fig. 10.48 Exemplo 10.9.

- Encontre a expressão matemática para a tensão entre os terminais do capacitor depois que a chave é fechada.
- Encontre a expressão matemática para a corrente durante o período transiente.
- Faça um esboço das formas de onda da tensão e da corrente, desde o valor inicial até o final.

Soluções:

- Substituindo o capacitor por um circuito aberto, verificamos que a tensão final V_C é 24 V.
- A constante de tempo é determinada por

$$\begin{aligned} \tau &= (R_1 + R_2)C \\ &= (2,2 \text{ k}\Omega + 1,2 \text{ k}\Omega)(3,3 \mu\text{F}) \\ &= 11,22 \text{ ms} \end{aligned}$$

$$\text{com } 5\tau = 56,1 \text{ ms}$$

Usando a Eq. 10.23:

$$\begin{aligned} v_C &= V_f + (V_i - V_f)e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 24 \text{ V} + (4 \text{ V} - 24 \text{ V})e^{-\frac{t}{11,22 \text{ ms}}} \\ \text{e } v_C &= 24 \text{ V} - 20 \text{ V}e^{-\frac{t}{11,22 \text{ ms}}} \end{aligned}$$

- Como antes de fecharmos a chave o circuito está aberto, a corrente inicial é zero. No instante em que a chave é fechada, a tensão entre os terminais do capacitor não pode mudar instantaneamente, de modo que a tensão entre os terminais dos elementos resistivos neste instante é igual à tensão aplicada

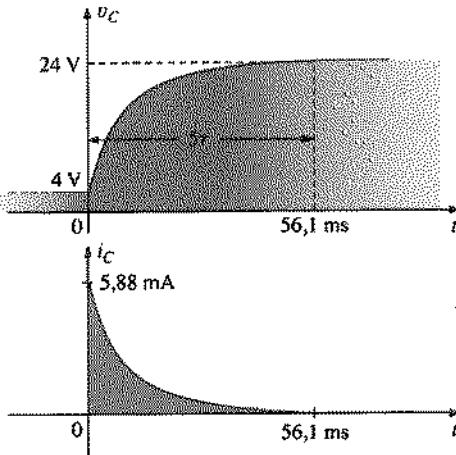


Fig. 10.49 v_C e i_C para o circuito da Fig. 10.48.

menos a tensão inicial entre os terminais do capacitor. A corrente nesse instante é dada por

$$I_m = \frac{E - V_C}{R_1 + R_2} = \frac{24 \text{ V} - 4 \text{ V}}{2,2 \text{ k}\Omega + 1,2 \text{ k}\Omega} = \frac{20 \text{ V}}{3,4 \text{ k}\Omega} = 5,88 \text{ mA}$$

A corrente em seguida irá cair (com a mesma constante de tempo que a tensão v_C) para zero, pois o circuito tende ao estado estacionário, no qual o capacitor se comporta como um circuito aberto.

A equação para i_C é portanto:

$$i_C = 5,88 \text{ mA} e^{-\frac{t}{11,22 \text{ ms}}}$$

c. Veja a Fig. 10.49.

Os valores inicial e final da tensão foram desenhados primeiro e depois incluímos a resposta transiente entre esses valores. Para a corrente, a forma de onda começa e termina em zero; seu sinal depende do sentido escolhido para i_C na Fig. 10.48.

Vamos testar agora a validade da equação para v_C , fazendo $t = 0$ s para representar o instante em que a chave é fechada.

$$e^{-t/\tau} = e^{-0} = 1$$

$$e \quad v_C = 24 \text{ V} - 20 \text{ V}e^{-\frac{t}{\tau}} = 24 \text{ V} - 20 \text{ V} = 4 \text{ V}$$

$$\text{quando } t > 5\tau, e^{-t/\tau} \approx 0$$

$$e \quad v_C = 24 \text{ V} - 20 \text{ V}e^{-\frac{t}{\tau}} = 24 \text{ V} - 0 \text{ V} = 24 \text{ V}$$

10.10 VALORES INSTANTÂNEOS

Em certas ocasiões é necessário determinar a tensão ou a corrente em um instante particular que não seja um múltiplo inteiro de τ . Por exemplo: se

$$v_C = 20(1 - e^{-t/(2 \times 10^{-3})})$$

pode ser preciso conhecer o valor de v_C em $t = 5 \text{ ms}$, o que não corresponde a um múltiplo inteiro de τ . A Fig. 10.29 mostra que $(1 - e^{-t/\tau})$ é aproximadamente 0,93 em $t = 5 \text{ ms} = 2,5 \tau$, o que

^a Um jargão muito utilizado em eletricidade e eletrônica. Não significa que algum movimento ondulatório esteja envolvido. (N. do T.)

nos dá $v_C = 20(0,93) = 18,6$ V. Pode-se obter maior precisão simplesmente fazendo $t = 5$ ms na equação e calculando v_C depois de usar uma calculadora ou uma tabela para determinar o valor de $e^{-2,5}$. Assim,

$$\begin{aligned} v_C &= 20(1 - e^{-5\text{ms}/2\text{ms}}) \\ &= 20(1 - e^{-2,5}) \\ &= 20(1 - 0,082) \\ &= 20(0,918) \\ &= \mathbf{18,36 \text{ V}} \end{aligned}$$

Os resultados estão razoavelmente próximos, mas o uso da Fig. 10.29 raramente permite obter uma precisão maior do que uma casa decimal. O método acima pode ser aplicado a qualquer uma das equações apresentadas neste capítulo.

Também existem ocasiões em que precisamos conhecer o tempo necessário para atingir determinada tensão ou corrente. O método é complicado pelo uso de logaritmos naturais (\log_e ou \ln), mas as calculadoras atuais estão equipadas para realizar tais operações com facilidade. Existem dois tipos de equações, um que se aplica quando a tensão está aumentando e outro quando a tensão (ou a corrente) está diminuindo. No primeiro caso, basta realizar a seguinte sequência de operações:

$$\begin{aligned} v_C &= E(1 - e^{-t/\tau}) \\ \frac{v_C}{E} &= 1 - e^{-t/\tau} \\ 1 - \frac{v_C}{E} &= e^{-t/\tau} \\ \log_e\left(1 - \frac{v_C}{E}\right) &= \log_e e^{-t/\tau} \\ \log_e\left(1 - \frac{v_C}{E}\right) &= -\frac{t}{\tau} \end{aligned}$$

$$t = -\tau \log_e\left(1 - \frac{v_C}{E}\right)$$

$$\text{mas } -\log_e \frac{x}{y} = +\log_e \frac{y}{x}$$

$$\boxed{t = \tau \log_e\left(\frac{E}{E - v_C}\right)} \quad (10.24)$$

As equações do segundo tipo podem ser resolvidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} v_C &= Ee^{-t/\tau} \\ \frac{v_C}{E} &= e^{-t/\tau} \\ \log_e \frac{v_C}{E} &= \log_e e^{-t/\tau} \\ \log_e \frac{v_C}{E} &= -\frac{t}{\tau} \end{aligned}$$

$$t = -\tau \log_e \frac{v_C}{E}$$

ou

$$\boxed{t = \tau \log_e \frac{E}{v_C}} \quad (10.25)$$

Para $i_C = (E/R)e^{-t/\tau}$,

$$\boxed{t = \tau \log_e \frac{E}{i_C R}} \quad (10.26)$$

Por exemplo: suponha que

$$v_C = 20(1 - e^{-t/(2 \times 10^{-3})})$$

e que queremos conhecer o tempo necessário para que a tensão se torne igual a 10 V. De acordo com a Eq. 10.24, temos:

$$\begin{aligned} t &= (2 \text{ ms}) \log_e \left(\frac{20 \text{ V}}{20 \text{ V} - 10 \text{ V}} \right) \\ &= (2 \text{ ms}) \log_e 2 \\ &= (2 \text{ ms})(0,693) \quad \text{tecla } [\ln] \text{ na calculadora} \\ &= \mathbf{1,386 \text{ ms}} \end{aligned}$$

Usando a Fig. 10.29, verificamos que para $(1 - e^{-t/\tau}) = v_C/E = 0,5$ devemos ter $t \approx 0,7 \tau = 0,7 (2 \text{ ms}) = 1,4 \text{ ms}$, o que não difere muito do resultado acima.

10.11 $\tau = R_{Th}C$

A maioria dos circuitos contendo fontes, resistores e um capacitor não tem a forma simples da Fig. 10.23. É sempre possível, porém, reduzir o circuito a essa forma, encontrando o circuito equivalente de Thévenin do circuito externo ao capacitor. E_{Th} será então a tensão da fonte E das Eqs. 10.15 a 10.20 e R_{Th} será a resistência R . A constante de tempo será $\tau = R_{Th}C$.

EXEMPLO 10.10 Para o circuito da Fig. 10.50:

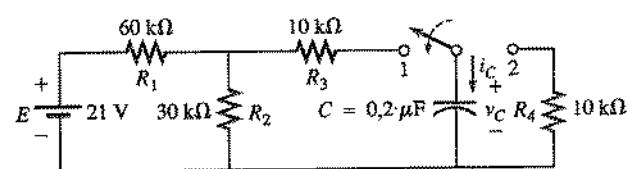


Fig. 10.50 Exemplo 10.10.

- Encontre a expressão matemática para a tensão v_C e a corrente i_C em função do tempo após o fechamento da chave (posição 1 em $t = 0$ s).
- Encontre a expressão matemática para a tensão v_C e a corrente i_C em função do tempo se a chave for colocada na posição 2 em $t = 9$ ms.
- Desenhe as formas de onda de tensão e corrente para os itens (a) e (b).

Soluções:

- Aplicando o teorema de Thévenin ao capacitor de $0,2 \mu\text{F}$, obtemos (Fig. 10.51):

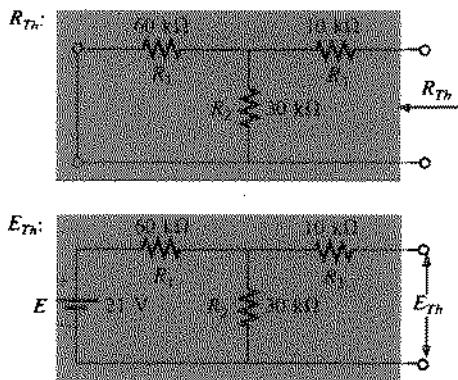


Fig. 10.51 Aplicação do teorema de Thévenin ao circuito da Fig. 10.50.

$$R_{Th} = R_1 \parallel R_2 + R_3 = \frac{(60 \text{ k}\Omega)(30 \text{ k}\Omega)}{90 \text{ k}\Omega} + 10 \text{ k}\Omega = 20 \text{ k}\Omega + 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_{Th} = 30 \text{ k}\Omega$$

$$E_{Th} = \frac{R_2 E}{R_2 + R_1} = \frac{(30 \text{ k}\Omega)(21 \text{ V})}{30 \text{ k}\Omega + 60 \text{ k}\Omega} = \frac{1}{3} (21 \text{ V}) = 7 \text{ V}$$

O circuito equivalente de Thévenin com o capacitor recolocado no circuito aparece na Fig. 10.52. Temos:

$$v_C = E_{Th}(1 - e^{-t/\tau})$$

$$\tau = R_{Th}C = (30 \text{ k}\Omega)(0,2 \mu\text{F})$$

$$= (30 \times 10^3 \Omega)(0,2 \times 10^{-6} \text{ F}) = 6 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$\tau = 6 \text{ ms}$$

$$v_C = 7(1 - e^{-t/(6 \times 10^{-3})})$$

$$\text{e} \quad i_C = \frac{E_{Th}}{R} e^{-t/\tau C}$$

$$= \frac{7 \text{ V}}{30 \text{ k}\Omega} e^{-t/(6 \times 10^{-3})}$$

$$i_C = (0,233 \times 10^{-3}) e^{-t/(6 \times 10^{-3})}$$

b. Em $t = 9 \text{ ms}$,

$$v_C = E_{Th}(1 - e^{-t/\tau}) = 7(1 - e^{-(9 \times 10^{-3})/(6 \times 10^{-3})}) = 7(1 - e^{-1,5}) = 7(1 - 0,223)$$

$$v_C = 7(0,777) = 5,44 \text{ V}$$

$$i_C = \frac{E_{Th}}{R} e^{-t/\tau} = (0,233 \times 10^{-3}) e^{-1,5}$$

$$= (0,233 \times 10^{-3})(0,223)$$

$$i_C = 0,052 \times 10^{-3} = 0,052 \text{ mA}$$

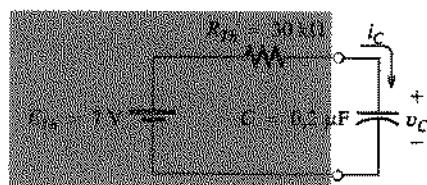


Fig. 10.52 Substituição do circuito da Fig. 10.50 pelo circuito equivalente de Thévenin.

De acordo com a Eq. 10.21,

$$v_C = V_i e^{-t/\tau'}$$

com

$$\tau' = R_4 C = (10 \times 10^3 \Omega)(0,2 \times 10^{-6} \text{ F}) = 2 \times 10^{-3} \text{ s} = 2 \text{ ms}$$

$$\text{e} \quad v_C = 5,44 e^{-t/(2 \times 10^{-3})}$$

De acordo com a Eq. (10.22)

$$I_i = \frac{5,44 \text{ V}}{10 \text{ k}\Omega} = 0,054 \text{ mA}$$

$$\text{e} \quad i_C = I_i e^{-t/\tau'} = -(0,54 \times 10^{-3}) e^{-t/(2 \times 10^{-3})}$$

c. Veja a Fig. 10.53.

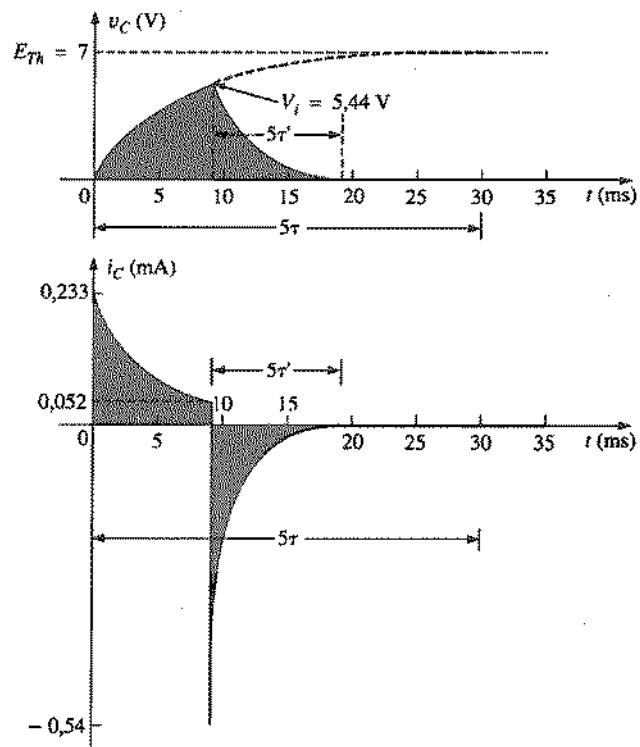


Fig. 10.53 Formas de onda para o circuito da Fig. 10.50.

EXEMPLO 10.11 O capacitor da Fig. 10.54 é carregado inicialmente até 40 V. Encontre a expressão matemática para v_C em função do tempo após o fechamento da chave.

Solução: O circuito pode ser redesenrado como na Fig. 10.55:

E_{Th} :

$$E_{Th} = \frac{R_3 E}{R_3 + R_1 + R_4} = \frac{18 \text{ k}\Omega(120 \text{ V})}{18 \text{ k}\Omega + 7 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega} = 80 \text{ V}$$

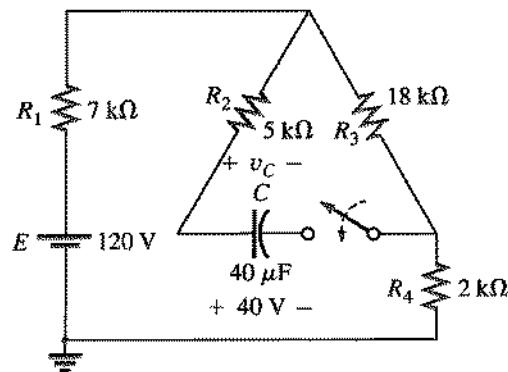


Fig. 10.54 Exemplo 10.11.

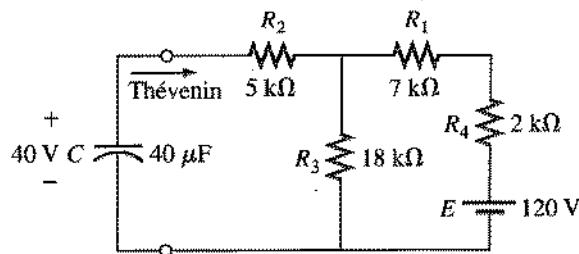


Fig. 10.55 O circuito da Fig. 10.54 redesenhado.

 R_{Th} :

$$\begin{aligned} R_{Th} &= 5 \text{ k}\Omega + 18 \text{ k}\Omega \parallel (7 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega) \\ &= 5 \text{ k}\Omega + 6 \text{ k}\Omega \\ &= 11 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$V_i = 40 \text{ V}, V_f = 80 \text{ V}$$

$$\text{e } \tau = R_{Th}C = (11 \text{ k}\Omega)(40 \mu\text{F}) = 0,44 \text{ s}$$

$$\begin{aligned} \text{Eq. (10.23)} \quad v_C &= V_f + (V_i - V_f)e^{-t/\tau} \\ &= 80 \text{ V} + (40 \text{ V} - 80 \text{ V})e^{-t/0,44 \text{ s}} \end{aligned}$$

$$\text{e } v_C = 80 \text{ V} - 40 \text{ V}e^{-t/0,44 \text{ s}}$$

EXEMPLO 10.12 Encontre, para o circuito da Fig. 10.56, a expressão matemática para a voltagem v_C em função do tempo depois que a chave é fechada (em $t = 0$).

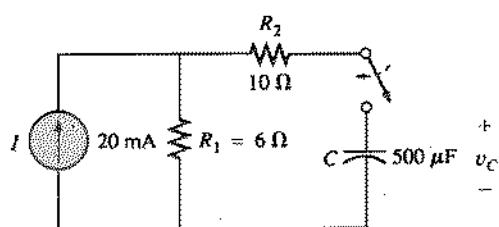


Fig. 10.56 Exemplo 10.12.

Solução:

$$R_{Th} = R_1 + R_2 = 6 \text{ }\Omega + 10 \text{ }\Omega = 16 \text{ }\Omega$$

$$E_{Th} = V_1 + V_2 = IR_1 + 0$$

$$= (20 \times 10^{-3} \text{ A})(6 \text{ }\Omega) = 120 \times 10^{-3} \text{ V} = 0,12 \text{ V}$$

$$\text{e } \tau = R_{Th}C = (16 \text{ }\Omega)(500 \times 10^{-6} \text{ F}) = 8 \text{ ms}$$

$$\text{De modo que } v_C = 0,12(1 - e^{-t/(8 \times 10^{-3})})$$

10.12 A CORRENTE i_C

A corrente i_C associada a uma capacitância C está relacionada à tensão v_C entre os terminais do capacitor pela equação

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} \quad (10.27)$$

onde dv_C/dt é uma medida da taxa de variação de v_C com o tempo. A função dv_C/dt é chamada de *derivada* da tensão v_C em relação ao tempo t .

Nos instantes em que a tensão não está variando, temos:

$$dv_C = 0$$

$$\text{e } i_C = C \frac{dv_C}{dt} = 0$$

Em outras palavras, se a tensão v_C entre os terminais de um capacitor não varia com o tempo, a corrente i_C associada ao capacitor é nula. Além disso, quanto mais rápida a variação da tensão entre os terminais do capacitor, maior a corrente resultante.

Para tornar mais clara a Eq. 10.27, vamos calcular a corrente média associada ao capacitor para várias tensões entre seus terminais. A corrente média é definida pela equação

$$i_{C,\text{av}} = C \frac{\Delta v_C}{\Delta t} \quad (10.28)$$

onde Δ indica uma variação finita (mensurável) da carga, da tensão ou do tempo. A corrente instantânea pode ser calculada a partir da Eq. 10.28 tornando Δt infinitamente pequeno, isto é, fazendo

$$i_{C,\text{inst}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} C \frac{\Delta v_C}{\Delta t} = C \frac{dv_C}{dt}$$

No exemplo que se segue será considerada a variação da tensão, Δv_C , para cada uma das regiões de diferente inclinação da forma de onda. Se a tensão aumenta com o tempo, a corrente média é dada pela variação de tensão (multiplicada pela capacitância) dividida pelo intervalo de tempo correspondente, com sinal positivo. Se a tensão diminui com o tempo, a corrente média é obtida da mesma forma, mas com sinal negativo.

EXEMPLO 10.13 Faça o gráfico da forma de onda da corrente média se a ddp entre os terminais de um capacitor de $2 \mu\text{F}$ varia da forma ilustrada na Fig. 10.57.

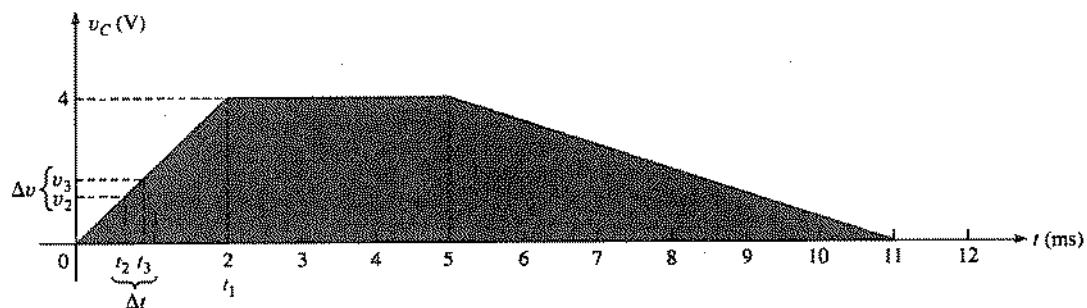


Fig. 10.57 Exemplo 10.13.

Solução:

- a. De 0 a 2 ms, a tensão aumenta de forma linear de 0 a 4 V; assim, a variação é $\Delta v = 4 \text{ V} - 0 = 4 \text{ V}$ (com sinal positivo, pois v aumenta com o tempo). O intervalo de tempo é $\Delta t = 2 \text{ ms} - 0 = 2 \text{ ms}$, logo

$$i_{\text{Cav}} = C \frac{\Delta v_C}{\Delta t} = (2 \times 10^{-6} \text{ F}) \left(\frac{4 \text{ V}}{2 \times 10^{-3} \text{ s}} \right) \\ \approx 4 \times 10^{-3} \text{ A} = 4 \text{ mA}$$

- b. De 2 a 5 ms, a tensão permanece constante em 4 V; assim, a variação é $\Delta v = 0$. Nesse intervalo, portanto,

$$i_{\text{Cav}} = C \frac{\Delta v_C}{\Delta t} = C \frac{0}{\Delta t} = 0$$

- c. De 5 a 11 ms, a tensão diminui de 4 para 0 V. A variação é, portanto, $\Delta v = 4 \text{ V} - 0 = 4 \text{ V}$ (com sinal negativo, pois a tensão diminui com o tempo). O intervalo de tempo é $\Delta t = 11 \text{ ms} - 5 \text{ ms} = 6 \text{ ms}$, logo

$$i_{\text{Cav}} = C \frac{\Delta v_C}{\Delta t} = -(2 \times 10^{-6} \text{ F}) \left(\frac{4 \text{ V}}{6 \times 10^{-3} \text{ s}} \right) \\ = -1,33 \times 10^{-3} \text{ A} = -1,33 \text{ mA}$$

- d. De 11 ms em diante, a tensão permanece constante em 0 V e $\Delta v = 0$, logo $i_{\text{Cav}} = 0$. A forma de onda da corrente média aparece na Fig. 10.58.

Observe, na solução do Exemplo 10.13, que quanto maior a inclinação da curva da tensão em função do tempo, maior a corrente; quando a tensão não varia, a corrente é nula. Além disso, nos trechos em que a inclinação é constante, o valor médio da corrente é igual ao valor instantâneo. Assim, por exemplo, se o intervalo Δt for reduzido de 0 → t_1 para $t_2 \rightarrow t_3$ na Fig. 10.57, o

valor de $\Delta v / \Delta t$ não será alterado. Nesta região, não importa quão pequeno seja o intervalo Δt , a inclinação será a mesma e portanto a corrente i_{Cav} terá sempre o mesmo valor. Se tomarmos o limite quando $\Delta t \rightarrow 0$, a inclinação continuará a mesma e portanto $i_{\text{Cav}} = i_{\text{Cinst}}$ para qualquer instante entre 0 e t_1 . O mesmo pode ser dito a respeito de qualquer intervalo da forma de onda da tensão no qual a inclinação seja constante.

Uma conclusão importante que podemos tirar da discussão acima é de que não é o valor da tensão aplicada a um capacitor que determina a corrente e sim a *rapidez* com que a tensão está variando. Uma tensão constante de 10.000 V pode não produzir (no caso ideal) nenhum fluxo de carga (corrente), mas uma variação de 1 V em um curto período de tempo pode dar origem a uma corrente considerável.

O método descrito acima se aplica somente a formas de onda constituídas por segmentos lineares. No caso de formas de onda não-lineares, é necessário recorrer a métodos matemáticos mais sofisticados, como diferenciação.

10.13 CAPACITORES EM SÉRIE E EM PARALELO

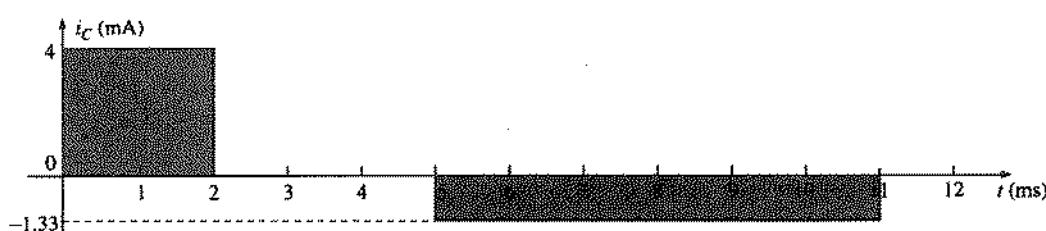
Os capacitores, como os resistores, podem ser ligados em série e em paralelo. Pode-se aumentar os valores de capacidade ligando os capacitores em paralelo e reduzi-los ligando capacitores em série.

No caso de dois ou mais capacitores ligados em série, a carga é a mesma em todos os capacitores (Fig. 10.59):

$$Q_f = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n \quad (10.29)$$

Aplicando a lei de Kirchhoff para tensões, temos

$$E = V_1 + V_2 + V_3$$

Fig. 10.58 Corrente i_c para a tensão da Fig. 10.57.

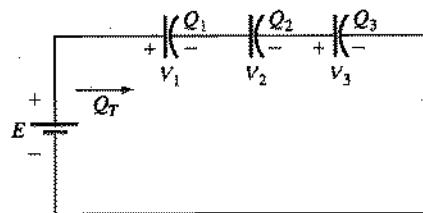


Fig. 10.59 Capacitores em série.

Entretanto,

$$V = \frac{Q}{C}$$

De modo que $\frac{Q_T}{C_T} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3}$ Usando a Eq. 10.29 e dividindo os dois lados por Q , temos

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad (10.30)$$

que é semelhante à expressão que utilizamos para calcular a resistência total de um circuito resistivo paralelo. A capacitância total de dois capacitores em série é dada por

$$C_T = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (10.31)$$

A tensão entre os terminais de cada um dos capacitores da Fig. 10.59 pode ser determinada a partir de

$$Q_T = Q_1$$

ou

$$C_T E = C_1 V_1$$

Explicitando V_1 :

$$V_1 = \frac{C_T E}{C_1}$$

Substituindo C_T por seu valor:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad (10.32)$$

Existe uma equação semelhante para cada capacitor do circuito.

No caso de dois ou mais capacitores em série, a tensão é a mesma entre os terminais de todos os capacitores, e a carga total é a soma das cargas dos capacitores:

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad (10.33)$$

Entretanto,

$$Q = CV$$

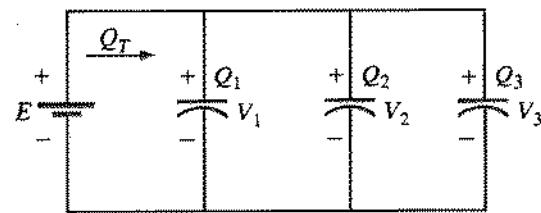
Dessa forma, $C_T E = C_1 V_1 + C_2 V_2 + C_3 V_3$ 

Fig. 10.60 Capacitores em paralelo.

mas

$$E = V_1 = V_2 = V_3$$

Assim,

$$C_T = C_1 + C_2 + C_3 \quad (10.34)$$

que é semelhante à expressão que usamos para calcular a resistência total de um circuito resistivo em série.

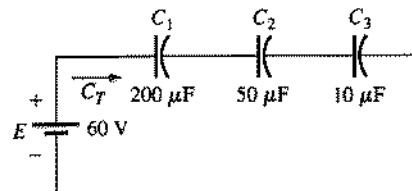
EXEMPLO 10.14 Para o circuito da Fig. 10.61:

Fig. 10.61 Exemplo 10.14.

- Encontre a capacitância total.
- Determine a carga em cada placa.
- Encontre a tensão entre os terminais de cada capacitor.

Soluções:

$$\begin{aligned} a. \quad \frac{1}{C_T} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \\ &= \frac{1}{200 \times 10^{-6} \text{ F}} + \frac{1}{50 \times 10^{-6} \text{ F}} + \frac{1}{10 \times 10^{-6} \text{ F}} \\ &= 0,005 \times 10^6 + 0,02 \times 10^6 + 0,1 \times 10^6 \\ &= 0,125 \times 10^6 \end{aligned}$$

$$e \quad C_T = \frac{1}{0,125 \times 10^6} = 8 \mu\text{F}$$

$$\begin{aligned} b. \quad Q_T &= Q_1 = Q_2 = Q_3 \\ Q_T &= C_T E = (8 \times 10^{-6} \text{ F})(60 \text{ V}) = 480 \mu\text{C} \end{aligned}$$

$$c. \quad V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{480 \times 10^{-6} \text{ C}}{200 \times 10^{-6} \text{ F}} = 2,4 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{480 \times 10^{-6} \text{ C}}{50 \times 10^{-6} \text{ F}} = 9,6 \text{ V}$$

$$V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{480 \times 10^{-6} \text{ C}}{10 \times 10^{-6} \text{ F}} = 48,0 \text{ V}$$

$$e \quad \begin{aligned} E &= V_1 + V_2 + V_3 = 2,4 \text{ V} + 9,6 \text{ V} + 48 \text{ V} \\ &= 60 \text{ V} \quad (\text{confirma o valor da figura}) \end{aligned}$$



EXEMPLO 10.15 Para o circuito da Fig. 10.62:

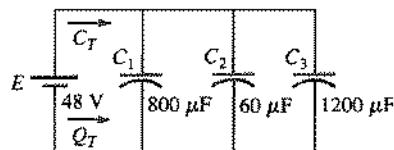


Fig. 10.62 Exemplo 10.15.

- Encontre a capacitância total.
- Determine a carga em cada placa.
- Encontre a carga total.

Soluções:

$$\begin{aligned} \text{a. } C_T &= C_1 + C_2 + C_3 = 800 \mu\text{F} + 60 \mu\text{F} + 1200 \mu\text{F} \\ &= 2060 \mu\text{F} \\ \text{b. } Q_1 &= C_1 E = (800 \times 10^{-6} \text{ F})(48 \text{ V}) = 38,4 \text{ mC} \\ Q_2 &= C_2 E = (60 \times 10^{-6} \text{ F})(48 \text{ V}) = 2,88 \text{ mC} \\ Q_3 &= C_3 E = (1200 \times 10^{-6} \text{ F})(48 \text{ V}) = 57,6 \text{ mC} \\ \text{c. } Q_T &= Q_1 + Q_2 + Q_3 = 38,4 \text{ mC} + 2,88 \text{ mC} + 57,6 \text{ mC} \\ &= 98,88 \text{ mC} \end{aligned}$$

EXEMPLO 10.16 Encontre a ddp entre os terminais e a carga de cada capacitor do circuito da Fig. 10.63.

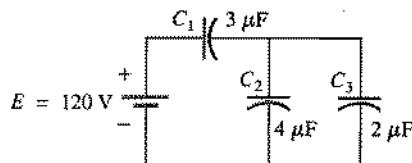


Fig. 10.63 Exemplo 10.16.

Solução:

$$\begin{aligned} C'_T &= C_2 + C_3 = 4 \mu\text{F} + 2 \mu\text{F} = 6 \mu\text{F} \\ C_T &= \frac{C_1 C'_T}{C_1 + C'_T} = \frac{(3 \mu\text{F})(6 \mu\text{F})}{3 \mu\text{F} + 6 \mu\text{F}} = 2 \mu\text{F} \\ Q_T &= C_T E = (2 \times 10^{-6} \text{ F})(120 \text{ V}) \\ &= 240 \mu\text{C} \end{aligned}$$

O circuito equivalente (Fig. 10.64) tem

$$Q_T = Q_1 = Q'_T$$

e, dessa forma,

$$Q_1 = 240 \mu\text{C}$$

$$\text{e } V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{240 \times 10^{-6} \text{ C}}{3 \times 10^{-6} \text{ F}} = 80 \text{ V}$$

$$Q'_T = 240 \mu\text{C}$$

e, dessa forma,

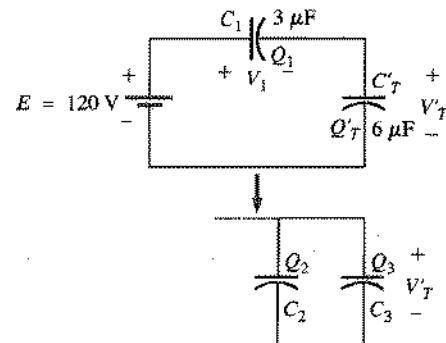


Fig. 10.64 Circuito equivalente ao da Fig. 10.63.

$$\text{e } Q_2 = C_2 V'_T = (4 \times 10^{-6} \text{ F})(40 \text{ V}) = 160 \mu\text{C}$$

$$Q_3 = C_3 V'_T = (2 \times 10^{-6} \text{ F})(40 \text{ V}) = 80 \mu\text{C}$$

EXEMPLO 10.17 Encontre a tensão entre os terminais e a carga do capacitor C_1 da Fig. 10.65 depois que ele está totalmente carregado.

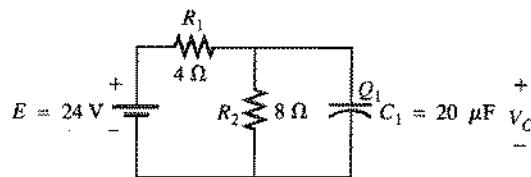


Fig. 10.65 Exemplo 10.17.

Solução: Como já dissemos anteriormente, nos circuitos de corrente contínua o capacitor se comporta como um circuito aberto quando sua carga atinge o valor máximo (Fig. 10.66). Dessa forma,

$$\begin{aligned} V_C &= \frac{(8 \Omega)(24 \text{ V})}{4 \Omega + 8 \Omega} = 16 \text{ V} \\ Q_1 &= C_1 V_C = (20 \times 10^{-6} \text{ F})(16 \text{ V}) \\ &= 320 \mu\text{C} \end{aligned}$$

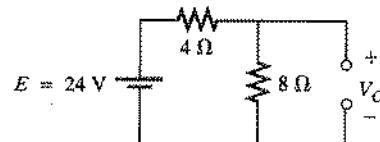


Fig. 10.66 Determinação do valor final (estado estacionário) dos v_C

EXEMPLO 10.18 Encontre as tensões entre os terminais e as cargas dos capacitores do circuito da Fig. 10.67 depois que todas as cargas atingiram seus valores máximos.

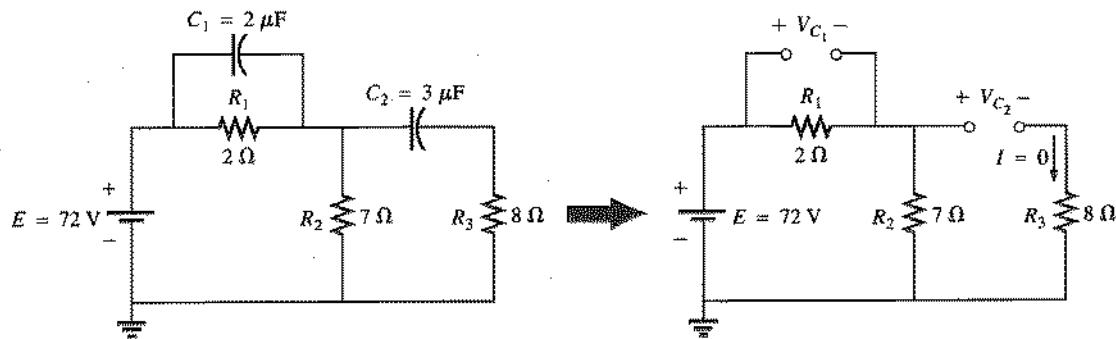


Fig. 10.67 Exemplo 10.18.

Solução:

$$V_{C_2} = \frac{(7\Omega)(72\text{ V})}{7\Omega + 2\Omega} = 56\text{ V}$$

$$V_{C_1} = \frac{(2\Omega)(72\text{ V})}{2\Omega + 7\Omega} = 16\text{ V}$$

$$Q_1 = C_1 V_{C_1} = (2 \times 10^{-6}\text{ F})(16\text{ V}) = 32\text{ }\mu\text{C}$$

$$Q_2 = C_2 V_{C_2} = (3 \times 10^{-6}\text{ F})(56\text{ V}) = 168\text{ }\mu\text{C}$$

onde V é a ddp entre os terminais do capacitor no estado estacionário. Em termos de Q e C ,

$$W_C = \frac{1}{2} C \left(\frac{Q}{C} \right)^2$$

ou

$$W_C = \frac{Q^2}{2C} \quad (\text{J}) \quad (10.36)$$

EXEMPLO 10.19 Determine, para o circuito da Fig. 10.67, a energia armazenada em cada capacitor.

Solução:

$$\text{Para } C_1, W_C = \frac{1}{2} C V^2$$

$$= \frac{1}{2} (2 \times 10^{-6}\text{ F})(16\text{ V})^2 = (1 \times 10^{-6})(256)$$

$$= 256\text{ }\mu\text{J}$$

$$\text{Para } C_2, W_C = \frac{1}{2} C V^2$$

$$= \frac{1}{2} (3 \times 10^{-6}\text{ F})(56\text{ V})^2 = (1.5 \times 10^{-6})(3136)$$

$$= 4704\text{ }\mu\text{J}$$

Note a grande diferença nas energias armazenadas nos dois capacitores. Isso se deve ao fato de que a potência é proporcional ao quadrado da tensão.

10.14 ENERGIA ARMAZENADA EM UM CAPACITOR

O capacitor ideal não dissipa a energia que lhe é fornecida, mas se limita a armazená-la na forma de um campo elétrico entre as placas. A Fig. 10.68 mostra a variação com o tempo da tensão, corrente e potência associadas a um capacitor durante a fase de carga. A potência a cada instante é dada pelo produto da tensão pela corrente nesse mesmo instante. A energia armazenada no capacitor está representada pela região sombreada abaixo da curva da potência. Usando cálculo integral, podemos determinar a área sob a curva. O resultado é o seguinte:

$$W_C = \frac{1}{2} C E^2$$

Em geral,

$$W_C = \frac{1}{2} C V^2$$

(J)

(10.35)

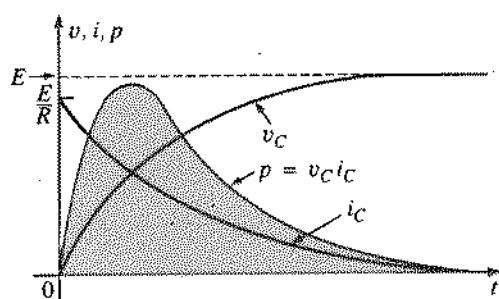


Fig. 10.68 Gráfico da potência fornecida a um elemento capacitivo durante a fase transiente.

10.15 CAPACITÂNCIAS PARASITAS

Além dos capacitores discutidos até agora neste capítulo, os circuitos também podem conter capacitâncias parasitas. Essas capacitâncias não são introduzidas deliberadamente, mas se devem a vários efeitos. Quando dois fios de um circuito estão próximos, existe uma capacitância entre eles [Fig. 10.69(a)]. Nos circuitos transistorizados, existem capacitâncias entre os diferentes elementos dos transistores [Fig. 10.69(b)]. No Cap. 12 iremos estudar outro componente, chamado *indutor*, que apresenta efeitos capacitivos entre suas espiras [Fig. 10.69(c)]. As capacitâncias parasitas podem causar sérios problemas se não forem levadas em conta no projeto do circuito.

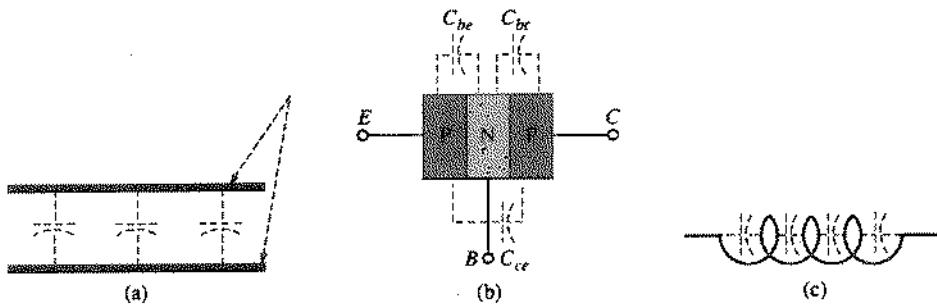


Fig. 10.69 Exemplos de capacitâncias parasitas.

10.16 ANÁLISE COMPUTACIONAL

PSpice (DOS)

O PSpice possui um comando específico (.TRAN) que fornece a resposta transiente em função do tempo. Um gráfico da resposta pode ser obtido usando o comando .PLOT ou .PROBE. O comando .TRAN determina a resposta transiente de um circuito de $t = 0$ s até o valor final. O formato do comando é o seguinte:

.TRAN	Valor final de t para os cálculos
TSTEP	Incremento no tempo entre os valores determinados
Exemplo: .TRAN	5U 1000

TSTEP e TSTOP são especificados pelo usuário. TSTEP é o intervalo de tempo entre dois valores consecutivos, e TSTOP é o valor final de tempo (t). No exemplo acima a resposta será calculada a cada $5\ \mu\text{s}$, de 0 a $100\ \mu\text{s}$, com a primeira medida sendo feita em $t = 5\ \mu\text{s}$.

Os dados dos capacitores são fornecidos de maneira semelhante aos dos resistores, como demonstra o formato a seguir:

<u>CBYPASS</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>1000</u>	<u>IC=2V</u>
Nome	+	-	↑	↑
N6	N6	Valor	Valor inicial	

O usuário deve entrar com os dados no formato acima; o valor da tensão inicial (a tensão entre os terminais do capacitor com a chave aberta) pode ser omitido se for igual a zero. O exemplo acima é para um capacitor de $100\ \mu\text{F}$ entre os nós 6 e 7, com o nó 6 definido como o de potencial mais alto. No PSpice, os capacitores possuem uma limitação: não podem ser ligados em série. Entretanto, este problema pode ser contornado colocando-se uma resistência de valor muito alto (equivalente a um circuito aberto) em paralelo com um dos capacitores.

Vamos agora escrever o arquivo de entrada para o circuito da Fig. 10.70. Em vez de usarmos uma chave para aplicar 20 V aos terminais do circuito em $t = 0$ s, vamos usar um pulso que começa em $t = 0$ s e se mantém em 20 V por um período de tempo maior do que cinco constantes de tempo do circuito.

O formato para um pulso de tensão é o seguinte:

<u>VPULSE</u>	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>PULSE</u>	<u>(2</u>	<u>8</u>	<u>1U</u>
Valor	+	-		Valor	Valor	Tempo
Nó	N6		inicial	máximo	de	retardo

Todos os parâmetros assinalados com chaves são controlados pelo usuário. Não se esqueça de colocar os parâmetros do comando PULSE entre parênteses! O valor inicial do pulso é 2 V, e o valor máximo é 8 V. O tempo de retardo ($1\ \mu\text{s}$) é o intervalo de tempo entre $t = 0$ s e o instante em que o pulso muda de valor. Se desejarmos, esse intervalo pode ser igual a zero segundo. Os tempos de subida e descida são os intervalos necessários para que o pulso mude de valor. Se o tempo de subida e/ou o tempo de descida for especificado como zero segundo, o programa usará o valor TSTEP do comando .TRAN. No exemplo acima, o tempo de subida é 10 ns e o tempo de descida é 20 ns. A largura do pulso ($50\ \mu\text{s}$) é o intervalo durante o qual a amplitude do pulso é máxima, e o período ($100\ \mu\text{s}$) é o intervalo entre pulsos sucessivos. Se a largura e o período do pulso não forem especificados ou forem especificados como zero segundo, o programa usará o valor TSTOP do comando .TRAN.

O arquivo de entrada para um pulso como o da Fig. 10.71. O pulso se inicia em $t = 0$ s (TD = 0), e os tempos de subida e de descida são iguais a 1 ns, muito menores que a largura do pulso e que a constante de tempo do circuito. A largura do pulso, 1 s, é 5 vezes maior do que o tempo necessário para que o circuito chegue ao estado estacionário, que para este circuito é de 200 ms (5 constantes de tempo), tempo este usado para definir o intervalo de interesse no comando .TRAN. Em outras palavras, o pulso terá o valor máximo (20 V) durante praticamente todo o intervalo de interesse.

O comando .PRINT no arquivo de entrada especifica que os valores da tensão de entrada, $V(1)$, da tensão de saída, $V(2)$ e da corrente no circuito, $I(C)$, devem ser mostrados a intervalos de 10 ms até que tenham se passado 200 ms, como especificado pelo comando .TRAN. Observe no arquivo de saída que todos os valores são nulos em $t = 0$. Observe também que a partir de $t = 10\text{ms}$ a tensão de entrada se mantém constante com um valor de 20 V e que depois de 5 constantes de tempo (200 ms) a tensão de saída v_C está muito próxima de 20 V. A corrente de saída i_c cai de 4 mA para 3,541 mA nos primeiros 10 ms e continua a cair, atingindo um valor muito próximo de zero após 5 constantes de tempo.

Substituindo o comando .PRINT por .PROBE, obtemos os gráficos da Fig. 10.72 para a tensão v_C e a corrente i_c . Observe que .PROBE rotula os gráficos e determina automaticamente as escalas apropriadas para os eixos. Como era de se esperar, v_C aumenta de 0 a 20 V no período de $t = 0$ a $t = 53$ e a tensão de

<u>10N</u>	<u>20N</u>	<u>50U</u>	<u>100U</u>
Tempo de subida	Tempo de descida	Largura do pulso	Período do pulso

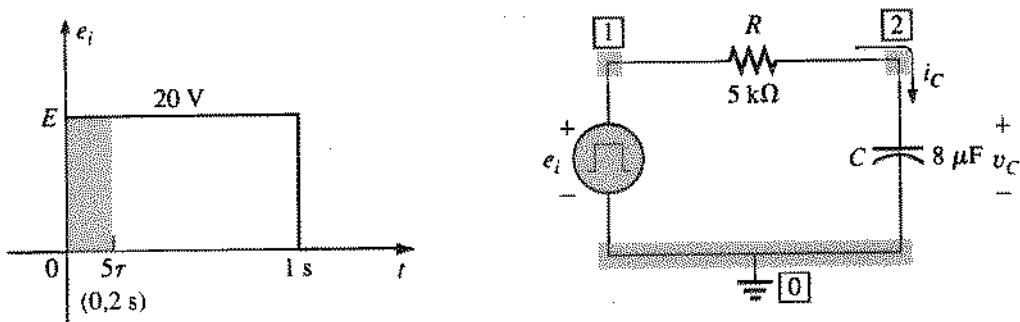


Fig. 10.70 Uso do PSpice (DOS) para representar a aplicação de um pulso de tensão a um circuito R-C.

Chapter 10 - R-C Circuit Transient Analysis

CIRCUIT DESCRIPTION

```
*****
VE 1 0 PULSE(0 20V 0 1N 1N 1)
R 1 2 5K
C 2 0 8U
.TRAN 10M 200M
.PRINT TRAN V(1) V(2) I(C)
OPTIONS NOPAGE
END
```

TIME	V(1)	V(2)	I(C)
0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
1.000E-02	2.000E+01	4.421E+00	3.116E-03
2.000E-02	2.000E+01	7.858E+00	2.418E-03
3.000E-02	2.000E+01	1.055E+01	1.689E-03
4.000E-02	2.000E+01	1.264E+01	1.473E-03
5.000E-02	2.000E+01	1.427E+01	1.425E-03
6.000E-02	2.000E+01	1.554E+01	8.925E-04
7.000E-02	2.000E+01	1.653E+01	6.944E-04
8.000E-02	2.000E+01	1.729E+01	5.412E-04
9.000E-02	2.000E+01	1.790E+01	4.210E-04
1.000E-01	2.000E+01	1.836E+01	3.201E-04
1.100E-01	2.000E+01	1.872E+01	2.552E-04
1.200E-01	2.000E+01	1.901E+01	1.989E-04
1.300E-01	2.000E+01	1.923E+01	1.547E-04
1.400E-01	2.000E+01	1.940E+01	1.206E-04
1.500E-01	2.000E+01	1.953E+01	9.382E-05
1.600E-01	2.000E+01	1.963E+01	7.311E-05
1.700E-01	2.000E+01	1.972E+01	5.689E-05
1.800E-01	2.000E+01	1.978E+01	4.413E-05
1.900E-01	2.000E+01	1.983E+01	3.448E-05
2.000E-01	2.000E+01	1.987E+01	2.684E-05

Fig. 10.71 Resposta transiente do circuito da Fig. 10.70.

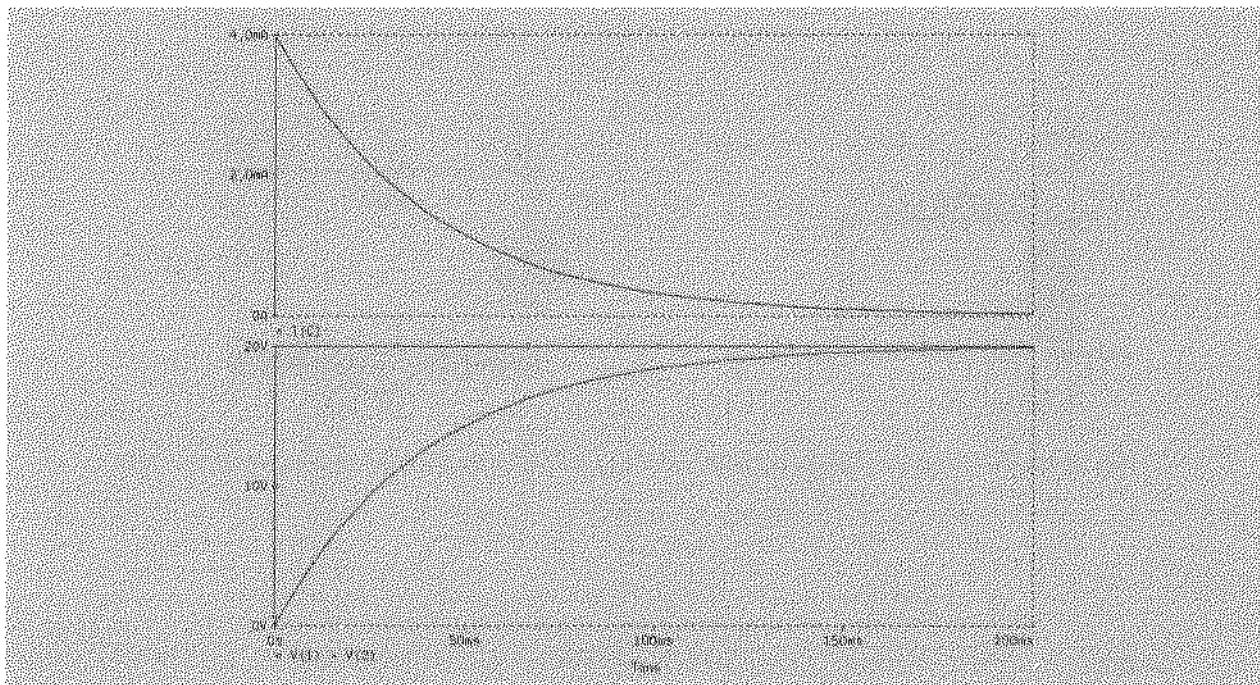


Fig. 10.72 Gráficos de i_C e v_C em função do tempo para o circuito da Fig. 10.70, obtidos com o auxílio do comando .PROBE.

entrada V(1) salta de 0 para 20 V em $t = 0$ e mantém este último valor até o final do gráfico. A corrente i_C decai exponencialmente de 4 mA em $t = 0$ para um valor muito próximo de zero em $t = 200$ ms.

PSpice (Windows)

Em vez de usarmos um esquema para obter a mesma resposta que acabamos de descrever para o PSpice (DOS), vamos aproveitar esta sessão do PSpice (Windows) para examinar um exemplo mais sofisticado de emprego da função pulso, verificando os resultados do Exemplo 10.13. Com isso, o leitor compreenderá melhor a influência dos vários parâmetros da função pulso e verá que algumas funções são mais versáteis do que podem parecer à primeira vista. O gerador de pulsos é obtido com a sequência **Draw-Get New Part-Browse-source.slb-VPULSE-OK**. Uma vez colocado no lugar, um duplo clique no seu símbolo abre uma caixa de diálogo que controla seus vários atributos. Os parâmetros a serem especificados são os mesmos que para o PSpice (DOS). **V1** é o valor inicial e **V2** o valor máximo do pulso; **TD**, o tempo de retardo; **TR**, o tempo de subida; **TF** o tempo de descida; **PW**, a largura do pulso e **PER**, o período da forma de onda. Convém chamar atenção para o fato de que no PSpice **PW** é o intervalo de tempo durante o qual o pulso mantém o valor máximo **V2**, e não o intervalo entre os pontos em que atinge 50% da amplitude máxima, como em outros programas. O comando **Save Attr-Change Display-Both name and value** foi usado várias vezes para mostrar na tela os nomes e valores dos parâmetros. O nome da fonte foi mudado dando um duplo clique em **V1** e digitando **Vpulse**. Entramos então com **Draw-Get New Part-Browse-analog.slb-C-OK** para obter o capacitor necessário para completar o circuito da Fig. 10.73. Fixamos seu valor em $2 \mu\text{F}$ e deixamos seu nome como **C1**.

No menu **Analysis**, escolhemos **Setup** e depois **Transient**. Como o intervalo de tempo é de cerca de 10 ms e 1000 pontos nos dariam um gráfico adequado, o **Print Step** escolhido foi de $10\text{ ms}/1000 = 10 \mu\text{s}$. O **Final Time** é de 11 ms, o **No-Print Delay** é 0 s e o **Step Ceiling** é $10 \mu\text{s}$ para assegurar pelo menos 1000 pontos no gráfico. Depois de **OK-Close-Analysis-Probe Setup-Automatically Run Probe After Simulation** iniciamos a análise com **Analysis-Simulation**.

Quando a análise termina e a tela Probe aparece, entramos com **Trace-Add-V(C1:1) — OK** e o **Plot-Add Plot-Trace-Add-I(C1:1) — OK**, fazendo aparecer na tela os gráficos da Fig. 10.74, que são idênticos aos das Figs. 10.57 e 10.58. Observe que a subida e a descida do pulso são lineares e a largura é a especificada. O eixo horizontal, que inicialmente ia até 12 ms, foi reduzido para o intervalo de interesse (de 0 a 11 ms) com o auxílio da sequência **Plot-X-Axis Settings-User Defined 0 ms-11 ms-OK**. A linha horizontal em 0 mA foi adicionada usando **Tools-Label-Line** e em seguida a ferramenta para traçar linhas, já descrita em capítulos anteriores. Os dísticos **V(C)** e **I(C)** foram criados com o comando **Tools-Label-Text Enter text label-V(C)-OK**. O valor negativo da corrente **I(C)** é difícil de ler, mas entrando com

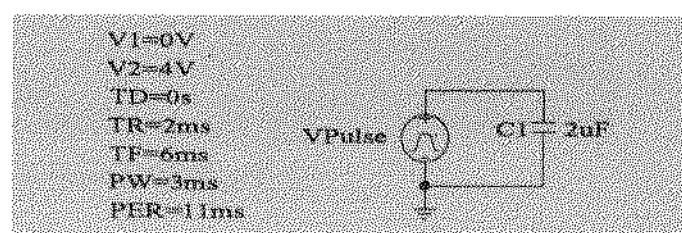


Fig. 10.73 Verificação dos resultados do Exemplo 10.13 usando o PSpice (Windows).

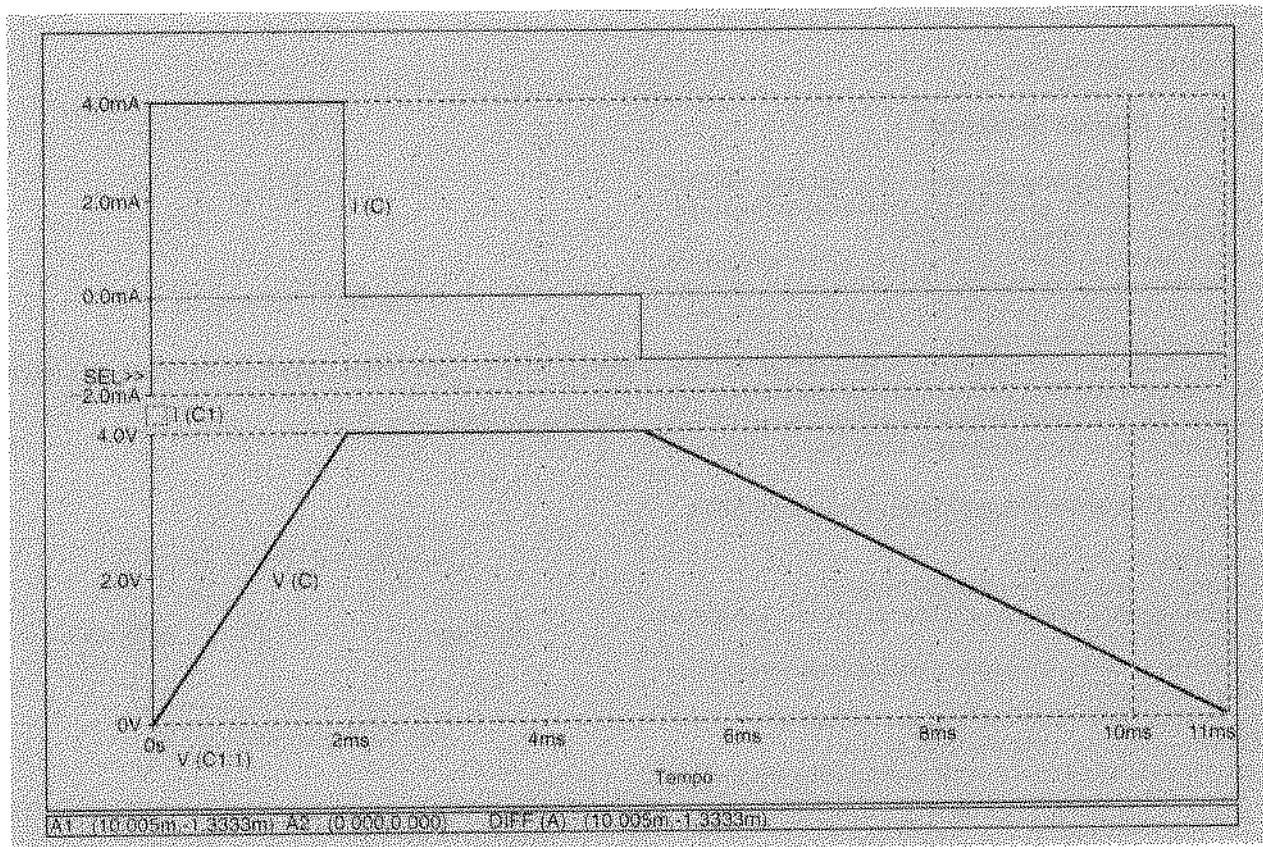


Fig. 10.74 Formas de onda para a tensão e corrente do Exemplo 10.13.

Tools-Cursor-Display temos duas linhas que se cruzam no gráfico, definindo um ponto específico. As posições horizontal e vertical desse ponto aparecem em uma caixa de diálogo na extremidade inferior da Fig. 10.74. Colocando a linha vertical em 10 ms com o mouse temos o valor de $-1,3333$ mA, que também está de acordo com os resultados do Exemplo 10.13. Em situa-

ções como a da Fig. 10.74, em que existem dois gráficos na tela, o gráfico “ativo”, isto é, aquele ao qual se aplicam comandos imediatos como **Tools**, é identificado pelo símbolo **SEL>>**, como o gráfico de $I(C)$ na Fig. 10.74. Para definir o outro gráfico como gráfico ativo, basta clicar sobre ele com o mouse.

PROBLEMAS

SEÇÃO 10.2 O Campo Elétrico

- Encontre a intensidade do campo elétrico em um ponto localizado a 2 m de uma carga de $4 \mu\text{C}$.
- A intensidade de um campo elétrico é 36 newtons/coulomb (N/C) em um ponto distante r metros de uma carga de $0,064 \mu\text{C}$. Encontre a distância r .

SEÇÃO 10.3 Capacitância

- Encontre a capacitância de um capacitor de placas paralelas se 1400 μC de carga se acumulam em suas placas quando a tensão aplicada é 20 V.
- Qual é a carga que se acumula nas placas de um capacitor de $0,05 \mu\text{F}$ quando são aplicados 45 V a seus terminais?
- Encontre a intensidade do campo elétrico entre as placas de um capacitor de placas paralelas se são aplicados 100 mV entre suas placas, que estão distantes 2 mm uma da outra.
- Repita o Problema 5 para uma distância de 4 mils.

- Um capacitor de placas paralelas de $4 \mu\text{F}$ possui $160 \mu\text{C}$ de carga em suas placas. Se a distância entre as placas é 5 mm, encontre a intensidade do campo elétrico entre elas.
- Encontre a capacitância de um capacitor de placas paralelas se a área de cada placa for $0,075 \text{ m}^2$ e a distância entre elas 1,77 mm. O dielétrico é o ar.
- Repita o Problema 8 supondo que o dielétrico é papel parafinado.
- Encontre a distância em mils entre as placas de um capacitor de $2 \mu\text{F}$, se a área de cada placa for de $0,09 \text{ m}^2$ e o dielétrico for óleo de transformador (ascarel).
- A capacitância de um capacitor cujo dielétrico é o ar é 1200 pF . Quando inserirmos um novo dielétrico entre as placas, a capacitância aumenta para $0,006 \mu\text{F}$. De que material é feito o dielétrico?
- As placas de um capacitor de placas paralelas cujo dielétrico é o ar como dielétrico distam 0,2 mm e possuem uma área de $0,08 \text{ m}^2$. São aplicados 200 V entre as placas.
 - Determine a capacitância.
 - Encontre a intensidade do campo elétrico entre as placas.
 - Encontre a carga nas placas.
- Uma folha de Baquelite de 0,2 mm de espessura e com uma área de $0,08 \text{ m}^2$ é inserida entre as placas do capacitor do Problema 12.



- Encontre a intensidade do campo elétrico entre as placas.
- Determine a carga nas placas.
- Determine a capacidade.

SEÇÃO 10.4 Rígidez Dielétrica

- Encontre as tensões máximas de operação dos capacitores dos Problemas 12 e 13, supondo que existe uma relação linear entre a tensão de ruptura e a espessura do dielétrico.
- Encontre a tensão máxima que pode ser aplicada aos terminais de um capacitor de placas paralelas de $0.006 \mu\text{F}$. A área de cada placa é $0,02 \text{ m}^2$ e o dielétrico é a mica. Suponha que existe uma relação linear entre a rigidez dielétrica e a espessura do dielétrico.
- Encontre a distância em milímetros entre as placas de um capacitor de placas paralelas, se a ddp máxima que pode ser aplicada entre seus terminais é 1250 V. O dielétrico é a mica. Suponha que existe uma relação linear entre a tensão de ruptura e a espessura do dielétrico.

SEÇÃO 10.7 Circuitos Capacitivos: Fase de Carga

- Para o circuito da Fig. 10.75:
 - Determine a constante de tempo do circuito.
 - Escreva uma expressão matemática para a tensão v_C depois que a chave é fechada.
 - Determine a tensão v_C depois de transcorridas uma, três e cinco constantes de tempo.
 - Escreva expressões para a corrente i_C e a tensão v_R .
 - Faça um esboço das formas de onda de v_C e i_C .
- Reita o Problema 17 para $R = 1 \text{ M}\Omega$ e compare os resultados.

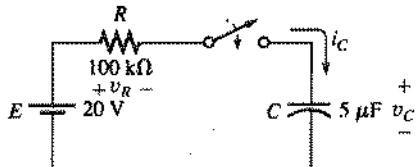


Fig. 10.75 Problemas 17 e 18.

- Para o circuito da Fig. 10.76:

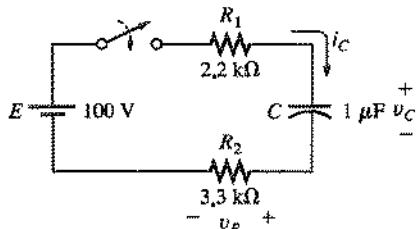


Fig. 10.76 Problema 19.

- Determine a constante de tempo do circuito.
- Escreva uma expressão matemática para a tensão v_C depois que a chave é fechada.
- Determine v_C depois de uma, três e cinco constantes de tempo.
- Escreva expressões para a corrente i_C e para a tensão v_R .
- Esboce as formas de onda de v_C e i_C .
- Reita o Problema 17 para a Fig. 10.77:
 - Determine a constante de tempo do circuito.
 - Escreva uma expressão matemática para a tensão v_C depois que a chave é fechada.
 - Escreva uma expressão matemática para a corrente i_C depois que a chave é fechada.
 - Escreva uma expressão matemática para a corrente i_C depois que a chave é fechada.
 - Esboce as formas de onda de v_C e i_C .

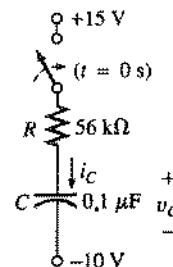


Fig. 10.77 Problema 20.

SEÇÃO 10.8 Circuitos Capacitivos: Fase de Descarga

- Para o circuito da Fig. 10.78:

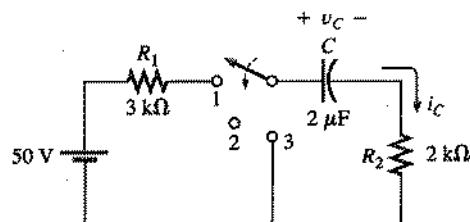


Fig. 10.78 Problemas 21 e 22.

- Determine a constante de tempo do circuito quando a chave é colocada na posição 1.
 - Encontre uma expressão matemática para a tensão entre os terminais do capacitor depois que a chave é colocada na posição 1.
 - Determine uma expressão matemática para a corrente depois que a chave é fechada (posição 1).
 - Determine a tensão v_C e a corrente i_C se a chave é colocada na posição 2 em $t = 100 \text{ ms}$.
 - Determine expressões matemáticas para a tensão v_C e a corrente i_C se a chave é colocada na posição 3 em $t = 200 \text{ ms}$.
 - Esboce as formas de onda de v_C e i_C para o intervalo de $t = 0$ até $t = 300 \text{ ms}$.
- Repita o Problema 21 para uma capacidade de $20 \mu\text{F}$.
 - Para o circuito da Fig. 10.79:

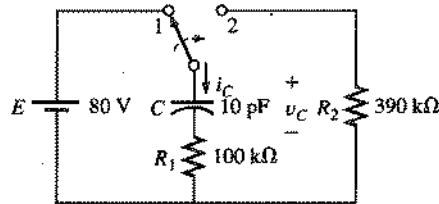


Fig. 10.79 Problema 23.

- Encontre uma expressão matemática para a tensão entre os terminais do capacitor depois que a chave é colocada na posição 1.
- Repita o item (a) para a corrente i_C .
- Encontre expressões matemáticas para a tensão v_C e a corrente i_C se a chave é colocada na posição 2 após um intervalo de tempo igual a cinco constantes de tempo do circuito de carga.
- Esboce as formas de onda de v_C e i_C para o intervalo de $t = 0$ até $t = 30 \mu\text{s}$.
- A ddp entre os terminais do capacitor da Fig. 10.80 é de 40 V, antes que a chave seja fechada. Escreva expressões para as tensões v_C e v_R e para a corrente i_C durante a fase de descarga.

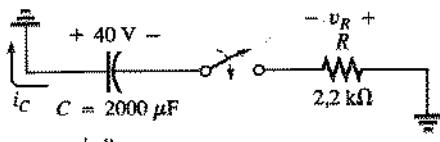


Fig. 10.80 Problema 24.

25. O capacitor de $1000 \mu\text{F}$ da Fig. 10.81 está carregado com 6 V . Para descarregar o capacitor antes de utilizá-lo, um fio com uma resistência de $0,002 \Omega$ foi conectado entre os terminais do capacitor.

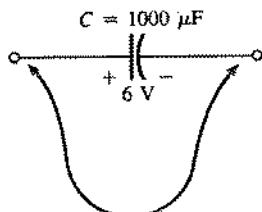


Fig. 10.81 Problemas 25 e 29.

- Quanto tempo será necessário para descarregar o capacitor?
- Qual o valor máximo da corrente?
- Com base na resposta do item (b), é de se esperar que ocorra uma centelha quando o fio for conectado aos terminais do capacitor?

SEÇÃO 10.9 Valores Iniciais

26. O capacitor da Fig. 10.82 está carregado inicialmente com 3 V , com a polaridade indicada.

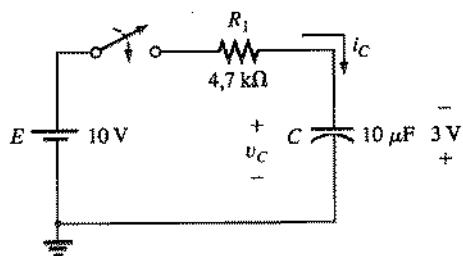


Fig. 10.82 Problema 26.

- Encontre expressões matemáticas para a tensão v_C e a corrente i_C depois que a chave é fechada.
 - Esboce as formas de onda de v_C e i_C .
- *27. O capacitor da Fig. 10.83 está carregado inicialmente com 12 V , com a polaridade indicada.

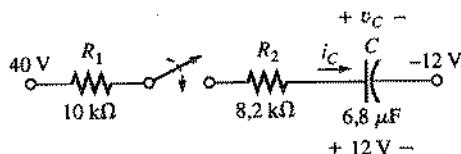


Fig. 10.83 Problema 27.

- Encontre expressões matemáticas para a tensão v_C e a corrente i_C depois que a chave é fechada.
- Esboce as formas de onda de v_C e i_C .

SEÇÃO 10.10 Valores Instantâneos

28. Dada a expressão $v_C = 8(1 - e^{-t/(20 \times 10^{-6})})$:
- Determine v_C após cinco constantes de tempo.
 - Determine v_C após dez constantes de tempo.
 - Determine v_C em $t = 5 \mu\text{s}$.
29. Para a situação do Problema 25, determine o instante em que a corrente de descarga atingirá metade do valor máximo, se o fio for conectado em $t = 0 \text{ s}$.
30. No circuito da Fig. 10.84, V_L precisa atingir o valor de 8 V para que o sistema seja ativado. Se a chave é fechada em $t = 0 \text{ s}$, quanto tempo o sistema leva para ser ativado?

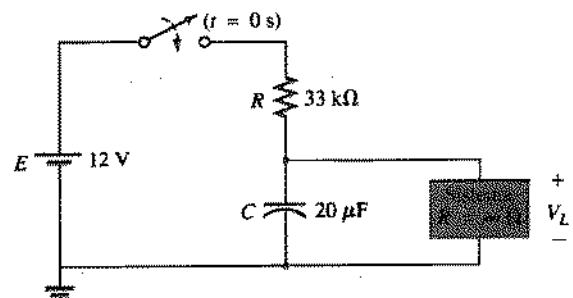


Fig. 10.84 Problema 30.

- *31. Determine o valor de R no circuito da Fig. 10.85 para que o sistema seja ligado 10 s após a chave ser fechada.

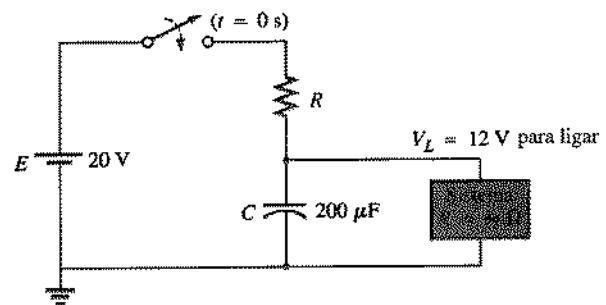


Fig. 10.85 Problema 31.

32. Para o circuito da Fig. 10.86:

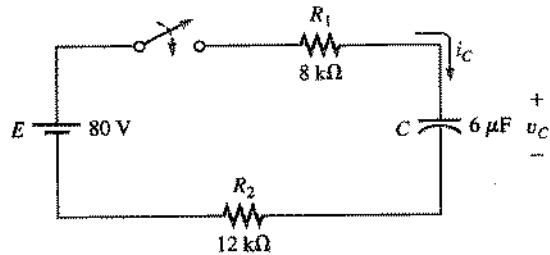


Fig. 10.86 Problema 32.

- Encontre o tempo necessário para v_C chegar a 60 V , após o fechamento da chave.
 - Calcule a corrente i_C no instante em que $v_C = 60 \text{ V}$.
 - Determine a potência fornecida pela fonte no instante $t = 2\tau$.
- *33. Para o circuito da Fig. 10.87:

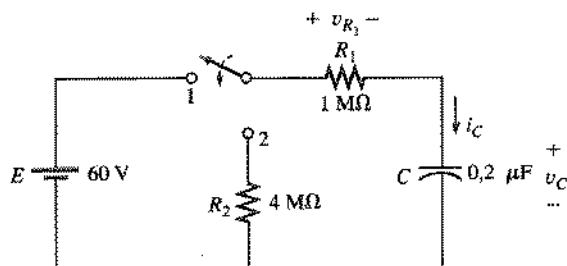


Fig. 10.87 Problema 33.

- a. Calcule v_C , i_C e v_R 0,5 s e 1 s após a chave ser colocada na posição 1.
 b. A chave fica na posição 1 durante 10 min e depois é colocada na posição 2. Quanto tempo, após a chave ser colocada na posição 2, irá passar até que a corrente i_C atinja o valor de $8 \mu\text{A}$? Quanto mais tempo irá passar até que a tensão v_C atinja o valor de 10 V?
 34. Para o sistema da Fig. 10.88, usando um multímetro digital com resistência interna de $10 \text{ M}\Omega$, no modo voltímetro:

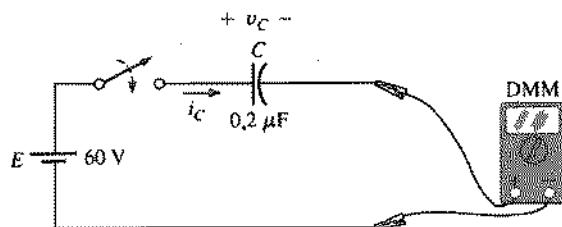


Fig. 10.88 Problema 34.

- a. Determine a leitura do voltímetro uma constante de tempo após a chave ser fechada.
 b. Encontre a corrente i_C 2 constantes de tempo após a chave ser fechada.
 c. Calcule o tempo que será necessário, após o fechamento da chave, para v_C atingir o valor de 50 V.

SEÇÃO 10.11 $\tau = R_{th}C$

35. Para o sistema da Fig. 10.89, usando um multímetro digital com uma resistência interna de $10 \text{ M}\Omega$, no modo voltímetro:

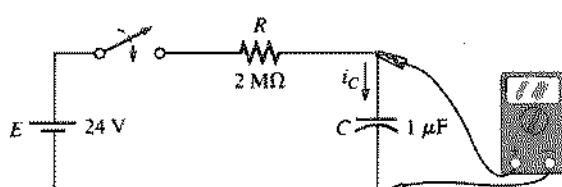


Fig. 10.89 Problema 35.

- a. Determine a leitura do voltímetro 4 constantes de tempo após a chave ser fechada.
 b. Encontre o tempo necessário para que i_C caia para $3 \mu\text{A}$.
 c. Encontre o tempo necessário, depois que a chave é fechada, para que a tensão entre os terminais do medidor atinja o valor de 10 V.

36. Para o circuito da Fig. 10.90:

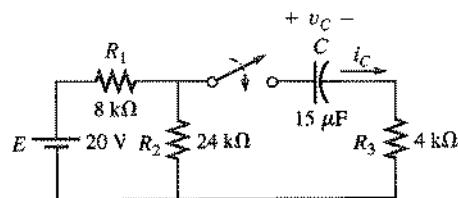


Fig. 10.90 Problema 36.

- a. Encontre expressões matemáticas para a tensão v_C e a corrente i_C depois que a chave é fechada.
 b. Esboce as formas de onda de v_C e i_C .
 *37. Repita o Problema 36 para o circuito da Fig. 10.91.

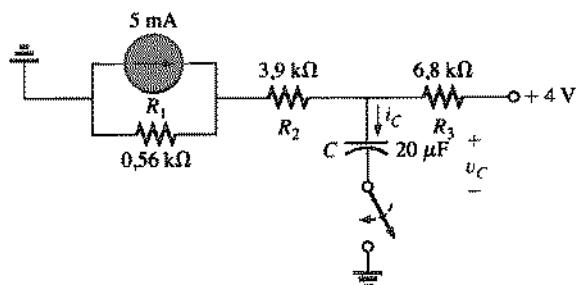


Fig. 10.91 Problemas 37 e 58.

38. O capacitor da Fig. 10.92 está carregado inicialmente com 4 V, com a polaridade indicada na figura.

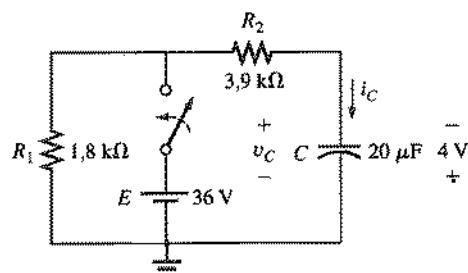


Fig. 10.92 Problema 38.

- a. Encontre expressões matemáticas para a tensão v_C e a corrente i_C depois que a chave é fechada.
 b. Esboce as formas de onda de v_C e i_C .
 39. O capacitor da Fig. 10.93 está carregado inicialmente com 2 V, com a polaridade indicada na figura.

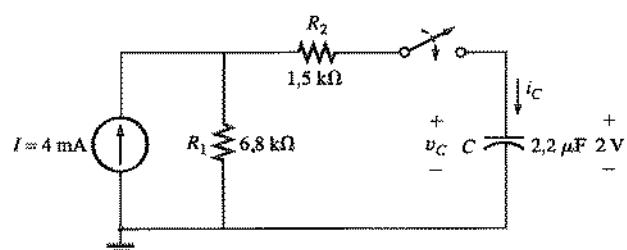


Fig. 10.93 Problema 39.

- a. Encontre expressões matemáticas para a tensão v_C e a corrente i_C quando a chave é fechada.
 b. Esboce as formas de onda de v_C e i_C .
 *40. O capacitor da Fig. 10.94 está carregado inicialmente com 3 V, com a polaridade indicada na figura.

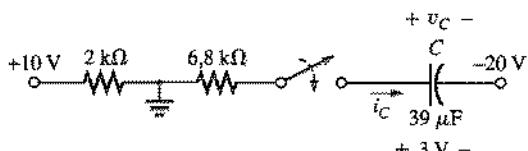


Fig. 10.94 Problema 40.

- a. Encontre expressões matemáticas para a tensão v_C e a corrente i_C quando a chave é fechada.
 b. Esboce as formas de onda de v_C e i_C .

SEÇÃO 10.12 A Corrente i_C

41. Encontre a forma de onda da corrente média, se a tensão entre os terminais de um capacitor de $0,06 \mu\text{F}$ for a que aparece na Fig. 10.95.

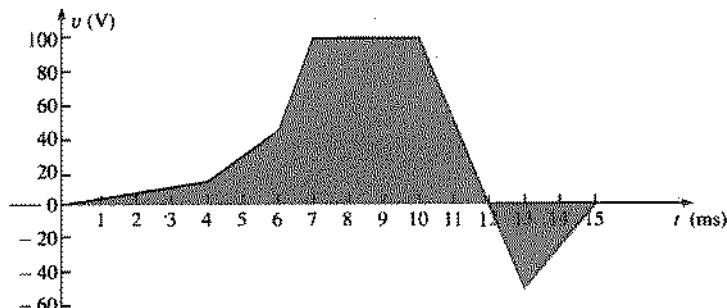


Fig. 10.95 Problema 41.

42. Repita o Problema 41 para a forma de onda da Fig. 10.96.

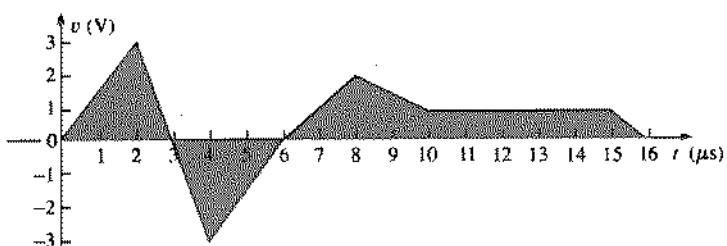


Fig. 10.96 Problema 42.

- *43. Dada a forma de onda da Fig. 10.97 para a corrente em um capacitor de $20 \mu\text{F}$, esboce a forma de onda da tensão v_C entre os terminais do capacitor se ela for igual a zero volt em $t = 0$.

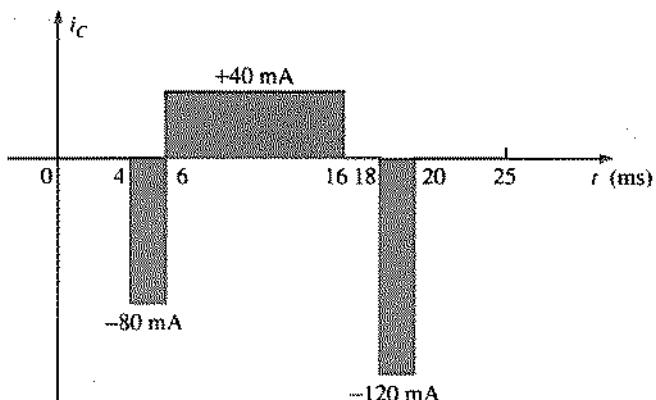


Fig. 10.97 Problema 43.

SEÇÃO 10.13 Capacitores em Série e em Paralelo

44. Encontre a capacitância total C_T entre os pontos a e b dos circuitos da Fig. 10.98.

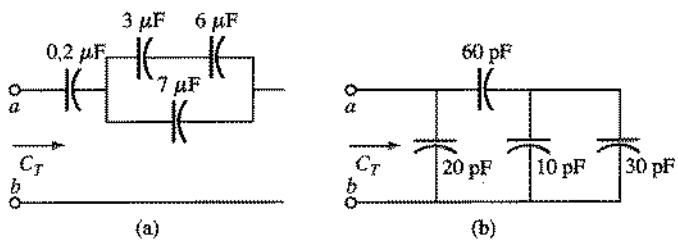


Fig. 10.98 Problema 44.

45. Encontre a ddp entre os terminais dos capacitores e sua carga para os circuitos da Fig. 10.99.

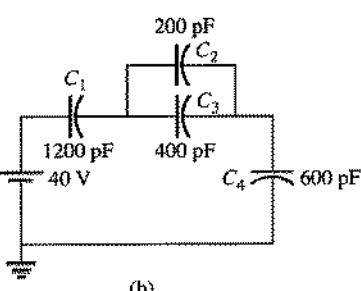
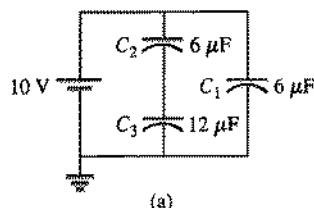
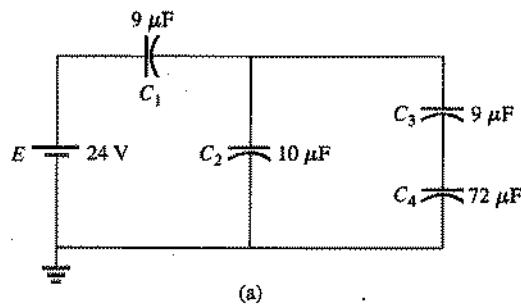
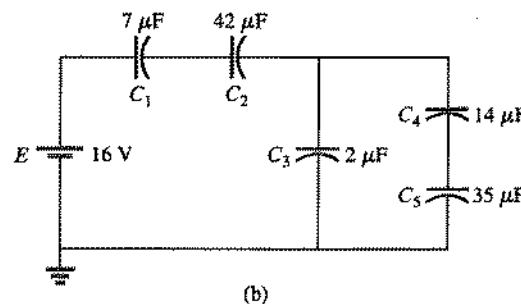


Fig. 10.99 Problema 45.

- *46. Determine, para os circuitos da Fig. 10.100, a tensão entre os terminais de cada capacitor e também a sua carga.



(a)



(b)

Fig. 10.100 Problema 46.

- *47. Sabendo que 100 ms se passaram desde que a chave do circuito da Fig. 10.101 foi colocada na posição 1, determine:

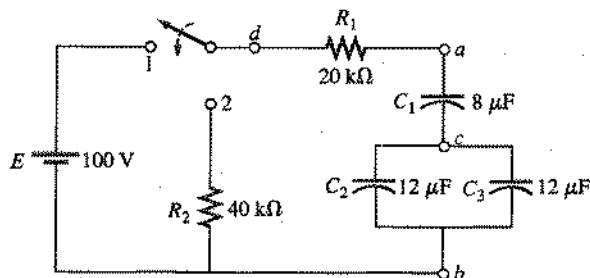
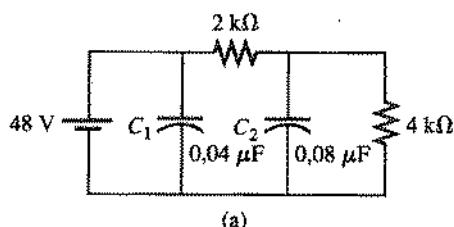
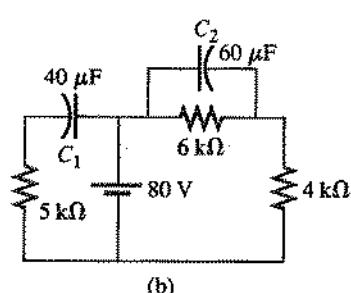


Fig. 10.101 Problema 47.

- a. V_{ab}
 - b. V_{ac}
 - c. V_{cb}
 - d. V_{da}
- e. Se a chave é colocada na posição 2 uma hora mais tarde, qual será o tempo necessário para que v_{R_1} caia para 20 V?
48. Encontre, para os circuitos da Fig. 10.102, a tensão entre os terminais de cada capacitor e suas cargas, após atingirem seu valor final.



(a)



(b)

Fig. 10.102 Problema 48.

SEÇÃO 10.14 Energia Armazenada em um Capacitor

49. Encontre a energia armazenada em um capacitor de 120 pF com 12 V entre suas placas.
50. Se a energia armazenada por um capacitor de 6 μF é 1200 J, encontre a carga Q em suas placas.
- *51. Um flash eletrônico utiliza um capacitor de 1000 μF que é carregado com 100 V.
- Qual é a energia armazenada no capacitor?
 - Qual é a carga do capacitor?
 - Quando o fotógrafo tira uma foto, o flash dispara por 1/2000 s. Qual é a corrente média na lâmpada?
 - Encontre a potência fornecida à lâmpada.
 - Depois que uma fotografia é tirada, o capacitor tem que ser recarregado por uma fonte que fornece uma corrente máxima de 10 mA. Quanto tempo o capacitor leva para ser recarregado?
52. Para o circuito da Fig. 10.103:

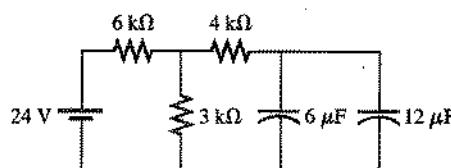


Fig. 10.103 Problema 52.

- Determine as energias armazenadas pelos capacitores no estadio estacionário.
- Repita a letra (a) para o caso de os capacitores serem ligados em série.

SEÇÃO 10.16 Análise Computacional

PSpice (DOS)

53. Escreva o arquivo de entrada para obter as formas de onda da Fig. 10.35 para o circuito da Fig. 10.34.
54. Escreva o arquivo de entrada para obter as formas de onda de v_C e i_C para o circuito da Fig. 10.43, se a chave for colocada na posição 1 em $t = 0$ s.
- *55. Escreva o arquivo de entrada para obter as formas de onda de v_C e i_C para o circuito da Fig. 10.50, se a chave for colocada na posição 1 em $t = 0$ s.

PSpice (Windows)

56. Usando esquemas:
- Obtenha as formas de onda de v_C e i_C em função do tempo para o circuito da Fig. 10.34.

- b. Obtenha a curva de potência (representando a energia armazenada pelo capacitor durante o mesmo intervalo de tempo) e compare-a com o gráfico da Fig. 10.68.
- *57. Obtenha, usando esquemas, as formas de onda de v_C e i_C em função do tempo para o circuito da Fig. 10.48, usando a opção IC.
58. Verifique a solução do Problema 37, usando esquemas.

Linguagens de Programação (C++, BASIC, PASCAL etc.)

59. Escreva um programa em BASIC para preparar uma tabela de valores da tensão v_C e da corrente i_C para o circuito da Fig. 10.43 até

GLOSSÁRIO

Capacitância Medida da quantidade de carga que um capacitor pode armazenar em suas placas. A unidade de capacitância é o farad (F).

Capacitâncias parasitas Capacitâncias que não são introduzidas deliberadamente em um circuito.

Capacitor Componente elétrico com duas placas condutoras separadas por um material isolante e com a capacidade de armazenar carga nessas placas.

Constante de tempo capacitiva Produto da resistência pela capacitância de um circuito usado para determinar a duração de um transiente capacitivo.

Constante dielétrica O mesmo que *permisividade relativa*.

Corrente de fuga Pequena corrente que sempre está presente no dielétrico de capacitores reais e que descarrega o capacitor se este ficar desconectado da bateria por um tempo suficientemente longo.

Dielétrico Nome genérico dado aos materiais isolantes. Quando inserido entre as placas de um capacitor, um dielétrico pode afetar consideravelmente a quantidade de carga armazenada nas placas.

Efeito de borda Deformação das linhas de campo próximo às bordas de placas carregadas, como as de um capacitor.

Intensidade de campo elétrico Força de origem elétrica que age em uma carga unitária positiva em uma dada região do espaço.

cinco constantes de tempo após a chave ser colocada na posição 1 em $t = 0$ s. Use um incremento de $(1/5)\tau$.

*60. Escreva um programa para calcular a tensão v_C no circuito da Fig. 10.50, depois que a chave é colocada na posição 1, quaisquer que sejam os valores dos componentes do circuito.

*61. Dados três capacitores em qualquer configuração série-paralelo, escreva um programa para determinar a capacidade total; em outras palavras, determine o número total de possibilidades, peça ao usuário para definir a configuração e fornecer os valores das capacidades e use esses dados para calcular a capacidade total.

Lei de Coulomb Expressão que permite calcular a força entre duas cargas.

Linhas de campo Linhas utilizadas para representar graficamente a intensidade e o sentido de um campo elétrico em uma região particular do espaço.

Permissividade Medida da facilidade com que um dielétrico *permite* o estabelecimento de linhas de campo no seu interior.

Permissividade relativa Razão entre a permissividade de um material e a permissividade do vácuo.

Rigidez dielétrica A intensidade máxima de campo elétrico a que pode ser submetido um dielétrico sem que ele se torne um condutor.

Tensão de pico Tensão máxima que pode ser aplicada a um capacitor por um período muito curto de tempo.

Tensão de ruptura O mesmo que *rigidez dielétrica*.

Tensão de trabalho Tensão que pode ser aplicada a um capacitor por longos períodos de tempo sem que haja risco de uma ruptura do dielétrico.

TRAN Comando do PSpice para especificar uma análise transitória.

Transiente capacitivo Variação da tensão e da corrente em um circuito capacitivo durante as fases de carga e descarga.

TSTEP Variável do PSpice para especificar o intervalo entre os valores a serem determinados.

TSTOP Variável do PSpice para especificar o valor final para o qual uma função será calculada.

Circuitos Magnéticos

11.1 INTRODUÇÃO

O magnetismo desempenha um papel importante em quase toda a aparelhagem elétrica utilizada hoje em dia, seja ela industrial, domiciliar ou de pesquisa. Os geradores, motores elétricos, transformadores, disjuntores, aparelhos de televisão, computadores, gravadores e telefones empregam efeitos magnéticos para realizar uma grande variedade de tarefas.

A bússola, utilizada pelos marinheiros chineses já no século II d.C., usa um ímã permanente (uma agulha magnetizada) para indicar a localização do polo norte terrestre. Os ímãs permanentes são feitos de materiais, como o ferro, que permanecem magnetizados por longos períodos de tempo sem necessidade de uma fonte externa de energia.

Em 1820, o físico dinamarquês Hans Christian Oersted descobriu que o ponteiro de uma bússola muda de orientação quando é colocado nas proximidades de um fio percorrido por corrente. Esta foi a primeira evidência experimental de uma relação entre a eletricidade e o magnetismo; no mesmo ano, o físico francês André-Marie Ampère realizou experiências neste campo e formulou uma lei que hoje é conhecida como *lei de Ampère para circuitos magnéticos*. Nos anos subsequentes, Michael Faraday, Karl Friedrich Gauss e James Clerk Maxwell deram continuidade às pesquisas nesta área e estabeleceram os conceitos básicos do *eletromagnetismo* — o estudo das interações recíprocas entre campos elétricos e magnéticos e suas fontes.

A análise dos circuitos magnéticos é muito semelhante à análise dos circuitos elétricos. Isto ficará evidente mais adiante quando compararmos os métodos e equações básicas usados para analisar circuitos magnéticos com os usados para analisar circuitos elétricos.

As dificuldades para compreender os métodos de análise de circuitos magnéticos muitas vezes são causadas, não pelas equações em si, mas pelo uso de unidades incompatíveis para as diversas grandezas. Este problema é causado pelo fato de três sistemas de unidades estarem ainda em uso na indústria. Neste capítulo utilizaremos, sempre que possível, o sistema SI. O leitor interessado no sistema CGS e/ou no sistema inglês encontrará uma tabela de conversão no Apêndice G.

11.2 CAMPOS MAGNÉTICOS

Na região do espaço em torno de um ímã permanente existe um campo magnético, que pode ser representado por linhas de campo semelhantes às linhas de campo associadas a um campo elétrico. Entretanto, como vemos na Fig. 11.1, as linhas de campo magnético não começam e terminam em cargas, como as linhas elétricas, mas formam curvas fechadas.

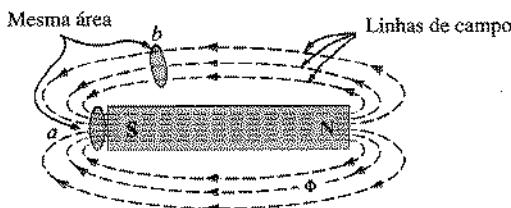


Fig. 11.1 Linhas de campo magnético para um ímã permanente.

Em uma barra magnetizada, as linhas de campo se dirigem do polo norte para o polo sul no exterior da barra e do polo sul para o polo norte no interior da barra. Observe na Fig. 11.1 que as linhas de campo estão igualmente espaçadas no interior da barra e estão distribuídas simetricamente no exterior da barra. Essas são propriedades adicionais exibidas pelas linhas magnéticas de campo em materiais homogêneos (isto é, materiais cuja composição é uniforme). É importante também chamar a atenção para o fato de que as linhas de campo magnético procuram ocupar a menor área possível. Isto faz com que as linhas de campo entre pólos de tipos diferentes se aproximem de linhas retas, como na Fig. 11.2. A intensidade do campo magnético em uma dada região é diretamente proporcional à densidade de linhas de campo nessa região. Na Fig. 11.1, por exemplo, a intensidade do campo magnético em *a* é o dobro da intensidade em *b*, pois o número de linhas de campo que atravessam uma área perpendicular a estas linhas em *a* é o dobro do número de linhas que atravessam uma área semelhante em *b*. Se você já realizou experimentos com ímãs (ou brincou com eles na infância), deve se lembrar de que os ímãs permanentes são sempre mais fortes perto dos pólos.

Se aproximarmos pólos opostos de dois ímãs permanentes, eles se atraíram, e a distribuição de linhas de campo será como na

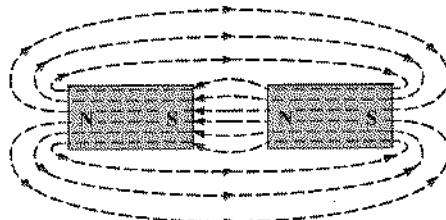


Fig. 11.2 Linhas de campo magnético para um sistema de dois ímãs com pólos opostos adjacentes.

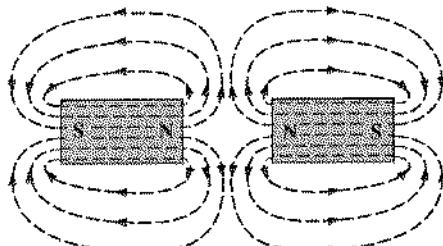


Fig. 11.3 Linhas de campo magnético para um sistema de dois ímãs com pólos iguais.

Fig. 11.2. Se aproximarmos pólos do mesmo tipo, eles se repelirão, e a distribuição de linhas de campo será como na Fig. 11.3.

Se colocarmos um material não-magnético (vidro ou cobre, por exemplo) nas proximidades de um ímã permanente, a distribuição de linhas de campo sofrerá uma alteração quase imperceptível. Caso, porém, um material magnético, como ferro doce, seja colocado nas proximidades do ímã, as linhas de campo tenderão a passar pelo ferro, e não pelo ar. Uma das aplicações práticas deste fenômeno é a construção de blindagens magnéticas para proteger componentes e instrumentos elétricos sensíveis da ação de campos magnéticos espúrios (Fig. 11.5).

Como já dissemos na introdução, existe um campo magnético (representado por linhas de campo circulares na Fig. 11.6) em torno de qualquer fio percorrido por corrente. Para determinar a direção e sentido das linhas de campo, basta colocar o polegar da mão direita ao longo do sentido *convencional* da corrente e observar a posição dos outros dedos. (Este método é chamado de *regra da mão direita*.) Se o condutor for dobrado para formar uma espira (Fig. 11.7), as linhas de campo terão a mesma direção e sentido no centro da espira e o campo magnético nessa região ficará mais intenso (Fig. 11.7).

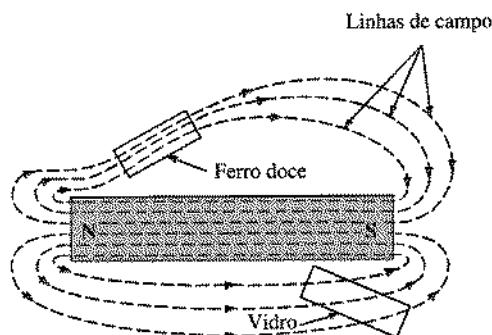


Fig. 11.4 Efeito de uma amostra de material ferromagnético sobre as linhas de campo de um ímã permanente.

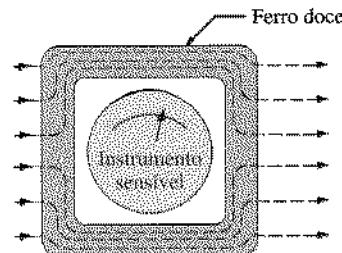


Fig. 11.5 Efeito de uma blindagem magnética sobre as linhas de campo.

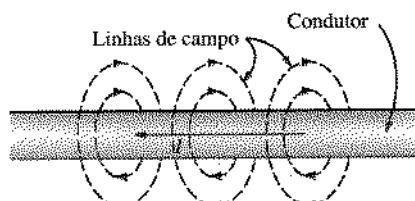


Fig. 11.6 Linhas de campo nas proximidades de um condutor percorrido por corrente.

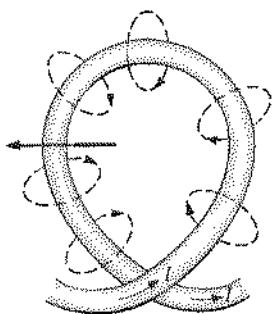


Fig. 11.7 Linhas de campo em uma espira percorrida por corrente.

Um enrolamento com várias espiras produzirá um campo magnético como o que aparece na Fig. 11.8.

Observe que as linhas de campo da Fig. 11.8 são bastante semelhantes às de um ímã permanente (Fig. 11.1). A extremidade esquerda do enrolamento (de onde saem as linhas de campo) e a extremidade direita (onde entram as linhas de campo) são análogas ao pólo norte e ao pólo sul do ímã, respectivamente. A diferença mais evidente entre os dois casos está na densidade de linhas de campo, muito maior no caso do ímã permanente. Assim, o campo gerado pelo enrolamento da Fig. 11.8 é mais fraco do que o gerado pelo ímã permanente na Fig. 11.1. Podemos aumentar a intensidade do campo magnético inserindo um núcleo de material ferromagnético (ferro, aço ou cobalto, por exemplo) no interior do enrolamento para concentrar as linhas de campo. Ao introduzirmos um núcleo para aumentar a intensidade do campo magnético, criamos um *eletroímã* (Fig. 11.9), que, além de apresentar todas as propriedades de um ímã permanente, produz um campo magnético cuja intensidade pode ser modificada alterando-se um dos seus parâmetros (corrente, número de espiras etc.). Naturalmente, um eletroímã necessita de uma fonte de energia para produzir o campo mag-

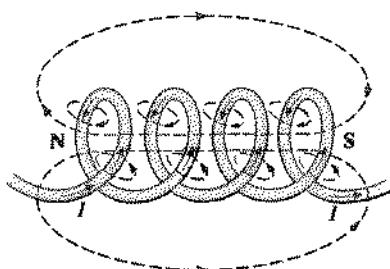


Fig. 11.8 Linhas de campo em uma bobina percorrida por corrente.

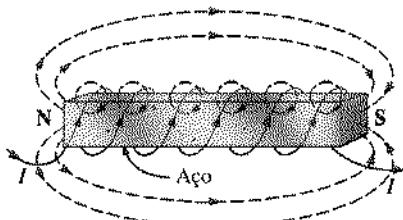
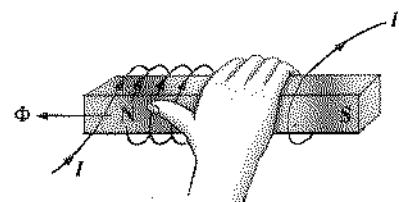
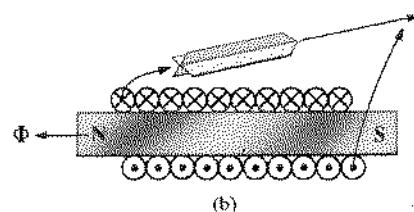


Fig. 11.9 Eletroímã.



(a)



(b)

Fig. 11.10 Determinação do sentido das linhas de campo no interior de um eletroímã: (a) método, (b) notação.

nético, enquanto essa necessidade não existe no caso dos ímãs permanentes. Para determinar a direção e o sentido das linhas de campo magnético produzidas por um eletroímã (ou por qualquer fio enrolado em um núcleo), basta colocar os dedos da mão direita na direção e sentido convencional da corrente. O polegar da mão direita apontará para o pólo norte do eletroímã, como na Fig. 11.10(a). A Fig. 11.10(b) mostra um corte transversal do mesmo eletroímã. Neste caso, o sentido da corrente é indicado por uma convenção especial. Imaginando uma seta como a que aparece na parte superior da figura, o ponto e a cruz representam a ponta e a extremidade posterior, respectivamente. Em outras palavras, o ponto simboliza uma corrente “saindo” do papel, e a cruz, uma corrente “entrando” no papel.

Outras aplicações dos campos magnéticos aparecem na Fig. 11.11.

11.3 DENSIDADE DE FLUXO MAGNÉTICO

No sistema SI de unidades, o fluxo magnético é medido em *webers*, em homenagem ao cientista alemão Wilhelm Eduard Weber (veja a Fig. 11.12), e representado pelo símbolo Φ . O número de linhas de campo por unidade de área é chamado de *densidade de fluxo magnético*, representado pela letra B e medido em *teslas*, em homenagem ao cientista croata Nikola Tesla (veja a Fig. 11.15). Sua intensidade é determinada pela seguinte equação:

$$B = \frac{\Phi}{A}$$

$$\begin{aligned} B &= \text{teslas (T)} \\ \Phi &= \text{webers (Wb)} \\ A &= \text{metros quadrados (m}^2\text{)} \end{aligned} \quad (11.1)$$

onde Φ é o número de linhas de campo que atravessam a superfície A (Fig. 11.13). No caso da Fig. 11.1, a densidade de fluxo é duas vezes maior em a do que em b , pois em a temos duas vezes mais linhas de campo atravessando a mesma área.

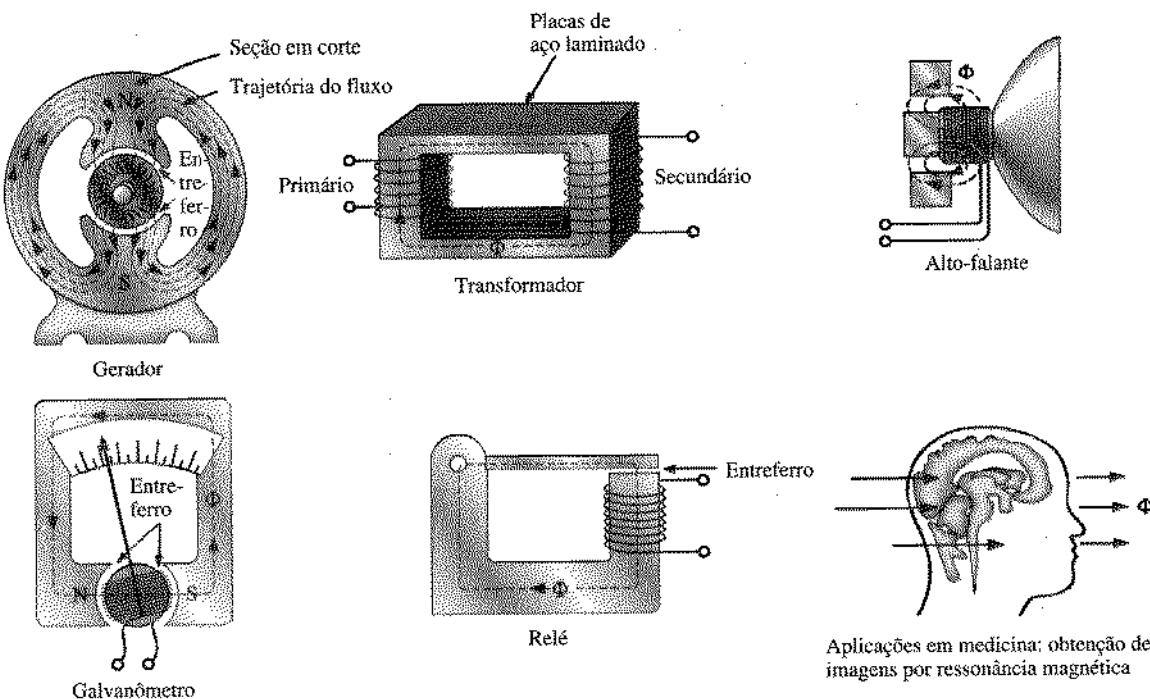


Fig. 11.11 Algumas aplicações de efeitos magnéticos.

Por definição,

$$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2$$

EXEMPLO 11.1 Determine, para a peça da Fig. 11.14, a densidade de fluxo B em teslas.

Solução:

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{6 \times 10^{-5} \text{ Wb}}{1,2 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = 5 \times 10^{-2} \text{ T}$$

EXEMPLO 11.2 Suponha que, na Fig. 11.14, a densidade de fluxo é 1,2 T e a área da seção reta é 0,25 pol². Determine o fluxo magnético no interior da peça.

Solução: De acordo com a Eq. (11.1),

$$\Phi = BA$$

Convertendo 0,25 pol² em m²,

$$A = 0,25 \text{ pol}^2 \left(\frac{1 \text{ m}}{39,37 \text{ pol}} \right) \left(\frac{1 \text{ m}}{39,37 \text{ pol}} \right) = 1,613 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

c

$$\begin{aligned} \Phi &= (1,2 \text{ T})(1,613 \times 10^{-4} \text{ m}^2) \\ &= 1,936 \times 10^{-4} \text{ Wb} \end{aligned}$$

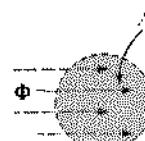


Alemão (Wittenburg, Göttingen)
(1804-1891)

Físico
Professor de física,
Universidade de
Göttingen

Cortesia da
Smithsonian Institution.
Foto n.º 52604.

Fig. 11.12 Wilhelm Eduard Weber.

Fig. 11.13 Definição da densidade de fluxo B .

$$\begin{aligned} \Phi &= 6 \times 10^{-5} \text{ Wb} \\ A &= 1,2 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Fig. 11.14 Exemplo 11.1.



Croata-americano
(Smiljan, Paris, Colorado Springs, Cidade de Nova York)
(1856-1943)
Engenheiro eletricista e inventor
Recebeu a Medalha Edison em 1917

Cortesia da Smithsonian Institution,
Foto n.º 52223.

Fig. 11.15 Nikola Tesla.

A Fig. 11.16 mostra um modelo de gaussímetro, instrumento que mede a densidade de fluxo magnético em gauss (unidade do sistema CGS). De acordo com o Apêndice G, $1 \text{ T} = 10^4 \text{ gauss}$. O valor indicado pelo instrumento na foto da Fig. 11.16 corresponde, portanto, no sistema SI, a

$$1,964 \text{ gauss} \left(\frac{1 \text{ T}}{10^4 \text{ gauss}} \right) = 1,964 \times 10^{-4} \text{ T}$$

11.4 PERMEABILIDADE MAGNÉTICA

Se núcleos com as mesmas dimensões mas feitos de diferentes materiais forem introduzidos em um eletroimã como o que foi descrito na Seção 11.2, a força do ímã variará de acordo com o material usado. Essa variação se deve ao fato de que um número maior ou menor de linhas de campo atravessa o núcleo. Dizemos que os materiais através dos quais podemos estabelecer um fluxo magnético intenso e com relativa facilidade são *magnéticos* e possuem uma elevada *permeabilidade magnética*. A permeabilidade do vácuo, μ_0 , é definida por

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

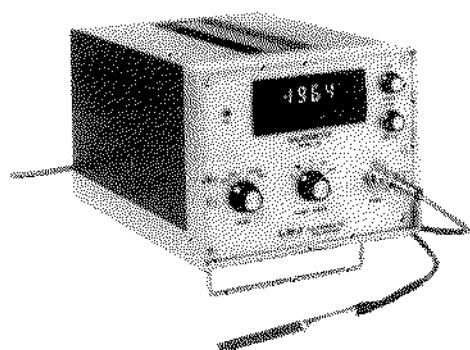


Fig. 11.16 Gaussímetro digital. (Cortesia da LDJ Electronics, Inc.)

Nikola Tesla é freqüentemente lembrado como uma das pessoas mais inventivas e inovadoras da história da ciência. Inventou o *motor de corrente alternada*, que elimina a necessidade das barras de comutação do motor de corrente contínua. Após emigrar para os Estados Unidos em 1884, vendeu algumas de suas patentes de *motores de corrente alternada, transformadores e bobinas de indução* (incluindo a *bobina Tesla*, como é conhecida hoje em dia) à Westinghouse Electric Company. Alguns historiadores afirmam que sua descoberta mais importante foi feita em seu laboratório em Colorado Springs, onde em 1900 descobriu as *ondas estacionárias terrestres* [transmissão de sinal eletromagnético através da terra]. A lista de suas descobertas e invenções é muito extensa para ser reproduzida nesta nota, estendendo-se de sistemas de iluminação a sistemas de alimentação polifásicos e sistemas de comunicação por rádio a grandes distâncias.

Preste atenção à unidade de μ na expressão acima, Wb/A.m. Na prática, a permeabilidade magnética de todos os materiais que não são magnéticos, como por exemplo o cobre, o alumínio, a madeira, o vidro e o ar, é praticamente igual à do vácuo. Materiais com permeabilidade menor do que μ_0 recebem o nome de *diamagnéticos*, enquanto aqueles com permeabilidade ligeiramente maior do que μ_0 são chamados de *paramagnéticos*. Materiais magnéticos como o ferro, o níquel, o cobalto, o aço e certas ligas e compostos têm uma permeabilidade magnética centenas ou mesmo milhares de vezes maior que a do vácuo.

A razão entre a permeabilidade magnética de um material e a permeabilidade do vácuo é chamada de *permeabilidade relativa*:

$$\frac{\mu}{\mu_0} \quad (11.2)$$

Para a maioria dos materiais magnéticos $\mu_r \geq 100$; para os outros materiais, podemos tomar $\mu_r = 1$.

Como μ_r depende de outras variáveis do circuito magnético, seus valores não podem ser tabelados como os σ (vide Cap. 10). Métodos para calcular μ_r a partir de dados fornecidos pelos fabricantes serão discutidos mais tarde.

11.5 RELUTÂNCIA

A resistência de um material ao escoamento de cargas (corrente) é dada pela equação

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (\text{ohms, } \Omega)$$

A *relutância* de um material à tentativa de estabelecer um fluxo magnético no seu interior é dada pela expressão:

$$\frac{\mathcal{R}}{\mu A} \quad (\text{rels, ou A/Wb}) \quad (11.3)$$

onde \mathcal{R} é a relutância, l é o comprimento do caminho magnético e A é a área da seção reta. Na próxima seção voltaremos a falar a respeito do número de ampères-espiras (NA). Note que tanto a resistência quanto a relutância são inversamente proporcionais à área da seção reta e portanto um aumento da área resulta em uma redução de R ou de \mathcal{R} e portanto em um *aumento* da corrente ou do fluxo magnético. No caso de um aumento na dimensão l , acontece o oposto. Observe, no entanto, que a relutância é inversamente proporcional à permeabilidade magnética, enquanto a resistência é diretamente proporcional à resistividade. Materiais de alta permeabilidade, como os ferromagnéticos, apresentam relutâncias muito pequenas e valores elevados de fluxo magnético. Não existe uma unidade oficial para a relutância no sistema SI; as mais usadas em geral são o *rel* e o *A/Wb*.

11.6 O EQUIVALENTE DA DEFINIÇÃO DE RESISTÊNCIA PARA CIRCUITOS MAGNÉTICOS

Lembre-se da expressão

$$\text{Efeito} = \frac{\text{causa}}{\text{oposição}}$$

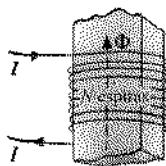


Fig. 11.17 Fatores que contribuem para a força magnetomotriz.

que apareceu no Cap. 4 quando introduzimos a lei de Ohm e a definição de resistência para circuitos elétricos. No caso dos circuitos magnéticos, o efeito desejado é o fluxo magnético no material, Φ . A causa é a *força magnetomotriz* \mathcal{F} , que representa a influência externa necessária para estabelecer um fluxo magnético no interior do material. A propriedade que se opõe à criação do fluxo magnético Φ é a *relutância* R .

Podemos portanto escrever

$$\boxed{\Phi = \frac{\mathcal{F}}{R}} \quad (11.4)$$

A força magnetomotriz \mathcal{F} é proporcional ao produto do número de espiras em torno do núcleo (no interior do qual desejamos estabelecer o fluxo magnético) pela intensidade da corrente que atravessa o enrolamento (Fig. 11.17). Assim, temos:

$$\boxed{\mathcal{F} = NI} \quad (\text{ampères, A}) \quad (11.5)$$

As Eqs. (11.4) e (11.5) mostram que um aumento no número de espiras ou da intensidade da corrente no enrolamento provoca um aumento do fluxo magnético no núcleo.

Embora existam muitas semelhanças entre os circuitos elétricos e os magnéticos, é preciso não esquecer que o fluxo magnético Φ não está associado ao movimento de cargas, como a corrente em um circuito elétrico. O fluxo magnético é estabelecido no núcleo graças a alterações na estrutura atômica do material, que são causadas pelo campo magnético produzido pela corrente no enrolamento.

11.7 FORÇA MAGNETIZANTE*

A força magnetomotriz por unidade de comprimento é chamada de *força magnetizante* (H). Assim,

$$\boxed{H = \frac{\mathcal{F}}{l}} \quad (\text{A/m}) \quad (11.6)$$

Substituindo \mathcal{F} pelo seu valor, dado pela Eq. (11.5), temos:

$$\boxed{H = \frac{NI}{l}} \quad (\text{A/m}) \quad (11.7)$$

*Nos textos clássicos de física básica e de teoria eletromagnética, esta grandeza é denominada *intensidade de campo magnético* H , enquanto o campo B é chamado de *indução magnética*. Em textos mais recentes, os fenômenos magnéticos são analisados exclusivamente em termos do campo B , que é chamado simplesmente de *campo magnético*. Veja, por exemplo, D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física* (LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1996), Vol. 3, Cap. 30. (N. do T.)

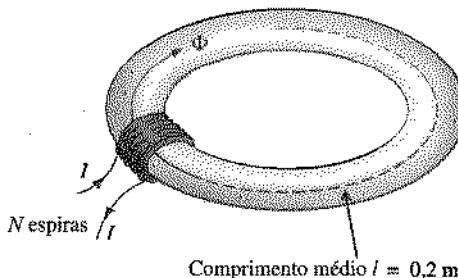


Fig. 11.18 Definição da força magnetizante de um circuito magnético.

No caso do circuito magnético da Fig. 11.18, com $NI = 40$ NA e $l = 0,2$ m, temos:

$$H = \frac{NI}{l} = \frac{40 \text{ A}}{0,2 \text{ m}} = 200 \text{ A/m}$$

Este resultado mostra que a “pressão” para estabelecer um fluxo magnético no núcleo é de 200 NA/m.

Observe na Fig. 11.18 que a direção e o sentido do campo magnético responsável pelo fluxo Φ podem ser determinados fechando-se os dedos da mão direita em torno do enrolamento, no sentido da corrente. O campo magnético terá a direção e o sentido do polegar. É interessante notar que a *força magnetizante é independente do material de que é feito o núcleo* — ela é função apenas do número de espiras, da intensidade da corrente e do comprimento do núcleo.

A permeabilidade de um material magnético depende fortemente da força magnetizante aplicada ao material. À medida que H aumenta, a permeabilidade passa por um máximo e depois cai para valores muito pequenos, como vemos na Fig. 11.19 para três materiais magnéticos muito usados na prática.

A densidade de fluxo e a força magnetizante estão relacionadas através da seguinte equação:

$$\boxed{B = \mu H} \quad (11.8)$$

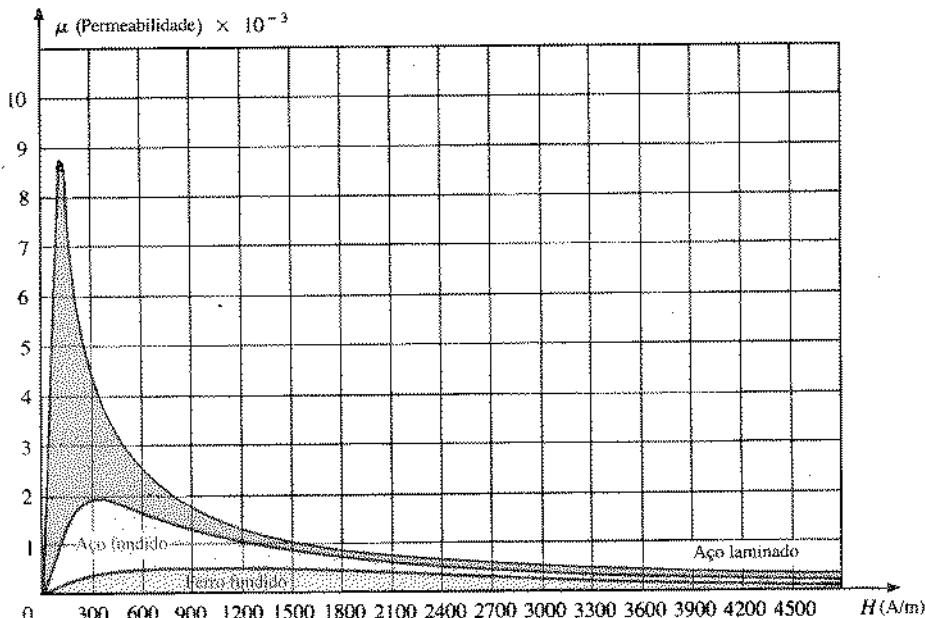
Esta expressão nos mostra que, para um valor particular da força magnetizante, quanto maior a permeabilidade, maior o valor da densidade de fluxo induzida no material.

Como o henry (unidade de indutância que será definida no Cap. 12) e a força magnetizante são representados pela mesma letra maiúscula, chamamos a atenção para o fato de que neste texto as unidades de medida, como o henry (H), aparecem em tipo redondo, enquanto grandezas como a força magnetizante (H) aparecem em itálico.

11.8 HISTERESE

Gráficos da densidade de fluxo B em função da força magnetizante H aplicada a um material são muito usados pelos engenheiros. Curvas desse tipo são encontradas em manuais e folhetos distribuídos pelos fabricantes de materiais magnéticos. Podemos obter a curva B - H de um material ferromagnético como o aço utilizando o arranjo experimental ilustrado na Fig. 11.20.

Inicialmente o núcleo não está magnetizado e a corrente no enrolamento é nula. Quando a corrente no enrolamento aumenta

Fig. 11.19 Variação de μ com a força magnetizante.

de 0 para I , a força magnetizante aumenta de 0 para um valor dado por

$$H \uparrow = \frac{NI \uparrow}{l}$$

O fluxo Φ e a densidade de fluxo $B = \Phi/A$ também aumentam à medida que I e H aumentam. Se o material não possui nenhum magnetismo residual e H aumenta de zero para um certo valor H_s , a curva de B em função de H descreve a trajetória de a até a na Fig. 11.21.

Se continuamos a aumentar a força magnetizante H até o valor de saturação H_s , a curva descreve a trajetória de a até b . Quando ocorre a saturação, a densidade de fluxo, *para todos os efeitos práticos*, deixa de aumentar. A novos aumentos da força magnetizante H , conseguidos por exemplo aumentando a corrente no enrolamento, correspondem aumentos insignificantes da densidade de fluxo B .

Se agora reduzimos a força magnetizante a zero, diminuindo gradualmente o valor da corrente no enrolamento, a curva segue a trajetória de b até c . No ponto c , existe uma densidade de fluxo diferente de zero no material, embora a força magnetizante seja nula. Esta densidade de fluxo, B_R , é chamada de *densidade de fluxo remanente*. É ela que torna possível a existência de ímãs permanentes. Se removermos o enrolamento no momento em que

o núcleo se encontrar nas condições representadas pelo ponto c da Fig. 11.21, este exibirá permanentemente uma densidade de fluxo B_R . Se o sentido da corrente I for invertido, causando o aparecimento de uma força magnetizante $-H$, o campo B diminuirá à medida que a intensidade de I aumentar. A densidade de fluxo atingirá o valor zero quando H tiver o valor $-H_d$ (trecho da curva entre c e d). A força magnetizante $-H_d$ necessária para anular a densidade de fluxo é denominada *força coerciva*. Se aumentarmos o módulo de $-H$ até atingir novamente a saturação e depois invertermos seu sentido até atingir novamente o valor zero, a curva descreverá a trajetória def . Se aumentarmos o valor da força magnetizante no sentido positivo ($+H$), a curva descreverá a trajetória de f até b . A curva completa, representada pela trajetória $bcdefb$, é denominada *curva de histerese* do material magnético; o termo vem do grego *hysterein*, que significa “estar atrasado”. Em uma curva de histerese como a da Fig. 11.21, a densidade de fluxo B está sempre *atrasada* em relação à força magnetizante H . Quando H era nula, em c , B não era nula, mas estava apenas começando a diminuir de valor. B só atinge o valor zero muito depois de H ter passado pelo mesmo valor e alcançado o valor $-H_d$.

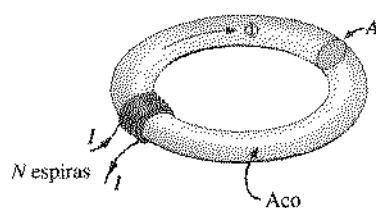


Fig. 11.20 Circuito magnético em série utilizado para obter a curva de histerese.

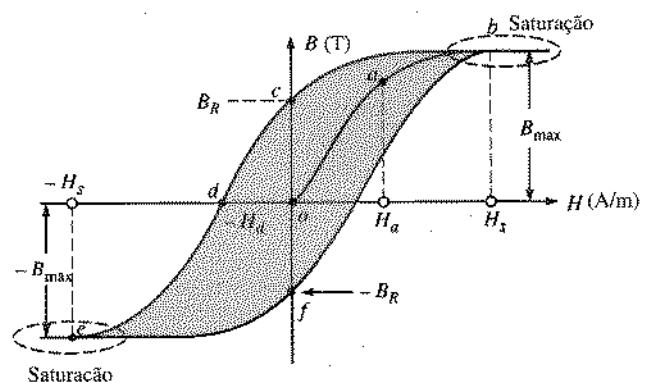


Fig. 11.21 Curva de histerese.

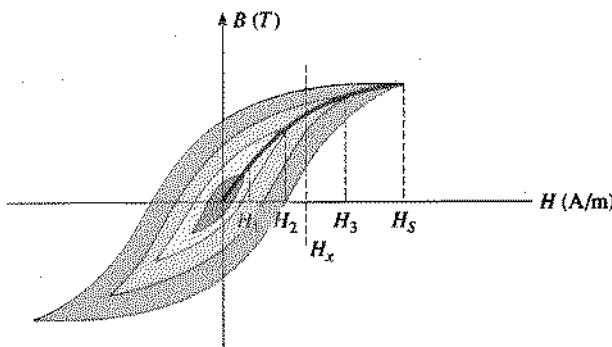


Fig. 11.22 Curva normal de magnetização.

Se repetirmos o experimento com o mesmo material mas a força magnetizante máxima aplicada, H_{max} , for menor do que o valor de saturação H_s , a curva terá a mesma forma que a da Fig. 11.21, mas seus valores extremos dependerão do valor de H_{max} usado no experimento. A Fig. 11.22 mostra os ciclos de histerese obtidos para três valores diferentes de H_{max} (H_1 , H_2 e H_3), todos menores do que o valor de saturação H_s . A curva de saturação foi incluída para facilitar a comparação.

É importante observar, a partir das várias curvas, que para um dado valor de H , por exemplo H_x , o campo B pode assumir diferentes valores, dependendo da história do núcleo. Podemos, em um esforço para tornar unívoca a relação entre B e H , conectar as extremidades dos laços de histerese. A curva resultante, representada como uma linha mais grossa na Fig. 11.22 e apresenta-

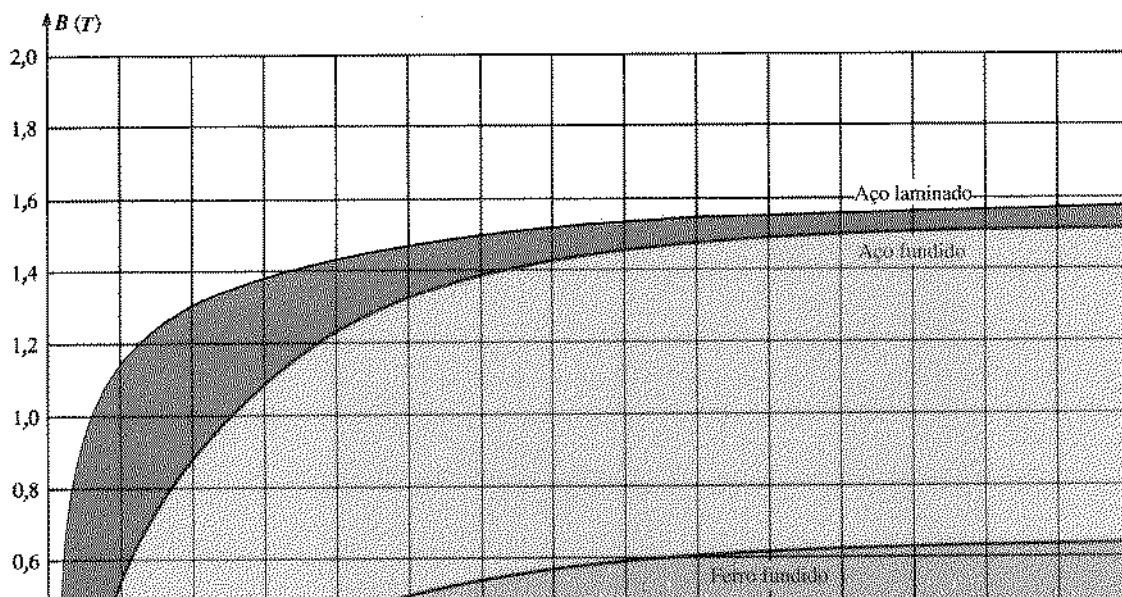
da para alguns materiais na Fig. 11.23, é denominada *curva normal de magnetização*. A Fig. 11.24 apresenta uma visão ampliada de um trecho da curva da Fig. 11.22.

Comparando as Figs. 11.19 e 11.23 vemos que, para o mesmo valor de H , o valor de B é maior em materiais que apresentam maiores valores de μ . Isto é particularmente visível para pequenos valores de H . Esta correspondência entre os resultados expressos pelas duas curvas já era de se esperar, pois $B = \mu H$. De fato, se calcularmos μ para vários valores de H , utilizando a Fig. 11.23 e a relação $\mu = B/H$, obteremos as curvas da Fig. 11.19. Na Fig. 11.25 vemos um aparelho que fornece o gráfico $B-H$ para uma amostra de material magnético.

É interessante notar que as curvas de histerese da Fig. 11.22 apresentam *simetria pontual* em relação à origem. Em outras palavras, se substituirmos H e B por $-B$ na parte da curva à esquerda do eixo vertical, reproduziremos a parte da curva que aparece à direita do mesmo eixo. Além disso, a aplicação da mesma seqüência de valores de H à mesma amostra resultará sempre no mesmo gráfico.

Se a corrente I oscilar entre valores extremos positivos e negativos a uma taxa constante, como no caso dos circuitos de corrente alternada que estudaremos em capítulos posteriores, o comportamento de B em função de H será o mesmo em cada ciclo. (Lembre-se de que $H = NI/l$.) A inversão do fluxo magnético no interior do material cada vez que a corrente troca de sentido causa uma dissipação de energia que pode ser mais bem compreendida com o auxílio da *teoria dos domínios*.

Os elétrons, que, como vimos no Cap. 2, estão presentes em todas as substâncias, apresentam uma propriedade chamada spin que faz com que se comportem como pequenos ímãs. Nos mate-



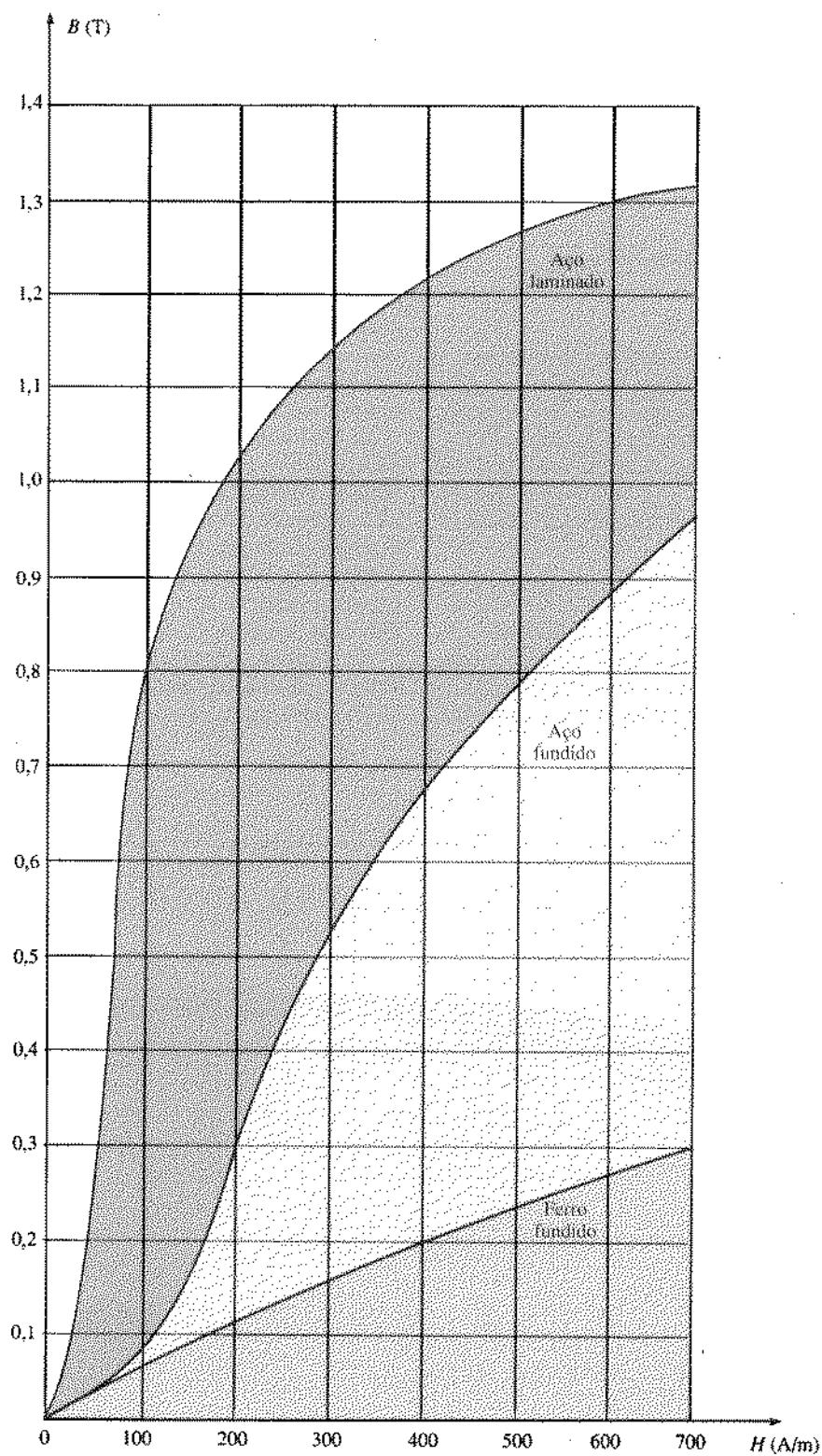


Fig. 11.24 Ampliação da Fig. 11.23 na região de baixas forças magnetizantes.

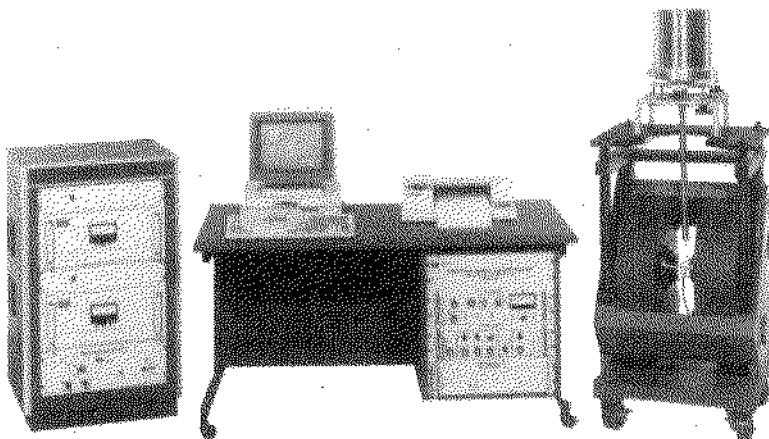


Fig. 11.25 Magnetômetro de amostra vibrante modelo 9600. (Cortesia da LDJ Electronics, Inc.)

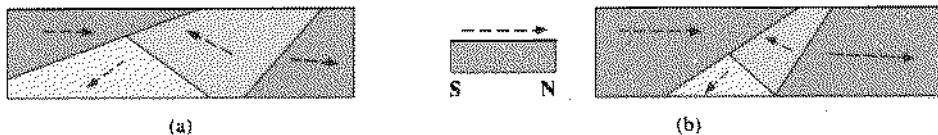


Fig. 11.26 Domínios magnéticos.

riais não-magnéticos, o campo magnético total devido aos spins dos elétrons é zero, seja porque eles se anulam naturalmente, seja porque estão orientados de forma aleatória. Em materiais magnéticos como o ferro e o aço, porém, os campos magnéticos de grupos de até 10^{12} elétrons se alinham, formando regiões que apresentam magnetismo espontâneo.* Essas regiões são chamadas de *domínios*. Os domínios são entidades isoladas, isto é, cada domínio é independente dos domínios vizinhos. Em uma peça não-magnetizada de um material magnético, como a que aparece na Fig. 11.26(a), os domínios estão distribuídos de forma aleatória e o campo magnético total em qualquer direção é zero.

Quando o material sofre a ação de uma força magnetizante externa, os domínios que estão aproximadamente alinhados com o campo aplicado crescem à custa dos outros domínios, como vemos na Fig. 11.26(b). Se o campo externo aplicado for suficientemente intenso, todos os domínios se orientarão nessa direção, e, daí em diante, qualquer aumento do campo externo não causará nenhum aumento na magnetização da amostra. Nesse caso, dizemos que foi atingida a *saturação*. Quando o campo magnético externo é removido, o grau de alinhamento diminui e o campo (densidade de fluxo) no interior do material cai para o valor B_R . Em outras palavras, a remoção da força magnetizante faz com que alguns domínios voltem a ficar desalinhados. Essa perda de alinhamento, porém, não é total, e os domínios alinhados remanescentes são os responsáveis pela existência dos ímãs permanentes.

Quando o campo externo atinge valores muito próximos da saturação, os domínios não-alinhados ficam reduzidos a pequenos cilindros denominados *bolhas*. Estas bolhas podem ser movimentadas no interior da amostra magnética através da aplicação de um campo magnético *controlador*. As bolhas magnéticas foram a base experimental de um projeto lançado alguns anos atrás, para o desenvolvimento de memórias para computadores.

11.9 LEI DE AMPÈRE PARA CIRCUITOS MAGNÉTICOS

Na introdução deste capítulo mencionamos que existe uma grande semelhança entre a análise dos circuitos elétricos e a dos circuitos magnéticos. Esta afirmação já foi demonstrada para as grandezas que aparecem na Tabela 11.1.

Por analogia com a lei de Kirchhoff para tensões, ($\sum V = 0$), podemos escrever:

$$\boxed{\sum \mathcal{F} = 0} \quad (\text{para circuitos magnéticos}) \quad (11.9)$$

ou seja, em um circuito magnético fechado a soma algébrica das variações de força magnetomotriz (fmm) é nula.

Tabela 11.1

Circuitos elétricos	Circuitos magnéticos
Causa	V
Efeito	I
Oposição	R

*A interação entre os spins que produz este alinhamento é chamada *acoplamento de troca* e não pode ser descrita por nenhuma teoria clássica. Somente a teoria quântica do magnetismo pode dar uma descrição deste fenômeno, prevendo corretamente que ele só ocorre em alguns elementos, como o ferro, o níquel e o cobalto. (N. do T.)

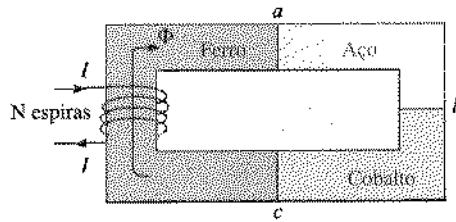


Fig. 11.27 Circuito magnético em série com três materiais diferentes.

A Eq. (11.9) é denominada *lei de Ampère para circuitos magnéticos*. Quando aplicadas a circuitos magnéticos, as fontes de fmm são expressas pela equação

$$\boxed{\Phi = NI} \quad (\text{A}) \quad (11.10)$$

A relação que nos permite calcular as variações de fmm ao longo do circuito pode ser obtida observando a Tabela 11.1; nos circuitos elétricos:

$$V = IR$$

e portanto, por analogia, devemos ter a seguinte relação nos circuitos magnéticos:

$$\boxed{\Phi = \mathcal{F}\ell} \quad (\text{A}) \quad (11.11)$$

onde Φ é o fluxo magnético através de uma seção reta do circuito e \mathcal{F} é a relutância desta seção. Entretanto, é muito raro calcularmos a relutância quando analisamos circuitos magnéticos. Uma equação mais prática para calcular a fmm é a seguinte:

$$\boxed{\mathcal{F} = HI} \quad (\text{A}) \quad (11.12)$$

obtida a partir da Eq. (11.6), onde H é a força magnetizante em uma parte do circuito magnético e ℓ o comprimento desta seção. Vamos considerar, como um exemplo da aplicação da Eq. (11.9), o circuito magnético da Fig. 11.27, constituído por três materiais ferromagnéticos diferentes.

Aplicando a lei de Ampère para circuitos magnéticos, temos:

$$\begin{aligned} \sum_C \mathcal{F} &= 0 \\ +NI - \underbrace{H_{ab}l_{ab}}_{\text{Subida}} - \underbrace{H_{bc}l_{bc}}_{\text{Queda}} - \underbrace{H_{ca}l_{ca}}_{\text{Queda}} &= 0 \\ NI &= H_{ab}l_{ab} + H_{bc}l_{bc} + H_{ca}l_{ca} \\ \text{fmm aplicada} &\qquad \text{queda de fmm} \end{aligned}$$

Todos os termos que aparecem nessas equações são conhecidos, com exceção das forças magnetizantes para as diferentes partes do circuito, que podem ser obtidas a partir do gráfico $B-H$ se a densidade de fluxo B for conhecida.

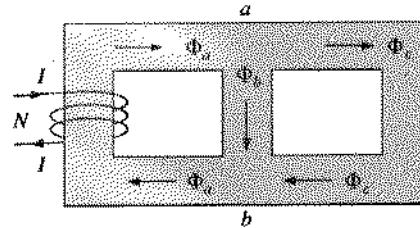


Fig. 11.28 Distribuição do fluxo em um circuito magnético série-paralelo.

xos que entram em uma junção é igual à soma dos fluxos que saem desta mesma junção. No caso do circuito da Fig. 11.28, por exemplo, devemos ter:

$$\begin{aligned} \Phi_a &= \Phi_b + \Phi_c && (\text{na junção } a) \\ \text{ou} \quad \Phi_b + \Phi_c &= \Phi_a && (\text{na junção } b) \end{aligned}$$

As duas relações acima são equivalentes.

11.11 CIRCUITOS MAGNÉTICOS EM SÉRIE: DETERMINAÇÃO DO PRODUTO NI

Estamos agora em condições de resolver alguns problemas envolvendo circuitos magnéticos, que se enquadram basicamente em duas categorias. Em uma delas é dado o fluxo Φ , sendo perdida a fmm NI . Este é o tipo de problema que aparece no projeto de motores, geradores e transformadores. No outro, NI é conhecido e desejamos obter o fluxo Φ . Esta situação aparece principalmente no projeto de amplificadores magnéticos, e a solução é mais difícil, pois deve ser obtida por tentativa e erro.

Como já mencionamos anteriormente, o valor de μ varia de ponto para ponto da curva de magnetização. Isto torna impossível encontrar a relutância de cada ramo ou a “relutância total” de um circuito magnético, como fizemos para os circuitos elétricos, nos quais ρ tinha um valor fixo para qualquer tensão ou corrente no circuito. Se a relutância total pudesse ser determinada, poderíamos obter Φ utilizando o análogo da definição de resistência para circuitos magnéticos.

No caso dos circuitos magnéticos, obtemos o valor de B a partir do valor de H , ou vice-versa, usando a curva $B-H$; raramente é necessário calcular o valor de μ .

Uma abordagem bastante utilizada na análise de circuitos magnéticos é a da *tabela*. Antes de analisarmos um problema em detalhes, preparamos uma tabela colocando na coluna da extremidade esquerda as várias partes do circuito magnético. As colunas à direita são reservadas para as grandezas a serem determinadas em cada parte do circuito. Deste modo, a pessoa que está resolvendo o problema sabe, em cada fase, qual é a grandeza a ser obtida e também qual deve ser o próximo passo. A utilidade do método ficará evidente após a apresentação de alguns exemplos.

Nesta seção analisaremos somente circuitos magnéticos *em série*, nos quais o fluxo Φ é o mesmo ao longo de todo o circuito. Em todos os exemplos a grandeza a ser determinada será a força magnetomotriz.

11.10 O FLUXO Φ

Se aplicarmos as analogias da seção anterior à lei de Kirchhoff para correntes, chegaremos à conclusão de que a soma dos flu-

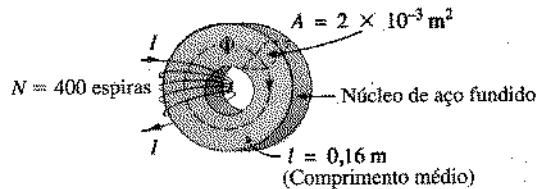


Fig. 11.29 Exemplo 11.3.

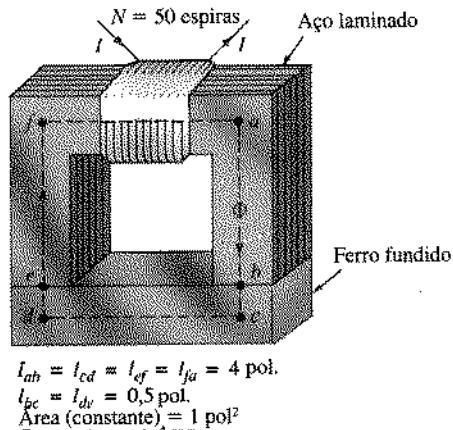


Fig. 11.31 Eletroímã do Exemplo 11.4.

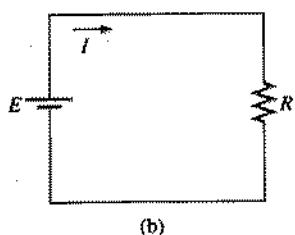
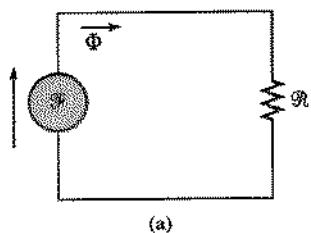


Fig. 11.30 (a) Circuito magnético equivalente e (b) circuito elétrico análogo.

EXEMPLO 11.3 Para o circuito magnético em série da Fig. 11.29:

- Calcule o valor de I para que o fluxo magnético seja $\Phi = 4 \times 10^{-4} \text{ Wb}$.
- Determine μ e μ_r para o material nessas condições.

Soluções: O circuito magnético pode ser representado como na Fig. 11.30(a). A analogia com um circuito elétrico é ilustrada na Fig. 11.30(b). Este tipo de analogia pode ser muito útil na solução de problemas envolvendo circuitos magnéticos. A Tabela 11.2 foi construída para resolver o item (a). No caso do presente exemplo ela é bastante trivial, mas mesmo assim deixa claro quais são as quantidades a serem determinadas.

- A densidade de fluxo B é dada por:

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{4 \times 10^{-4} \text{ Wb}}{2 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = 2 \times 10^{-1} \text{ T} = 0,2 \text{ T}$$

Utilizando o gráfico $B-H$ da Fig. 11.24, podemos obter a força magnetizante H :

$$H (\text{aço fundido}) = 170 \text{ NA/m}$$

Aplicando a lei circuital de Ampère para circuitos magnéticos, temos:

$$NI = HI$$

$$\text{e } I = \frac{HI}{N} = \frac{(170 \text{ NA/m})(0,16 \text{ m})}{400} = 68 \text{ mA}$$

- Utilizando a Eq. (11.8), podemos obter a permeabilidade do material:

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{0,2 \text{ T}}{170 \text{ A/m}} = 1,176 \times 10^{-3} \text{ Wb/A} \cdot \text{m}$$

e a permeabilidade relativa será:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1,176 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7}} = 935,83$$

EXEMPLO 11.4 O eletroímã da Fig. 11.31 atraiu uma barra de ferro fundido. Determine a corrente I necessária para estabelecer um fluxo no núcleo com o valor indicado na figura.

Solução: Para podermos utilizar os gráficos das Figs. 11.23 e 11.24 devemos primeiro converter as dimensões para o sistema métrico. Como a área da seção reta é a mesma ao longo de todo o circuito, porém, podemos determinar o comprimento para cada material em vez de trabalharmos com trechos isolados.

$$l_{efab} = 4 \text{ pol.} + 4 \text{ pol.} + 4 \text{ pol.} = 12 \text{ pol.}$$

$$l_{bcde} = 0,5 \text{ pol.} + 4 \text{ pol.} + 0,5 \text{ pol.} = 5 \text{ pol.}$$

$$12 \text{ pol.} \left(\frac{1 \text{ m}}{39,37 \text{ pol.}} \right) = 304,8 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$5 \text{ pol.} \left(\frac{1 \text{ m}}{39,37 \text{ pol.}} \right) = 127 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$1 \text{ pol.}^2 \left(\frac{1 \text{ m}}{39,37 \text{ pol.}} \right) \left(\frac{1 \text{ m}}{39,37 \text{ pol.}} \right) = 6,452 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Tabela 11.2

Trecho	Φ (Wb)	A (m^2)	B (T)	H (A/m)	l (m)	HI (A)
Um trecho contínuo	4×10^{-4}	2×10^{-3}			0,16	

Tabela 11.3

Trecho	Φ (Wb)	A (m^2)	B (T)	H (A/m)	I (m)	HI (A)
efab	$3,5 \times 10^{-4}$	$6,452 \times 10^{-4}$				$304,8 \times 10^{-3}$
bcede	$3,5 \times 10^{-4}$	$6,452 \times 10^{-4}$				127×10^{-3}

Tabela 11.4

Trecho	Φ (Wb)	A (m^2)	B (T)	H (A/m)	I (m)	HI (A)
efab	$3,5 \times 10^{-4}$	$6,452 \times 10^{-4}$	0,542	60	$304,8 \times 10^{-3}$	21,34
bcede	$3,5 \times 10^{-4}$	$6,452 \times 10^{-4}$	0,542	1,600	127×10^{-3}	203,2

Os dados do problema aparecem na Tabela 11.3. Quando a solução do problema estiver completa, todos os espaços em branco estarão preenchidos. A melhor forma de resolver o problema é preencher as colunas da esquerda para a direita. À medida que formos obtendo as várias quantidades, elas serão colocadas em uma tabela semelhante, que aparece no final deste exemplo.

O campo magnético em todo o circuito é dado por

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{3,5 \times 10^{-4} \text{ Wb}}{6,452 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 0,542 \text{ T}$$

e as forças magnetizantes são:

$$H(\text{aço laminado, Fig. 11.24}) \approx 70 \text{ A/m}$$

$$H(\text{ferro fundido, Fig. 11.23}) \approx 1.600 \text{ A/m}$$

Observe a enorme diferença entre as forças magnetizantes nos dois materiais para a mesma densidade de fluxo. Quando aplicamos a lei de Ampère para circuitos magnéticos vemos que, de fato, o trecho de aço laminado pode ser ignorado sem que a solução seja afetada significativamente.

Determinando HI para cada trecho, obtemos

$$H_{\text{efab}} I_{\text{efab}} = (70 \text{ A/m})(304,8 \times 10^{-3} \text{ m}) = 21,34 \text{ A}$$

$$H_{\text{bcede}} I_{\text{bcede}} = (1.600 \text{ A/m})(127 \times 10^{-3} \text{ m}) = 203,2 \text{ A}$$

Inserindo os dados acima na Tabela 11.3, obtemos a Tabela 11.4.

O circuito magnético equivalente no sistema da Fig. 11.31 aparece na Fig. 11.32(a). O circuito elétrico é mostrado na Fig. 11.32(b).

Aplicando a lei de Ampère para circuitos magnéticos,

$$NI = H_{\text{efab}} I_{\text{efab}} + H_{\text{bcede}} I_{\text{bcede}} \\ = 21,34 \text{ A} + 203,2 \text{ A} = 224,54 \text{ A}$$

e

$$(50)I = 224,54 \text{ A}$$

de modo que

$$I = \frac{224,54 \text{ A}}{50} = 4,49 \text{ A}$$

EXEMPLO 11.5 Determine a corrente no secundário I_2 no transformador da Fig. 11.33 se o fluxo resultante no núcleo é $1,5 \times 10^{-5} \text{ Wb}$, no sentido horário.

Solução: Este é o primeiro exemplo que envolve duas forças magnetizantes. Como se pode ver na Fig. 11.34(a), os fluxos gerados pelos dois enrolamentos estão em oposição, do mesmo modo que as duas fontes de tensão estão em oposição no circuito elétrico análogo [Fig. 11.34(b)]. Os dados aparecem na Tabela 11.5.

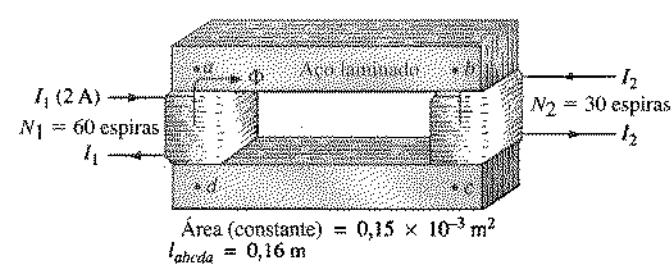
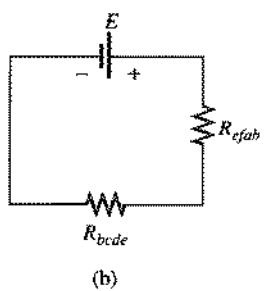
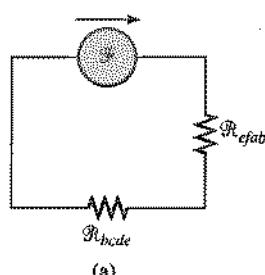


Fig. 11.32 (a) Circuito magnético equivalente e (b) circuito elétrico análogo para o eletroimã da Fig. 11.31.

Fig. 11.33 Transformador do Exemplo 11.5.



Tabela 11.5

Trecho	Φ (Wb)	A (m^2)	B (T)	H (A/m)	I (m)	HI (A)
abeda	$1,5 \times 10^{-3}$	$0,15 \times 10^{-3} m^2$			0,16	

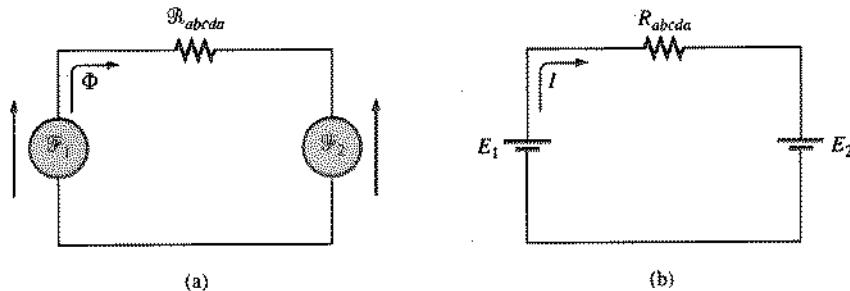


Fig. 11.34 (a) Circuito magnético equivalente e (b) circuito elétrico análogo para o transformador da Fig. 11.33.

A densidade de fluxo em todo o circuito é dada por:

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{1,5 \times 10^{-3} \text{ Wb}}{0,15 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = 10 \times 10^{-2} \text{ T} = 0,10 \text{ T}$$

e portanto

$$H(\text{segundo a Fig. 11.24}) \cong \frac{1}{5} (100 \text{ A/m}) = 20 \text{ A/m}$$

Aplicando a lei de Ampère para circuitos magnéticos,

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = H_{abeda} l_{abeda}$$

$$(60)(2 \text{ A}) - (30)(I_2) = (20 \text{ A/m})(0,16 \text{ m})$$

$$120 \text{ A} - (30)I_2 = 3,2 \text{ A}$$

e

$$(30)I_2 = 120 \text{ A} - 3,2 \text{ A}$$

ou

$$I_2 = \frac{116,8 \text{ A}}{30} = 3,89 \text{ A}$$

Quando estamos trabalhando com transformadores, é comum utilizarmos a equação $N_1 I_1 = N_2 I_2$. No caso do exemplo anterior, obteríamos 4 A em vez de 3,98 A. Em geral esta diferença nos resultados é ignorada e consideraremos a equação $N_1 I_1 = N_2 I_2$ como exata.

Como o gráfico B - H é não-linear, *não é possível aplicar o teorema da superposição a circuitos magnéticos*. No exemplo anterior, por exemplo, não poderíamos considerar o efeito de cada fonte isoladamente e somar os resultados.

11.12 ENTREFERROS

Antes de continuar com os exemplos ilustrativos, vamos considerar o efeito de um *entreferro*, ou espaço vazio, nos circuitos magnéticos. Note a presença de entrefertos nos circuitos magnéticos do motor e do medidor que aparecem na Fig. 11.11. A existência de linhas de campo do lado de fora do prolongamento do material magnético para o interior do entreferro, como na Fig. 11.35(a), é conhecida como *efeito de borda*. Na discussão que se segue, vamos desprezar este efeito e supor que a distribuição de linhas de campo tem o aspecto da Fig. 11.35(b).

A densidade de fluxo no entreferro da Fig. 11.35(b) é dada por

$$B_e = \frac{\Phi_e}{A_e} \quad (11.13)$$

onde, para todos os efeitos práticos,

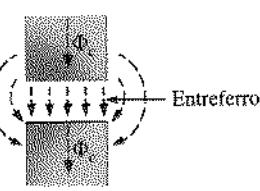
$$\Phi_e = \Phi_{\text{núcleo}}$$

e

$$A_e = A_{\text{núcleo}}$$

Podemos tomar a permeabilidade do ar como sendo igual à do vácuo. A força magnetizante n é portanto

$$H_e = \frac{B_e}{\mu_0} \quad (11.14)$$



(a)



(b)

Fig. 11.35 Entrefertos: (a) com efeito de borda; (b) ideal.

e a queda de fmm no entreferro é $H_e l_e$. Podemos escrever a seguinte expressão para H_e :

$$H_e = \frac{B_e}{\mu_0} = \frac{B_e}{4\pi \times 10^{-7}}$$

e portanto

$$H_e \approx (7,96 \times 10^5) B_e \quad (\text{A/m}) \quad (11.15)$$

EXEMPLO 11.6 Calcule o valor de I necessário para estabelecer um fluxo $\Phi = 0,75 \times 10^{-4}$ Wb no circuito magnético em série da Fig. 11.36.

Solução: Um circuito magnético equivalente e o seu circuito elétrico análogo são vistos na Fig. 11.37.

O fluxo magnético em todo o circuito é dado por:

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{0,75 \times 10^{-4} \text{ Wb}}{1,5 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 0,5 \text{ T}$$

Segundo as curvas $B-H$ da Fig. 11.24,

$$H(\text{aço fundido}) \approx 280 \text{ A/m}$$

Aplicando a Eq. 11.15,

$$H_e = (7,96 \times 10^5) B_e = (7,96 \times 10^5)(0,5 \text{ T}) = 3,98 \times 10^5 \text{ A/m}$$

As quedas de fmm são:

$$\begin{aligned} H_{\text{núcleo}} l_{\text{núcleo}} &= (280 \text{ A/m})(100 \times 10^{-3} \text{ m}) = 28 \text{ A} \\ H_e l_e &= (3,98 \times 10^5 \text{ A/m})(2 \times 10^{-3} \text{ m}) = 796 \text{ A} \end{aligned}$$

Aplicando a lei de Ampère para circuitos magnéticos,

$$\begin{aligned} NI &= H_{\text{núcleo}} l_{\text{núcleo}} + H_e l_e \\ &= 28 \text{ A} + 796 \text{ A} \\ (200)I &= 824 \text{ A} \\ I &= 4,12 \text{ A} \end{aligned}$$

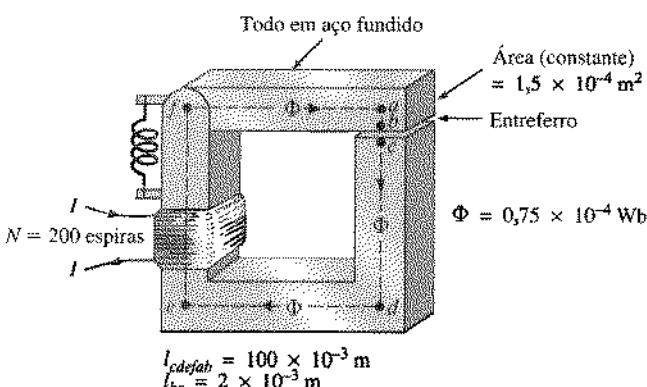
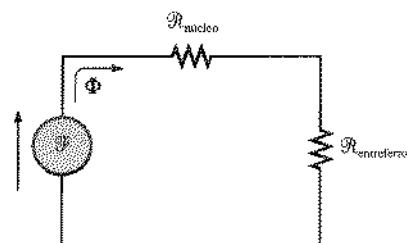
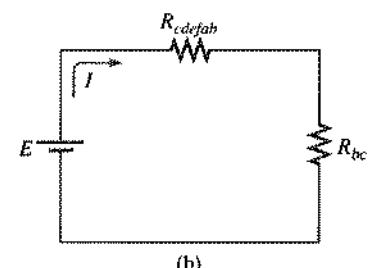


Fig. 11.36 Relé do Exemplo 11.6.



(a)



(b)

Fig. 11.37 (a) Circuito magnético equivalente e (b) circuito elétrico análogo para o relé da Fig. 11.36.

Observe que, como o ar é uma substância não-magnética, a queda de fmm é muito maior no entreferro do que no teste do circuito.

11.13 CIRCUITOS MAGNÉTICOS EM SÉRIE-PARALELO

A analogia que existe entre os circuitos elétricos e magnéticos leva, como era de se esperar, ao conceito de circuitos magnéticos em série-paralelo, semelhantes, sob muitos aspectos, aos circuitos elétricos discutidos no Cap. 7. A analogia com circuitos elétricos será, na verdade, útil para a análise desse tipo de circuito.

EXEMPLO 11.7 Calcule a corrente I necessária para criar um fluxo $\Phi_2 = 1,5 \times 10^{-4}$ Wb no trecho do núcleo indicado na Fig. 11.38.

Solução: O circuito magnético equivalente e o circuito elétrico análogo aparecem na Fig. 11.39. Temos

$$B_2 = \frac{\Phi_2}{A} = \frac{1,5 \times 10^{-4} \text{ Wb}}{6 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 0,25 \text{ T}$$

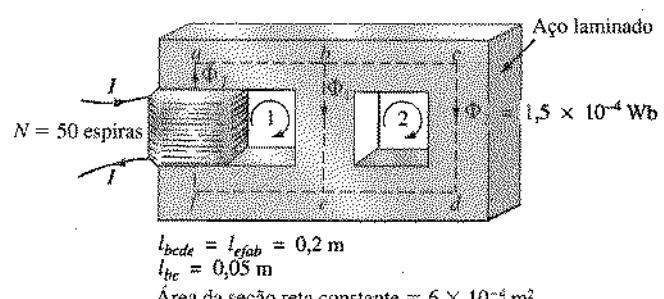
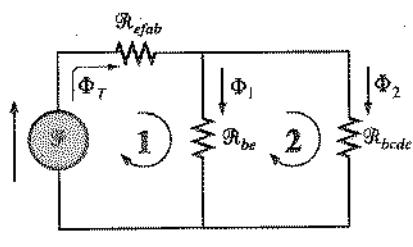
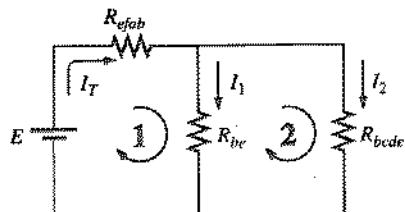


Fig. 11.38 Exemplo 11.7.



(a)



(b)

Fig. 11.39 (a) Circuito magnético equivalente e (b) circuito elétrico análogo para o sistema em série-paralelo da Fig. 11.38.

De acordo com a Fig. 11.24,

$$H_{bcde} \equiv 40 \text{ A/m}$$

Aplicando a lei de Ampère para circuitos magnéticos à malha 2 das Figs. 11.38 e 11.39,

$$\begin{aligned} \sum_C \mathcal{F} &= 0 \\ H_{be}I_{be} - H_{bcde}I_{bcde} &= 0 \\ H_{be}(0,05 \text{ m}) - (40 \text{ A/m})(0,2 \text{ m}) &= 0 \\ H_{be} &= \frac{8 \text{ A}}{0,05 \text{ m}} = 160 \text{ A/m} \end{aligned}$$

De acordo com a Fig. 11.24,

$$B_1 \approx 0,97 \text{ T}$$

e

$$\Phi_1 = B_1 A = (0,97 \text{ T})(6 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 5,82 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

Os resultados são então lançados na Tabela 11.6.

A tabela mostra que devemos dirigir nossa atenção para o trecho *efab*:

$$\begin{aligned} \Phi_T &= \Phi_1 + \Phi_2 = 5,82 \times 10^{-4} \text{ Wb} + 1,5 \times 10^{-4} \text{ Wb} \\ &= 7,32 \times 10^{-4} \text{ Wb} \\ B &= \frac{\Phi_T}{A} = \frac{7,32 \times 10^{-4} \text{ Wb}}{6 \times 10^{-4} \text{ m}^2} \\ &= 1,22 \text{ T} \end{aligned}$$

De acordo com a Fig. 11.23,

$$H_{efab} \equiv 400 \text{ A}$$

Aplicando a lei de Ampère para circuitos magnéticos, temos:

$$+NI - H_{efab}l_{efab} - H_{be}l_{be} = 0$$

$$NI = (400 \text{ A/m})(0,2 \text{ m}) + (160 \text{ A/m})(0,05 \text{ m})$$

$$(50)I = 80 \text{ A} + 8 \text{ A}$$

$$I = \frac{88 \text{ A}}{50} = 1,76 \text{ A}$$

Para mostrar que μ depende da força magnetizante H , podemos calcular a permeabilidade em cada trecho. No trecho *bcde*,

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{0,25 \text{ T}}{40 \text{ A/m}} = 6,25 \times 10^{-3}$$

$$\text{e} \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{6,25 \times 10^{-3}}{12,57 \times 10^{-7}} = 4.972,2$$

No trecho *be*,

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{0,97 \text{ T}}{160 \text{ A/m}} = 6,06 \times 10^{-3}$$

$$\text{e} \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{6,06 \times 10^{-3}}{12,57 \times 10^{-7}} = 4.821$$

No trecho *efab*,

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{1,22 \text{ T}}{400 \text{ A/m}} = 3,05 \times 10^{-3}$$

$$\text{e} \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{3,05 \times 10^{-3}}{12,57 \times 10^{-7}} = 2.426,41$$

11.14 DETERMINAÇÃO DE Φ

Os exemplos desta seção serão do segundo tipo: a força NI é conhecida e desejamos calcular o fluxo Φ . Este problema é rela-

Tabela 11.6

Trecho	Φ (Wb)	A (m^2)	B (T)	H (A/m)	l (m)	HI (A)
<i>bcde</i>	$1,5 \times 10^{-4}$	6×10^{-4}	0,25	40	0,2	8
<i>be</i>	$5,82 \times 10^{-4}$	6×10^{-4}	0,97	160	0,05	8
<i>efab</i>		6×10^{-4}			0,2	

tivamente simples se a área da seção reta for a mesma em todo o circuito e ele for feito de um único material. Nesse caso,

$$H = \frac{NI}{l} \quad H \rightarrow B \text{ (curva } B-H\text{)}$$

$$\text{e} \quad \Phi = BA$$

No caso de circuitos magnéticos feitos de vários materiais, não existe um método geral para resolver todos os problemas. Na maioria dos casos o seguinte procedimento é o mais indicado: fazemos uma *estimativa* do fluxo Φ e comparamos a fmm obtida a partir desta estimativa com a especificada. Após esta comparação podemos ajustar nossa estimativa do fluxo de modo a tornar o valor da fmm mais próximo do especificado. Um erro de $\pm 5\%$ é aceitável na maioria das aplicações.

Podemos fazer uma estimativa inicial razoável do valor de Φ se nos lembrarmos de que a maior queda de fmm ocorre no trecho feito com o material de menor permeabilidade, supondo que a área da seção reta e o comprimento sejam os mesmos para todos os trechos do circuito. Como vimos no Exemplo 11.6, se existir um entreferro no circuito magnético, haverá uma queda considerável de fmm nesta região do circuito.

Podemos supor, portanto, como ponto de partida, que a fmm total (NI) está aplicada ao trecho com o menor valor de μ ou o maior valor de R (supondo que as dimensões não variem muito ao longo do circuito). Esta suposição nos dará um valor de Φ que resultará em um valor de NI maior do que o especificado. Depois de analisar os resultados da suposição inicial, *diminuímos* os valores de Φ e NI introduzindo os efeitos (relutâncias) das outras partes do circuito e fazemos uma nova *tentativa* com a estimativa assim obtida. Este método é freqüentemente denominado, por razões óbvias, o método das *redações e tentativas*.

EXEMPLO 11.8 Calcule o fluxo magnético Φ para o circuito da Fig. 11.40.

Solução: Utilizando a lei de Ampère para circuitos magnéticos,

$$NI = H_{abcd}l_{abcd}$$

$$\text{ou} \quad H_{abcd} = \frac{NI}{l_{abcd}} = \frac{(60)(5 \text{ A})}{0,3 \text{ m}} = \frac{300 \text{ A}}{0,3 \text{ m}} = 1,000 \text{ A/m}$$

$$\text{e} \quad B_{abcd} (\text{segundo a Fig. 11.23}) \approx 0,39 \text{ T}$$

Como $B = \Phi/A$, temos

$$\Phi = BA = (0,39 \text{ T})(2 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 0,78 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

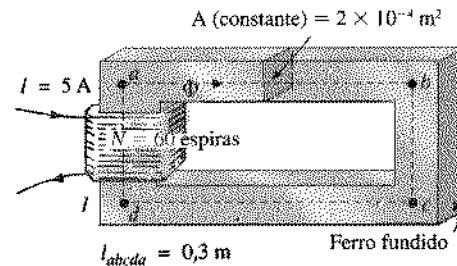


Fig. 11.40 Exemplo 11.8.

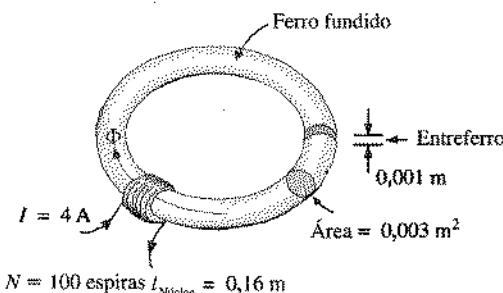


Fig. 11.41 Exemplo 11.9.

EXEMPLO 11.9 Calcule o fluxo Φ para o circuito magnético em série da Fig. 11.41 com a fmm aplicada que vemos na figura.

Solução: Supondo que toda a fmm NI está aplicada ao entreferro,

$$NI = H_e l_e$$

$$\text{ou} \quad H_e = \frac{NI}{l_e} = \frac{400 \text{ A}}{0,001 \text{ m}} = 4 \times 10^5 \text{ A/m}$$

$$\text{e} \quad B_e = \mu_0 H_e = (4\pi \times 10^{-7})(4 \times 10^5 \text{ A/m}) = 0,503 \text{ T}$$

O fluxo estimado é portanto

$$\Phi_e = \Phi_{núcleo} = B_e A = (0,503 \text{ T})(0,003 \text{ m}^2)$$

$$\Phi_{núcleo} = 1,51 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

Utilizando este valor de Φ , podemos calcular NI . Os resultados aparecem na Tabela 11.7.

$$H_{núcleo} l_{núcleo} = (1,500 \text{ A/m})(0,16 \text{ m}) = 240 \text{ A}$$

Tabela 11.7

Trecho	Φ (Wb)	A (m^2)	B (T)	H (A/m)	l (m)	HI (A)
Núcleo	$1,51 \times 10^{-3}$	0,003	0,503	1500 ($B-H$ curva)	0,16	
Entreferro	$1,51 \times 10^{-3}$	0,003	0,503	4×10^5	0,001	400

Tabela 11.8

Trecho	Φ (Wb)	A (m^2)	B (T)	H (A/m)	I (m)	HI (A)
Núcleo	$1,057 \times 10^{-3}$	0,003			0,16	
Entreferro	$1,057 \times 10^{-3}$	0,003			0,001	

Aplicando a lei de Ampère para circuitos magnéticos, temos:

$$\begin{aligned} NI &= H_{\text{núcleo}} l_{\text{núcleo}} + H_e l_e \\ &= 240 \text{ A} + 400 \text{ A} \\ NI &= 640 \text{ A} > 400 \text{ A} \end{aligned}$$

Como desprezamos a relutância de todos os trechos do circuito com exceção do entreferro, o valor calculado é maior do que o especificado. Devemos portanto reduzir este valor introduzindo o efeito das outras relutâncias. Como aproximadamente $(640 \text{ A} - 400 \text{ A}) / 640 \text{ A} = 240 \text{ A} / 640 \text{ A} \approx 37,5\%$ é o erro percentual para mais em relação ao valor desejado, vamos reduzir Φ em 30% e observar o quanto isto nos aproxima do valor dado para a fmm, 400 A:

$$\begin{aligned} \Phi &= (1 - 0,3)(1,51 \times 10^{-3} \text{ Wb}) \\ &= 1,057 \times 10^{-3} \text{ Wb} \end{aligned}$$

Veja a Tabela 11.8.

$$\begin{aligned} B &= \frac{\Phi}{A} = \frac{1,057 \times 10^{-3} \text{ Wb}}{0,003 \text{ m}^2} \approx 0,352 \text{ T} \\ H_e l_e &= (7,96 \times 10^5) B_e l_e \\ &= (7,96 \times 10^5)(0,352 \text{ T})(0,001 \text{ m}) \\ &\approx 280,19 \text{ A} \end{aligned}$$

De acordo com as curvas $B-H$,

$$H_{\text{núcleo}} \approx 850 \text{ A/m}$$

$$H_{\text{núcleo}} l_{\text{núcleo}} = (850 \text{ A/m})(0,16 \text{ m}) = 136 \text{ A}$$

Aplicando a lei de Ampère para circuitos magnéticos,

$$\begin{aligned} NI &= H_{\text{núcleo}} l_{\text{núcleo}} + H_e l_e \\ &= 136 \text{ A} + 280,19 \text{ A} \\ NI &= 416,19 \text{ A} > 400 \text{ A} \quad (\text{dentro da faixa } \pm 5\% \\ &\quad \text{logo aceitável}) \end{aligned}$$

A solução é, portanto,

$$\Phi \approx 1,057 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

11.15 APLICAÇÕES

Sistemas de Gravação

Provavelmente a aplicação mais comum de materiais magnéticos é em aparelhos de gravação usados cada vez com maior frequência em lares e escritórios. A fita de vídeo de 8 pistas e a fita de áudio que aparecem na Fig. 11.42 são utilizadas quase todos os dias em qualquer residência onde exista um videocassete ou um gravador. O processo básico de gravação não é difícil de entender e será descrito com detalhes na seção em que discutimos os discos rígidos utilizados nos computadores; a principal diferença é que uma fita de vídeo típica tem oito pistas.

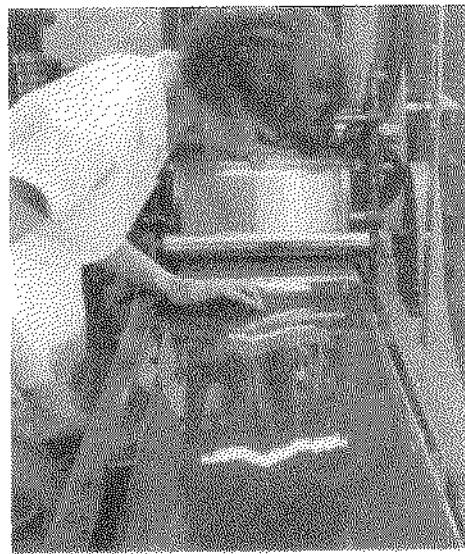


Fig. 11.42 Fitas magnéticas: (a) fitas de vídeo e áudio (cortesia da Maxell Corporation of America); (b) processo de fabricação (cortesia da Ampex Corporation).

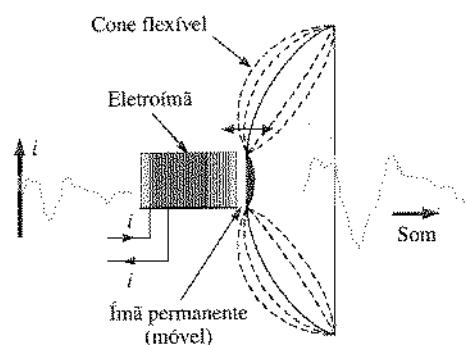


Fig. 11.43 Alto-falante.

Alto-falantes e Microfones

Os efeitos eletromagnéticos são essenciais para o funcionamento de alto-falantes como o que aparece na Fig. 11.43.

A forma de onda da corrente aplicada ao enrolamento do eletroímã é idêntica à do som a ser reproduzido pelo alto-falante e faz com que a força que o eletroímã exerce sobre um ímã permanente preso ao cone do alto-falante varie da mesma forma. Esta força variável faz o cone vibrar com a mesma freqüência que o sinal aplicado ao enrolamento, reproduzindo o som original.

Um outro sistema, que é utilizado em sistemas de áudio de melhor qualidade, aparece na Fig. 11.44. Neste caso, o ímã permanente é fixo e a corrente de entrada é aplicada a uma bobina móvel no interior do ímã. A corrente produz um fluxo magnético no interior da bobina, fazendo com que ela se movimente no campo do ímã permanente. Assim, do mesmo modo que para o sistema da Fig. 11.43, o núcleo vibra com a freqüência do sinal de entrada, reproduzindo o som original.

Microfones como o que aparece na Fig. 11.45 também utilizam efeitos eletromagnéticos. A onda sonora a ser reproduzida faz com que uma bobina móvel se desloque no campo magnético de um ímã permanente. De acordo com a lei de Faraday ($E = -N \frac{d\Phi}{dt}$), é induzida uma tensão na bobina móvel cuja intensi-

dade é proporcional à rapidez com que ela está se movendo. Esta tensão pode ser amplificada e usada para reproduzir o som original através de alto-falantes como os que acabamos de descrever. Os microfones eletromagnéticos são os mais utilizados, embora existam outros tipos cujo funcionamento se baseia em capacitores, carbono granulado ou cristais piezocelétricos.* O microfone eletromagnético é conhecido comercialmente como microfone dinâmico.

Discos Rígidos para Computadores

A unidade de *disco rígido* de um computador é um conjunto selado que armazena dados em uma fina camada de material magnético aplicada à superfície de discos giratórios. Estes discos são feitos de alumínio ou vidro (materiais não-magnéticos), o que lhes confere rigidez e deu origem ao termo *disco rígido*. Como a unidade é selada, os discos e componentes internos são inacessíveis; no caso de ocorrer um defeito, muitas vezes a unidade inteira tem que ser substituída. As dimensões dos discos rígidos variam de $1\frac{1}{2}$ polegada de diâmetro até $5\frac{1}{4}$ polegadas, sendo hoje em dia mais populares os discos de $3\frac{1}{2}$ polegadas.

O revestimento dos discos pode ser do tipo *óxido* ou do tipo *filme fino*. O revestimento de óxido é obtido depositando-se primeiro no disco um gel contendo partículas magnéticas de óxido de ferro. Em seguida, faz-se girar o disco em alta velocidade para distribuir uniformemente o material na sua superfície e cobri-lo com uma camada de óxido com uma camada protetora. O revestimento do tipo filme fino é mais durável e homogêneo. Hoje em dia, praticamente todos os discos rígidos são do tipo filme fino, porque as cabeças de leitura e gravação (que serão descritas daqui a pouco) trabalham a distâncias cada vez menores da superfície do disco, o que exige um revestimento extremamente homogêneo. Os discos mais recentes contêm revestimentos do tipo filme fino com espessuras da ordem de 10 milionésimos de milímetro.

*Cristal piezocelétrico é aquele no qual a aplicação de uma pressão causa o aparecimento de uma tensão no seu interior.

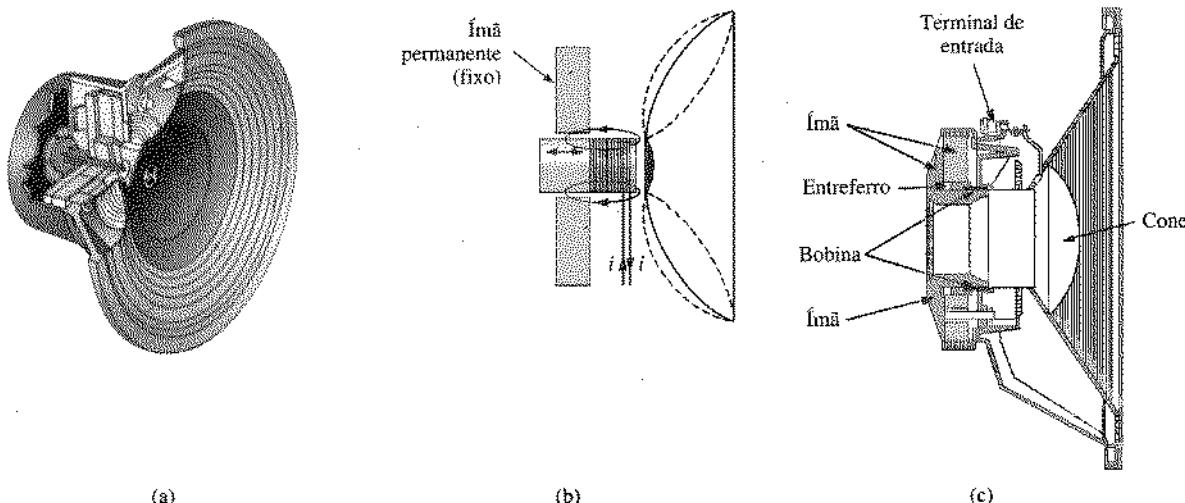


Fig. 11.44 Alto-falante coaxial de alta fidelidade: (a) fotografia; (b) princípio de operação; (c) corte transversal de um alto-falante real. (Courtesy da Electro-Voice, Inc.)

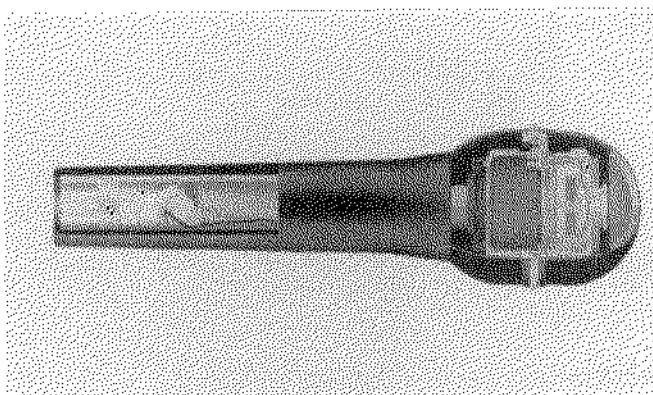


Fig. 11.45 Microfone dinâmico. (Cortesia da Electro-Voice, Inc.)

As informações são armazenadas no disco em anéis circulares denominados *trilhas*; cada trilha contém um grande número de bits por milímetro. O produto do número de bits por milímetro pelo número de trilhas por milímetro é denominado *densidade superficial* do disco, um conceito muito útil para efetuarmos comparações com sistemas mais antigos e percebermos até que ponto a tecnologia avançou nos últimos anos. As primeiras unidades, construídas na década de 50, tinham uma densidade superficial da ordem de 3 bits/mm²; compare este valor com os 150 Kbits/mm² que são comuns hoje em dia. Já existem protótipos que alcançam valores da ordem de Mbits/mm², uma façanha realmente incrível; imagine 1.000.000.000.000 (um trilhão) de bits de informação em uma área igual à do mostrador de um relógio de pulso! O *eletromagnetismo* é a principal área do conhecimento por trás da tecnologia utilizada para *gravar* informações no disco e para *ler* os dados armazenados no disco. A *cabeça de leitura e gravação* utilizada nos discos rígidos (e também nos disquetes) é, em sua forma mais simples, um eletroímã em forma de U com um entreferro que fica logo acima da superfície do disco, como na Fig. 11.46. Enquanto o disco gira, uma tensão de polaridade variável, que representa os dados a serem gravados, é aplicada ao enrolamento do eletroímã. Uma tensão positiva é associada ao dígito 1 da aritmética binária, e uma tensão negativa, ao dígito 0. Podemos usar combinações dos dígitos 0 e 1 para representar letras, números ou outros símbolos. Quando o

enrolamento é submetido a uma tensão positiva (dígito 1), o fluxo magnético resultante tem o sentido indicado na Fig. 11.46. Ao chegarem ao entreferro, as linhas de campo passam para o material magnético que cobre a superfície do disco (já que o fluxo magnético procura sempre o caminho de menor relutância e o ar tem uma alta relutância) e magnetizam um pequeno trecho de disco antes de voltarem ao núcleo do eletroímã para completar o circuito magnético.

Quando o movimento de disco faz com que a cabeça passe para outro trecho do disco, ela deixa para trás um trecho no qual a magnetização é, por exemplo, da esquerda para a direita. Suponhamos que o dígito seguinte a ser gravado seja 0. Nesse caso, o enrolamento será submetido a uma tensão negativa e o trecho do disco que se encontra sob a cabeça será magnetizado no sentido oposto. Assim, as informações são armazenadas no disco na forma de pequenas regiões magnetizadas cuja polaridade indica se representam 0 ou 1. Uma vez armazenados os dados, precisamos de um meio de recuperar as informações sempre que quisermos. As primeiras unidades de disco rígido utilizavam a mesma cabeça para a gravação e leitura de dados. Quando é colocado no modo de leitura, o eletroímã em forma de U da Fig. 11.47(a) pode colher as informações que foram armazenadas no disco. De acordo com a *lei de Faraday da indução eletromagnética*, uma tensão é induzida sempre que um rolamento é exposto a um campo magnético variável. Quando uma região uniformemente magnetizada do disco está passando sob a cabeça, a variação do campo magnético é muito pequena, e a tensão induzida no enrolamento é aproximadamente 0 V, como vemos na Fig. 11.47(b). Quando, porém, uma região de transição, como a região a da Fig. 11.47, passa sob a cabeça, a variação do campo é considerável, já que ele troca de sentido, e portanto é induzida uma tensão diferente de zero no enrolamento [Fig. 11.47(b)]. Na região b, novamente não ocorre nenhuma variação significativa e a fem induzida é praticamente zero, como também ilustra a Fig. 11.47(b). Quando a cabeça de leitura chega à região c, temos novamente uma variação considerável de campo magnético, mas agora a tensão induzida tem a polaridade oposta. Assim, o sinal de saída tem a forma de pulsos bem diferentes dos pulsos de entrada, mas que representam corretamente as informações armazenadas. Observe, além disso, que os pulsos de saída são gerados nas regiões de transição, e não nas regiões de magnetização constante correspondentes aos pulsos de entrada.

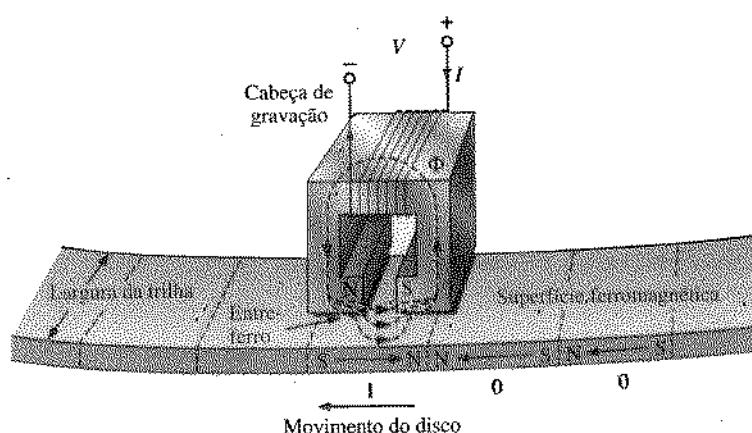


Fig. 11.46 Gravação em disco rígido utilizando um eletroímã em forma de U.

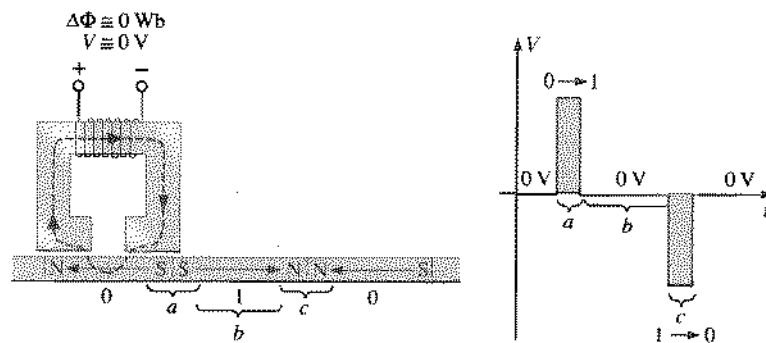


Fig. 11.47 Leitura da informação gravada em um disco rígido utilizando um eletroímã em forma de U.

Inicialmente, o uso da mesma cabeça para gravação e leitura era considerado aceitável, mas, à medida que as trilhas foram ficando mais estreitas e o tempo médio de busca (intervalo de tempo necessário para a cabeça se deslocar de uma trilha a outra) teve que ser reduzido, começou a ficar cada vez mais difícil a construção de cabeças de dimensões e peso adequados. No final da década de 70, a IBM lançou a *cabeça indutiva de filme fino*, fabricada por um processo análogo ao usado para produzir circuitos integrados. Este método permitiu fabricar uma cabeça de menos de 2,5 milímetros de comprimento e menos de 0,5 milímetro de altura, extremamente leve e de grande durabilidade. O tempo médio de busca caiu de algumas centenas de milissegundos, nos primeiros modelos, para cerca de 8 milissegundos nos modelos atuais. Além disso, outros aperfeiçoamentos nos métodos de produção possibilitam que a cabeça “flutue” acima da superfície (para reduzir o desgaste do disco) a uma distância de apenas 0,2 milionésimo de milímetro. Para um disco de 3,5 polegadas girando a 3.600 rpm, a velocidade da cabeça em relação à superfície do disco é de aproximadamente 60 km/h. Se aumentarmos a distância entre a cabeça e a superfície do disco para 10 milésimos de milímetro e aumentarmos a velocidade relativa entre a cabeça e a superfície do disco na mesma proporção (multiplicando os dois parâmetros por 50.000), a velocidade aumentará para 3×10^6 km/h. Em outras palavras, a situação da cabeça em relação à superfície do disco é análoga à de um objeto viajando a 3 milhões de quilômetros por hora, 10 milésimos de milímetros acima de uma superfície. Trata-se sem dúvida de uma realização impressionante do ponto de vista tecnológico, ainda mais se pensarmos que a capacidade dos discos rígidos deverá aumentar pelo menos 10 vezes na próxima década. Incidentalmente, a velocidade de rotação dos disquetes é cerca de 10 vezes menor que a dos discos rígidos. Além disso, a cabeça está em contato com a superfície do disquete, o que limita sua vida útil. A força magnetizante necessária para gravar informações em um disco é da ordem de 400 mA, o que equivale a uma corrente no enrolamento de apenas 40 mA para uma cabeça indutiva de filme fino de 10 espiras.

Embora a cabeça indutiva de filme fino também possa ser utilizada para leitura, a cabeça *magnetoresistiva* (MR) se revelou mais adequada para este fim. O funcionamento da cabeça MR se baseia no fato de que a resistência de certos condutores ferromagnéticos, como o permolloy, varia de acordo com o campo magnético a que o condutor está submetido. À medida que o disco gira, regiões da superfície do disco com diferentes magnetizações passam sob a cabeça, fazendo variar sua resistência. Se o condutor for ao mesmo tempo submetido a uma corren-

te constante, a queda de tensão entre seus terminais será proporcional à resistência. Este sistema permite obter tensões de saída com valores de pico de mais de 300 V, duas a três vezes maiores do que os obtidos com uma cabeça de leitura indutiva.

Os especialistas estão convencidos de que a melhor cabeça de gravação é a do tipo indutivo e a melhor cabeça de leitura é a do tipo magnetoresistivo. É por isso que estão se tornando cada vez mais comuns os discos rígidos de duas cabeças, uma para leitura e outra para gravação. Na verdade, a densidade superficial dos discos mais recentes é tão alta que eles necessitam de duas cabeças para aproveitar todo o seu potencial.

A Fig. 11.48 mostra os componentes de uma unidade de disco rígido de 3,5 polegadas fabricada pela Micropolis Corporation. A unidade tem uma capacidade de 1,75 gigabytes (GB) e um tempo médio de busca de 10 ms.

Sensores de Efeito Hall

O sensor de efeito Hall é um dispositivo semicondutor que gera uma tensão de saída quando exposto a um campo magnético. Ele é constituído basicamente por um bloco de material semicondutor



Fig. 11.48 Unidade de disco rígido de 3,5 pol com 1,75 GB de capacidade e tempo de busca médio de 10 ms. (Cortesia da Micropolis Corporation.)

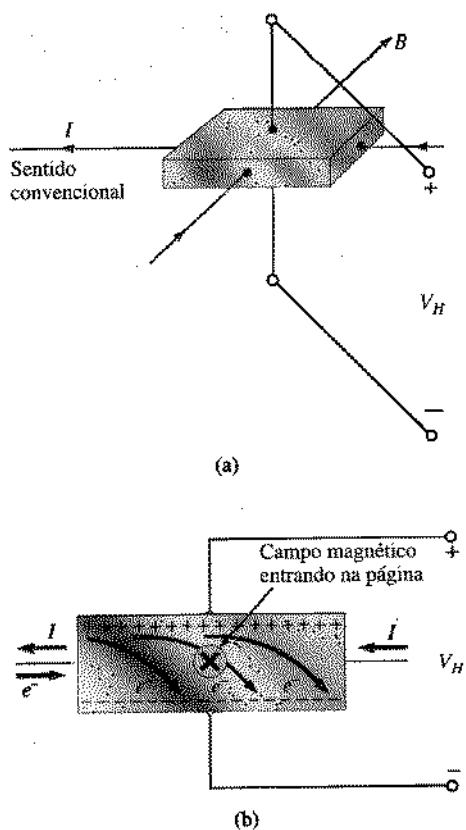


Fig. 11.49 Sensor de efeito Hall: (a) geometria básica; (b) efeito de um campo magnético sobre o movimento dos elétrons.

percorrido por uma corrente, como na Fig. 11.49(a). Se aplicarmos um campo magnético perpendicular à direção da corrente, como ilustra a figura, aparecerá entre os terminais uma ddp V_H . Esta ddp se deve à separação entre cargas positivas e negativas causada pela força de Lorentz, estudada pela primeira vez pelo

físico holandês Hendrick Antoon Lorentz em meados do século XIX. Ele descobriu que, ao serem submetidos a um campo magnético, os elétrons sofrem a ação de uma força proporcional à sua velocidade e à intensidade do campo magnético. A direção e sentido da força são determinados pela regra da mão esquerda. Coloque o dedo indicador da mão esquerda na direção do campo magnético e o dedo médio na direção da corrente convencional (veja a Fig. 11.49). Nesse caso, o polegar, quando orientado perpendicularmente ao dedo indicador, apontará na direção da força a que os elétrons são submetidos. Na configuração da Fig. 11.49(b), a força faz com que os elétrons se acumulem na parte de baixo do bloco, tornando-a negativa em relação à parte de cima. Quanto maior a corrente ou a intensidade do campo magnético, maior a tensão induzida, V_H .

O sensor de efeito Hall pode ser utilizado para medir a intensidade de um campo magnético ou a corrente em um circuito, dependendo de qual destas duas quantidades é mantida constante. O gaussímetro que aparece na Fig. 11.16 utiliza um sensor de efeito Hall. No aparelho, uma corrente constante é aplicada ao sensor, e a tensão V_H indica a intensidade relativa do campo magnético. A escala é calibrada de forma a indicar diretamente a intensidade do campo em gauss.

Existem muitas aplicações interessantes para os sensores de efeito Hall. Eles são usados, por exemplo, como parte de um sistema de alarme cujo objetivo é evitar o roubo de mercadorias nas grandes lojas de departamentos. Uma pequena tira magnética, presa à mercadoria, dispara um alarme quando um freguês atravessa as portas de saída sem ter pago pelo produto. O sensor, a fonte de corrente e o sistema de controle ficam perto das portas de saída. Quando o cliente efetua o pagamento, o caixa remove a tira magnética ou a desmagnetiza aplicando um campo magnético que reduz o magnetismo residual da faixa a praticamente zero.

O sensor de efeito Hall também é usado para indicar a velocidade de uma bicicleta em um mostrador digital montado no guidom. Como vemos na Fig. 11.50(a), o sensor é colocado no garfo da bicicleta e um pequeno ímã permanente é preso a um dos raios da roda dianteira. A posição do ímã deve ser escolhida de

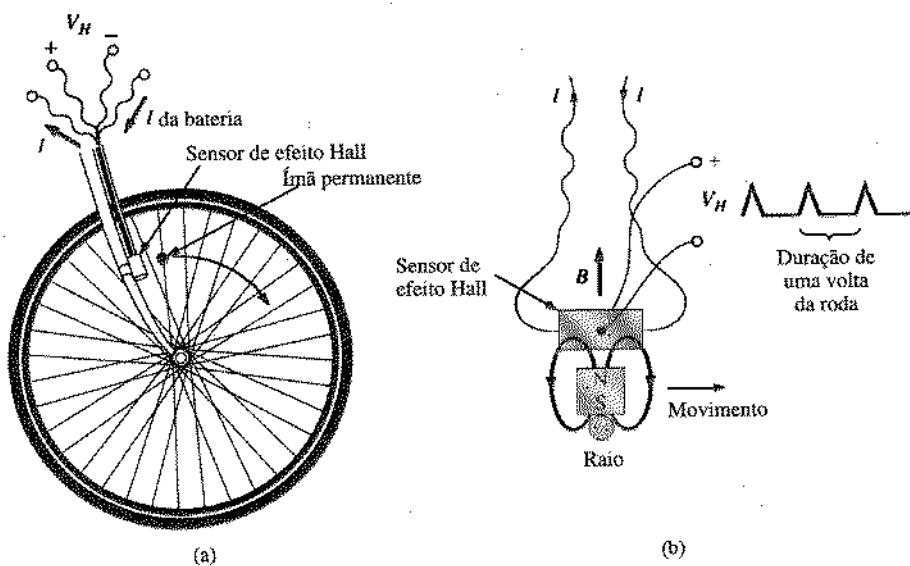


Fig. 11.50 Velocímetro para bicicletas baseado em um sensor Hall: (a) disposição dos componentes, (b) tensão induzida na sonda.

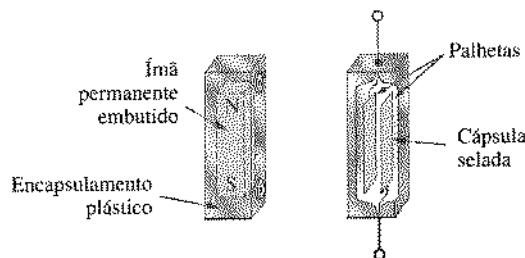


Fig. 11.51 Relé de palhetas.

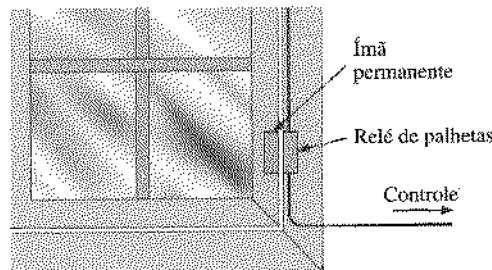


Fig. 11.52 Uso de um relé de palhetas como alarme contra ladrões.

modo a que ele passe nas proximidades do sensor. Quando isto acontece, o sensor é submetido a um campo magnético variável, como se pode ver na Fig. 11.50(b), o que causa o aparecimento de uma tensão entre os terminais da sonda. Supondo uma bicicleta de aro 26, o comprimento da circunferência da roda será aproximadamente 2 m. Depois de percorrer 1 km,* a roda terá efectuado aproximadamente 500 rotações.

Se a bicicleta estiver se movendo a 30 km/h, a freqüência dos pulsos de tensão será de aproximadamente 4 pulsos por segundo. É interessante notar que a essa velocidade a roda completa aproximadamente 4 revoluções por segundo e que o número total de revoluções após a bicicleta percorrer 30 km é 15.000.

Relé Reed

Um dos tipos de relé mais usados em sistemas de alarme é o *relé Reed*** da Fig. 11.51. Como se vê na figura, este relé possui dois componentes: um ímã permanente, que é montado no elemento móvel (porta ou janela, por exemplo), e o relé propriamente dito, que é ligado ao circuito elétrico de controle. O relé Reed é constituído por duas palhetas feitas de uma liga ferromagnética e encapsuladas em um invólucro hermeticamente fechado. As extremidades das duas palhetas não se tocam, mas ficam muito próximas. Na ausência de um campo magnético, elas permanecem separadas. Se um campo magnético for produzido na região onde estão as palhetas, porém, elas se atraíram, pois as linhas de campo procuram sempre o caminho de menor relutância, e, quando possível, estabelecem este caminho de relutância mínima. A situação é semelhante àquela na qual aproximamos uma barra de material ferromagnético das extremidades de um ímã em forma de U. A barra é atraída para os pólos do ímã de modo a formar um circuito magnético sem entresferros e com a menor relutância possível. Quando as palhetas estão separadas, a resistência entre elas é maior do que $100\text{ M}\Omega$; no momento em que se tocam, a resistência cai para menos de $1\ \Omega$.

A Fig. 11.52 mostra um relé Reed instalado na moldura de uma janela. O ímã permanente é montado na própria janela. Quando esta está fechada, como na Fig. 11.52, o ímã e as palhetas estão suficientemente próximos para que o contato entre as palhetas seja fechado, deixando passar uma corrente. A existência desta corrente é interpretada pelo sistema de controle como

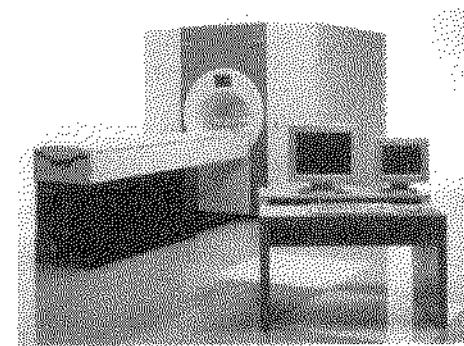


Fig. 11.53 Equipamento de obtenção de imagens por ressonância magnética. (Cortesia da Siemens Medical Systems, Inc.)

uma indicação de que tudo está normal. Quando a janela é aberta, o ímã permanente se afasta das palhetas e o contato entre elas é aberto, cortando a corrente e fazendo soar o alarme.

Uma das vantagens desse tipo de relé é que seu funcionamento pode ser testado facilmente, com a ajuda de um pequeno ímã; basta aproximar-lo e afastá-lo das palhetas e observar como o sistema reage. Além disso, as palhetas ficam no interior de um invólucro hermeticamente fechado que impede que sejam danificadas pela oxidação ou por objetos estranhos. Isso faz com que os relés Reed tenham uma vida útil extremamente longa. Esses relés são fabricados em uma grande variedade de formas e tamanhos, o que permite instalá-los em locais discretos. Um dos modelos é constituído por dois pequenos discos que podem ser instalados, por exemplo, na borda de uma porta e em sua moldura, de modo a permanecerem quase invisíveis quando a porta é aberta.

Formação de Imagens por Ressonância Magnética

A formação de imagens por ressonância magnética, ou MRI,* também chamada de ressonância magnética nuclear, embora seja uma técnica que não serve apenas para a formação de imagens, tem sido alvo de uma atenção cada vez maior à medida que se tenta melhorar a qualidade das imagens em corte do corpo humano, tão úteis para o diagnóstico de doenças. Esta técnica não expõe o paciente aos potencialmente nocivos raios X usados na tomografia computadorizada.

*É interessante observar que a nomenclatura usada no Brasil para o diâmetro das rodas de bicicleta utiliza o diâmetro da roda em polegadas, ou seja, uma bicicleta de aro 26 tem rodas com 26 polegadas de diâmetro. (N. do T.)

**Reed em inglês significa palheta, mas esse tipo de relé, conhecido nos países de língua inglesa como "reed relay", ou seja, "relé de palhetas", no Brasil é chamado de relé Reed. (N. do R.)

*Do inglês Magnetic Resonance Imaging. (N. do R.)

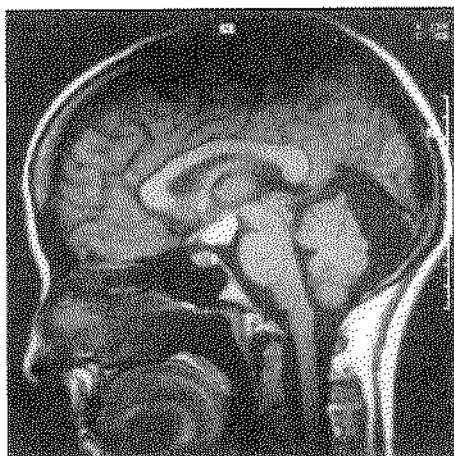


Fig. 11.54 Imagem obtida por ressonância magnética. (Cortesia da Siemens Medical Systems, Inc.)

Os três principais componentes de um sistema de MRI são um grande eletroímã, que pode pesar até 100 toneladas, uma mesa móvel que transporta o paciente para o interior do eletroímã e uma mesa de controle (Fig. 11.53). A imagem é obtida colocando o paciente no interior do eletroímã, em uma posição que depende da parte do corpo a ser examinada, e aplicando um forte campo magnético que provoca o alinhamento dos momentos magnéticos dos núcleos de certos átomos do corpo do paciente. Em seguida são aplicadas ondas de rádio de freqüência variável na região de interesse. Quando a freqüência dessas ondas coincide com a freqüência natural dos núcleos, ocorre uma absorção de energia por parte dos núcleos. Quando o sinal de rádio é removido, os núcleos emitem esta energia na forma de sinais fracos mas que podem ser detectados. A duração e intensidade destes sinais são diferentes para diferentes tecidos do corpo. Os sinais são amplificados, digitalizados e usados para produzir uma imagem em corte como a que aparece na Fig. 11.54.

Os aparelhos de ressonância magnética são muito caros e por isso não são encontrados em todos os hospitais. Nos últimos anos, porém, seu número tem aumentado, e hoje existem aparelhos desse tipo em quase todas as grandes cidades. Alguns pacientes

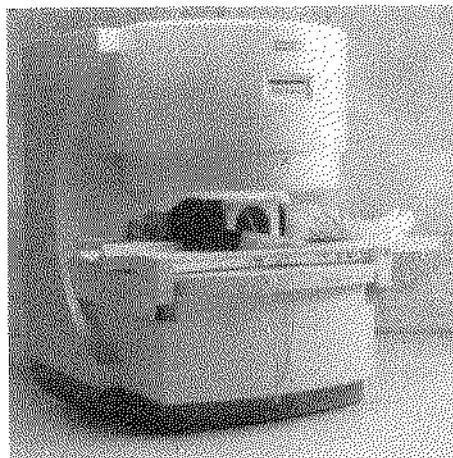


Fig. 11.55 Equipamento de obtenção de imagens por ressonância magnética (versão aberta). (Cortesia da Siemens Medical Systems, Inc.)

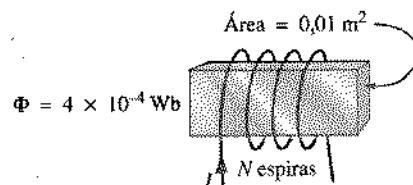


Fig. 11.56 Problema 3.

apresentam sintomas de claustrofobia quando são introduzidos no eletroímã, um problema difícil de contornar. Já existe hoje em dia, entretanto, um modelo mais aberto (Fig. 11.55) que provoca bem menos desconforto nos pacientes.

Os exames de MRI não são recomendados para as pessoas que têm próteses metálicas, usam marcapassos ou trabalham em ambientes industriais nos quais partículas ferromagnéticas possam ter se alojado em partes expostas do corpo, como os olhos e o nariz. Nesses casos, é preferível recorrer à tomografia computadorizada, que não utiliza campos magnéticos.

PROBLEMAS

SEÇÃO 11.3 Densidade de Fluxo Magnético

- Preencha as lacunas na tabela a seguir com o auxílio do Apêndice G. Indique as unidades de Φ e B nos diferentes sistemas.

	Φ	B
SI	$5 \times 10^{-8} \text{ Wb}$	$8 \times 10^{-1} \text{ T}$
CGS	_____	_____
Inglês	_____	_____

- Preencha as lacunas da tabela a seguir com o auxílio do Apêndice G, para uma área de 13 cm^2 , indicando as unidades de Φ e B nos diferentes sistemas.

	Φ	B
SI	_____	_____
CGS	$60\,000 \text{ maxwells}$	_____
Inglês	_____	_____

- Para o eletroímã da Fig. 11.56:
 - Calcule a densidade de fluxo no núcleo.
 - Faça um esboço das linhas de campo e indique o seu sentido.
 - Assinale os pólos norte e sul do eletroímã.

SEÇÃO 11.5 Relutância

- Em qual das situações ilustradas na Fig. 11.57 [(a), (b) ou (c)] é maior a relutância ao longo da maior dimensão?

SEÇÃO 11.6 O Equivalente da Definição de Resistência para Circuitos Magnéticos

- Calcule a relutância de um circuito magnético se a aplicação de uma fmm de 400 A causa o aparecimento de um fluxo magnético $\Phi = 4,2 \times 10^{-4} \text{ Wb}$.

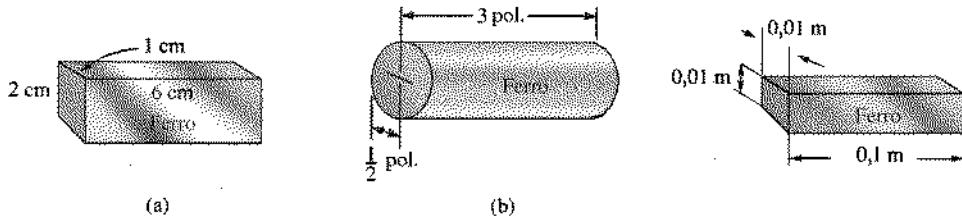


Fig. 11.57 Problema 4.

6. Repita o Problema 5 para $\Phi = 72.000$ maxwells e uma fmm de 120 gilberts.

SEÇÃO 11.7 Força Magnetizante

7. Calcule a força magnetizante H para a situação do Problema 5, em unidades do sistema SI, se o circuito magnético tem 15 cm de comprimento.
 8. A densidade de fluxo B criada no interior de um circuito magnético quando a ele aplicamos uma força magnetizante H de 600 A/m é 1.200×10^{-4} Wb/m². Calcule a permeabilidade μ de um material no qual a mesma força magnetizante causaria uma densidade de fluxo duas vezes maior.

SEÇÃO 11.8 Histerese

9. Determine, para o circuito magnético da Fig. 11.58, a corrente I necessária para gerar o fluxo magnético indicado.

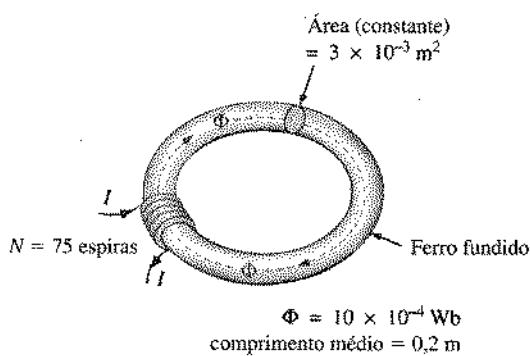


Fig. 11.58 Problema 9.

10. Encontre a corrente necessária para estabelecer um fluxo $\Phi = 3 \times 10^{-4}$ Wb no circuito magnético da Fig. 11.59.

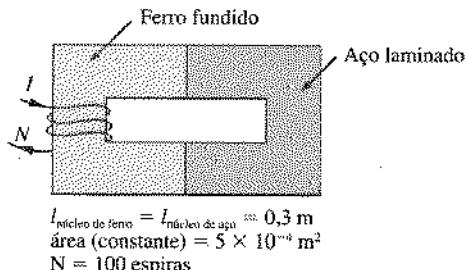


Fig. 11.59 Problema 10.

11. a. Calcule o número N , de espiras necessário para gerar um fluxo $\Phi = 12 \times 10^{-4}$ Wb no circuito magnético da Fig. 11.60.
 b. Calcule a permeabilidade μ do material.

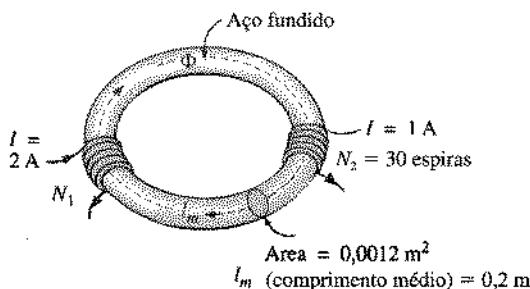


Fig. 11.60 Problema 11.

12. a. Ache a fmm (NI) necessária para que o fluxo no circuito magnético da Fig. 11.61 seja $\Phi = 80.000$ linhas/m².
 b. Calcule as permeabilidades dos dois materiais.

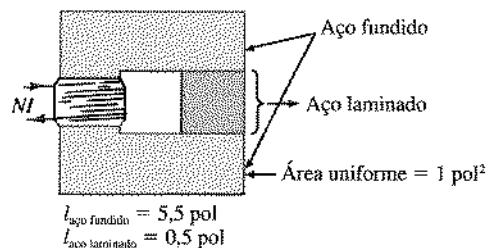


Fig. 11.61 Problema 12.

- *13. Calcule a corrente I no circuito magnético da Fig. 11.62, no qual existem duas fontes de "pressão" magnética. As duas fmm aplicadas estabelecem fluxos magnéticos no sentido horário.

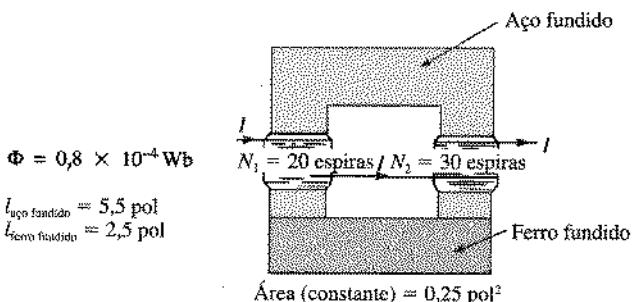


Fig. 11.62 Problema 13.

SEÇÃO 11.12 Entreferros

14. a. Calcule a corrente I necessária para que o fluxo magnético Φ no circuito da Fig. 11.63 seja $2,4 \times 10^{-4}$ Wb.
 b. Compare a queda de fmm no entreferro com a queda no resto do circuito. Discuta os resultados à luz dos valores de μ no aço e no ar.

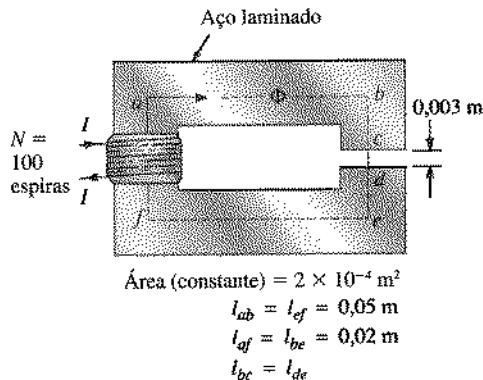


Fig. 11.63 Problema 14.

- *15. A força exercida sobre o martelo de campainha da Fig. 11.64 é dada por

$$f = \frac{1}{2} NI \frac{d\phi}{dx} \quad (\text{newtons})$$

onde $\frac{d\phi}{dx}$ é a taxa de variação do fluxo magnético no interior da bobina quando o martelo é puxado para o seu interior. Esta taxa de variação é máxima quando o martelo ocupa 25% a 75% do espaço interno da bobina. Se neste trecho do percurso Φ varia de $0,5 \times 10^{-4}$ Wb para 8×10^{-4} Wb, qual é a força exercida sobre o martelo?

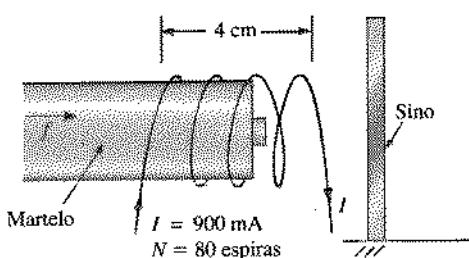


Fig. 11.64 Campainha de porta (Problema 15).

16. Determine a corrente I_1 necessária para estabelecer um fluxo $\Phi = 2 \times 10^{-4}$ Wb no circuito magnético da Fig. 11.65.

- *17. a. Um fluxo de $0,2 \times 10^{-4}$ Wb faz com que o solenóide da Fig. 11.66atraia a armadura com força suficiente para vencer a resistência da mola e fechar os contatos. Calcule a corrente necessária para gerar este fluxo, supondo que toda a queda de fmm ocorre no entreferro.
 b. A força exercida sobre a armadura é dada pela equação

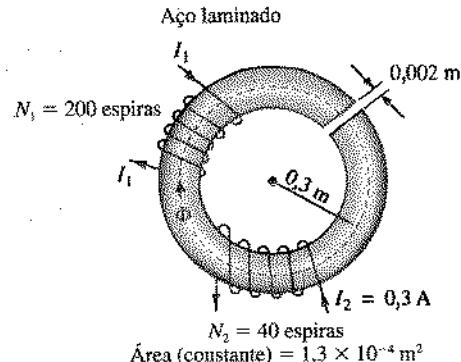


Fig. 11.65 Problema 16.

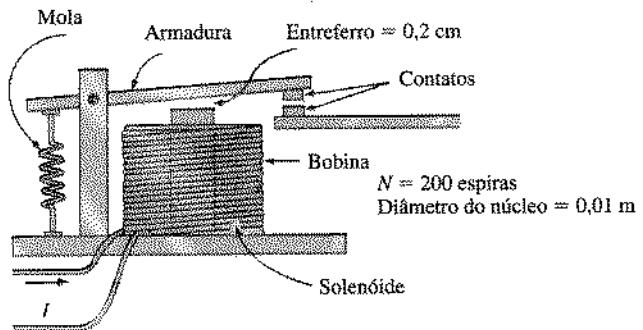


Fig. 11.66 Relé (Problema 17).

$$F \text{ (newtons)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_e^2 A}{\mu_o}$$

onde B_e é a densidade de fluxo no entreferro e A é a área da seção reta do núcleo do solenóide. Calcule a força em newtons a que é submetida a armadura quando o fluxo Φ tem o valor especificado no item (a).

- *18. Calcule para o circuito em série-paralelo da Fig. 11.67 o valor de I para que o fluxo no entreferro seja $\Phi_c = 2 \times 10^{-4}$ Wb.

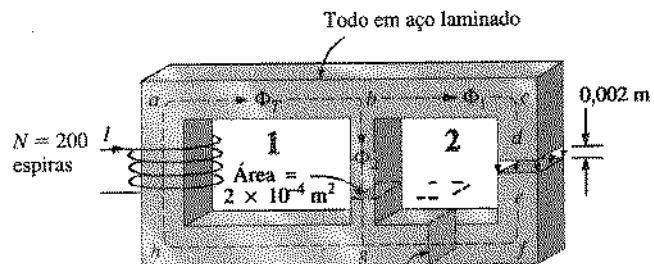


Fig. 11.67 Problema 18.



SEÇÃO 11.14 Determinação de Φ

19. Calcule o valor do fluxo magnético no circuito em série da Fig. 11.68.

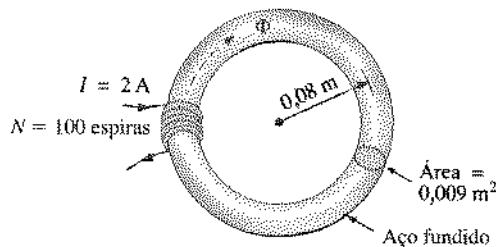


Fig. 11.68 Problema 19.

- *20. Calcule o valor do fluxo magnético no circuito da Fig. 11.69.

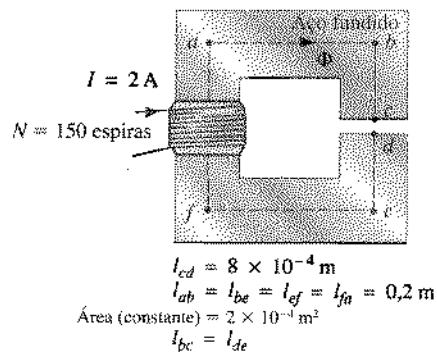


Fig. 11.69 Problema 20.

GLOSSÁRIO

Densidade de Fluxo Magnético (B) Fluxo por unidade de área perpendicular às linhas de campo. Sua unidade no sistema SI é o Tesla, que equivale a 1 Weber/m².

Domínio magnético Região no interior dos materiais ferromagnéticos na qual os spins estão todos alinhados.

Eletromagnetismo Parte da física que estuda as propriedades dos campos elétricos e magnéticos e suas interações com cargas e correntes elétricas.

Força Magnetizante (H) Força magnetomotriz por unidade de comprimento.

Força Magnetomotriz (\mathcal{F}) “Pressão” necessária para gerar um fluxo magnético em um material ferromagnético. É medida em ampères (A).

Histerese Defasagem entre a densidade de fluxo magnético em um material e a força magnetizante aplicada.

Ímã Permanente Material que permanece magnetizado por um longo tempo sem necessidade de uma fonte externa de energia.

*21. Observe que a curva $B-H$ para o aço fundido (Fig. 11.23) é semelhante à curva da tensão entre os terminais de um capacitor quando ele está sendo carregado.

- Fazendo uma analogia com a equação para a tensão entre os terminais de um capacitor, escreva uma equação para B em função de H ($[B = f(H)]$) para o caso do aço fundido.
- Verifique a equação para $H = 900 \text{ A/m}$, 1.800 A/m e 2.700 A/m .
- Utilizando a expressão obtida no item (a), obtenha a função inversa $H = f(B)$.
- Teste a validade da expressão obtida em (c) para $B = 1 \text{ T}$ e $B = 1,4 \text{ T}$.
- Resolva o problema do Exemplo 11.3 usando o resultado do item (c) e compare o valor de I com o que foi obtido originalmente.

PROBLEMAS UTILIZANDO COMPUTADORES

Linguagens de Programação (C++, BASIC, PASCAL etc.)

*22. Utilizando os resultados do Problema 21, escreva um programa para realizar uma análise semelhante à do Exemplo 11.3, isto é, para calcular a corrente no enrolamento necessário para gerar um fluxo magnético $\Phi = 4 \times 10^{-4} \text{ Wb}$. Considere as dimensões do núcleo e o número de espiras do enrolamento como dados de entrada do programa.

*23. Utilizando os resultados do Problema 21, escreva um programa para realizar uma análise semelhante à do Exemplo 11.9, isto é, para calcular o fluxo magnético a partir da fmm. Será preciso escrever uma rotina de teste para verificar se o valor obtido para a fmm está suficientemente próximo do valor especificado.

Lei de Ampère para circuitos magnéticos Lei segundo a qual a soma algébrica das variações de fmm ao longo de um circuito magnético fechado é nula.

Linhas de Campo Linhas usadas para representar graficamente a intensidade e orientação do campo magnético em uma região do espaço.

Materiais Diamagnéticos Materiais cuja permeabilidade é menor que a do vácuo.

Materiais Ferromagnéticos Materiais cuja permeabilidade é centenas ou até milhares de vezes maior que a do vácuo.

Materiais Paramagnéticos Materiais cuja permeabilidade é ligeiramente maior do que a do vácuo.

Permeabilidade (μ) Grandeza que expressa a maior ou menor facilidade para estabelecer um fluxo magnético em um material. É medida em Wb/Am .

Permeabilidade Relativa (μ_r) Razão entre a permeabilidade de um material e a do vácuo.

Relutância (\mathcal{R}) Grandeza que expressa a “relutância” de um material em se deixar atravessar por linhas de campo. É medida em reis ou A/Wb .

12

Indutores

12.1 INTRODUÇÃO

Em capítulos anteriores discutimos com detalhes o funcionamento de dois elementos passivos dos circuitos elétricos, o resistor e o capacitor. Neste capítulo vamos discutir um terceiro elemento, o *indutor*, que possui várias características de resposta semelhantes em muitos aspectos às do capacitor. De fato, algumas seções deste capítulo tratarão as características do indutor da mesma forma que as do capacitor, para reforçar a semelhança entre os dois elementos.

12.2 A LEI DE FARADAY PARA A INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA

Quando um condutor retilíneo se desloca em um campo magnético de tal forma que o número de linhas de campo que o atravessam varia com o tempo, é induzida uma ddp entre seus terminais (Fig. 12.1).

Se uma bobina de N espiras é colocada em uma região onde o fluxo está variando, como na Fig. 12.2, a tensão induzida na bobina pode ser calculada com o auxílio da *lei de Faraday*:

$$e = N \frac{d\phi}{dt} \quad (\text{volts, V}) \quad (12.1)$$

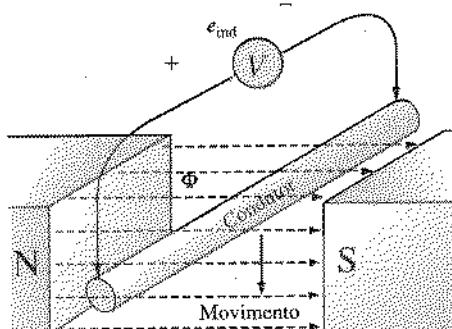


Fig. 12.1 Movendo um condutor em um campo magnético para gerar uma tensão induzida.

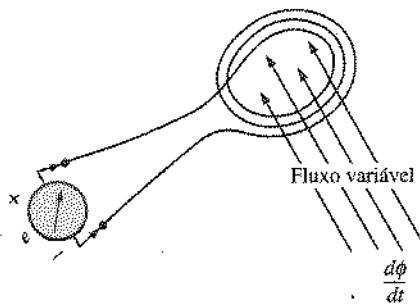


Fig. 12.2 Ilustração da lei de Faraday.

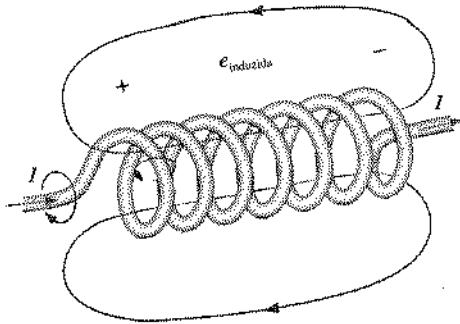


Fig. 12.3 Ilustração da lei de Lenz.

onde N é o número de espiras da bobina e $d\phi/dt$ é a taxa de variação do fluxo que atravessa a bobina. Para que o fluxo varie, basta que a bobina esteja se movendo em uma região onde o campo não é uniforme ou que a intensidade do campo esteja variando.

Se o fluxo que atravessa a bobina se mantiver constante, isto é, se a bobina estiver imóvel em um campo magnético de intensidade constante ou estiver se movendo em um campo magnético uniforme de intensidade constante, $d\phi/dt = 0$ e portanto, de acordo com a Eq. (12.1), $e = 0$.

12.3 A LEI DE LENZ

Na Seção 11.2, vimos que o campo magnético nas vizinhanças de uma bobina de N espiras percorrida por uma corrente I tem o aspecto da Fig. 12.3.

Quando a corrente varia, o fluxo que atravessa a bobina também varia. Como foi visto na Seção 12.2, essa variação do fluxo induz uma tensão entre os terminais da bobina. A polaridade dessa tensão é tal que ela tende a estabelecer uma corrente na bobina que produz um fluxo no sentido contrário do fluxo original. Em outras palavras, se a tensão é induzida por um aumento da corrente, a polaridade é no sentido de diminuir a corrente; se é induzida por uma diminuição da corrente, a polaridade é no sentido de reduzi-la. Não se esqueça de que tudo isso está acontecendo ao mesmo tempo. No instante em que a corrente começa a aumentar, surge um efeito oposto que tende a limitar o aumento. Na verdade, como veremos daqui a pouco, a corrente em uma bobina não varia instantaneamente; apenas depois de transcorrido um certo tempo, que depende das características da bobina e da resistência do circuito, é que a bobina deixa de se opor à varia-

No início do século XIX, o título professor de filosofia natural era associado aos educadores que trabalhavam na área das ciências naturais. Como estudante e professor da Albany Academy, Joseph Henry realizou extensas pesquisas na área de eletromagnetismo; melhorou o desempenho dos *eletromãs* isolando o fio usado no enrolamento para permitir uma maior densidade de espiras. Um dos seus primeiros modelos era capaz de levantar um peso de 1600 kg. Em 1832, descobriu o fenômeno da *auto-indução* e publicou um artigo a respeito. Mais tarde, desenvolveu um *transmissor e receptor telegráfico* e pesquisou as oscilações resultantes das descargas de uma *garrafa de Leyden*. Em 1845, tornou-se a primeira pessoa a ocupar o cargo de Secretário da Smithsonian Institution.



Americano (Albany, Princeton) (1797-1878)
Físico e matemático, professor de filosofia natural, Princeton University. Cortesia da Smithsonian Institution, Foto N.º 59054.

Fig. 12.4 Joseph Henry.

ção de corrente. Como vimos no Cap. 10, algo semelhante ocorre com a tensão entre as placas de um capacitor. Esta reação, que ocorre tanto quando a corrente na bobina está aumentando como quando está diminuindo, é um exemplo de um princípio geral, conhecido como *lei de Lenz*, segundo o qual

um efeito induzido ocorre sempre de forma a se opor à causa que o produziu.

12.4 AUTO-INDUTÂNCIA

A propriedade de uma bobina de se opor a qualquer variação de corrente é medida pela sua *auto-indutância*, L . O prefixo *auto* é freqüentemente descartado. A indutância é medida em henries (H), em homenagem ao físico norte-americano Joseph Henry (Fig. 12.4).

Os *indutores* são bobinas de várias dimensões projetadas para introduzir quantidades específicas de indutância em um circuito. A indutância de uma bobina depende das propriedades magnéticas de seu núcleo. Materiais ferromagnéticos são freqüentemente usados para aumentar a indutância, aumentando o fluxo no interior da bobina.

A indutância das bobinas da Fig. 12.5 pode ser calculada, com boa aproximação, através da equação

$$L = \frac{N^2 \mu A}{l} \quad (\text{henries, H}) \quad (12.2)$$

onde N é o número de espiras; μ , a permeabilidade do núcleo (definida na Seção 11.4; lembre-se de que μ não é uma constante, mas depende dos valores de B e H : $\mu = B/H$); A é a área da seção reta do núcleo em metros quadrados e l é o comprimento do núcleo em metros.

Fazendo $\mu = \mu_r \mu_0$, na Eq. 12.2, temos:

$$L = \frac{N^2 \mu_r \mu_0 A}{l} = \mu_r \frac{N^2 \mu_0 A}{l}$$

e

$$L = \mu_r L_0 \quad (12.3)$$

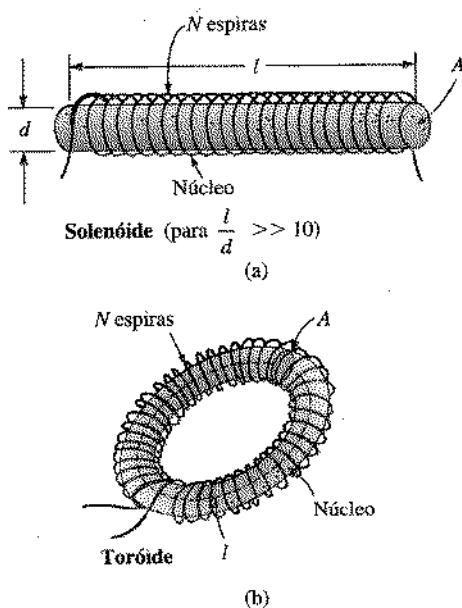


Fig. 12.5 Geometrias de indutores para as quais a Eq. 12.2 é apropriada.

onde L_o é a indutância da bobina com um núcleo de ar. Em outras palavras, a indutância de uma bobina com um núcleo ferromagnético é igual à indutância da mesma bobina com um núcleo de ar multiplicada pela permeabilidade relativa do núcleo.

Alguns manuais de componentes elétricos apresentam equações mais precisas (e geralmente mais complicadas) do que a Eq. (12.2) para calcular a indutância de bobinas com diferentes geometrias.

EXEMPLO 12.1 Encontre a indutância da bobina de núcleo de ar da Fig. 12.6.

Solução:

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_r \mu_0 = (1)(\mu_0) = \mu_0 \\ A &= \frac{\pi d^2}{4} = \frac{(\pi)(4 \times 10^{-3} \text{ m})^2}{4} = 12,57 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \\ L_o &= \frac{N^2 \mu_0 A}{l} = \frac{(100)^2 (4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A} \cdot \text{m})(12,57 \times 10^{-6} \text{ m}^2)}{0,1 \text{ m}} \\ &= 1,58 \mu\text{H}\end{aligned}$$

EXEMPLO 12.2 Repita o Exemplo 12.2, mas com um núcleo de ferro, supondo que $\mu_r = 2000$.

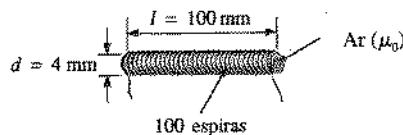


Fig. 12.6 Exemplo 12.1.

Solução: De acordo com a Eq. 12.3,

$$L = \mu_r L_o = (2000)(1,58 \times 10^{-6} \text{ H}) = 3,16 \text{ mH}$$

12.5 TIPOS DE INDUTORES

Equivalentes Práticos

Os indutores, como os capacitores, não são ideais. Na prática, todo indutor apresenta, além da indutância, uma resistência (a do fio de que é feito) e uma capacitância (a capacitância parásita entre as espiras). Para levar em conta esses efeitos, é preciso representar o indutor por um circuito equivalente como o da Fig. 12.7. Entretanto, para a maioria das aplicações consideradas neste texto, a capacitância parásita pode ser ignorada, de modo que será usado um circuito equivalente como o da Fig. 12.8. A resistência R_i pode ter um papel muito importante na análise de circuitos com elementos indutivos. Podemos tratar o capacitor como um elemento ideal na maioria das aplicações e ainda assim manter um alto grau de precisão. No caso dos indutores, porém, a resistência R_i precisa ser incluída na análise e pode ter um efeito considerável na resposta do sistema (veja o Cap. 20, "Ressonância"). O valor de R_i pode ser de alguns ohms até centenas de ohms. Quanto mais longo e mais fino o fio usado no indutor, maior será a sua resistência, já que $R = \rho l / A$. Em nossa análise inicial, vamos tratar o indutor como um elemento ideal. Depois de examinarmos os aspectos gerais do comportamento de um componente indutivo, incluiremos os efeitos de R_i .

Símbolos

Os símbolos usados para representar indutores ideais aparecem na Fig. 12.9.

Aparência

Os indutores, como os capacitores, podem ser divididos em duas categorias: *fixos* e *variáveis*. Os indutores fixos com núcleo de ar ou de ferro foram descritos na seção anterior. Os indutores variáveis possuem um núcleo de material ferromagnético cuja

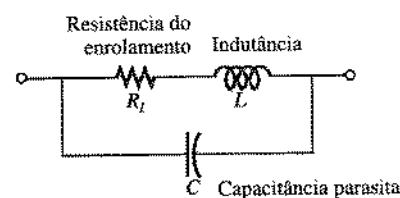


Fig. 12.7 Circuito equivalente completo de um indutor.



Fig. 12.8 Circuito equivalente prático de um indutor.

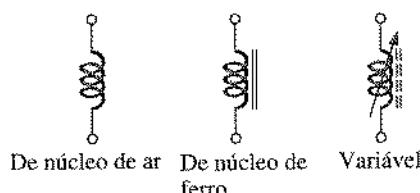


Fig. 12.9 Símbolos de indutores.

posição pode ser ajustada mecanicamente, fazendo variar a permeabilidade e portanto a indutância. A Fig. 12.10 mostra alguns tipos de indutores comerciais.

Testes

Quando um indutor não funciona corretamente em um circuito mas o fio de que é feito não está interrompido (o que pode ser verificado facilmente com o auxílio de um ohmímetro: se o fio estiver interrompido, o instrumento indicará uma resistência infinita), é provável que algumas de suas espiras estejam em curto-circuito. Nem sempre é fácil diagnosticar este defeito, porque a resistência dos indutores de boa qualidade é relativamente pequena e um curto em algumas espiras não irá afetar a resistência total de modo significativo. É claro que, se você souber o valor da resistência da bobina com boa precisão, poderá testá-la medindo a resistência e comparando o resultado com o valor conhecido. Um curto entre as espiras e o núcleo pode ser verificado encostando uma ponta de prova do medidor em um dos terminais do indutor e a outra no núcleo. Se o medidor indicar resistência zero, isso significa que há um curto. O medidor universal da Fig. 10.20 pode ser usado para verificar o valor da indutância.

Valores-Padrão

Os valores-padrão dos indutores são calculados com o auxílio dos mesmos multiplicadores usados para determinar os valores-padrão dos resistores e capacitores (Tabela 3.8). Assim, os valores comerciais obedecem à seguinte seqüência: **0,1 μ H, 0,12 μ H, 0,15 μ H, 0,18 μ H, 0,22 μ H, 0,27 μ H, 0,33 μ H, 0,39 μ H, 0,47 μ H, 0,56 μ H, 0,68 μ H e 0,82 μ H, 1 μ H, 1,2 μ H, 1,5 μ H, 1,8 μ H, 2,2 μ H, 2,7 μ H e assim por diante.**

O objetivo da Fig. 12.11 é familiarizar o leitor com os vários tipos de indutores e suas aplicações. Embora nem todos os tipos de indutores estejam representados, a figura dá ao leitor uma boa idéia do que esperar em termos de indutores para várias aplicações.

12.6 TENSÃO INDUZIDA

A indutância de um indutor também é uma medida da taxa de variação do fluxo no seu interior com a corrente aplicada:

$$L = N \frac{d\phi}{di} \quad (H) \quad (12.4)$$

onde N é o número de espiras, ϕ é o fluxo magnético e i a corrente. A indutância de um indutor depende do ponto da curva de histerese em que ele se encontra (veja a Seção 11.8). Se nesse ponto a curva B-H for muito inclinada, uma pequena variação da corrente provocará uma variação relativamente grande do fluxo e portanto a indutância será elevada. Por outro lado, se o indutor estiver operando perto da saturação, a variação do fluxo será pequena, mesmo para correntes elevadas, e portanto a indutância será pequena. Este efeito é particularmente importante quando analisamos circuitos de corrente alternada, já que uma componente de corrente contínua pode levar o indutor às proximidades da saturação, fazendo com que sua

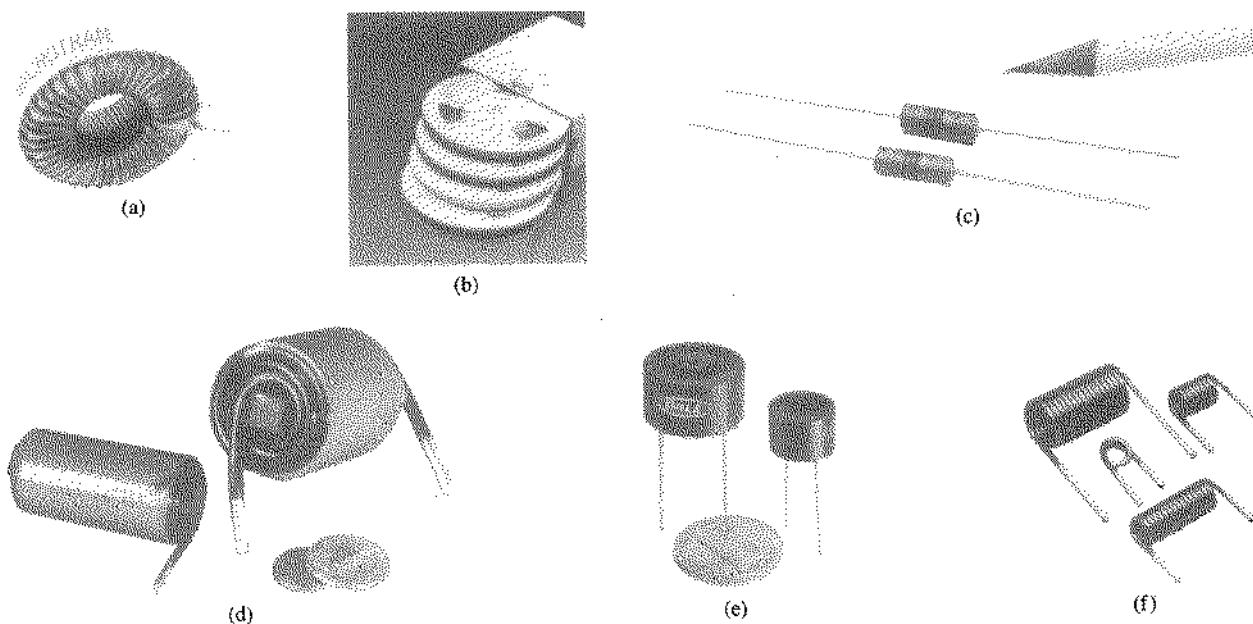


Fig. 12.10 Vários tipos de indutores: (a) Indutor toroidal de potência (1,4 μ H a 5,6 mH) (cortesia da Microtan Co., Inc.); (b) indutores planos em carretéis (0,1 μ H até 1.000 μ H em carretéis de 500 peças em 46 valores) (cortesia da Bell Industries); (c) indutores encapsulados (0,1 μ H a 10 μ H); (d) indutores de filtro de alta corrente (24 μ H a 60 A até 500 μ H a 15 A); (e) indutores de filtro toroidais (40 μ H a 5 H); (f) indutores de núcleo de ar (1 a 32 espiras) para aplicações em altas freqüências. (Fotos (c) a (f) cortesia da Dale Electronics, Inc.)

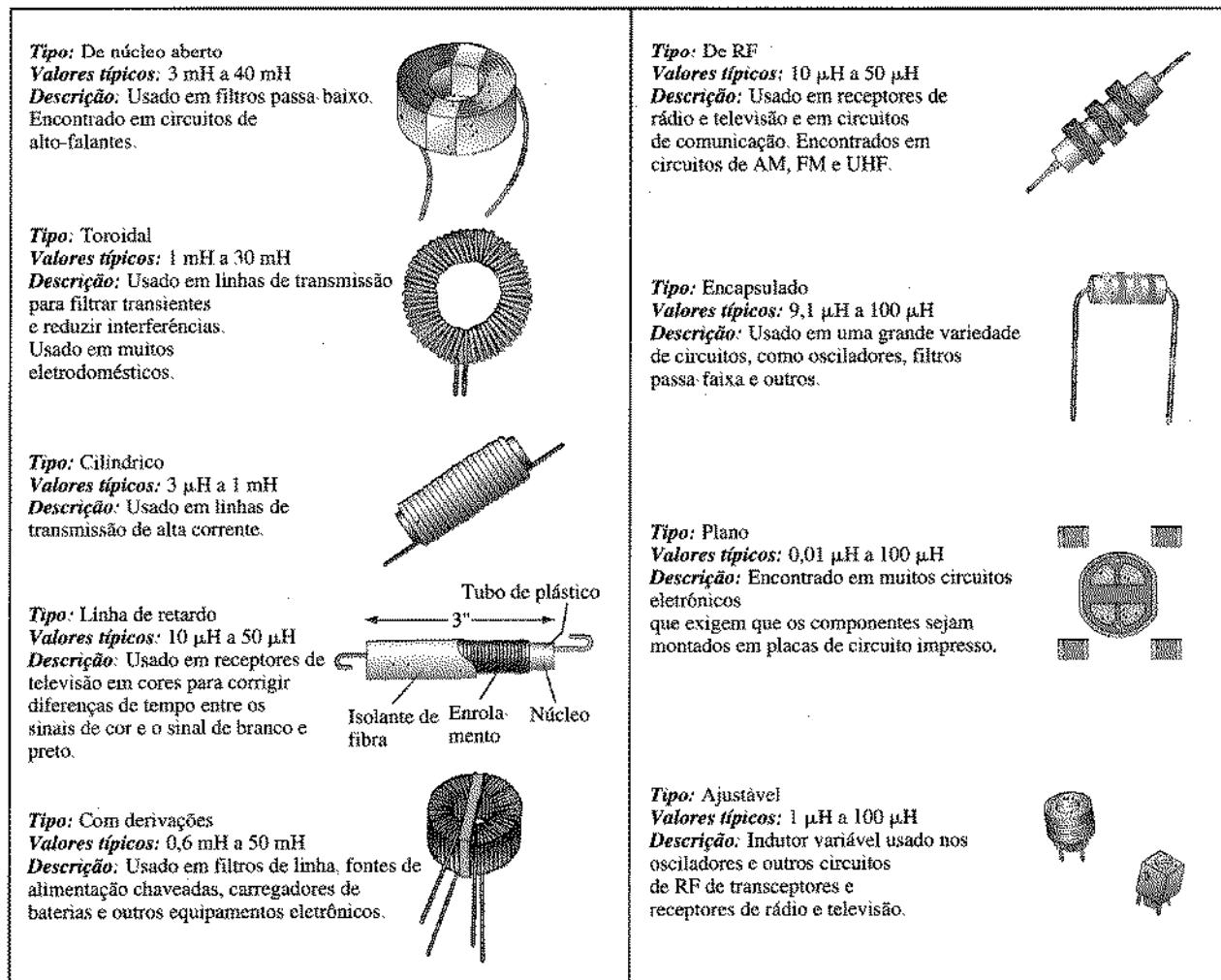


Fig. 12.11 Vários tipos de resistores e suas aplicações.

indutância para correntes alternadas seja bem menor do que o previsto. Os manuais e folhas de especificações dos indutores costumam indicar o valor máximo de corrente contínua que pode ser aplicado ao componente sem que ele entre na região de saturação.

A Eq. 12.4 também mostra que quanto maior a indutância de um indutor (com N constante), maior a mudança instantânea fluxo no seu interior devido a uma mudança instantânea na corrente.

Se escrevermos a Eq. 12.1 como

$$e_L = N \frac{d\phi}{dt} = \left(N \frac{d\phi}{di} \right) \left(\frac{di}{dt} \right)$$

e substituirmos $Nd\phi/dt$ por seu valor, dado pela Eq. 12.4, teremos:

$$e_L = L \frac{di}{dt}$$

(V)

(12.5)

o que mostra que a tensão entre os terminais de um indutor é diretamente proporcional à indutância L e à taxa instantânea de variação da corrente. É óbvio, portanto, que quanto maior a taxa de variação da corrente no indutor, maior a tensão induzida. Isto certamente está de acordo com a nossa discussão anterior da lei de Lenz.

Quando a tensão induzida é usada para alimentar circuitos, como acontece no caso dos geradores, costuma-se usar o símbolo v_L para representá-la. Na análise de circuitos, porém, a tensão induzida pode ser considerada uma queda de tensão e portanto usaremos deste ponto em diante a seguinte notação:

$$v_L = -L \frac{di}{dt} \quad (12.6)$$

Se a corrente no indutor deixar de variar, a tensão induzida entre seus terminais será zero. No caso de circuitos de corrente contínua, após os efeitos transientes terem cessado, $di/dt = 0$ e a tensão induzida é dada por

$$v_L = L \frac{di}{dt} = L(0) = 0 \text{ V}$$

Lembre-se de que a equação para a corrente em um capacitor é:

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

Note a semelhança entre a equação acima e a Eq. 12.6. De fato, se aplicarmos as dualidades $v \rightleftharpoons i$ e $L \rightleftharpoons LC$, poderemos obter uma das equações a partir da outra.

A tensão média entre os terminais do indutor é dada pela equação

$$v_{L_{\text{av}}} = L \frac{\Delta i}{\Delta t} \quad (\text{V}) \quad (12.7)$$

onde Δ representa uma variação finita (uma variação que possa ser medida). A Eq. 12.7 é análoga à equação $i_C = C(\Delta v/\Delta t)$, já discutida no Cap. 10. Segue um exemplo.

EXEMPLO 12.3 Encontre a forma de onda da tensão média entre os terminais de um indutor de 4 mH, sabendo que a corrente no indutor varia com o tempo da forma indicada na Fig. 12.12.

Solução:

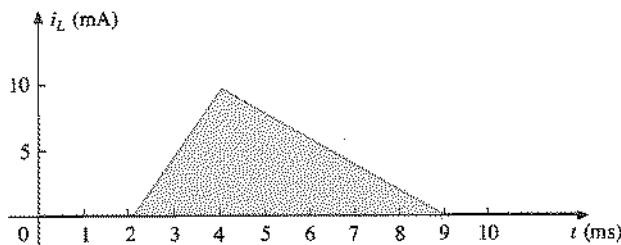


Fig. 12.12 Exemplo 12.3.

a. De 0 a 2 ms: como a corrente no indutor não varia, a tensão induzida é nula:

$$v_L = L \frac{\Delta i}{\Delta t} = L \frac{0}{\Delta t} = 0$$

b. De 2 ms a 4 ms:

$$\begin{aligned} v_L &= L \frac{\Delta i}{\Delta t} = (4 \times 10^{-3} \text{ H}) \left(\frac{10 \times 10^{-3} \text{ A}}{2 \times 10^{-3} \text{ s}} \right) = 20 \times 10^{-3} \text{ V} \\ &= 20 \text{ mV} \end{aligned}$$

c. De 4 ms a 9 ms:

$$\begin{aligned} v_L &= L \frac{\Delta i}{\Delta t} = (-4 \times 10^{-3} \text{ H}) \left(\frac{10 \times 10^{-3} \text{ A}}{5 \times 10^{-3} \text{ s}} \right) = -8 \times 10^{-3} \text{ V} \\ &= -8 \text{ mV} \end{aligned}$$

d. De 9 ms a ∞ :

$$v_L = L \frac{\Delta i}{\Delta t} = L \frac{0}{\Delta t} = 0$$

A Fig. 12.13 mostra a forma de onda da tensão média entre os terminais do indutor. Observe que

a tensão induzida no indutor não depende da variação da corrente que o atravessa (Δi) e sim da taxa de variação da corrente ($\Delta i/\Delta t$).

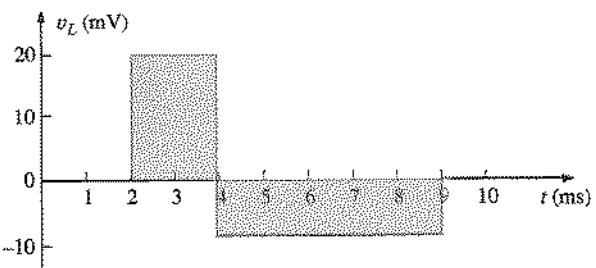


Fig. 12.13 Tensão em uma bobina de 4 mH devido à corrente da Fig. 12.12.

Uma afirmação semelhante foi feita para a corrente em um capacitor devido à variação da tensão aplicada.

Um exame cuidadoso da Fig. 12.13 também revela que a área sob o pulso positivo, de 2 a 4 ms, é igual à área sob o pulso negativo, de 4 a 9 ms. Na Seção 12.13 veremos que as áreas sob as duas curvas representam, respectivamente, a energia armazenada e a energia fornecida pelo indutor. De 2 a 4 ms, o indutor está armazenando energia; de 4 a 9 ms, está devolvendo ao circuito a energia armazenada. Durante todo o período, de 0 a 10 ms, a energia é simplesmente armazenada e devolvida; não há nenhuma dissipação como a que ocorre em elementos resistivos. Durante um ciclo completo, o capacitor e o indutor ideais não consomem energia, mas se limitam a armazená-la durante parte do ciclo e cedê-la durante a parte restante.

12.7 TRANSIENTES EM CIRCUITOS R-L: FASE DE ARMAZENAMENTO

As variações de corrente e tensão que ocorrem em um circuito de corrente contínua quando um indutor armazena energia sob a forma de um campo magnético podem ser mais bem compreendidas se examinarmos o circuito da Fig. 12.14. No instante em que a chave é fechada, a indutância do indutor não permite que ocorra uma variação instantânea da corrente. A queda de potencial no indutor, v_L , é igual à tensão aplicada E , como determina a lei de Kirchhoff para tensões, pois $v_R = iR = (0)R = 0 \text{ V}$. A corrente i_L parte portanto de zero, estabelecendo uma queda de tensão no resistor e uma redução correspondente de v_L . A corrente continua a crescer até que a queda de tensão no indutor chegue a zero e a queda de tensão no resistor seja igual à tensão da fonte. A corrente aumenta rapidamente a princípio e depois passa a aumentar mais devagar até atingir o valor final, E/R .

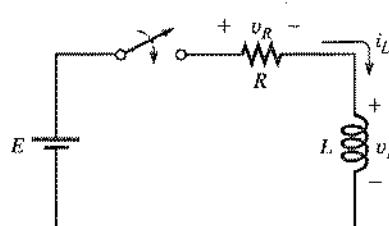


Fig. 12.14 Circuito R-L básico.

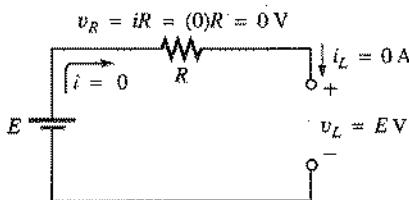


Fig. 12.15 O circuito da Fig. 12.14 no instante em que a chave é fechada.

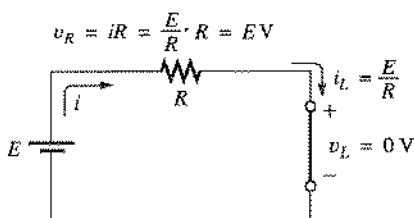


Fig. 12.16 O circuito da Fig. 12.14 no estado estacionário.

No capítulo sobre capacitores vimos que um capacitor se comporta como um curto-circuito no momento em que uma tensão contínua é aplicada e como um circuito aberto quando o circuito atinge o estado estacionário. No caso do indutor acontece exatamente o oposto. No instante em que a chave da Fig. 12.14 é fechada, temos o circuito equivalente da Fig. 12.15. O indutor obviamente se comporta como um curto-circuito, pois $v_L = E$, $i_L = 0$.

Quando o circuito chega ao estado estacionário, a fase de armazenamento está encerrada, e o circuito equivalente passa a ser o da Fig. 12.16. O circuito mostra claramente que:

Quando um circuito de corrente contínua atinge o estado estacionário, qualquer indutor ideal ($R_i = 0 \Omega$) passa a se comportar como um curto-circuito.

Felizmente, as expressões matemáticas para a tensão e a corrente na fase de armazenamento são semelhantes, sob vários aspectos, às encontradas nos circuitos R-C. A experiência obtida com essas equações no Cap. 10 irá facilitar o entendimento das equações dos circuitos R-L.

A equação para a corrente i_L durante a fase de armazenamento é a seguinte:

$$i_L = I_m(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/(L/R)}) \quad (12.8)$$

Observe o fator $(1 - e^{-t/\tau})$, que também aparece na equação da v_C em um capacitor durante a fase de carga. O gráfico da Eq. 12.8 (Fig. 12.17) mostra que o valor máximo de i_L é E/R e que a taxa de variação da corrente diminui com o tempo. Na Fig. 12.17, o tempo (eixo das abscissas) está expresso em constantes de tempo. No caso de circuitos indutivos, a constante de tempo τ é dada pela seguinte equação:

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}} \quad (\text{segundos, s}) \quad (12.9)$$

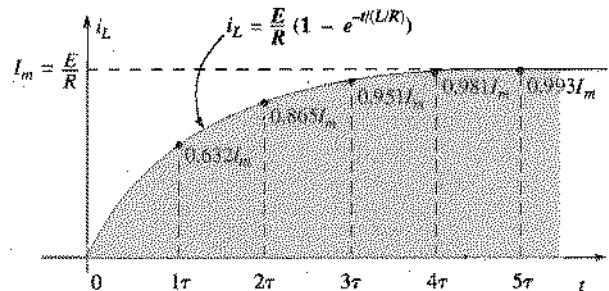


Fig. 12.17 Gráfico da forma de onda de i_L durante o ciclo de armazenamento.

O fato de que τ tem dimensão de tempo pode ser verificado a partir da expressão para a tensão induzida,

$$v_L = L \frac{di}{dt}$$

tirando o valor de L , temos:

$$L = \frac{v_L}{di/dt}$$

e portanto

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{\frac{v_L}{di/dt}}{R} = \frac{v_L}{\frac{di}{dt} R} = \frac{V}{IR} = \frac{V}{\frac{I}{t}} = \frac{V}{I} = \frac{Y}{t} \quad (\text{s})$$

Já sabemos que o valor de $(1 - e^{-t/\tau})$ é 0,632 após transcorrida uma constante de tempo, 0,865 após transcorridas duas constantes de tempo etc. Por conveniência, a Fig. 10.28 é repetida como a Fig. 12.18, para obtermos valores das funções $(1 - e^{-t/\tau})$ e $e^{-t/\tau}$ para vários valores de τ .

Se mantivermos R constante e aumentarmos L , a razão L/R aumentará, fazendo aumentar o tempo de subida. A Fig. 12.19 mostra a variação da corrente i_L com o tempo para três valores diferentes de L . Note a semelhança entre essas curvas e as da tensão em um circuito R-C (Fig. 10.31).

Para a maioria das aplicações práticas, iremos supor que:

A fase de armazenamento termina e o circuito R-L entra no estado estacionário após um período equivalente a cinco constantes de tempo.

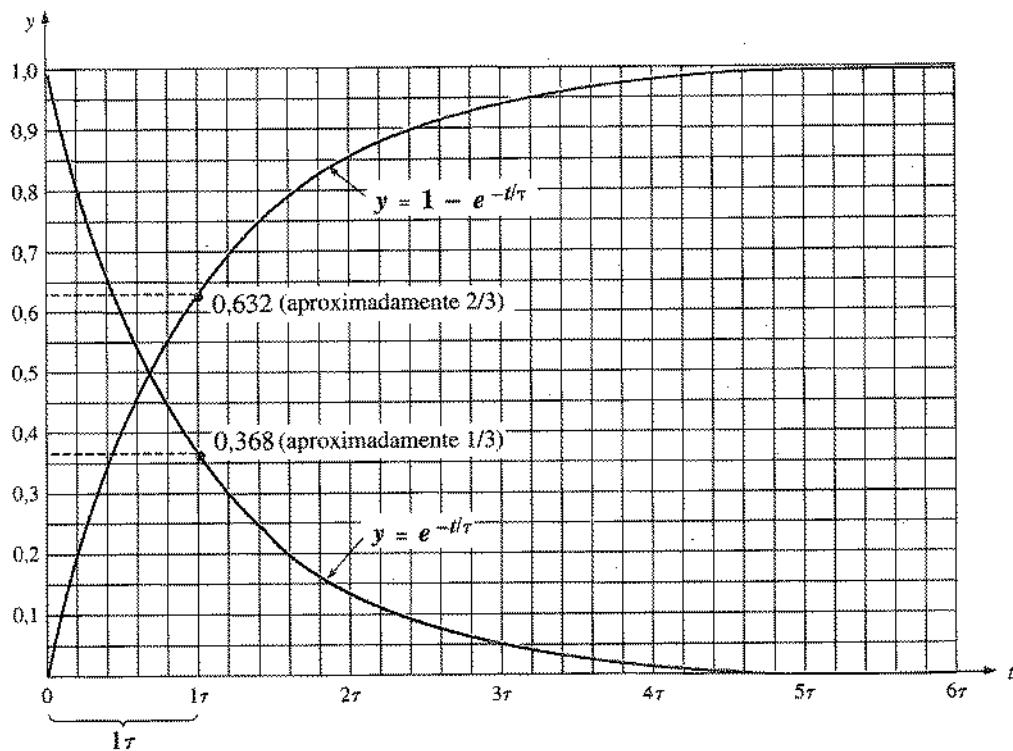
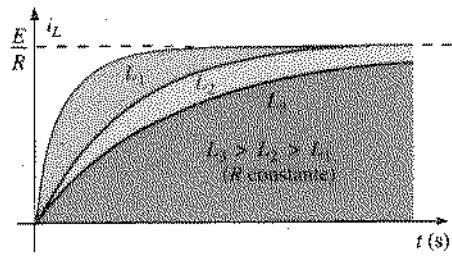
Além disso, como L/R tem sempre um valor diferente de zero, embora possa ser muito pequeno, o intervalo de tempo 5 τ sempre será maior do que zero, confirmando o fato de que

a corrente não pode mudar instantaneamente em um circuito indutivo.

Quanto maior a indutância, mais o circuito irá se opor a uma rápida variação da corrente.

As Figs. 12.16 e 12.17 mostram que a tensão no indutor salta bruscamente para E volts quando a chave é fechada e cai gradualmente para 0 volt. A queda ocorre de maneira exponencial, e v_L pode ser descrita matematicamente, durante a fase de armazenamento, pela seguinte equação:

$$\boxed{v_L = E e^{-t/\tau}} \quad (12.10)$$

Fig. 12.18 Gráficos das funções $y = 1 - e^{-t/\tau}$ e $y = e^{-t/\tau}$.Fig. 12.19 Forma da onda de i_L durante a fase de armazenamento para três valores diferentes de L .

Em cinco constantes de tempo, para todos os fins práticos, $i_L = E/R$, $v_L = 0$ e o indutor pode ser substituído por um curto-círculo.

como

$$v_R = i_R R = i_L R$$

temos

$$v_R = \left[\frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \right] R$$

logo

$$v_R = E (1 - e^{-t/\tau}) \quad (12.11)$$

Assim, a curva de v_R tem a mesma forma que a curva de i_L .

Podemos ver um gráfico de v_L na Fig. 12.20, com o eixo do tempo novamente expresso em termos da constante de tempo τ . A tensão v_L tende a zero com a mesma rapidez com a qual a corrente tende ao valor máximo.

EXEMPLO 12.4 Encontre as expressões matemáticas para i_L e v_L em função do tempo no circuito da Fig. 12.21, depois que a chave é fechada. Esboce as curvas correspondentes.

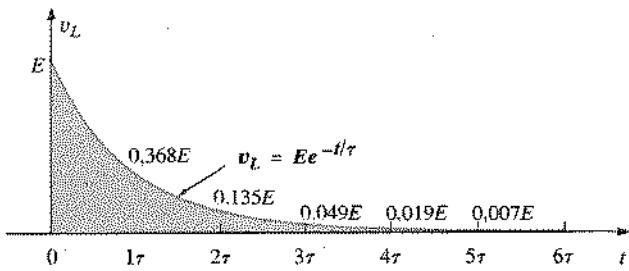
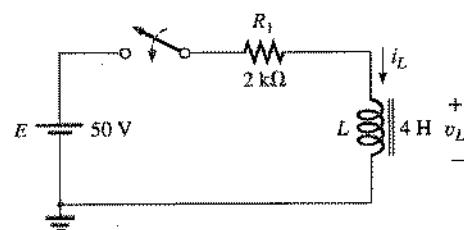
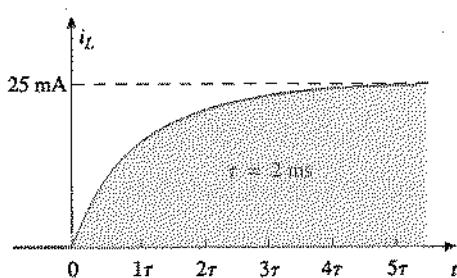
Fig. 12.20 Gráfico da tensão v_L em função do tempo para o circuito da Fig. 12.21.

Fig. 12.21 Exemplo 12.4.

Fig. 12.22 i_L e v_L para o circuito da Fig. 12.21.**Solução:**

$$\tau = \frac{L}{R_1} = \frac{4 \text{ H}}{2 \text{ k}\Omega} = 2 \text{ ms}$$

Pela Eq. (12.8),

$$I_m = \frac{E}{R_1} = \frac{50}{2 \text{ k}\Omega} = 25 \times 10^{-3} \text{ A} = 25 \text{ mA}$$

e portanto

$$i_L = (25 \times 10^{-3})(1 - e^{-t/(2 \times 10^{-3})})$$

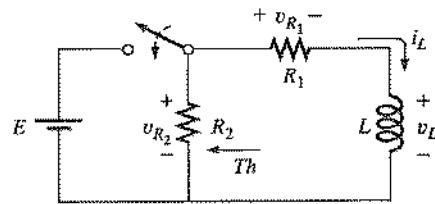
Pela Eq. (12.10),

$$v_L = 50e^{-t/(2 \times 10^{-3})}$$

As duas formas de onda aparecem na Fig. 12.22.

12.8 TRANSIENTES EM CIRCUITOS R-L: FASE DE DECAIMENTO

Na análise de circuitos $R-C$, observamos que o capacitor pode manter a carga e armazenar energia na forma de um campo elétrico por um período de tempo limitado apenas pela corrente de fuga. Nos circuitos $R-L$, a energia é armazenada na forma de um campo magnético estabelecido pela corrente no indutor. Ao contrário do capacitor, porém, um indutor isolado não pode reter a energia armazenada, pois a ausência de um circuito fechado faz a corrente cair para zero, perdendo-se toda a energia armazenada no campo magnético. Se a chave da Fig. 12.14 fosse aberta rapidamente, provavelmente ocorreria uma centelha entre os contatos, pois a corrente cairia do máximo E/R para zero muito rapidamente. A variação de corrente di/dt na equação $v_L = L(di/dt)$ indu-

Fig. 12.23 Fechando a chave para iniciar a fase de armazenamento para o indutor L .

ziria uma alta tensão no indutor que provocaria uma descarga elétrica entre os contatos da chave. Este é o mecanismo usado em sistemas de ignição, como os dos automóveis, para queimar o combustível nos cilindros. Cerca de 25.000 V são gerados pela rápida queda da corrente na bobina de ignição que ocorre quando o circuito é aberto. (Nos sistemas antigos, as "pontas" do distribuidor funcionavam como chave.) É difícil acreditar que o circuito de ignição dos automóveis seja capaz de gerar uma tensão tão elevada a partir de uma bateria de apenas 12 V!

Se a abertura da chave causa uma descarga imediata da energia armazenada, como é possível analisar a fase de decaimento de um circuito $R-L$ de maneira detalhada, como fizemos para o circuito $R-C$? A solução está em usar um circuito como o da Fig. 12.23. Quando a chave é fechada, a tensão no resistor R_2 é E volts e o ramo $R-L$ tem um comportamento idêntico ao descrito anteriormente, com as mesmas formas de onda e os mesmos valores de tensão e corrente. Um circuito equivalente de Thévenin de E em paralelo com R_2 se reduziria apenas à fonte, pois R_2 seria curto-circuitada ao substituirmos a fonte de tensão E por um curto-círculo para determinar a resistência de Thévenin.

Depois que a fase de armazenamento termina, o circuito atinge o estado estacionário, a chave pode ser aberta sem que ocorra centelhamento ou descarga instantânea porque o resistor R_2 oferece um caminho para a corrente i_L . Para tomar as coisas mais claras, o circuito de descarga foi desenhado separadamente na Fig. 12.24. A tensão v_L no indutor muda de polaridade e assume o valor

$$v_L = v_{R_1} + v_{R_2} \quad (12.12)$$

Lembre-se de que a tensão induzida em um indutor pode variar instantaneamente, mas não a corrente. O resultado é que a corrente i_L mantém os mesmos valor e sentido (Fig. 12.24). Assim, logo após a abertura da chave, i_L ainda é dada por $I_m = E/R$, e

$$\begin{aligned} v_L &= v_{R_1} + v_{R_2} = i_1 R_1 + i_2 R_2 \\ &= i_L (R_1 + R_2) = \frac{E}{R_1} (R_1 + R_2) = \left(\frac{R_1}{R_1} + \frac{R_2}{R_1} \right) E \end{aligned}$$

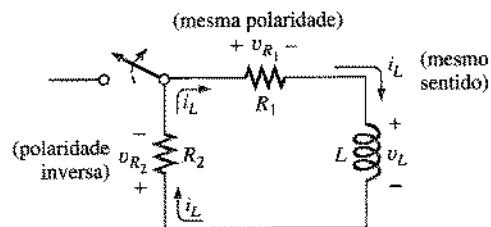


Fig. 12.24 O circuito da Fig. 12.23 no instante em que a chave é aberta.



ou seja,

$$v_L = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)E \quad (12.13)$$

que é necessariamente maior do que E . Em outras palavras, quando a chave é aberta, a tensão no indutor troca de polaridade, mudando instantaneamente de E para $-[1 + (R_2/R_1)] E$ volts. O sinal negativo mostra que a polaridade de v_L é a oposta da considerada positiva na Fig. 12.24.

Durante a fase em que o indutor libera a energia armazenada, a tensão entre seus terminais diminui de acordo com a seguinte equação:

$$v_L = V_i e^{-\tau' t} \quad (12.14)$$

onde

$$V_i = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)E$$

e

$$\tau' = \frac{L}{R_T} = \frac{L}{R_1 + R_2}$$

A queda da corrente é descrita pela seguinte equação:

$$i_L = I_m e^{-\tau' t} \quad (12.15)$$

onde

$$I_m = \frac{E}{R_1} \quad \text{e} \quad \tau' = \frac{L}{R_1 + R_2}$$

A expressão matemática para a ddp entre os terminais dos resistores pode ser determinada com o auxílio da definição de resistência:

$$\begin{aligned} v_{R_1} &= i_{R_1} R_1 = i_L R_1 \\ &= I_m e^{-\tau' t} R_1 \\ &= \frac{E}{R_1} R_1 e^{-\tau' t} \end{aligned}$$

logo

$$v_{R_1} = E e^{-\tau' t} \quad (12.16)$$

A polaridade de v_{R_1} é a mesma que durante a fase de armazenamento, pois a corrente i_L tem o mesmo sentido. A tensão v_{R_2} é dada por:

$$\begin{aligned} v_{R_2} &= i_{R_2} R_2 = i_L R_2 \\ &= I_m e^{-\tau' t} R_2 \\ &= \frac{E}{R_1} R_2 e^{-\tau' t} \end{aligned}$$

logo

$$v_{R_2} = \frac{R_2}{R_1} E e^{-\tau' t} \quad (12.17)$$

com a polaridade indicada na Fig. 12.24.

EXEMPLO 12.5 O resistor R_2 foi acrescentado ao circuito da Fig. 12.21, como na Fig. 12.25.

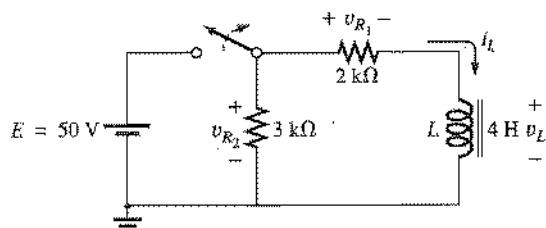


Fig. 12.25 Exemplo 12.5.

- Encontre as expressões matemáticas para i_L , v_L , v_{R_1} e v_{R_2} em função do tempo se a chave for aberta após terminada a fase de armazenamento.
- Esboce as formas de onda das tensões e correntes nas fases deste exemplo e do Exemplo 12.4, supondo que a fase de decaimento começa depois de transcorridas cinco constantes de tempo. Use as polaridades definidas na Fig. 12.23.

Soluções:

$$\begin{aligned} \tau' &= \frac{L}{R_1 + R_2} = \frac{4 \text{ H}}{2 \text{ k}\Omega + 3 \text{ k}\Omega} = \frac{4 \text{ H}}{5 \times 10^3 \Omega} = 0,8 \times 10^{-3} \text{ s} \\ &= 0,8 \text{ ms} \end{aligned}$$

Pela Eq. (12.14),

$$V_i = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)E = \left(1 + \frac{3 \text{ k}\Omega}{2 \text{ k}\Omega}\right)(50 \text{ V}) = 125 \text{ V}$$

e

$$v_L = -V_i e^{-\tau' t} = -125 e^{-t/(0,8 \times 10^{-3})}$$

Pela Eq. (12.15),

$$I_m = \frac{E}{R_1} = \frac{50 \text{ V}}{2 \text{ k}\Omega} = 25 \text{ mA}$$

e

$$i_L = I_m e^{-\tau' t} = (25 \times 10^{-3}) e^{-t/(0,8 \times 10^{-3})}$$

Pela Eq. (12.16),

$$v_{R_1} = E e^{-\tau' t} = 50 e^{-t/(0,8 \times 10^{-3})}$$

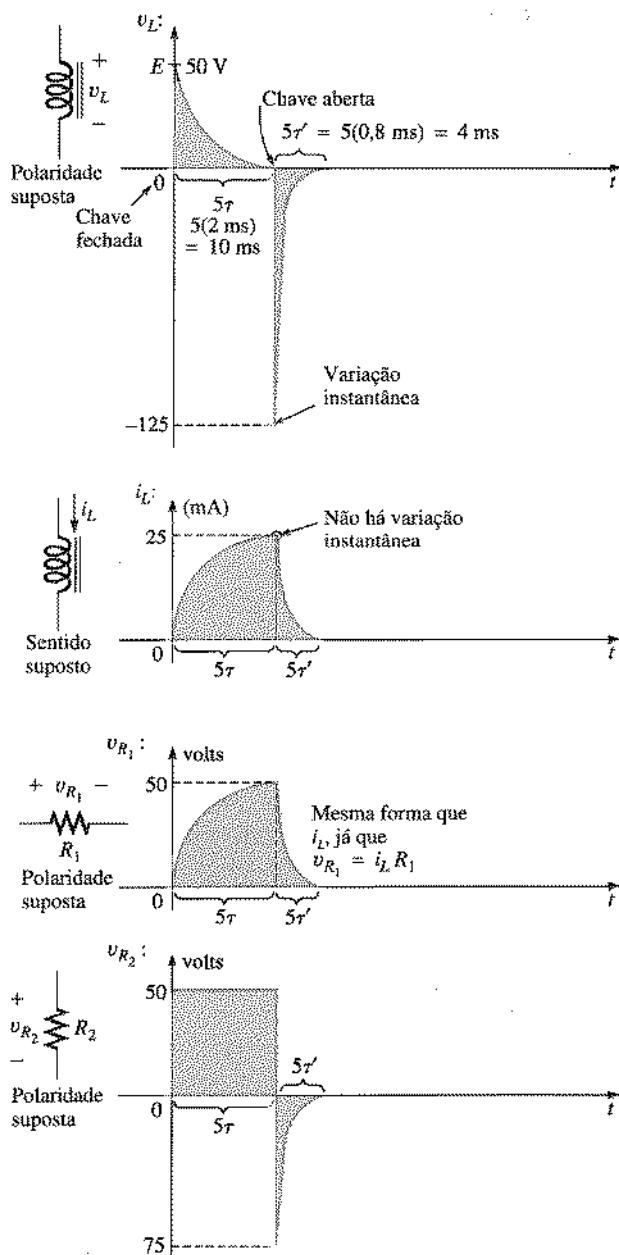


Fig. 12.26 Tensões e a corrente para o circuito da Fig. 12.25.

Pela Eq. (12.17),

$$v_{R_2} = -\frac{R_2}{R_1} E e^{-\frac{t}{\tau'}} = -\frac{3 \text{ k}\Omega}{2 \text{ k}\Omega} (50 \text{ V}) e^{-\frac{t}{0.8 \times 10^{-3}}} = -75 e^{-\frac{t}{0.8 \times 10^{-3}}}$$

b. Veja a Fig. 12.26.

Até agora, supusemos que a fase de armazenamento prosseguia até ser atingido o estado estacionário e portanto $I_m = E/R$, com $v_L = 0$. Caso, porém, a chave da Fig. 12.24 seja aberta antes que i_L atinja o valor máximo, a equação para a corrente de decaimento da Fig. 12.24 deverá ser mudada para

$$i_L = I_i e^{-\frac{t}{\tau'}} \quad (12.18)$$

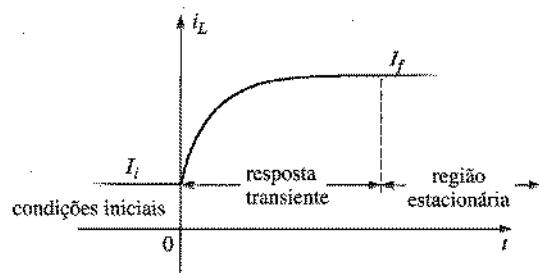


Fig. 12.27 Definindo as três fases de uma forma de onda transiente.

onde I_i é o valor inicial da corrente. A Eq. 12.24 deve ser modificada para:

$$v_L = V_i e^{-\frac{t}{\tau'}} \quad (12.19)$$

onde

$$V_i = I_i(R_1 + R_2)$$

12.9 VALORES INICIAIS

Esta seção será semelhante à Seção 10.9, na qual discutimos o efeito dos *valores iniciais* sobre a fase transiente em circuitos capacitivos. Como a corrente em um indutor não pode mudar instantaneamente, ela começa a *fase transiente* com um *valor inicial* que depende dos parâmetros do circuito (veja a Fig. 12.27) antes que a chave seja fechada. Em seguida, ela passa pela fase transiente até chegar ao *valor estacionário* (ou *valor final*), após 5 constantes de tempo. Podemos encontrar o valor estacionário da corrente no indutor substituindo-o por um curto-círcuito equivalente (ou por uma resistência R_i) e calculando a corrente resultante.

Usando a expressão para o transiente apresentada na seção anterior, podemos escrever uma equação para a corrente i_L que é válida em todo o intervalo da Fig. 12.27:

$$i_L = I_i + (I_f - I_i)(1 - e^{-\frac{t}{\tau'}})$$

onde $(I_f - I_i)$ é a variação total durante a fase transiente. Eliminando os parênteses e reagrupando os termos, temos:

$$\begin{aligned} i_L &= I_i + I_f e^{-\frac{t}{\tau'}} - I_i + I_i e^{-\frac{t}{\tau'}} \\ &= I_f - I_f e^{-\frac{t}{\tau'}} + I_i e^{-\frac{t}{\tau'}} \end{aligned}$$

e portanto

$$i_L = I_f + (I_i - I_f)e^{-\frac{t}{\tau'}} \quad (12.20)$$

Se o leitor precisar desenhar a forma de onda da corrente i_L desde o seu valor inicial até o final, comece desenhando duas retas horizontais, uma para o valor inicial e outra para o valor final. Em seguida, desenhe a curva da resposta transiente (que depende da constante de tempo) entre as duas retas. O método é ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 12.6 Na Fig. 12.28, o valor da corrente inicial no indutor é 4 mA no sentido indicado. (Métodos específicos para calcular a corrente inicial serão discutidos mais adiante.)

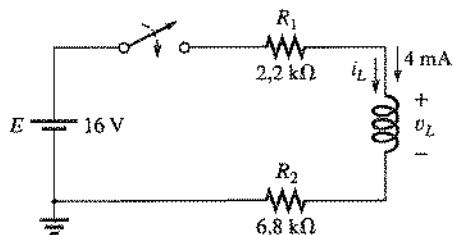


Fig. 12.28 Exemplo 12.6.

- Encontre uma expressão matemática para a corrente na bobina depois que a chave é fechada.
- Encontre uma expressão matemática para a tensão na bobina durante o mesmo período.
- Esboce as formas de onda da corrente e da tensão, desde seus valores iniciais até os finais.

Soluções:

- Substituindo o indutor por um curto-círcito, podemos usar a definição de resistência para calcular o valor final:

$$I_f = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{16 \text{ V}}{2.2 \text{ k}\Omega + 6.8 \text{ k}\Omega} = \frac{16 \text{ V}}{9 \text{ k}\Omega} = 1.78 \text{ mA}$$

A constante de tempo é dada por:

$$\tau = \frac{L}{R_T} = \frac{100 \text{ mH}}{2.2 \text{ k}\Omega + 6.8 \text{ k}\Omega} = \frac{100 \text{ mH}}{9 \text{ k}\Omega} = 11.11 \mu\text{s}$$

Aplicando a Eq. 12.20:

$$\begin{aligned} i_L &= I_f + (I_i - I_f)e^{-t/\tau} \\ &= 1.78 \text{ mA} + (4 \text{ mA} - 1.78 \text{ mA})e^{-t/11.11 \mu\text{s}} \\ &= 1.78 \text{ mA} + 2.22 \text{ mA } e^{-t/11.11 \mu\text{s}} \end{aligned}$$

- Como a corrente no indutor é constante (4 mA) antes de fecharmos a chave, a tensão (que é proporcional à taxa de variação da corrente) tem um valor inicial de 0 volt. No instante em que a chave é fechada, a corrente na bobina não pode variar instantaneamente; assim, a corrente nos elementos resistivos continuará a ser 4 mA. A tensão é máxima em $t = 0$ s e seu valor pode ser calculado com o auxílio da lei de Kirchhoff para tensões:

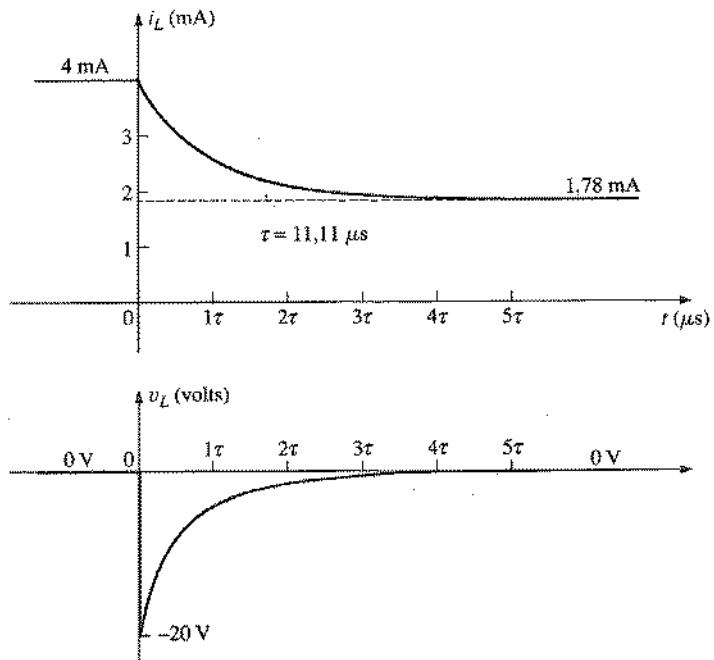
$$\begin{aligned} V_m &= E - V_{R_1} - V_{R_2} \\ &= 16 \text{ V} - (4 \text{ mA})(2.2 \text{ k}\Omega) - (4 \text{ mA})(6.8 \text{ k}\Omega) \\ &= 16 \text{ V} - 8.8 \text{ V} - 27.2 \text{ V} = 16 \text{ V} - 36 \text{ V} \\ &= -20 \text{ V} \end{aligned}$$

Note a presença do sinal negativo para indicar que a polaridade da voltagem v_L é oposta à definida na Fig. 12.28. Para $t > 0$, a tensão diminui (com a mesma constante de tempo que a corrente i_L) e tende para zero, já que o indutor se comporta como um curto-círcuito no estado estacionário.

A equação para v_L é, dessa forma,

$$v_L = -20e^{-t/11.11 \mu\text{s}}$$

- Veja a Fig. 12.29. Os valores inicial e final são assinalados e em seguida esboçamos a resposta transiente entre esses valo-

Fig. 12.29 i_L e v_L para o circuito da Fig. 12.28.

res. Para a tensão, a forma de onda começa e termina em zero; o sinal da tensão para tempos intermediários depende da polaridade escolhida para v_L na Fig. 12.28.

Vamos agora testar a validade da expressão da corrente, calculando o valor de i_L para $t = 0$ (momento em que a chave é fechada) e para $t > 5\tau$ (estado estacionário).

$$e^{-t/\tau} = e^{-0} = 1$$

e

$$\begin{aligned} i_L &= 1.78 \text{ mA} + 2.22 \text{ mA } e^{-t/\tau} = 1.78 \text{ mA} + 2.22 \text{ mA} \\ &= 4 \text{ mA} \end{aligned}$$

Para

$$t > 5\tau, e^{-t/\tau} \approx 0$$

e

$$i_L = 1.78 \text{ mA} + 2.22 \text{ mA } e^{-t/\tau} = 1.78 \text{ mA}$$

12.10 VALORES INSTANTÂNEOS

A análise apresentada na Seção 10.10 para circuitos capacitivos pode ser aplicada também aos circuitos $R-L$ para determinar valores instantâneos de tensões e correntes. O valor instantâneo de uma tensão ou corrente pode ser determinado simplesmente substituindo t por um valor numérico na equação apropriada e usando uma calculadora ou tabela para determinar o valor do termo exponencial.

A semelhança entre as equações $v_C = E(1 - e^{-t/\tau})$ e $i_L = I_m(1 - e^{-t/\tau})$ permite deduzir a seguinte expressão para t (através de um método idêntico ao que usamos para obter a Eq. 10.24):

$$t = \tau \log_e \left(\frac{i_L}{I_m - i_L} \right)$$

(12.21)

A equação $i_C = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$ também é formalmente idêntica a $v_L = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$, o que permite uma dedução semelhante à usada para obter a Eq. 10.25:

$$i_L = \tau \log_e \frac{E}{v_L} \quad (12.22)$$

12.11 $\tau = L/R_{Th}$

Nem todos os circuitos possuem uma configuração simples como o da Fig. 12.14. Em casos mais complexos, é preciso determinar primeiro o circuito equivalente de Thévenin. Considere o exemplo a seguir.

EXEMPLO 12.7 Para o circuito da Fig. 12.30:

- Encontre a expressão matemática para a corrente i_L e a tensão v_L , depois de fecharmos a chave ($I_s = 0$ mA).
- Desenhe as formas de onda de i_L e v_L .

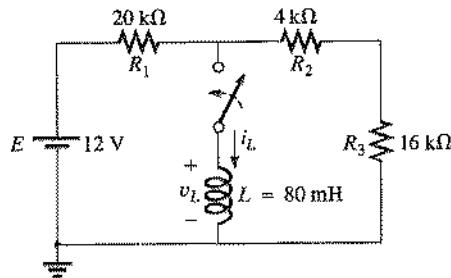


Fig. 12.30 Exemplo 12.7.

Soluções:

- Aplicando o teorema de Thévenin ao indutor de 80 mH (Fig. 12.31), temos

$$R_{Th} = \frac{R}{N} = \frac{20 \text{ k}\Omega}{2} = 10 \text{ k}\Omega$$

Aplicando a regra dos divisores de tensão (Fig. 12.32),

$$\begin{aligned} E_{Th} &= \frac{(R_2 + R_3)E}{R_1 + R_2 + R_3} \\ &= \frac{(4 \text{ k}\Omega + 16 \text{ k}\Omega)(12 \text{ V})}{20 \text{ k}\Omega + 4 \text{ k}\Omega + 16 \text{ k}\Omega} = \frac{(20 \text{ k}\Omega)(12 \text{ V})}{40 \text{ k}\Omega} = 6 \text{ V} \end{aligned}$$

O circuito equivalente de Thévenin aparece na Fig. 12.33. Usando a Eq. 12.8,

$$\begin{aligned} i_L &= \frac{E_{Th}}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ \tau &= \frac{L}{R_{Th}} = \frac{80 \times 10^{-3} \text{ H}}{10 \times 10^3 \text{ }\Omega} = 8 \times 10^{-6} \text{ s} \\ I_m &= \frac{E_{Th}}{R_{Th}} = \frac{6 \text{ V}}{10 \times 10^3 \text{ }\Omega} = 0.6 \times 10^{-3} \text{ A} \end{aligned}$$

e

$$i_L = (0.6 \times 10^{-3})(1 - e^{-\frac{t}{(8 \times 10^{-6})}})$$

Usando a Eq. (12.10),

$$v_L = E_{Th}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

de modo que

$$v_L = 6e^{-\frac{t}{(8 \times 10^{-6})}}$$

- Veja a Fig. 12.34.

EXEMPLO 12.8 A chave S_1 da Fig. 12.35 foi mantida fechada por um longo tempo. Em $t = 0$ s, S_1 é aberta e no mesmo instante S_2 é fechada para evitar que a corrente no indutor seja interrompida.

- Encontre a corrente inicial no indutor. Preste atenção no sentido da corrente.
- Encontre uma expressão matemática para a corrente i_L depois que a chave S_2 é fechada.
- Esboce a forma de onda de i_L .

Soluções:

- De acordo com a definição de resistência, a corrente inicial no indutor é dada por:

$$I_i = -\frac{E}{R_3} = -\frac{6 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega} = -6 \text{ mA}$$

- Aplicando o teorema de Thévenin:

$$\begin{aligned} R_{Th} &= R_1 + R_2 = 2.2 \text{ k}\Omega + 8.2 \text{ k}\Omega = 10.4 \text{ k}\Omega \\ E_{Th} &= IR_1 = (12 \text{ mA})(2.2 \text{ k}\Omega) = 26.4 \text{ V} \end{aligned}$$

O circuito equivalente de Thévenin pode ser visto na Fig. 12.36.

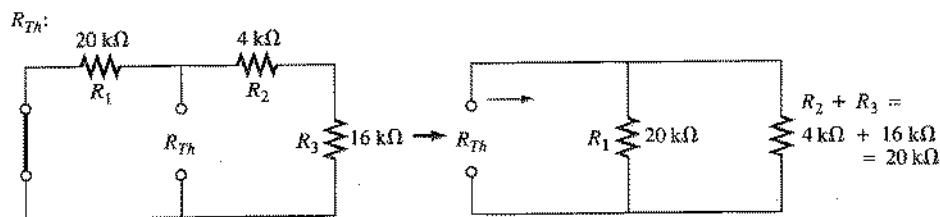


Fig. 12.31 Determinando R_{Th} para o circuito da Fig. 12.30.

A corrente no estado estacionário pode ser determinada substituindo o indutor por um curto-circuito:

$$I_f = \frac{E}{R_{Th}} = \frac{26,4 \text{ V}}{10,4 \text{ k}\Omega} = 2,54 \text{ mA}$$

A constante de tempo é dada por:

$$\tau = \frac{L}{R_{Th}} = \frac{680 \text{ mH}}{10,4 \text{ k}\Omega} = 65,39 \mu\text{s}$$

Aplicando a Eq. 12.20:

$$\begin{aligned} i_L &= I_f + (I_i - I_f)e^{-t/\tau} \\ &= 2,54 \text{ mA} + (-6 \text{ mA} - 2,54 \text{ mA})e^{-t/(65,39 \mu\text{s})} \\ &= 2,54 \text{ mA} - 8,54 \text{ mA } e^{-t/(65,39 \mu\text{s})} \end{aligned}$$

c. Veja a Fig. 12.37.

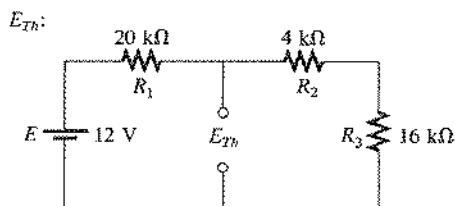


Fig. 12.32 Determinando E_{Th} para o circuito da Fig. 12.30.

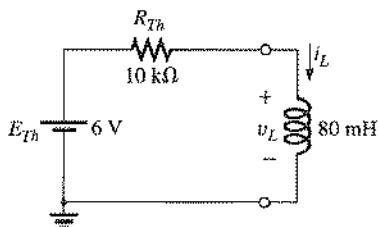


Fig. 12.33 Circuito equivalente de Thévenin para o circuito da Fig. 12.30.

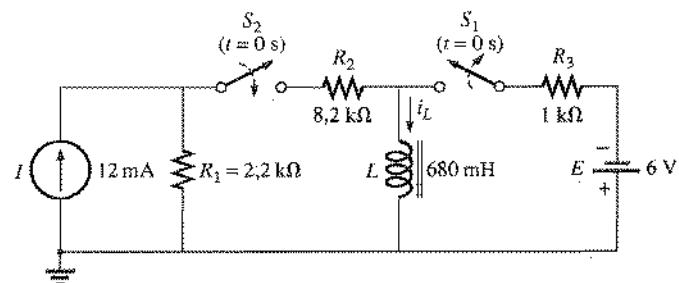


Fig. 12.35 Exemplo 12.8.

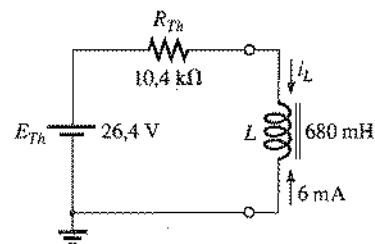


Fig. 12.36 Circuito equivalente de Thévenin para o circuito da Fig. 12.35, para $t \geq 0$ s.

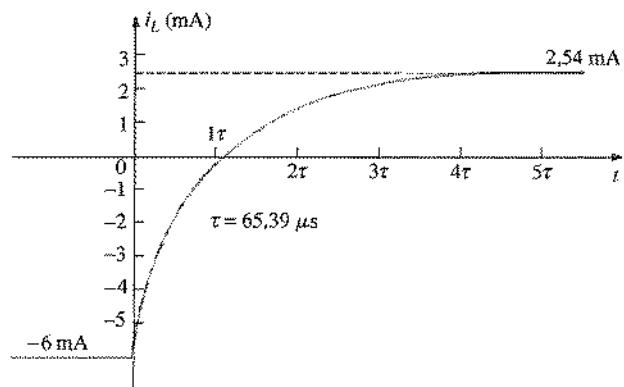


Fig. 12.37 Corrente i_L para o circuito da Fig. 12.36.

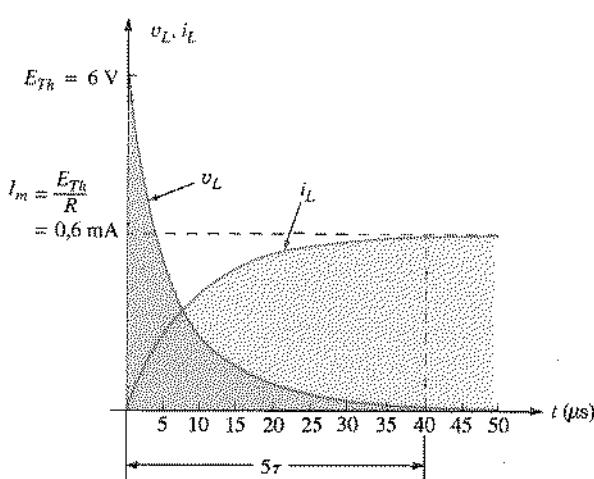


Fig. 12.34 Formas de onda de i_L e v_L para o circuito da Fig. 12.30.

12.12 INDUTORES EM SÉRIE E EM PARALELO

Os indutores, como os resistores e capacitores, podem ser ligados em série ou em paralelo. Podemos obter valores maiores de indutância ligando indutores em série e valores menores ligando indutores em paralelo.

No caso de indutores em série, a indutância total é calculada da mesma forma que a resistência total para resistores ligados em série (Fig. 12.38):

$$L_T = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_N \quad (12.23)$$

No caso de indutores em paralelo, a indutância total é calculada da mesma forma que a resistência total para resistores ligados em paralelo (Fig. 12.39):

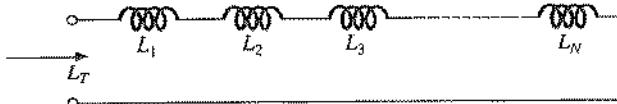


Fig. 12.38 Indutores em série.

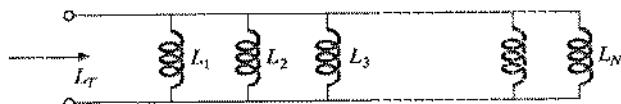


Fig. 12.39 Indutores em paralelo.

$$\frac{1}{L_T} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_N} \quad (12.24)$$

Para dois indutores em paralelo,

$$\frac{L_T'}{L_T} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad (12.25)$$

EXEMPLO 12.9 Reduza o circuito da Fig. 12.40 à forma mais simples.

Solução: Os indutores L_2 e L_3 possuem valores idênticos e estão em paralelo; assim, a indutância equivalente é dada por

$$L'_T = \frac{L}{N} = \frac{1.2 \text{ H}}{2} = 0.6 \text{ H}$$

O indutor de 0,6 H resultante está em paralelo com o indutor de 1,8 H e portanto temos:

$$L''_T = \frac{(L'_T)(L_4)}{L'_T + L_4} = \frac{(0.6 \text{ H})(1.8 \text{ H})}{0.6 \text{ H} + 1.8 \text{ H}} = 0.45 \text{ H}$$

O indutor L_1 está em série com o indutor equivalente a L_2 , L_3 e L_4 e portanto

$$L_T = L_1 + L''_T = 0.56 \text{ H} + 0.45 \text{ H} = 1.01 \text{ H}$$

O circuito equivalente aparece na Fig. 12.41.

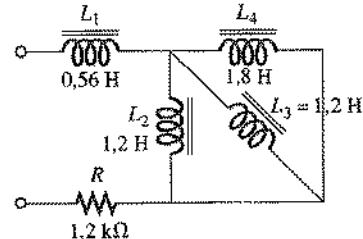


Fig. 12.40 Exemplo 12.9.

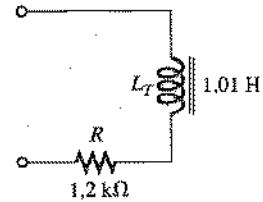


Fig. 12.41 Circuito equivalente ao da Fig. 12.40.

12.13 CIRCUITOS R-L E R-L-C NO ESTADO ESTACIONÁRIO

Na Seção 12.7 concluímos que, para todos os efeitos práticos, um indutor pode ser substituído por um curto-círcuito em um circuito de corrente contínua após um intervalo superior a cinco constantes de tempo. Nos circuitos a seguir supomos que todas as correntes e tensões tenham atingido seus valores finais; dessa forma, as correntes nos indutores podem ser encontradas substituindo cada indutor por um curto-círcuito. Para o circuito da Fig. 12.42, por exemplo,

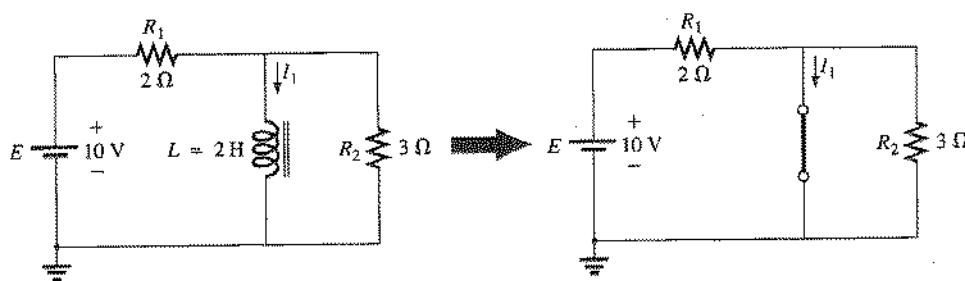
$$I_1 = \frac{E}{R_1} = \frac{10 \text{ V}}{2 \Omega} = 5 \text{ A}$$

Para o circuito da Fig. 12.43,

$$I = \frac{E}{R_2 \parallel R_3} = \frac{21 \text{ V}}{2 \Omega} = 10.5 \text{ A}$$

Aplicando a regra dos divisores de corrente,

$$I_1 = \frac{R_3 I}{R_3 + R_2} = \frac{(6 \Omega)(10.5 \text{ A})}{6 \Omega + 3 \Omega} = \frac{63 \text{ A}}{9} = 7 \text{ A}$$

Fig. 12.42 Substituição do indutor por um curto-círcuito para $t > 5\tau$.

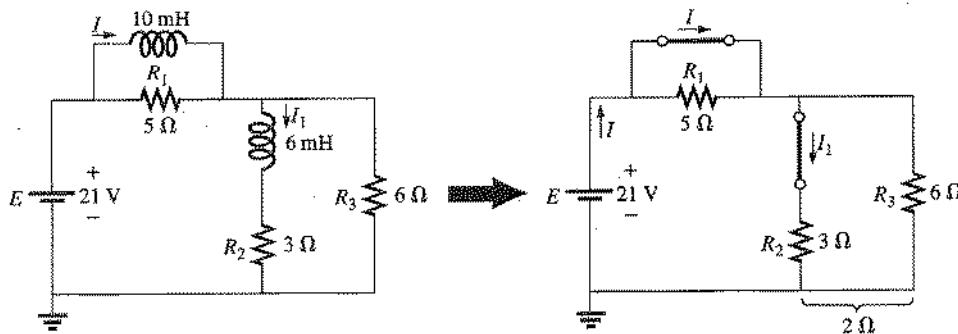
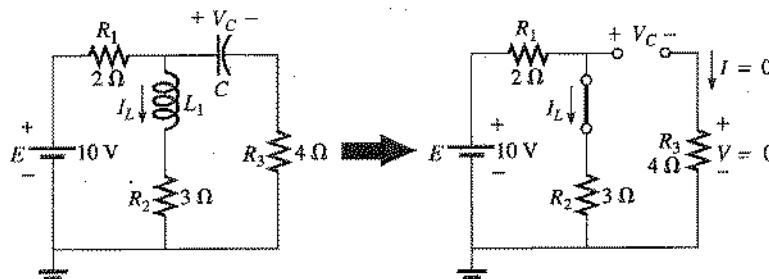
Fig. 12.43 Circuito equivalente para $t > 5\tau$.

Fig. 12.44 Exemplo 12.10.

Nos exemplos seguintes iremos supor que as tensões nos capacitores e as correntes nos indutores tenham atingido seus valores finais. Nessas condições, os indutores podem ser substituídos por curto-circuitos, e os capacitores, por circuitos abertos.

EXEMPLO 12.10 Encontre a corrente I_L e a tensão V_C para o circuito da Fig. 12.44.

Solução:

$$I_L = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{10 \text{ V}}{5 \Omega} = 2 \text{ A}$$

$$V_C = \frac{R_2 E}{R_2 + R_1} = \frac{(3 \Omega)(10 \text{ V})}{3 \Omega + 2 \Omega} = 6 \text{ V}$$

EXEMPLO 12.11 Encontre as correntes I_1 e I_2 e as tensões V_1 e V_2 para o circuito da Fig. 12.45.

Solução: Veja a Fig. 12.46:

$$I_1 = I_2$$

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{50 \text{ V}}{2 \Omega + 1 \Omega + 7 \Omega} = \frac{50 \text{ V}}{10 \Omega} = 5 \text{ A}$$

$$V_2 = I_2 R_5 = (5 \text{ A})(7 \Omega) = 35 \text{ V}$$

Aplicando a regra dos divisores de tensão,

$$V_1 = \frac{(R_3 + R_5)E}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{(1 \Omega + 7 \Omega)(50 \text{ V})}{2 \Omega + 1 \Omega + 7 \Omega} = \frac{(8 \Omega)(50 \text{ V})}{10 \Omega} = 40 \text{ V}$$

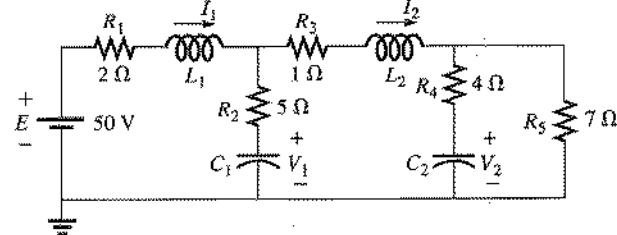
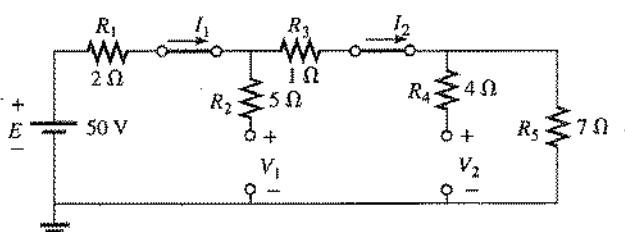


Fig. 12.45 Exemplo 12.11.

12.14 ENERGIA ARMAZENADA POR UM INDUTOR

Como o capacitor ideal, o indutor ideal não dissipá a energia elétrica que recebe. No caso do indutor ideal, essa energia é armazenada em um campo magnético. A Fig. 12.47 mostra a varia-

Fig. 12.46 Substituição dos indutores por curto-circuitos e dos capacitores por circuitos abertos para $t > 5\tau$.

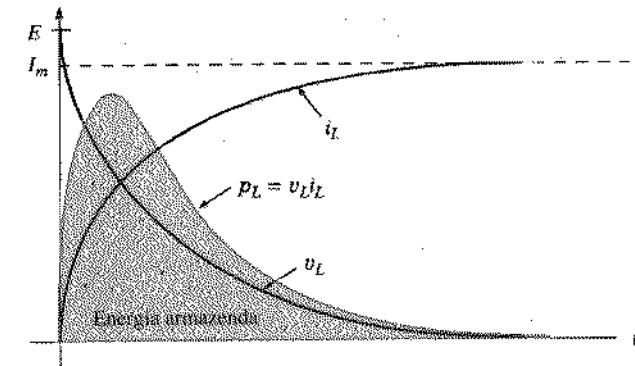


Fig. 12.47 Variação de potência com o tempo para um elemento indutivo na fase transiente.

ção com o tempo da tensão, corrente e potência durante a fase em que o campo magnético nas proximidades de um indutor está aumentando. A energia armazenada é representada pela região sombreada sob a curva da potência. Usando métodos de integração para determinar a área sob a curva, concluímos que

$$W_{\text{armazenada}} = \frac{1}{2} L I_m^2 \quad (\text{joules, J}) \quad (12.26)$$

EXEMPLO 12.12 Encontre a energia armazenada pelo indutor no circuito da Fig. 12.48 quando a corrente no circuito atinge o valor final.

Solução:

$$I_m = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{15 \text{ V}}{3 \Omega + 2 \Omega} = \frac{15 \text{ V}}{5 \Omega} = 3 \text{ A}$$

$$W_{\text{armazenada}} = \frac{1}{2} L I_m^2 = \frac{1}{2} (6 \times 10^{-3} \text{ H}) (3 \text{ A})^2 = \frac{54}{2} \times 10^{-3} \text{ J} \\ = 27 \text{ mJ}$$

12.15 ANÁLISE COMPUTACIONAL

A resposta transitória dos circuitos \$R-L\$ pode ser determinada com o auxílio do PSpice ou de qualquer linguagem de programação. No caso das linguagens de programação, equações apropriadas devem ser usadas para determinar as tensões e correntes para vários valores do tempo. Em seguida, esses valores podem ser listados em uma tabela ou plotados em gráficos.

PSpice (DOS)

Entramos com os indutores da mesma maneira que com os resistores e os capacitores, como ilustra o formato a seguir:

LTOROID	3	4	5	IC=2mA
Nome	N6	Nó	Valor	Valor inicial

O usuário deve fornecer os valores dos parâmetros assinalados com chaves; a condição inicial (corrente no indutor antes que a chave seja acionada) pode ser omitida se for igual a zero. Os valores acima são para uma bobina de 5 mH entre os nós 3 e 4, com o nó 3 sendo o de maior potencial, e uma corrente inicial de 2 mA. No PSpice os indutores possuem uma limitação: não podem formar um circuito fechado (como seria o caso de dois indutores em paralelo). Entretanto, esta limitação pode ser contornada colocando um pequeno resistor (de valor desprezível em comparação com os parâmetros do circuito) em série com um dos indutores (como no exemplo a seguir).

O circuito a ser analisado é o da Fig. 12.49, cujo arquivo de entrada aparece na Fig. 12.50. Como os dois indutores em paralelo formam um circuito fechado, colocamos um resistor de 1 m\$\Omega\$ em série com uma das bobinas antes de definir os nós. Definimos um pulso de entrada, como no caso dos circuitos \$R-C\$, para simular o fechamento da chave em \$t = 0\$ s e estabelecer uma tensão de 50 V no circuito. O resultado da combinação dos indutores em paralelo é \$4 \text{ H} \parallel 12 \text{ H} = 3 \text{ H}\$, e temos também \$\tau = L/R = 3 \text{ H}/2 \text{ k}\Omega = 1,5 \text{ ms}\$. O comando TRAN é estabelecido de 0,5 ms a 10 ms para fornecer pelo menos três pontos em cada intervalo equivalente a uma constante de tempo. O comando PROBE permite obter os valores de \$V(3)\$, que é \$v_L\$, e \$I(R)\$, que é a corrente total \$i_L\$ nos indutores em paralelo, mostrada de forma gráfica na Fig. 12.51. Observe que \$v_L\$ se aproxima de zero após \$5\tau = 7,5 \text{ ms}\$ e \$i_L\$ se aproxima do valor final \$E/R = 50 \text{ V}/2 \text{ k}\Omega = 25 \text{ mA}\$ após o mesmo intervalo de tempo. É gratificante observar os resultados do comando PROBE do PSpice (Fig. 12.51), que são conseguidos com um mínimo de esforço por parte do usuário.

PSpice (Windows)

Os resultados do Exemplo 12.6 serão verificados agora usando esquemas. Utilizaremos um pulso como fonte, como já vimos no Cap. 10, para simular o acionamento da chave em \$t = 0\$ s. Após a sequência DRAW-Get New Part-Browse-source.lib-VPULSE introduzimos os parâmetros da Fig. 12.52. Para gerar a lista de parâmetros entramos com Save Attr-Change-Display

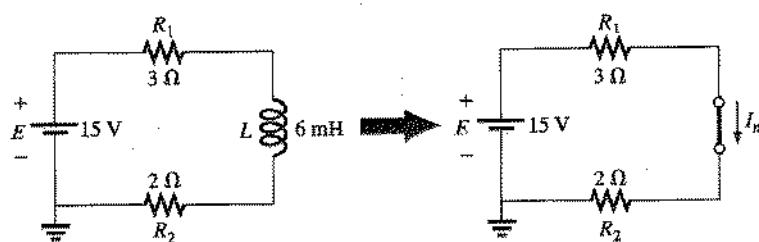


Fig. 12.48 Exemplo 12.12.

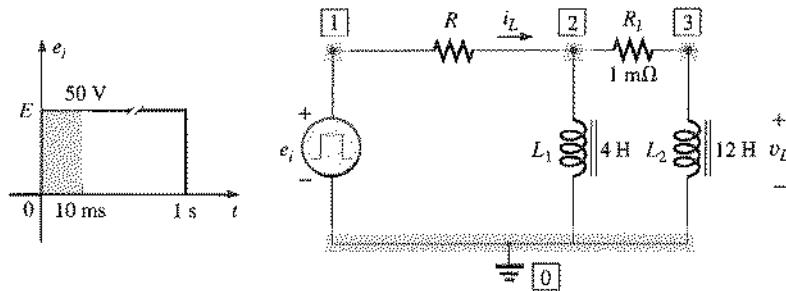


Fig. 12.49 Circuito R-L a ser analisado usando o PSpice (DOS).

```

Chapter 12 - R-L Circuit Transient Analysis
*****
CIRCUIT DESCRIPTION
*****
VE 1 0 PULSE(0 50 0 1N 1)
R 1 2 5K
R2 2 3 1M
L1 2 0 4H
L2 3 0 12H
TRAN 0.5M 10M
PROBE
OPTIONS NOPAGE
END

```

Fig. 12.50 Arquivo de entrada para o circuito da Fig. 12.49.

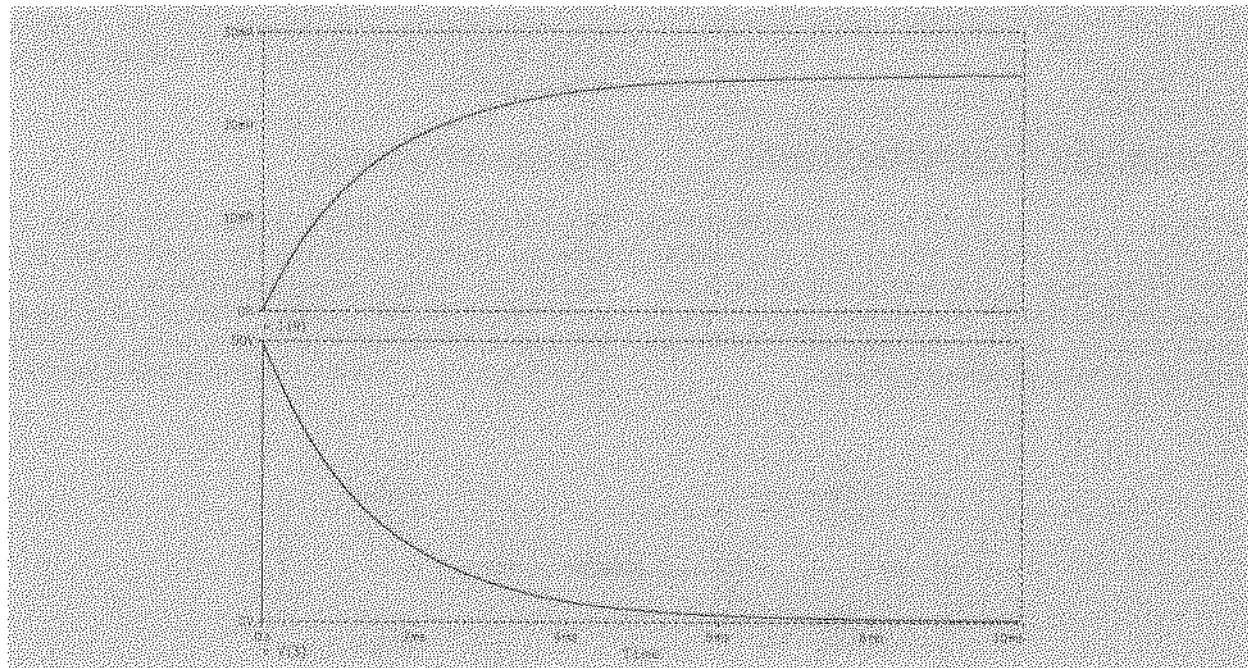


Fig. 12.51 Arquivo de saída para o circuito da Fig. 12.49.

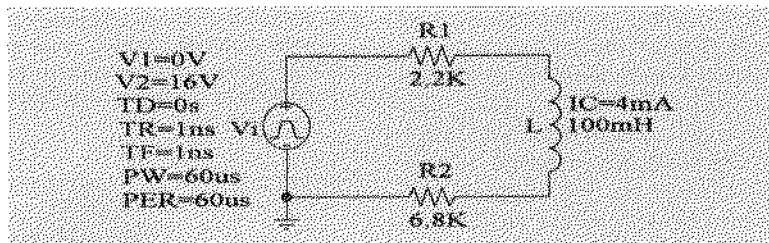


Fig. 12.52 Circuito $R-L$, com suas condições iniciais, para ser analisado pelo PSpice (Windows).

Both name and value. Para a largura do pulso e o período estipulamos o valor $60 \mu s$, maior do que cinco constantes de tempo ($5\tau = 55,55 \mu s$) do circuito. O tempo de subida e de descida escolhidos são desrespeitáveis em comparação com a constante de tempo, e o tempo de retardo foi fixado em 0 s para refletir o fato de que a chave é fechada em $t = 0$. Dando um duplo clique no símbolo do indutor, podemos fixar seu valor em 100 mH e o da corrente inicial em 4 mA . Utilizamos novamente as opções **Save Attr-Change-Display Both name and value** para os dois parâmetros. Usando os métodos já descritos em capítulos anteriores, desenhamos o circuito e entramos com **Analysis-Setup-Transient**, **Print Step** = 100 ns , **Final Time** = $60 \mu s$, **No-Print Delay** = 0 s e **Step Ceiling** = 100 ns-Close . Em seguida, entramos com **Probe Setup-Automatically Run Probe After Simulation** e iniciamos a análise com **Analysis-Simulate**.

Depois que obtemos o cabeçalho de **Probe**, a sequência de comandos **Trace-Add-I(L)** nos fornece um gráfico de i_L em função do tempo (Fig. 12.53). Note que a corrente decai do valor inicial, 4 mA , até o valor estacionário, cerca de $1,79 \text{ mA}$, em cinco constantes de tempo. Usamos os comandos **Tools-Cursor-Display** para exibir o valor da corrente em $55,604 \mu s$ (cerca de cinco constantes de tempo), como indica a pequena caixa de diálogo na parte inferior da figura. Em uma constante de tempo o outro cursor indica uma corrente de $2,5962 \text{ mA}$. O dístico **I(L)** na figura foi colocado com o auxílio dos comandos **Tools-Label-Text**. Podemos obter um segundo gráfico, o da tensão no indutor, entrando com **Plot-Add-Plot-V(L:1)-V(L:2)**, como se pode ver na Fig. 12.53. $V(L)$ não aparece na saída do comando **Trace** porque não sabemos seu valor em relação à terra. O gráfico confirma a solução do Exemplo 12.6, com a tensão saltando para -20 V

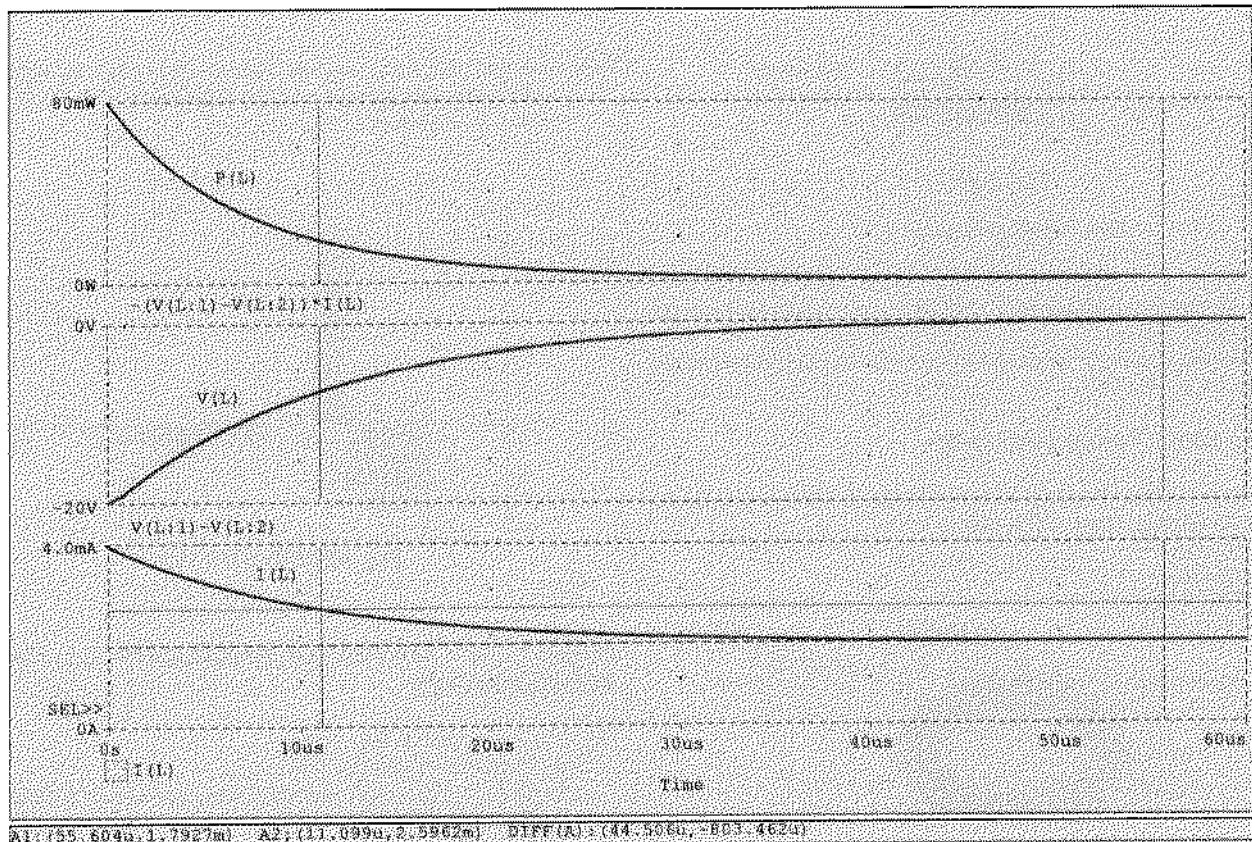


Fig. 12.53 Gráficos para i_L , v_L e p_L para o circuito da Fig. 12.52.

V e crescendo lentamente para 0 V com a mesma constante de tempo que a corrente no indutor. Modificamos a escala para o intervalo $-20 \rightarrow 0$ V usando Plot-Y-Axis Settings-Use Defined; o dístico foi acrescentado da forma já descrita. O terceiro gráfico representa a potência fornecida à fonte durante a fase transiente, com a área sob a curva representando a energia armazenada pelo indutor. A curva não começa em 0 W como na Fig. 12.47 porque o valor inicial da corrente no indutor é diferente de zero. Observe que o valor máximo da potência é dado por $(4\text{ mA})(20\text{ V}) = 80\text{ mW}$. A escala vertical foi modificada e incluímos um dístico, usando mais uma vez o método descrito acima. O sinal negativo que precede a expressão matemática para a potência faz com que os valores do gráfico da potência sejam positivos.

PROBLEMAS

SEÇÃO 12.2 A Lei de Faraday para a Indução Eletromagnética

1. Se o fluxo em um indutor de 50 espiras está variando à razão de 0,085 Wb/s, qual é o valor da tensão induzida?
2. Determine a taxa de variação do fluxo em um indutor sabendo que são induzidos 20 V e que o indutor possui 40 espiras.
- *3. Qual é o número de espiras de um indutor se uma tensão de 42 mV é induzida por uma variação de fluxo de 0,003 Wb/s?

SEÇÃO 12.4 Auto-Indutância

4. Determine a indutância L , em henries, do indutor que aparece na Fig. 12.54.
5. Repita o Problema 4 com $l = 4$ pol e $d = 0,25$ pol.

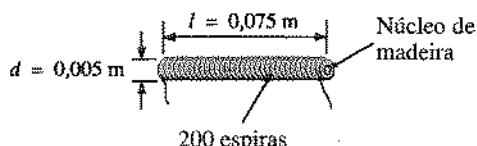


Fig. 12.54 Problemas 4 e 5.

6. a. Determine a indutância L , em henries, do indutor que aparece na Fig. 12.55.
- b. Repita o item (a) se o indutor tiver um núcleo ferromagnético com $\mu_r = 2.000$.

SEÇÃO 12.6 Tensão Induzida

7. Calcule a tensão induzida em uma bobina de 5 H se a taxa de variação da corrente na mesma for
 - a. 0,5 A/s.
 - b. 60 mA/s.
 - c. 0,04 A/ms.

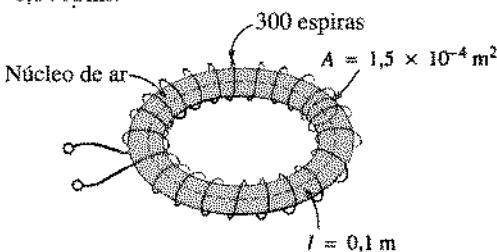


Fig. 12.55 Problema 6.

8. Encontre a voltagem induzida em um indutor de 50 mH se a corrente no indutor estiver variando à taxa de $0,1\text{ mA}/\mu\text{s}$.
9. Encontre a forma de onda para a tensão induzida em um indutor de 200 mH se a corrente no indutor for a que aparece na Fig. 12.56.

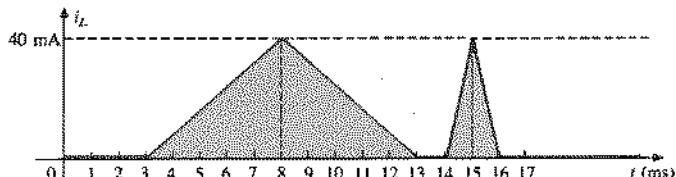


Fig. 12.56 Problema 9.

10. Encontre a forma de onda para a tensão induzida em um indutor de 0,2 H se a corrente no indutor for a que aparece na Fig. 12.57.

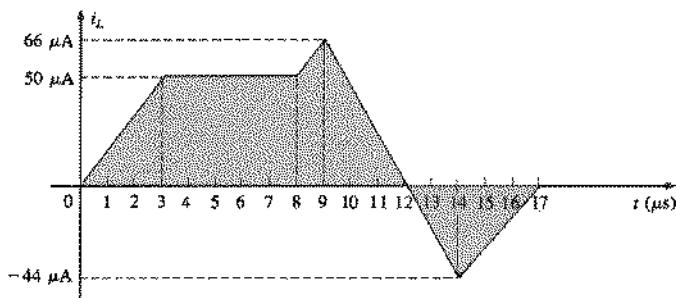


Fig. 12.57 Problema 10.

- *11. Encontre a forma de onda da corrente em um indutor de 10 mH se a ddp entre seus terminais seguir o padrão da Fig. 12.58. A corrente i_L é 4 mA em $t = 0\text{ s}$.

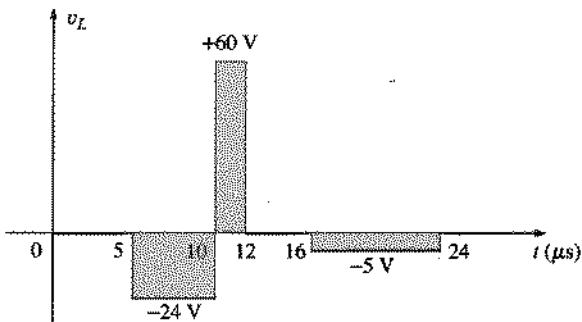


Fig. 12.58 Problema 11.

SEÇÃO 12.7 Transientes em Circuitos R-L: Fase de Armazenamento

12. Para o circuito da Fig. 12.59:
 - a. Determine a constante de tempo.
 - b. Escreva a expressão matemática para a corrente i_L depois que a chave é fechada.
 - c. Repita o item (b) para v_L e v_R .
 - d. Determine i_L e v_L em uma, três e cinco constantes de tempo.
 - e. Esboce as formas de onda de i_L , v_L e v_R .

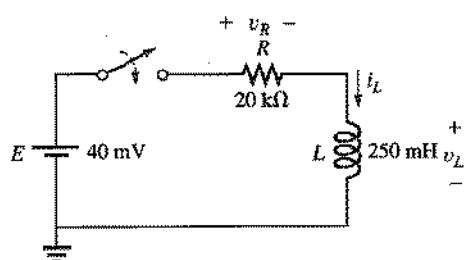


Fig. 12.59 Problema 12.

13. Para o circuito da Fig. 12.60:

- Determine τ .
- Escreva uma equação matemática para a corrente i_L depois que a chave é fechada em $t = 0$ s.
- Escreva equações matemáticas para v_L e v_R depois que a chave é fechada em $t = 0$ s.
- Determine i_L e v_L em $t = 1\tau, 3\tau$ e 5τ .
- Esboce as formas de onda de i_L , v_L e v_R durante a fase de armazenamento.

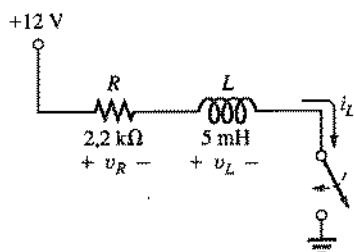


Fig. 12.60 Problema 13.

SEÇÃO 12.8 Transientes em Circuitos R-L: Fase de Decaimento

14. Para o circuito da Fig. 12.61:

- Determine expressões matemáticas para a corrente i_L e a voltagem v_L quando a chave é fechada.
- Repita o item (a) se a chave for aberta após se passarem cinco constantes de tempo.
- Esboce as formas de onda das letras (a) e (b) no mesmo gráfico.

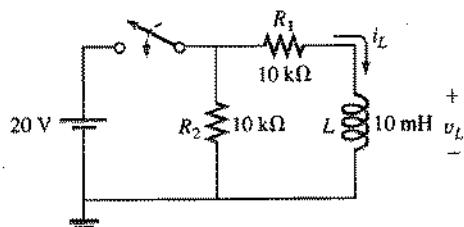


Fig. 12.61 Problemas 14, 48 e 49.

*15. Para o circuito da Fig. 12.62:

- Escreva uma expressão matemática para a corrente i_L e a voltagem v_L depois que a chave é fechada.
- Escreva expressões matemáticas para i_L e v_L se a chave for aberta após se passarem cinco constantes de tempo.

- Esboce as formas de onda de i_L e v_L para o intervalo definido em (a) e (b).
- Esboce a forma de onda para a tensão em R_2 para o intervalo estabelecido no item anterior. Seja cuidadoso com as polaridades e sentidos definidos na Fig. 12.62.

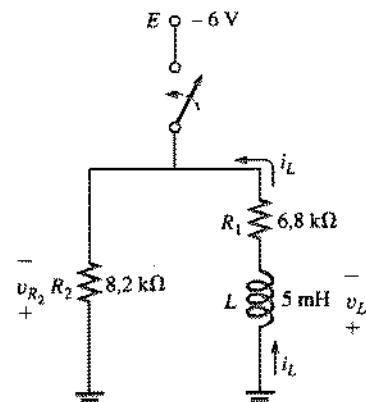


Fig. 12.62 Problema 15.

*16. Para o circuito da Fig. 12.63:

- Determine expressões matemáticas para a corrente i_L e a voltagem v_L depois que a chave é fechada.
- Repita o item (a) se a chave for fechada em $t = 1 \mu s$.
- Esboce as formas de onda dos itens (a) e (b) no mesmo gráfico.

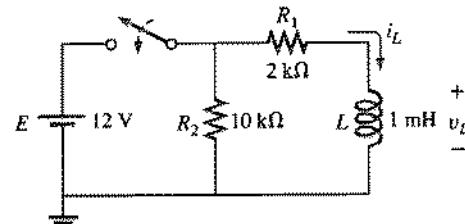


Fig. 12.63 Problema 16.

SEÇÃO 12.9 Valores Iniciais

17. Para o circuito da Fig. 12.64:

- Escreva expressões matemáticas para a corrente i_L e a voltagem v_L depois que a chave é fechada. Preste atenção no sentido da corrente inicial.
- Esboce as formas de onda de i_L e v_L para o período entre o instante em que a chave é fechada e aquele em que o circuito atinge o estado estacionário.

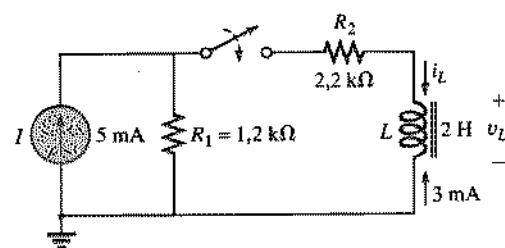


Fig. 12.64 Problema 17.

18. Para o circuito da Fig. 12.65:

- Escreva expressões matemáticas para a corrente i_L e a tensão v_L depois que a chave é fechada. Preste atenção no sentido da corrente inicial.
- Esboce as formas de onda de i_L e v_L para o período entre o instante em que a chave é fechada e aquele em que o circuito atinge o estado estacionário.

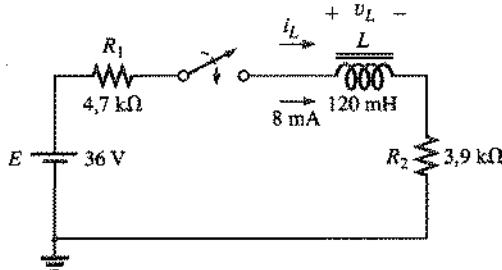


Fig. 12.65 Problema 18.

*19. Para o circuito da Fig. 12.66:

- Escreva expressões matemáticas para a corrente i_L e a tensão v_L depois que a chave é fechada. Preste atenção no sentido da corrente inicial.
- Esboce as formas de onda de i_L e v_L para o período entre o instante em que a chave é fechada e aquele em que o circuito atinge o estado estacionário.

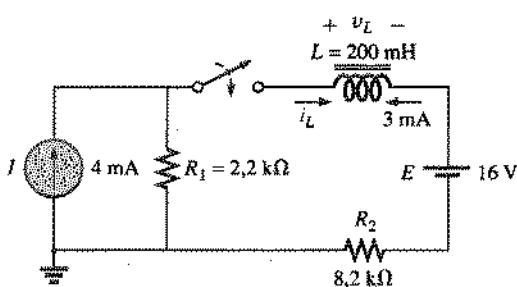


Fig. 12.66 Problema 19.

SEÇÃO 12.10 Valores Instantâneos

- A partir da solução do Exemplo 12.4, determine o momento em que a corrente i_L atinge o valor de 10 mA. Em seguida, determine o instante em que a tensão cai para 10 V.
- A partir da solução do Exemplo 12.6, determine o momento em que a corrente i_L cai para 2 mA.

SEÇÃO 12.11 $\tau = L/R_{th}$

- Encontre expressões matemáticas para i_L e v_L depois que a chave é fechada na Fig. 12.67.
- Determine i_L e v_L em $t = 100$ ns.

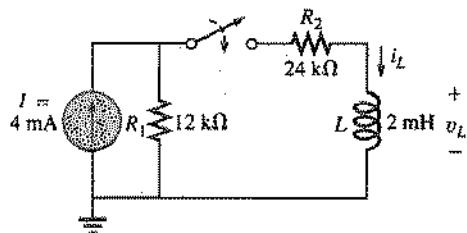


Fig. 12.67 Problemas 22 e 41.

- Determine expressões matemáticas para i_L e v_L depois que a chave é fechada na Fig. 12.68.
- Determine i_L e v_L em $t = 10 \mu s$.
- Escreva expressões matemáticas para a corrente i_L e para a tensão v_L se a chave for aberta em $t = 10 \mu s$.
- Esboce as formas de onda de i_L e v_L para os itens (a) e (c).

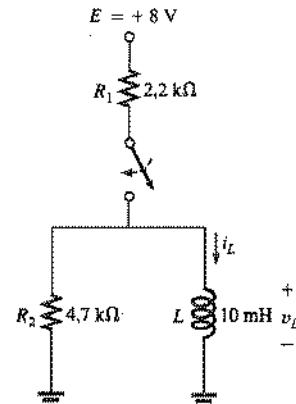


Fig. 12.68 Problema 23.

- Determine expressões matemáticas para i_L e v_L depois que a chave é fechada na Fig. 12.69.
- Determine i_L e v_L após duas constantes de tempo da fase de armazenamento.
- Escreva expressões matemáticas para a corrente i_L e para a tensão v_L se a chave for aberta no instante definido em (b).
- Esboce as formas de onda de i_L e v_L para os itens (a) e (c).

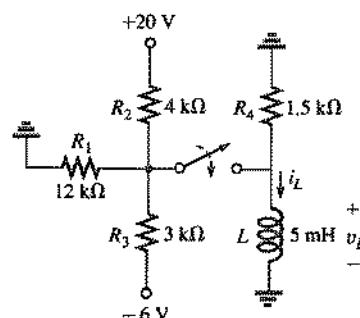


Fig. 12.69 Problema 24.

- No circuito da Fig. 12.70, a chave é fechada em $t = 0$ s.
- Determine v_L em $t = 25$ ms.
- Encontre v_L em $t = 1$ ms.
- Calcule v_R_3 em $t = 1$ ms.
- Encontre o tempo necessário para que a corrente i_L atinja 100 mA.

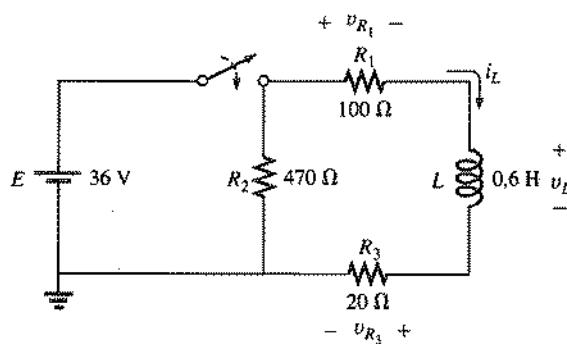


Fig. 12.70 Problema 25.

- *26. A chave do circuito da Fig. 12.71 foi fechada por cerca de 1 h. Foi então aberta em um instante definido como $t = 0$ s.
- Determine o tempo necessário para que a corrente i_R caia para 1 mA.
 - Encontre a tensão v_L em $t = 1$ ms.
 - Calcule v_R , em $t = 5\pi$.

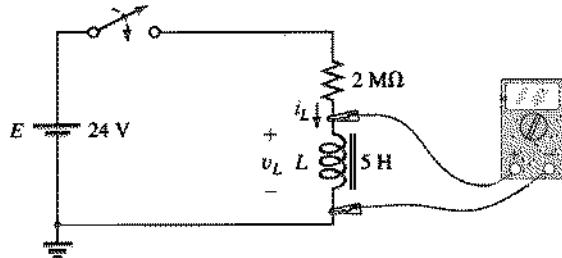


Fig. 12.71 Problema 26.

27. O circuito da Fig. 12.71 emprega um multímetro com uma resistência interna de $10 \text{ M}\Omega$ no modo voltímetro. A chave é fechada em $t = 0$ s.
- Encontre a tensão no indutor no instante em que a chave é fechada.
 - Qual o valor final da corrente i_L ?
 - Quanto tempo é necessário para que i_L chegue a $10 \mu\text{A}$?
 - Qual a leitura do voltímetro em $t = 12 \mu\text{s}$?
- *28. A chave da Fig. 12.72 foi deixada aberta por um longo tempo e depois fechada em $t = 0$ s.
- Escreva uma expressão matemática para a corrente i_L e a tensão v_L depois que a chave é fechada.
 - Esboce a forma de onda de i_L e v_L desde o momento em que a chave é fechada até que o circuito atinja o estado estacionário.

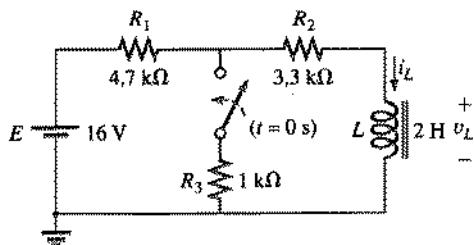


Fig. 12.72 Problemas 28 e 42.

- *29. A chave da Fig. 12.73 foi deixada fechada por um longo tempo e depois aberta em $t = 0$ s.
- Escreva uma expressão matemática para a corrente i_L e a tensão v_L depois que a chave é aberta.
 - Esboce a forma de onda de i_L e v_L desde o momento em que a chave é aberta até que o circuito atinja o estado estacionário.

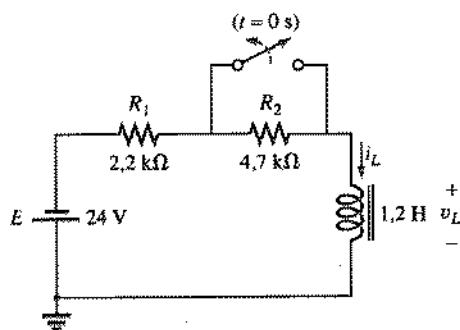


Fig. 12.73 Problema 29.

- *30. A chave da Fig. 12.74 foi deixada aberta por um longo tempo e depois fechada em $t = 0$ s.
- Escreva uma expressão matemática para a corrente i_L e a tensão v_L depois que a chave é fechada.
 - Esboce a forma de onda de i_L e v_L desde o momento em que a chave é fechada até que o circuito atinja o estado estacionário.

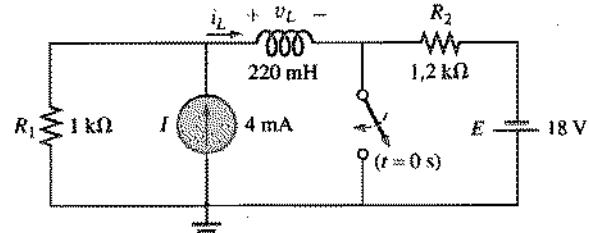
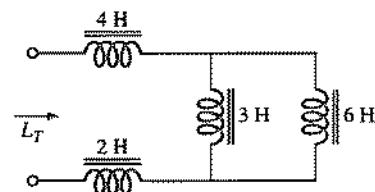


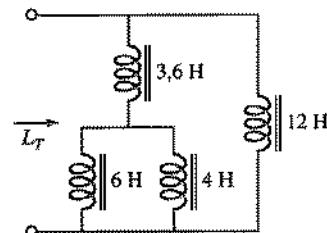
Fig. 12.74 Problemas 30 e 46.

SEÇÃO 12.12 Indutores em Série e Paralelo

31. Encontre a indutância total dos circuitos da Fig. 12.75.



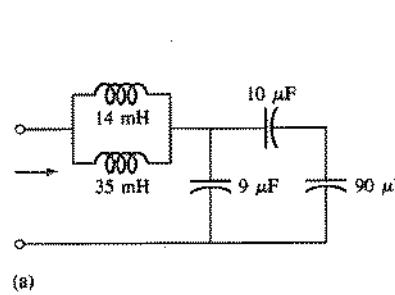
(a)



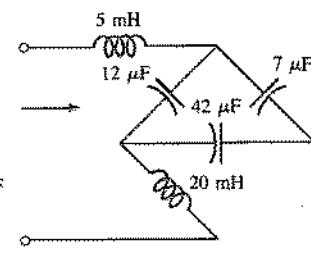
(b)

Fig. 12.75 Problema 31.

32. Reduza os circuitos da Fig. 12.76 ao menor número possível de elementos.



(a)



(b)

Fig. 12.76 Problema 32.

33. Reduza os circuitos da Fig. 12.77 ao menor número possível de elementos.

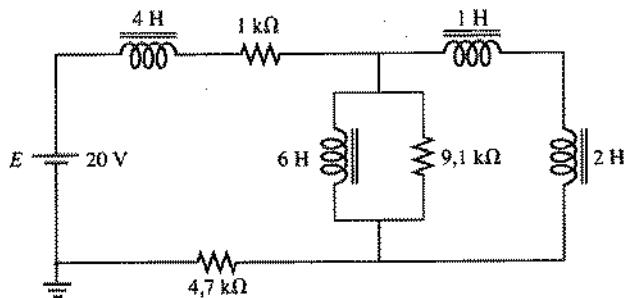


Fig. 12.77 Problema 33.

- *34. Para o circuito da Fig. 12.78:

- Encontre expressões matemáticas para a tensão v_L e a corrente i_L depois que a chave é fechada.
- Esoque as formas de onda de v_L e i_L obtidas no item (a).
- Determine uma expressão matemática para a tensão v_{L_1} , depois que a chave é fechada e esboce a forma de onda correspondente.

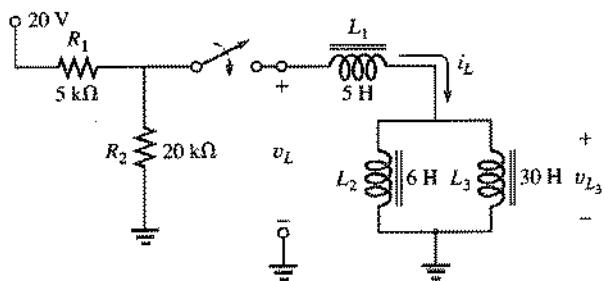


Fig. 12.78 Problemas 34 e 43.

SEÇÃO 12.13 Circuitos R-L e R-L-C no Estado Estacionário

Nos Problemas 35 a 37, suponha que as tensões nos capacitores e as correntes nos indutores tenham atingido os valores finais.

35. Encontre as tensões V_1 e V_2 e a corrente I_1 no circuito da Fig. 12.79.

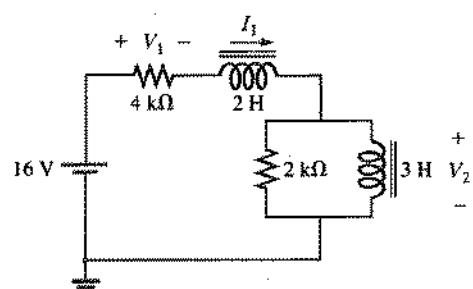


Fig. 12.79 Problemas 35 e 38.

36. Encontre a corrente I_1 e a tensão V_1 no circuito da Fig. 12.80.

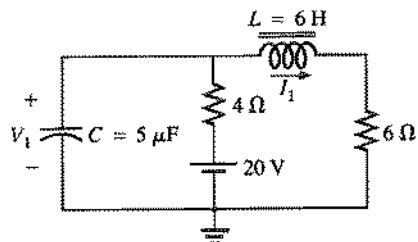


Fig. 12.80 Problemas 36 e 39.

37. Encontre a tensão V_1 e as correntes nos indutores do circuito da Fig. 12.81.

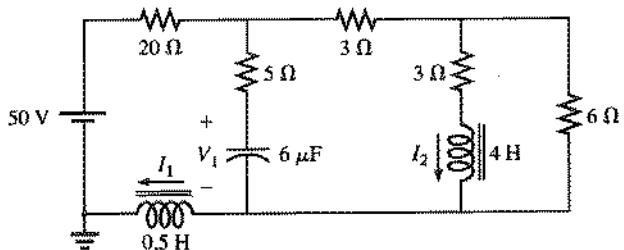


Fig. 12.81 Problemas 37 e 40.

SEÇÃO 12.14 Energia Armazenada por um Indutor

- Encontre as energias armazenadas nos indutores do Problema 35.
- Encontre as energias armazenadas nos capacitores e indutores do Problema 36.
- Encontre as energias armazenadas nos indutores do Problema 37.

SEÇÃO 12.15 Análise Computacional

PSpice (DOS)

- Escreva o arquivo de entrada para obter um gráfico de v_L e i_L para o circuito da Fig. 12.67, depois que a chave é fechada.
- Escreva o arquivo de entrada para obter um gráfico de v_L e i_L para o circuito da Fig. 12.72, depois que a chave é fechada.
- Escreva o arquivo de entrada para obter um gráfico de v_{L_1} , v_L e i_L para o circuito da Fig. 12.78, depois que a chave é fechada.

PSpice (Windows)

- Verifique os resultados do Exemplo 12.5 usando o comando VPULSE e uma largura de pulso igual a cinco constantes de tempo do circuito.
- Verifique os resultados do Exemplo 12.3 usando o comando VPULSE e uma largura de pulso de 1 ns.
- Verifique os resultados do Problema 30 usando o comando VPULSE e uma corrente inicial apropriada.

Linguagem de Programação (C++, BASIC, PASCAL etc.)

- Escreva um programa para fornecer uma solução geral para o circuito da Fig. 12.14, ou seja, dados os parâmetros do circuito, escreva equações que permitam calcular i_L , v_L e v_R .
- Escreva um programa para fornecer uma solução geral para as fases de armazenamento e decaimento do circuito da Fig. 12.61, ou seja, dados os parâmetros do circuito, escreva equações que per-

mitam calcular i_L , v_L para as duas fases. Suponha que a fase de decaimento começa cinco constantes de tempo após ter sido iniciada a fase de armazenamento.

49. Repita o Problema 48, mas suponha que a fase de armazenamento não se completa, tornando necessário determinar os valores instantâneos de i_L e v_L no momento em que a chave é aberta.

GLOSSÁRIO

Auto-indutância Medida da capacidade de um indutor de se opor a mudanças na corrente que o atravessa e armazenar energia na forma de um campo magnético em suas vizinhanças.

Indutor Componente passivo dos circuitos elétricos constituído por um agrupamento de espiras de um condutor enroladas em torno de um suporte inerte ou de um núcleo ferromagnético.

Lei de Faraday Lei que relaciona a tensão induzida em um indutor ao número de espiras do indutor e à taxa de variação do fluxo magnético no seu interior.

Lei de Lenz Lei segundo a qual um efeito induzido sempre se opõe à causa que o produziu.

Correntes e Tensões Alternadas Senoidais

13.1 INTRODUÇÃO

Até agora só analisamos circuitos de corrente contínua (costuma-se, mesmo em português, utilizar a expressão “circuitos dc”, usando as iniciais das palavras *direct current*, corrente contínua), nos quais as tensões e correntes não variam, exceto durante os transientes. Vamos agora dirigir nossa atenção para a análise de circuitos nos quais a intensidade da fonte de tensão ou corrente varia de forma regular. É particularmente importante estudarmos a tensão fornecida pelas companhias geradoras de energia elétrica. Esta tensão varia no tempo e é denominada *tensão alternada* (também é comum em português o uso da expressão *tensão ac*, usando as iniciais da expressão inglesa *alternating current*, que significa corrente alternada). Em termos mais rigorosos, a terminologia *tensão ac* ou *corrente ac* não é suficiente para descrever o tipo de sinal presente no circuito. As três funções $v(t)$ cujos gráficos aparecem na Fig. 13.1 (costuma-se denominar estes gráficos *formas de onda*, embora não representem nenhum movimento ondulatório) podem ser produzidas por geradores de sinais encontrados em oficinas e laboratórios. O termo *alternada* indica apenas que o valor da tensão ou da corrente alterna (oscila) regularmente entre dois níveis (Fig. 13.1).

Para sermos precisos, devemos usar os adjetivos *senoidal*, *quadrada* e *triangular* quando nos referirmos às formas de ondas ilustradas na Fig. 13.1. Na distribuição de energia elétrica para uso domiciliar e industrial só é utilizada a tensão alternada *senoidal*; por isso, quando falamos em *tensão alternada* ou *corrente alternada* sem nenhuma qualificação adicional, fica subentendido que a tensão e a corrente variam senoidalmente no tempo. No caso das outras formas que aparecem na Fig. 13.1, a qualificação adicional é sempre explícita, mas em compensação é freqüente a omissão do adjetivo *alternada*, o que resulta nas expressões *onda quadrada* ou *onda triangular*.

Uma das principais razões para concentrarmos nossa atenção nas tensões alternadas senoidais é que este é o tipo de tensão gerado nas usinas de energia elétrica em todo o mundo. Outras razões incluem seu uso em um grande número de aparelhos elétricos e eletrônicos domiciliares, comerciais e industriais. Além disso, vamos descobrir nos

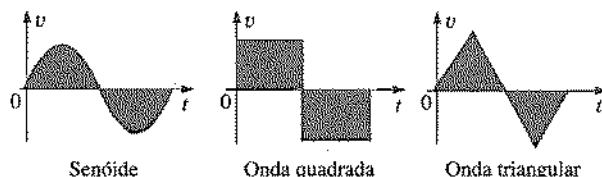


Fig. 13.1 Formas de onda alternadas.

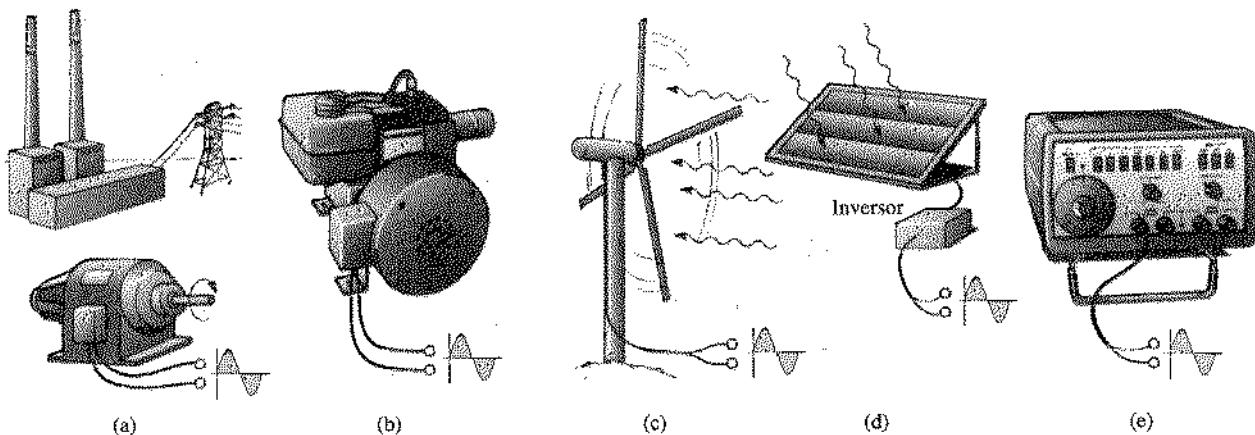


Fig. 13.2 Fontes de corrente alternada: (a) usina geradora; (b) gerador portátil; (c) gerador eólico; (d) painel solar; (e) gerador de sinais.

capítulos seguintes que esta forma de onda em particular possui características que resultam em uma resposta especial quando a aplicamos aos elementos básicos dos circuitos. Os teoremas e métodos introduzidos para circuitos de corrente contínua também serão aplicados a circuitos de corrente alternada senoidal. Embora a aplicação deste tipo de sinal torne necessário aumentar o nível de complexidade matemática para sua descrição, muitos dos conceitos introduzidos nos capítulos sobre corrente contínua poderão, uma vez que a notação exposta no Cap. 14 tenha sido entendida, ser aplicados a circuitos ac com um mínimo de dificuldades adicionais.

A utilização crescente de computadores na indústria torna necessário que seja dada pelo menos uma breve introdução à terminologia empregada quando lidamos com formas de onda não-senoïdais e com a resposta de alguns circuitos fundamentais à aplicação de tais formas de onda. Isto será feito no Cap. 22.

13.2 TENSÃO ALTERNADA SENOIDAL: CARACTERÍSTICAS E DEFINIÇÕES

Geração

Existem várias técnicas para gerar tensões alternadas senoidais. A mais comum é aquela que alimenta as tomadas domiciliares, ou seja, a usina geradora; estas usinas são em geral alimentadas por quedas-d'água, óleo, gás ou fissão nuclear. Em todos os casos o componente mais importante é um *gerador de corrente alternada* (também chamado de *alternador*), como o que vemos na Fig. 13.2(a).

A energia oriunda de uma das fontes citadas acima é utilizada para fazer girar um *rotor* (construído com pólos magnéticos alternados) envolvido pelos enrolamentos do *estator* (a parte estacionária do gerador), induzindo assim uma tensão nos enrolamentos, como prevê a lei de Faraday,

$$e = N \frac{d\phi}{dt}$$

Utilizando um gerador projetado apropriadamente, obtemos nos terminais de saída uma tensão alternada senoidal que, com o auxílio de transformadores, pode ter sua amplitude consideravelmente aumentada para ser distribuída através das linhas de trans-

missão até chegar ao consumidor. No caso de regiões isoladas, que não são servidas por linhas de transmissão, podem ser usados geradores portáteis, que funcionam com gasolina ou óleo diesel. Também neste caso a unidade tem que incluir um gerador de corrente alternada [Fig. 13.2(b)].

Devido à necessidade de conservar os recursos naturais e reduzir a poluição, a energia eólica e a energia solar vêm despertando interesse crescente nas partes do mundo onde o vento e/ou a luz solar são abundantes, tornando estes processos viáveis. As pás da turbina que aparece na Fig. 13.2(c) estão diretamente conectadas ao eixo de um gerador ac. Já as células fotoelétricas no painel ilustrado na Fig. 13.2(d) geram, ao absorver os *fôtons* da luz incidente, uma tensão contínua que pode ser convertida em alternada com o auxílio de um dispositivo eletrônico chamado *inversor*. Esta fonte de energia elétrica já é utilizada atualmente para movimentar pequenas embarcações e modelos experimentais de automóveis.

O *gerador de sinais*, do qual vemos um modelo na Fig. 13.2(e), gera tensões alternadas senoidais cujas características podem ser controladas pelo usuário. Utilizando as várias chaves e botões que existem no painel de controle, podemos obter formas de ondas com diferentes amplitudes e freqüências. O gerador de sinais é fundamental em qualquer estudo de circuitos de corrente alternada e terá um papel importante nos próximos capítulos.

Definições

A forma de onda senoidal da Fig. 13.3 será agora utilizada como um modelo para a definição de alguns termos básicos.* Estes termos podem ser aplicados a qualquer forma de onda alternada. À medida que o leitor for tomando contato com as várias definições, não deve se esquecer de que neste livro o eixo vertical dos gráficos é usado para representar tensões e correntes, enquanto o eixo horizontal *sempre* representa o tempo.

Forma de onda: Gráfico de uma grandeza, como a tensão na Fig. 13.3, em função do tempo (como na figura), posição, temperatura ou outra variável qualquer.

*Grande parte do que vai ser definido e comentado neste capítulo já é conhecido dos estudantes. Alguns conceitos são familiares desde o segundo grau, enquanto outros são ensinados em qualquer curso de física básica para engenharia. O professor poderá, se julgar conveniente, omitir aquilo que julgar desnecessário. (N. do T.)

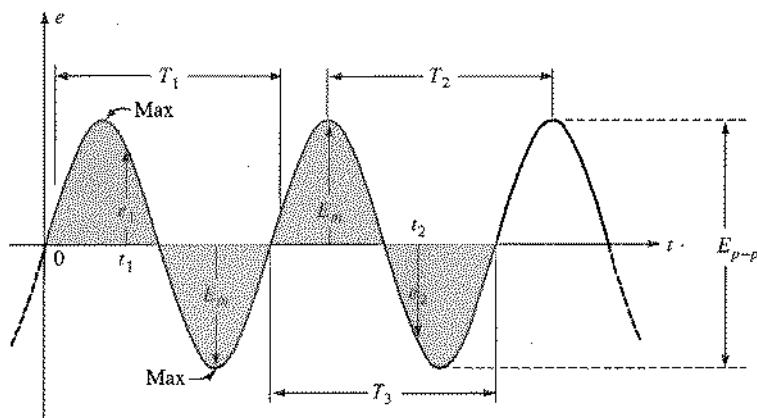


Fig. 13.3 Parâmetros importantes de uma tensão senoidal.

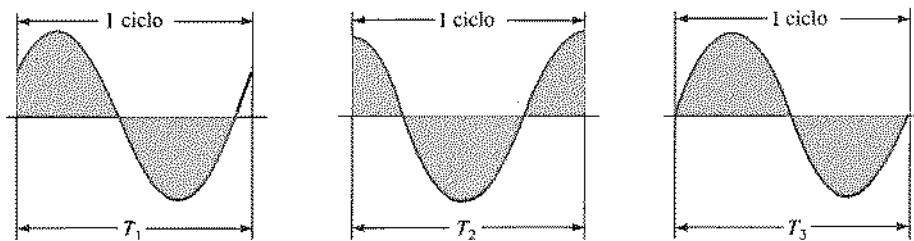


Fig. 13.4 Definição de ciclo e período de uma forma de onda senoidal.

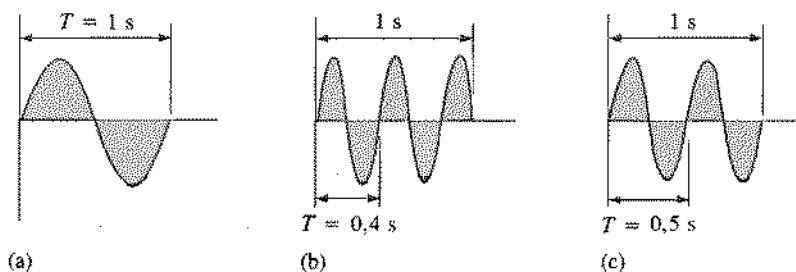


Fig. 13.5 Ilustração do efeito da mudança de freqüência sobre o período de uma onda senoidal.

Alemão (Hamburgo,
Berlim, Karlsruhe)
(1857-1894) físico
Professor de física,
Escola Politécnica de
Karlsruhe e
Universidade de Bonn



Cortesia da
Smithsonian Institution,
foto n.º 66606.

Estimulado pelas previsões do físico escocês James Clerk Maxwell, Hertz produziu ondas eletromagnéticas em seu laboratório na Escola Politécnica de Karlsruhe pouco depois de completar 30 anos. O transmissor e receptor rudimentares construídos por Hertz foram os primeiros aparelhos a emitir e a receber ondas de rádio. Ele conseguiu medir o comprimento de onda das ondas eletromagnéticas e verificou que a velocidade de propagação era da mesma ordem de grandeza que a velocidade da luz. Além disso, demonstrou que estas ondas podiam ser refletidas e refratadas como as ondas de calor e de luz. É lamentável que uma pessoa tão habilidosa e dedicada tenha morrido precocemente aos 37 anos devido a uma doença óssea.

Fig. 13.6 Heinrich Rudolph Hertz.

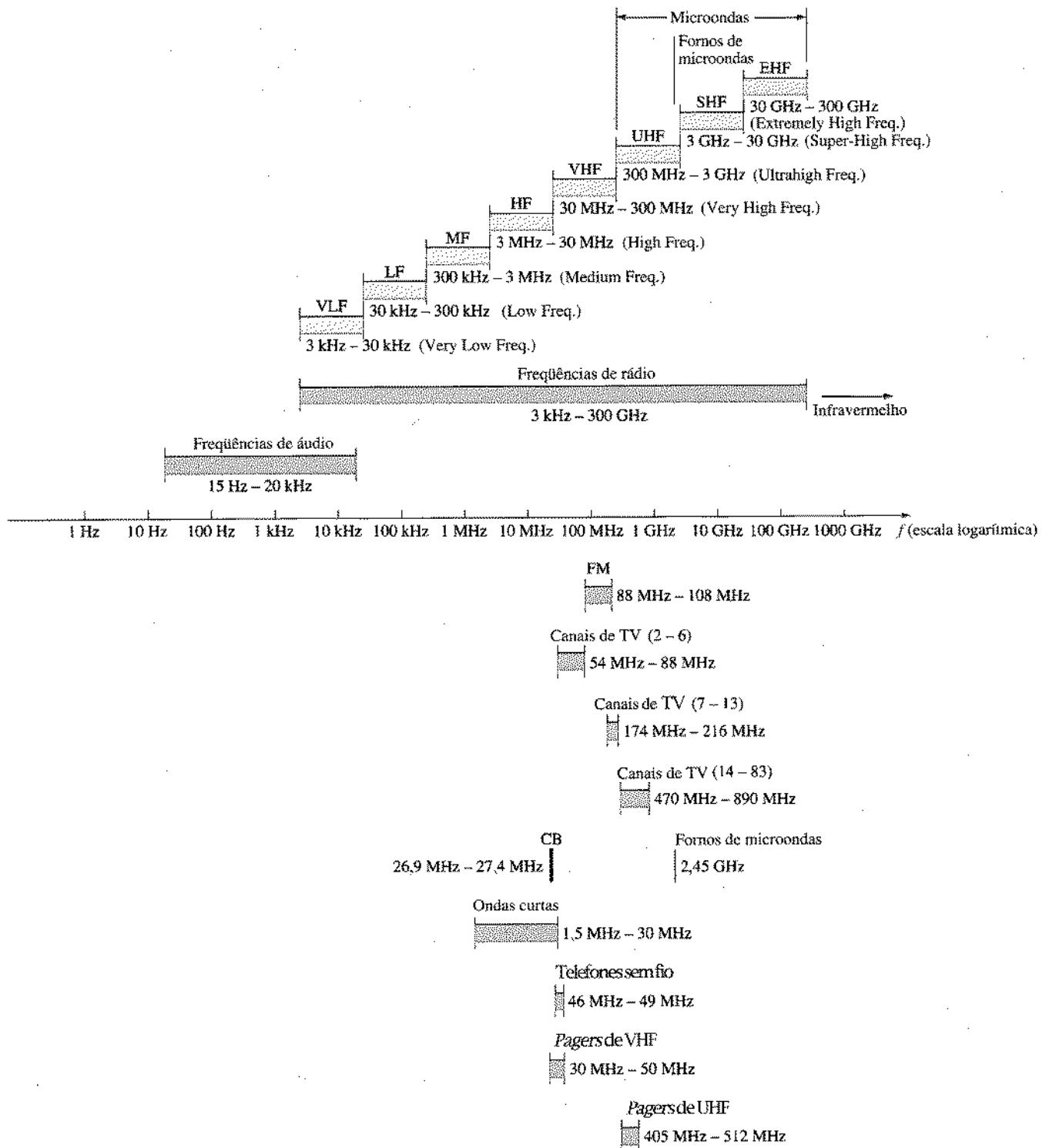


Fig. 13.7 Áreas de aplicação para faixas de freqüência específicas.

Valor instantâneo: Amplitude de uma forma de onda em um instante de tempo qualquer. É representado por letras minúsculas (e_1 , e_2).

Amplitude de pico: Valor máximo de uma forma de onda em relação ao valor médio. É representado por letras maiúsculas (E_m , por exemplo). No caso da forma de onda da Fig. 13.3, o valor médio é zero volt e E_m é a amplitude indicada na figura.

Valor de pico: Valor máximo de uma função medido a partir do nível zero. No caso da forma de onda da Fig. 13.3, a amplitude e o valor de pico são iguais, pois o valor médio da função é zero volt.

Valor pico a pico: Diferença entre os valores dos picos positivo e negativo, isto é, a soma dos módulos das amplitudes positiva e negativa. É denotado por E_{p-p} ou V_{p-p} .

Forma de onda periódica: Forma de onda que se repete após um certo intervalo de tempo constante. A função cujo gráfico vemos na Fig. 13.3 é periódica.

Período (T): Intervalo de tempo entre repetições sucessivas de uma forma de onda periódica ($T_1 = T_2 = T_3$, na Fig. 13.3).

Ciclo: Parte de uma forma de onda contida em um intervalo de tempo igual a *um período*. Os ciclos definidos por T_1 , T_2 e T_3 na Fig. 13.3 podem parecer diferentes na Fig. 13.4, mas como estão todos contidos em um período satisfazem à definição de ciclo.

Freqüência (f): O número de ciclos contados em 1 s. A freqüência da forma de onda da Fig. 13.5(a) é 1 ciclo por segundo, e a da Fig. 13.5(b), 2,5 ciclos por segundo. No caso de uma forma de onda cujo período é 0,5 s, como na Fig. 13.5(c), a freqüência é 2 ciclos por segundo.

A unidade de freqüência é o hertz (Hz), cuja definição é a seguinte:

$$1 \text{ hertz (Hz)} = 1 \text{ ciclo por segundo (c/s)} \quad (13.1)$$

O nome hertz é uma homenagem a Heinrich Rudolph Hertz (Fig. 13.6), que realizou pesquisas de importância fundamental sobre correntes e tensões alternadas e seus efeitos sobre resistores, indutores e capacitores. A freqüência mais comum nas redes de transmissão em toda a América é 60 Hz, enquanto na maior parte da Europa é utilizada a freqüência de 50 Hz.

Como costuma acontecer com os padrões, qualquer desvio em relação ao valor estabelecido pode ter resultados funestos. Em 1993, a cidade de Berlim recebia toda a sua energia elétrica de usinas situadas na antiga Alemanha Oriental, que permitiam que a freqüência variasse entre 50,03 e 51 Hz. Em consequência, os relógios elétricos chegavam a adiantar 4 minutos por dia, fazendo com que os despertadores tocassem antes da hora, os videocassetes parassem de gravar antes do final dos programas etc. Os moradores tinham que acertar constantemente seus relógios. Em 1994, quando a rede elétrica de Berlim foi interligada com o resto da Europa, o padrão preciso de 50 Hz foi restabelecido e o problema desapareceu.

Utilizando uma escala logarítmica (descrita em detalhes no Cap. 21), podemos representar a faixa de freqüências de 1 Hz a 1.000 GHz em um único gráfico, como na Fig. 13.7. Vários dos termos associados a regiões específicas do espectro eletromagnético já devem ser familiares ao leitor a partir de sua experiência diária. Observe que a faixa de áudio (intervalo de resposta do ouvido humano) vai de 15 Hz a 20 kHz, mas as transmissões de rádio podem ser efetuadas entre 3 kHz e 300 GHz.* As barras da figura ilustram o processo de dividir o espectro eletromagnético em faixas de freqüências, que vão do VLF (do inglês *Very Low Frequency*, ou seja, Freqüência Muito Baixa) até o EHF (Extremely High Frequency, Freqüência Extremamente Alta). Observe, porém, que a escala do gráfico é logarítmica e portanto os intervalos de freqüências são bem diferentes para cada barra. Outras freqüências de interesse (TV, FM etc.) também estão indicadas na figura.

Embora seja fácil falar de freqüências nas faixas de megahertz e gigahertz, tenha em mente que uma freqüência de 100 MHz, por exemplo, representa uma forma de onda que passa por

100.000.000 de ciclos em apenas 1 s, um número impressionante quando comparado aos 60 Hz das linhas de transmissão convencionais. O novo chip Pentium Pro fabricado pela Intel pode funcionar em até 200 MHz. Imagine um elemento capaz de processar 200.000.000 de informações por segundo. É realmente uma façanha notável.

Como a freqüência é inversamente proporcional ao período (isto é, se um deles aumenta o outro diminui na mesma proporção), as duas grandezas estão relacionadas pelas expressões

$$\boxed{f = \frac{1}{T}} \quad f = \text{Hz} \quad (13.2)$$

$$\boxed{T = \frac{1}{f}} \quad T = \text{segundos (s)} \quad (13.3)$$

EXEMPLO 13.1 Calcule o período de uma forma de onda periódica cuja freqüência é

- 60 Hz
- 1.000 Hz

Soluções:

a. $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{60 \text{ Hz}} \approx 0,01667 \text{ s, ou } 16,67 \text{ ms}$

(um valor muito usado na prática, pois a freqüência 60 Hz é muito utilizada).

b. $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1000 \text{ Hz}} = 10^{-3} \text{ s} = 1 \text{ ms}$

EXEMPLO 13.2 Determine a freqüência da forma de onda da Fig. 13.8.

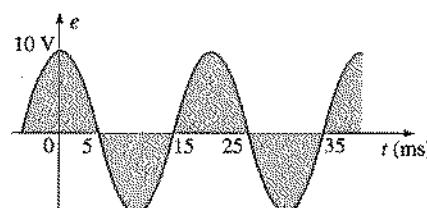


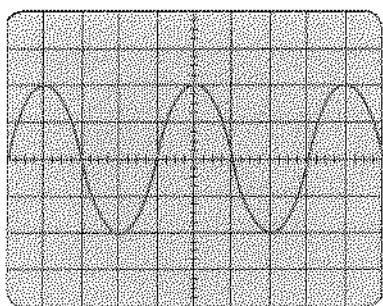
Fig. 13.8 Exemplo 13.2.

Solução: De acordo com a figura, $T = (25 \text{ ms} - 5 \text{ ms}) = 20 \text{ ms}$, e portanto

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20 \times 10^{-3} \text{ s}} = 50 \text{ Hz}$$

EXEMPLO 13.3 O osciloscópio é um instrumento que pode exibir em uma tela formas de onda como as que acabamos de discutir. A Fig. 13.9 mostra como uma forma de onda senoidal aparece na tela de um osciloscópio; as sensibilidades vertical e horizontal estão indicadas abaixo da ilustração. Praticamente

*Lembre-se, no entanto, de que *ondas sonoras não são ondas eletromagnéticas*. A conversão entre os dois tipos é feita com o auxílio de dispositivos chamados *transdutores*, como o microfone e o alto-falante, cujo funcionamento foi analisado no Cap. 11. (N. do T.).



Sensibilidade vertical = 0,1 V/div.
Sensibilidade horizontal = 50 μ s/div.

Fig. 13.9 Exemplo 13.3.

todas as telas de osciloscópios apresentam, superposta à imagem, uma figura, chamada retícula, composta por quadrados com 1 cm de lado, que repartem a tela em um certo número de divisões verticais e horizontais. A sensibilidade vertical é usada para definir a variação de tensão associada a uma divisão vertical; a sensibilidade horizontal define o intervalo de tempo associado a uma divisão horizontal.

Com base nos dados da Fig. 13.9, determine o período, a freqüência e o valor de pico da forma de onda.

Solução: Um ciclo corresponde a quatro divisões. O período é portanto

$$T = 4 \text{ div.} \left(\frac{50 \mu\text{s}}{\text{div.}} \right) = 200 \mu\text{s}$$

e a freqüência é

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{200 \times 10^{-6} \text{s}} = 5 \text{ kHz}$$

A altura máxima acima do eixo horizontal corresponde a duas divisões. Assim,

$$V_m = 2 \text{ div.} \left(\frac{0,1 \text{ V}}{\text{div.}} \right) = 0,2 \text{ V}$$

Definições de Polaridade e Sentido

Nas análises que se seguirão, teremos necessidade de definir uma polaridade para a tensão alternada senoidal e um sentido para a corrente alternada senoidal. Neste livro, tomaremos como positivos o sentido da corrente e a polaridade da tensão correspondentes ao semicírculo positivo das formas de onda associadas. Esta convenção está indicada na Fig. 13.10, juntamente com os símbolos de fontes de tensão e corrente senoidal. As duas grandezas são representadas por letras minúsculas para indicar que variam com o tempo.

A necessidade de definir uma polaridade para a tensão e um sentido para a corrente se tornará óbvia quando analisarmos circuitos de corrente alternada com mais de uma fonte. Observe na última frase a ausência do termo *senoidal* após a expressão *circuitos de corrente alternada*. Isso se tornará cada vez mais fre-

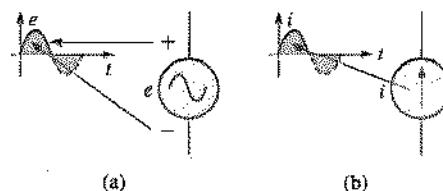


Fig. 13.10 (a) Fonte de tensão alternada senoidal; (b) fonte de corrente alternada senoidal.

quente nas páginas que se seguem; toda tensão ou corrente alterna deve ser tomada como sendo senoidal, a menos que seja dito explicitamente o contrário.

13.3 A SENÓIDE

Os termos definidos na seção anterior podem ser aplicados a qualquer função periódica, seja ela contínua ou descontínua. A forma de onda senoidal é, no entanto, particularmente importante, pois facilita imensamente a análise matemática dos circuitos elétricos. Considere a força da seguinte afirmativa:

A senóide é a única forma de onda que não se altera ao ser aplicada a um circuito contendo resistores, indutores e capacitores.

Isto não aconteceria se o sinal aplicado tivesse, por exemplo, a forma de uma onda quadrada ou triangular. Lembre-se de que a afirmativa acima também se aplica à forma de onda co-senoidal, já que as funções seno e co-seno só diferem entre si por uma fase de 90°, como se pode ver na Fig. 13.12.

A unidade escolhida para o eixo horizontal na Fig. 13.12 foi o grau. Uma outra unidade de medida para ângulos utilizada com freqüência é o radiano (rad). Ela é definida através de um arco como o da Fig. 13.13, cujo comprimento é igual ao raio da circunferência.

Se denotarmos por x o número de intervalos de comprimento igual a r (o raio) que podem ser acomodados em toda a circunferência, teremos:

$$C = 2\pi r = x \cdot r$$

e portanto

$$x = 2\pi$$

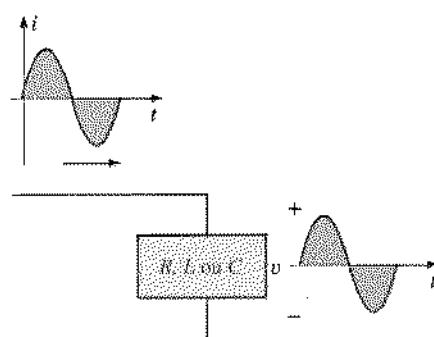


Fig. 13.11 A senóide é a única forma de onda que não se altera ao ser aplicada a um circuito contendo resistores, indutores e capacitores.

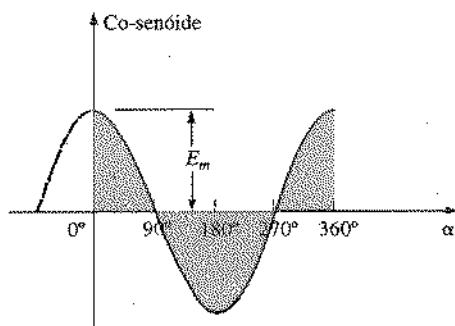
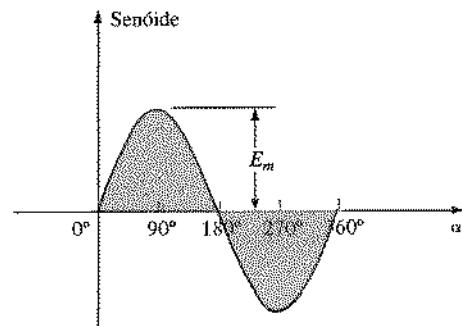


Fig. 13.12 Gráficos das funções seno e co-seno com o eixo horizontal em graus.

Assim, 2π rad correspondem a 360° , como se pode ver na Fig. 13.14, e

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \quad (13.4)$$

onde

$$1 \text{ rad} = 57,296^\circ \approx 57,3^\circ \quad (13.5)$$

Muitas fórmulas usadas no estudo dos circuitos elétricos contêm o fator π . Como se tornará evidente nas páginas que se seguem, esta é uma das razões pelas quais quase sempre é preferível expressar os ângulos em radianos em lugar de graus.

O número π é a razão entre o comprimento da circunferência de um círculo e o seu diâmetro.

O valor do número π tem sido calculado com um grande número de casas decimais como forma de testar novos computadores. Uma pequena amostra do resultado desses cálculos aparece a seguir:

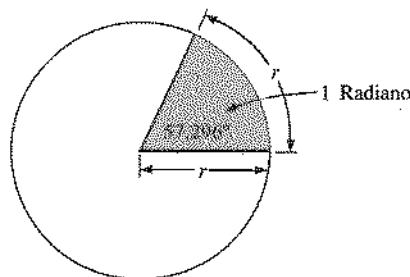


Fig. 13.13 Definição de radiano.

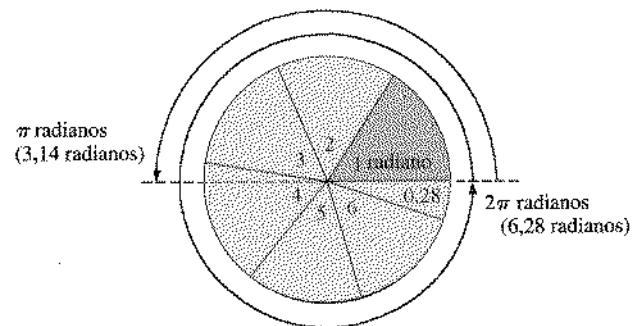


Fig. 13.14 360° equivale a 2π radianos.

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\dots$$

Embora a aproximação $\pi \approx 3,14$ seja freqüentemente utilizada, neste texto usaremos o valor de π fornecido pelas calculadoras científicas: 3,141592654.

A relação entre as duas unidades no caso de ângulos de 180° e 360° é ilustrada na Fig. 13.14. As conversões de graus para radianos e vice-versa podem ser feitas com o auxílio das seguintes expressões:

$$\text{Radianos} = \left(\frac{\pi}{180^\circ} \right) \times (\text{graus}) \quad (13.6)$$

$$\text{Graus} = \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) \times (\text{radianos}) \quad (13.7)$$

Eis alguns casos particulares:

$$90^\circ: \text{ Radianos} = \frac{\pi}{180^\circ} (90^\circ) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$30^\circ: \text{ Radianos} = \frac{\pi}{180^\circ} (30^\circ) = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ rad}: \text{ Graus} = \frac{180^\circ}{\pi} \left(\frac{\pi}{3} \right) = 60^\circ$$

$$\frac{3\pi}{2} \text{ rad}: \text{ Graus} = \frac{180^\circ}{\pi} \left(\frac{3\pi}{2} \right) = 270^\circ$$

Quando o radiano é usado como unidade do eixo das abscissas, a senóide assume a forma que aparece na Fig. 13.15.

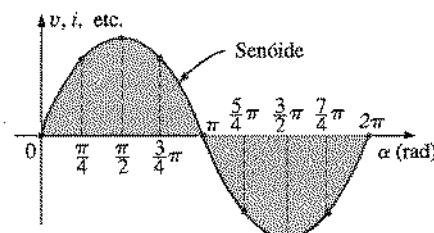


Fig. 13.15 Gráfico da função seno com o eixo horizontal em radianos.

A forma de onda senoidal pode ser obtida a partir das projeções de um vetor girando com movimento circular uniforme em torno de um ponto fixo. Se começarmos na posição ilustrada na Fig. 13.16(a) e plotarmos a amplitude da projeção do vetor no eixo das abscissas em função do ângulo de

rotação, teremos um ciclo completo da senóide para cada volta completa do vetor.

A velocidade de rotação do vetor, ou *velocidade angular*, é definida pela equação:

$$\omega = \frac{\text{ângulo percorrido (graus ou radianos)}}{\text{tempo (segundos)}} \quad (13.8)$$

Usando os símbolos ω , α , t para representar, respectivamente, a velocidade angular, o ângulo e o tempo, temos:

$$\omega = \frac{\alpha}{t} \quad (13.9)$$

e portanto

$$\alpha = \omega t \quad (13.10)$$

Como ω costuma ser especificada em radianos por segundo, o ângulo α obtido com o auxílio da Eq. (13.10) geralmente está expresso em radianos. Nesse caso, para obter o valor de α em graus, basta usar a Eq. (13.7).

O tempo necessário para o vetor efetuar uma volta completa na Fig. 13.16 é igual ao período (T) da forma de onda senoidal da Fig. 13.16(i). Como o número de radianos correspondente a este intervalo de tempo é 2π , temos

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{rad/s}) \quad (13.11)$$

Traduzida em palavras, esta equação nos diz que quanto menor for o período da forma de onda senoidal da Fig. 13.16(i), maior a velocidade angular do vetor. Podemos ir mais além e, usando a definição de freqüência $f = 1/T$, escrever

$$\omega = 2\pi f \quad (\text{rad/s}) \quad (13.12)$$

Assim, quanto maior a freqüência da forma de onda senoidal, maior a velocidade angular do vetor. As Eqs. (13.11) e (13.12) estão ilustradas na Fig. 13.17, na qual, para o mesmo raio vetorial, tomamos $\omega = 100 \text{ rad/s}$ e $\omega = 500 \text{ rad/s}$.

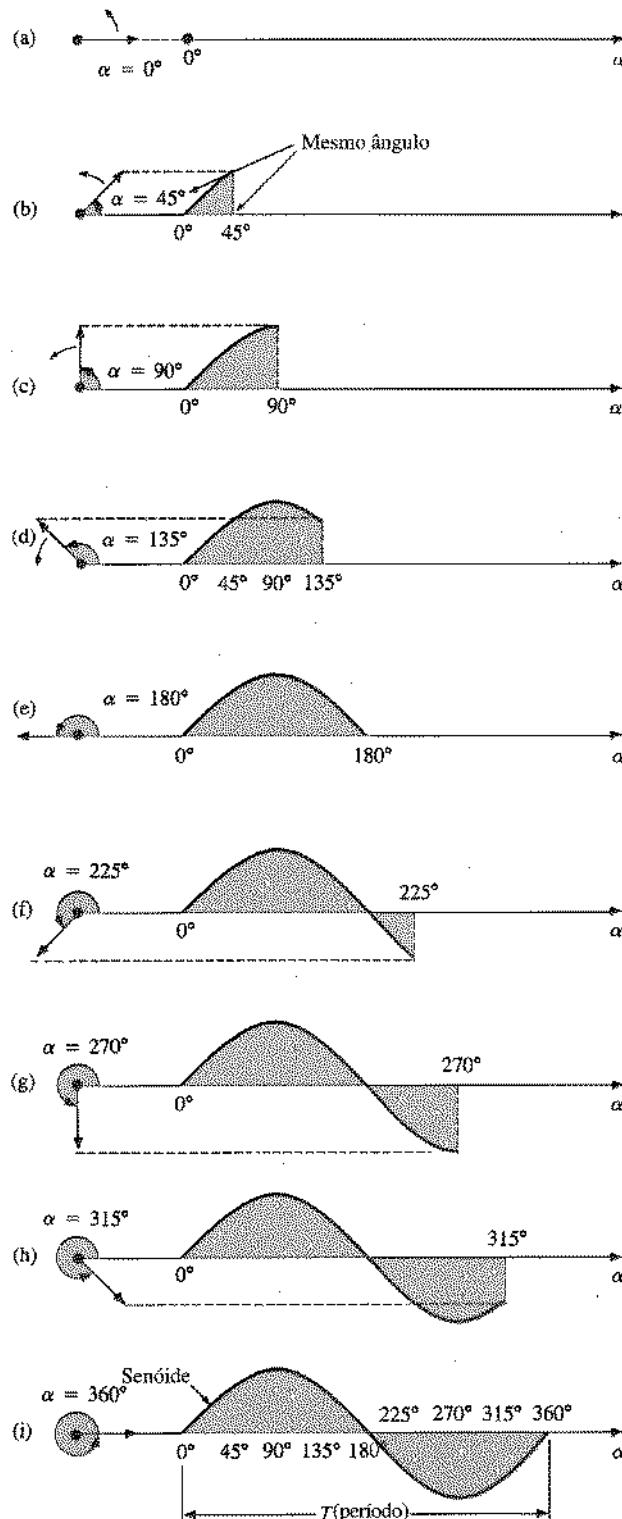


Fig. 13.16 Geração de uma forma de onda senoidal utilizando as projeções de um vetor girante.

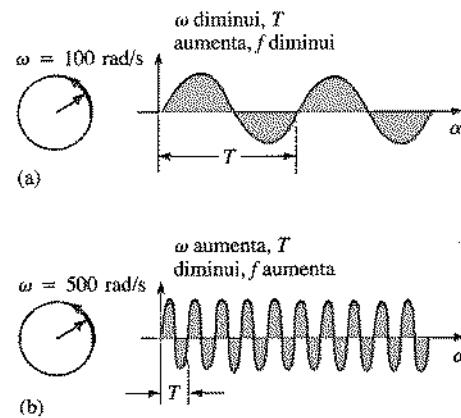


Fig. 13.17 Ilustração da influência do valor de ω sobre a freqüência e o período.



EXEMPLO 13.4 Determine a velocidade angular associada a uma forma de onda senoidal cuja frequência é 60 Hz.

Solução:

$$\omega = 2\pi f = (2\pi)(60 \text{ Hz}) \approx 377 \text{ rad/s}$$

(um valor muito comum, já que a frequência de 60 Hz é muito usada na prática).

EXEMPLO 13.5 Determine a frequência e o período da senóide da Fig. 13.17(b).

Solução: Como $\omega = 2\pi/T$,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \text{ rad}}{500 \text{ rad/s}} = \frac{2\pi \text{ rad}}{500 \text{ rad/s}} = 12,57 \text{ ms}$$

$$\text{e } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{12,57 \times 10^{-3} \text{ s}} = 79,58 \text{ Hz}$$

EXEMPLO 13.6 Sabendo que $\omega = 200 \text{ rad/s}$, determine o intervalo de tempo necessário para que a forma de onda senoidal passe pelo ponto cuja abscissa é 90° .

Solução: De acordo com a Eq. (13.10), $\alpha = \omega t$ e

$$t = \frac{\alpha}{\omega}$$

Como ω é dada em rad/s, devemos utilizar o valor de α em radianos, ou seja $\pi/2$:

$$t = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{\pi/2 \text{ rad}}{200 \text{ rad/s}} = \frac{\pi}{400 \text{ s}} = 7,85 \text{ ms}$$

EXEMPLO 13.7 Ache o valor em graus da abscissa de uma forma de onda senoidal cuja frequência é 60 Hz para $t = 5 \text{ ms}$.

Solução: De acordo com as Eqs. (13.11) e (13.12),

$$\alpha = 2\pi ft = (2\pi)(60 \text{ Hz})(5 \times 10^{-3} \text{ s}) = 1,885 \text{ rad}$$

Tome cuidado para não interpretar a resposta como $1,885^\circ$. O valor correto em graus é:

$$\alpha (\text{°}) = \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} (1,885 \text{ rad}) = 108^\circ$$

13.4 EXPRESSÃO GERAL PARA TENSÕES OU CORRENTES SENOÏDAIS

A expressão matemática geral para uma forma de onda senoidal é:

$$e = A_m \text{ sen } \alpha$$

(13.13)

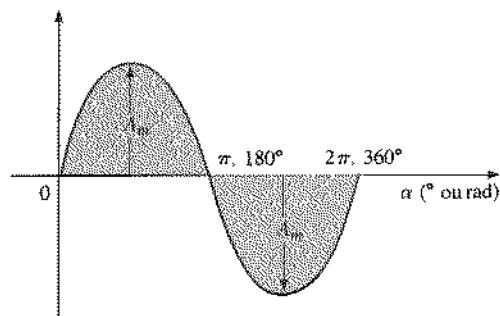


Fig. 13.18 Forma de onda senoidal.

onde A_m é o valor de pico da onda e α é um ângulo em graus ou radianos (Fig. 13.18).

A relação entre a senóide e o vetor girante combinada com $\alpha = \omega t$ nos permite deduzir que, para uma velocidade angular fixa, quanto maior for o intervalo de tempo maior será o número de ciclos no gráfico da forma de onda. Por outro lado, mantendo fixo o intervalo de tempo, quanto maior for ω maior será também o número de ciclos.

De acordo com a Eq. (13.10), a Eq. (13.13) pode também ser escrita na forma

$$A_m \text{ sen } \omega t \quad (13.14)$$

isto é, como unidade de medida do eixo horizontal.

No caso das grandezas utilizadas no estudo de circuitos elétricos como a tensão e a corrente, as expressões gerais são:

$$\begin{aligned} i &= I_m \text{ sen } \omega t = I_m \text{ sen } \alpha \\ e &= E_m \text{ sen } \omega t = E_m \text{ sen } \alpha \end{aligned}$$

onde as letras maiúsculas com o índice m representam amplitudes e as letras minúsculas i e e representam os valores da corrente e da tensão, respectivamente, em um instante t qualquer. Esta forma é particularmente importante porque expressa uma tensão ou corrente senoidal em função do tempo, que é a escala horizontal dos osciloscópios. Lembre-se de que a sensibilidade horizontal deste instrumento é dada em segundos por divisão, e não em graus por centímetro.

EXEMPLO 13.8 Sabendo que $e = 5 \text{ sen } \alpha$, calcule e para $\alpha = 40^\circ$ e $\alpha = 0,8\pi \text{ rad}$.

Solução: Para $\alpha = 40^\circ$,

$$e = 5 \text{ sen } 40^\circ = 5(0,6428) = 3,214 \text{ V}$$

Para $\alpha = 0,8\pi$,

$$\alpha (\text{°}) = \frac{180^\circ}{\pi} (0,8\pi) = 144^\circ$$

$$e = 5 \text{ sen } 144^\circ = 5(0,5878) = 2,939 \text{ V}$$

No caso das calculadoras científicas não é necessário converter radianos em graus, pois elas trabalham diretamente com ra-

dianos: basta apenas colocar a calculadora no modo RAD e entrar com o valor do ângulo em radianos, pressionando em seguida a tecla da função trigonométrica desejada (sen, cos, tan etc.).

O ângulo associado a um valor particular da tensão é obtido manipulando a equação

$$e = E_m \sin \alpha$$

da seguinte forma:

$$\sin \alpha = \frac{e}{E_m}$$

ou

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{e}{E_m}$$

(13.15)

Da mesma forma, para um dado valor de corrente,

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{i}{I_m}$$

(13.16)

A função \sin^{-1} pode ser encontrada em todas as calculadoras científicas.

EXEMPLO 13.9

- Determine o ângulo para o qual o valor da função $v = 10 \sin 377 t$ é 4 V.
- Determine o momento em que a função assume o valor dado no item (a).

Soluções:

- De acordo com a Eq. (13.15),

$$\alpha_1 = \sin^{-1} \frac{v}{E_m} = \sin^{-1} \frac{4 \text{ V}}{10 \text{ V}} = \sin^{-1} 0,4 = 23,578^\circ$$

A Fig. 13.19 nos mostra, porém, que o valor de 4 V (positivo) pode corresponder a dois ângulos entre 0° e 180° . O valor do segundo ângulo é determinado por

$$\alpha_2 = 180^\circ - 23,578^\circ = 156,422^\circ$$

Embora as Eqs. (13.15) e (13.16) tenham um número infinito de soluções, pois as senóides têm um número infinito de

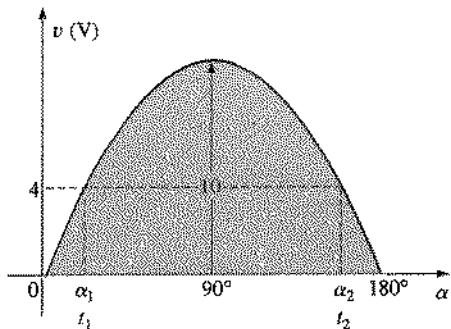


Fig. 13.19 Exemplo 13.9.

ciclos, as calculadoras fornecem apenas a solução compreendida entre 0° e 90° . As outras soluções podem ou não ser importantes, dependendo do problema.

- De acordo com a Eq. (13.10), $\alpha = \omega t$ e portanto $t = \alpha/\omega$. Entretanto, α deve ser expresso em radianos. Assim,

$$\alpha (\text{rad}) = \frac{\pi}{180^\circ} (23,578^\circ) = 0,411 \text{ rad}$$

$$\text{e } t_1 = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{0,411 \text{ rad}}{377 \text{ rad/s}} = 1,09 \text{ ms}$$

Para a segunda solução,

$$\alpha (\text{rad}) = \frac{\pi}{180^\circ} (156,422^\circ) = 2,73 \text{ rad}$$

$$t_2 = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{2,73 \text{ rad}}{377 \text{ rad/s}} = 7,24 \text{ ms}$$

Podemos também plotar uma senóide em função do *tempo*. O valor dos intervalos de tempo pode ser obtido a partir de $t = \alpha/\omega$, mas o método mais direto é simplesmente obter o período T a partir de $T = 1/f$ e subdividi-lo no número de intervalos desejado. No Exemplo 13.10 ilustraremos esta técnica.

Antes de passarmos ao exemplo seguinte, gostaríamos de chamar a atenção do leitor para a simplicidade da equação matemática que representa uma forma de onda senoidal. As formas de onda periódicas não-senoidais não podem ser representadas por um único termo, mas exigem dois, quatro, seis ou mesmo um número infinito de termos para serem representadas corretamente. As formas de onda não-senoidais serão discutidas no Cap. 24.

EXEMPLO 13.10

Pinte o gráfico de $e(t) = 10 \sin 314 t$, tomando como unidade do eixo horizontal

- o ângulo α em graus
- o ângulo α em radianos
- o tempo (t) em segundos

Soluções:

- Veja a Fig. 13.20. (Note que não é necessário fazer nenhum cálculo.)
- Veja a Fig. 13.21. (Uma vez que tenha sido bem entendida a relação entre graus e radianos, novamente não há necessidade de efetuar cálculos.)

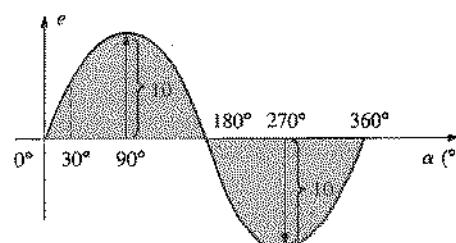


Fig. 13.20 Exemplo 13.10, eixo horizontal em graus.

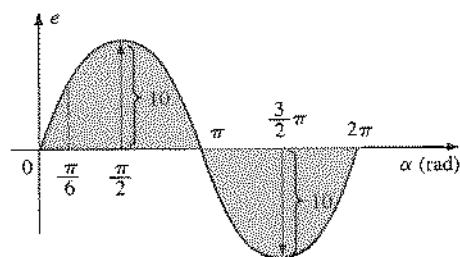


Fig. 13.21 Exemplo 13.10, eixo horizontal em radianos.

$$\text{c. } 360^\circ: \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{314} = 20 \text{ ms}$$

$$180^\circ: \quad \frac{T}{2} = \frac{20 \text{ ms}}{2} = 10 \text{ ms}$$

$$90^\circ: \quad \frac{T}{4} = \frac{20 \text{ ms}}{4} = 5 \text{ ms}$$

$$30^\circ: \quad \frac{T}{12} = \frac{20 \text{ ms}}{12} = 1,67 \text{ ms}$$

Veja a Fig. 13.22.

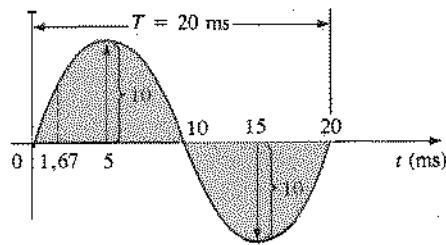


Fig. 13.22 Exemplo 13.10, eixo horizontal em milissegundos.

EXEMPLO 13.11 Sabendo que $i(t) = 6 \times 10^{-3} \sin 1.000 t$, calcule i para $t = 2 \text{ ms}$.

Solução:

$$\alpha = \omega t = 1000t = (1000 \text{ rad/s})(2 \times 10^{-3} \text{ s}) = 2 \text{ rad}$$

$$\alpha (\text{ }^\circ) = \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} (2 \text{ rad}) = 114,59^\circ$$

$$i = (6 \times 10^{-3})(\sin 114,59^\circ) \\ = (6 \text{ mA})(0,9093) = 5,46 \text{ mA}$$

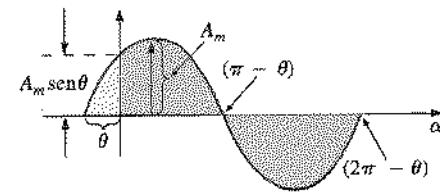


Fig. 13.23 Definição da fase inicial para uma senóide que corta o eixo horizontal à esquerda da origem com inclinação positiva.

Se a curva intercepta o eixo horizontal à *esquerda* da origem com inclinação *positiva* (função crescente), como vemos na Fig. 13.23, a equação correta é

$$A_m \sin(\omega t + \theta) \quad (13.18)$$

Em $\alpha = \omega t = 0^\circ$ o valor da função é $A_m \sin \theta$. Se o gráfico corta o eixo horizontal, com inclinação positiva, à *direita* da origem, como na Fig. 13.24, a equação correta é

$$A_m \sin(\omega t - \theta) \quad (13.19)$$

Nesse caso, em $\omega t = \alpha = 0^\circ$ o valor da função é $-A_m \sin(-\theta)$, que, de acordo com uma identidade trigonométrica, é equivalente a $-A_m \sin \theta$.

Se a forma de onda corta o eixo horizontal com inclinação positiva e adiantada de 90° ($\pi/2$), como na Fig. 13.25, o gráfico coincide com o da função *co-seno*, ou seja,

$$\sin(\omega t + 90^\circ) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \omega t \quad (13.20)$$

ou

$$\sin \omega t = \cos(\omega t - 90^\circ) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (13.21)$$

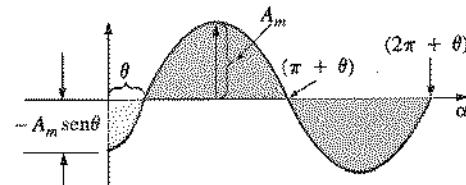


Fig. 13.24 Definição da fase inicial para uma senóide que corta o eixo horizontal à direita da origem com inclinação positiva.

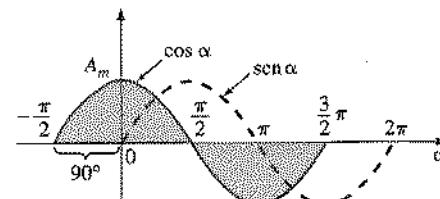


Fig. 13.25 Relação de fase entre o seno e o co-seno.

onde θ é o valor do deslocamento em graus ou radianos.

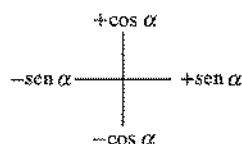


Fig. 13.26 Método gráfico para encontrar relações entre o seno e o co-seno.

Os termos *atrasado* e *adiantado* são utilizados para indicar diferenças de fase entre duas formas de onda senoidais de *mesma frequência* plotadas no mesmo gráfico. Na Fig. 13.25 dizemos que a curva que representa o co-seno está *adiantada* de 90° em relação à curva do seno, e que o gráfico da função seno está *atrasado* de 90° em relação ao do co-seno. Dizemos também que a *diferença de fase* entre as duas formas de onda é 90° ou que elas estão *defasadas* de 90° . Observe que a diferença de fase entre duas curvas é sempre medida entre dois pontos do eixo horizontal nos quais as duas curvas têm a *mesma inclinação*. Se duas formas de ondas interceptam o eixo horizontal no mesmo ponto e com a mesma inclinação, elas estão *em fase*.

As relações geométricas entre várias formas das funções seno e co-seno podem ser deduzidas a partir da Fig. 13.26. Começando, por exemplo, na posição $\text{sen } \alpha$, observamos que $\cos \alpha$ corresponde a uma rotação de 90° no sentido anti-horário (positivo). Assim, $\cos \alpha = \text{sen}(\alpha + 90^\circ)$. Para obtermos $-\text{sen } \alpha$ devemos efetuar uma rotação de 180° no sentido horário ou anti-horário. Assim, $-\text{sen } \alpha = \text{sen}(\alpha \pm 180^\circ)$, e assim por diante, como podemos ver nas expressões a seguir.

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \text{sen}(\alpha + 90^\circ) \\ \text{sen } \alpha &= \cos(\alpha - 90^\circ) \\ -\text{sen } \alpha &= \text{sen}(\alpha \pm 180^\circ) \\ -\cos \alpha &= \text{sen}(\alpha + 270^\circ) = \text{sen}(\alpha - 90^\circ) \\ \text{etc.}\end{aligned}\quad (13.22)$$

Além disso, não devemos esquecer que

$$\begin{aligned}\text{sen}(-\alpha) &\equiv -\text{sen } \alpha \\ \cos(-\alpha) &\equiv \cos \alpha\end{aligned}\quad (13.23)$$

Se encontrarmos uma expressão da forma

$$e = -E_m \text{sen } \omega t$$

o sinal negativo deve ser associado à função trigonométrica, e não à amplitude E_m . Em outras palavras, a expressão deve ser reescrita na forma

$$e = E_m(-\text{sen } \omega t)$$

Como

$$-\text{sen } \omega t = \text{sen}(\omega t \pm 180^\circ)$$

podemos também escrever:

$$e = E_m \text{sen}(\omega t \pm 180^\circ)$$

o que mostra que um sinal negativo pode ser substituído por uma variação (positiva ou negativa) de 180° no ângulo de fase, isto é,

$$\begin{aligned}e &= E_m \text{sen } \omega t = E_m \text{sen}(\omega t + 180^\circ) \\ &= E_m \text{sen}(\omega t - 180^\circ)\end{aligned}$$

Um gráfico de cada uma dessas expressões mostrará claramente a sua equivalência. Assim, existem duas representações matemáticas corretas para estas funções.

A *relação de fase* entre duas formas de onda indica qual delas está atrasada ou adiantada e de quantos graus ou radianos.

EXEMPLO 13.12 Qual é a relação de fase entre as formas de onda senoidais em cada um dos seguintes pares?

- $v = 10 \text{ sen}(\omega t + 30^\circ)$
 $i = 5 \text{ sen}(\omega t + 70^\circ)$
- $i = 15 \text{ sen}(\omega t + 60^\circ)$
 $v = 10 \text{ sen}(\omega t - 20^\circ)$
- $i = 2 \cos(\omega t + 10^\circ)$
 $v = 3 \text{ sen}(\omega t - 10^\circ)$
- $i = -\text{sen}(\omega t + 30^\circ)$
 $v = 2 \text{ sen}(\omega t + 10^\circ)$
- $i = -2 \cos(\omega t - 60^\circ)$
 $v = 3 \text{ sen}(\omega t - 150^\circ)$

Soluções:

- Veja a Fig. 13.27.

i está adiantada de 40° em relação a v ou v está atrasada de 40° em relação a i .

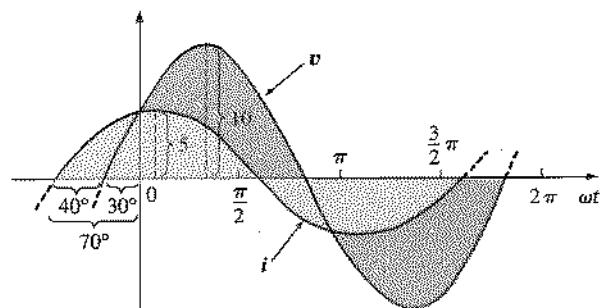


Fig. 13.27 Exemplo 13.12, i adiantada de 40° em relação a v .

- Veja a Fig. 13.28.

i está adiantada de 80° em relação a v ou v está atrasada de 80° em relação a i .

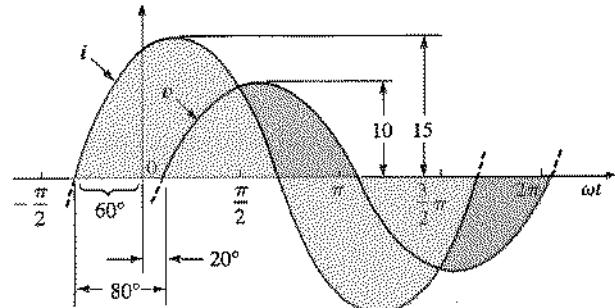


Fig. 13.28 Exemplo 13.12, i adiantada de 80° em relação a v .



c. Veja a Fig. 13.29.

$$i = 2 \cos(\omega t + 10^\circ) = 2 \sin(\omega t + 10^\circ + 90^\circ) \\ = 2 \sin(\omega t + 100^\circ)$$

v está adiantada de 110° em relação a i ou v está atrasada de 110° em relação a i .

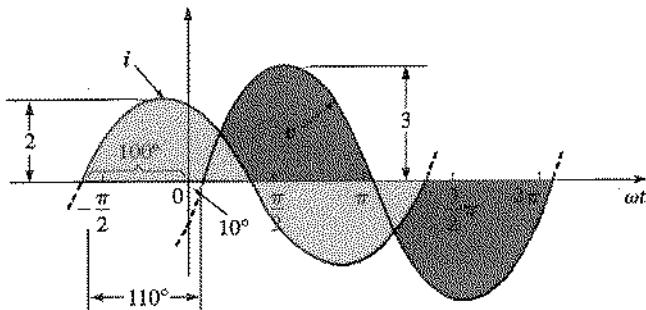


Fig. 13.29 Exemplo 13.12, i adiantada de 110° em relação a v .

d. Veja a Fig. 13.30.

$$-\sin(\omega t + 30^\circ) = \sin(\omega t + 30^\circ - 180^\circ) \quad \text{Note} \\ = \sin(\omega t - 150^\circ)$$

v está adiantada de 160° em relação a i ou i está atrasada de 160° em relação a v .

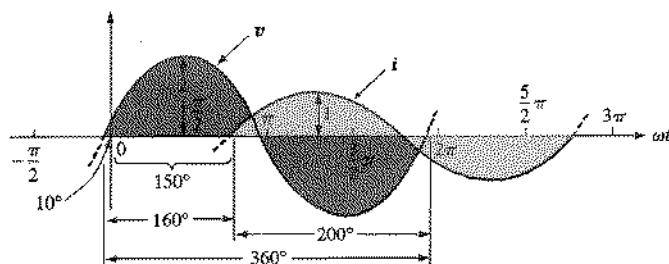


Fig. 13.30 Exemplo 13.12, v adiantada de 160° em relação a i .

Ou, como

$$-\sin(\omega t + 30^\circ) = \sin(\omega t + 30^\circ + 180^\circ) \quad \text{Note} \\ = \sin(\omega t + 210^\circ)$$

i está adiantada de 200° em relação a v ou i está atrasada de 200° em relação a v .

e. Veja a Fig. 13.31.

$$i = -2 \cos(\omega t - 60^\circ) = 2 \cos(\omega t - 60^\circ - 180^\circ) \quad \checkmark \text{Por escolha} \\ = 2 \cos(\omega t - 240^\circ)$$

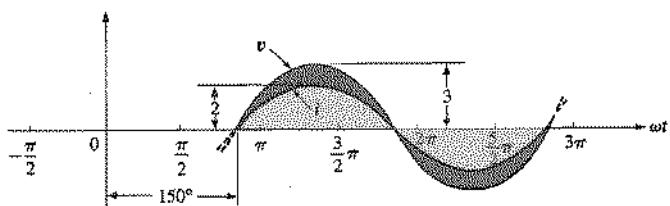


Fig. 13.31 Exemplo 13.12, v e i em fase.

Entretanto, $\cos \alpha = \sin(\alpha + 90^\circ)$

$$\text{de modo que } 2 \cos(\omega t - 240^\circ) = 2 \sin(\omega t - 240^\circ + 90^\circ) \\ = 2 \sin(\omega t - 150^\circ)$$

v e i estão em fase.

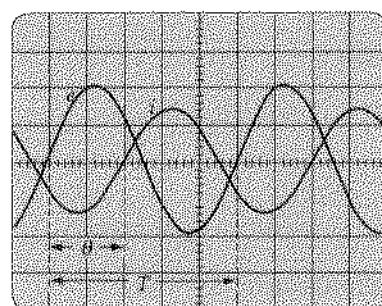
Medidas de Fase

A maneira correta de utilizar um osciloscópio para medir ângulos de fase será explicada com detalhes na Seção 15.13. Já estamos em condições, porém, de determinar a diferença de fase entre duas senoides a partir da imagem que aparece na tela do osciloscópio. Tomemos como exemplo as duas senoides da Fig. 13.32. Observe que as duas senoides têm a mesma freqüência e portanto o mesmo período. Para as formas da Fig. 13.32, cada período compreende 5 divisões, com $0,2\text{ ms/div}$. A diferença de fase entre as duas ondas é duas divisões. Como um período completo corresponde a uma variação de fase de 360° , podemos escrever:

$$\frac{360^\circ}{T \text{ (n.º de div.)}} = \frac{\theta}{\text{descolamento de fase (n.º de div.)}}$$

$$\theta = \frac{\text{deslocamento de fase (n.º de div.)}}{T \text{ (n.º de div.)}} \times 360^\circ \quad (13.24)$$

Substituindo os dados obtidos na Fig. 13.32 na Eq. (13.24),



Sensibilidade vertical = 2 V/div .
Sensibilidade horizontal = $0,2\text{ ms/div}$.

Fig. 13.32 Medida da diferença de fase entre duas ondas usando um osciloscópio de traço duplo.

temos:

$$\theta = \frac{(2 \text{ div.})}{(5 \text{ div.})} \times 360^\circ = 144^\circ$$

e portanto ϵ está adiantada de 144° em relação a i .

13.6 VALOR MÉDIO

Muito embora o conceito de *valor médio* seja importante em todos os ramos do conhecimento, seu significado é freqüentemente mal compreendido. Na Fig. 13.33(a), por exemplo, pode ser necessário conhecer a altura média do monte de areia para determinar o volume de areia disponível. A altura média do monte de areia é a altura que será obtida se mantivermos constante a distância entre as extremidades do monte e espalharmos a areia até que a altura fique uniforme, como na Fig. 13.33(b). A área da seção reta do monte na Fig. 13.33(a) será então igual à área do monte da seção retangular na Fig. 13.33(b), que é dada por $A = b \times h$. É claro que a profundidade do monte (na direção perpendicular à página) deve ser a mesma nos dois casos para que as conclusões a que chegamos sejam verdadeiras.

Na Fig. 13.33, a distância entre as extremidades do monte de areia foi mantida constante. Na Fig. 13.34 temos uma situação diferente, que poderia ocorrer, por exemplo, no caso de um pintor que desejasse estimar a altura média da areia se ela fosse espalhada para cobrir a distância indicada na Fig. 13.34(a). O resultado deste aumento na distância é visto na Fig. 13.34(b). Comparada com a situação da Fig. 13.33, a altura média diminui. É fácil perceber que quanto maior a distância, menor será a altura média.

Se existe uma depressão no terreno, como na Fig. 13.35(a), quando a areia for espalhada uma certa quantidade será usada para preenchê-la; o resultado será um valor ainda mais baixo para a altura média, como ilustra a Fig. 13.35(b). No caso de uma forma de onda senoidal, a depressão tem a mesma forma que o monte de areia (em um ciclo completo), o que implica uma altura média nula (ou zero volts para uma tensão senoidal quando calculamos a média para um período).

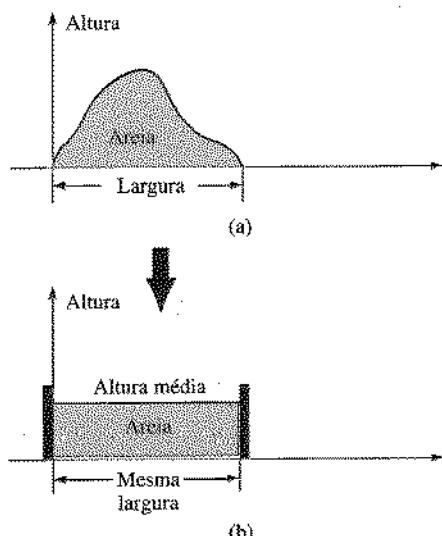


Fig. 13.33 Definição de valor médio.

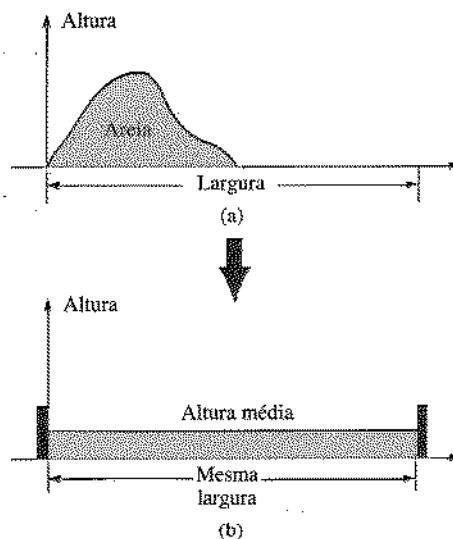


Fig. 13.34 Influência da largura sobre o valor médio.

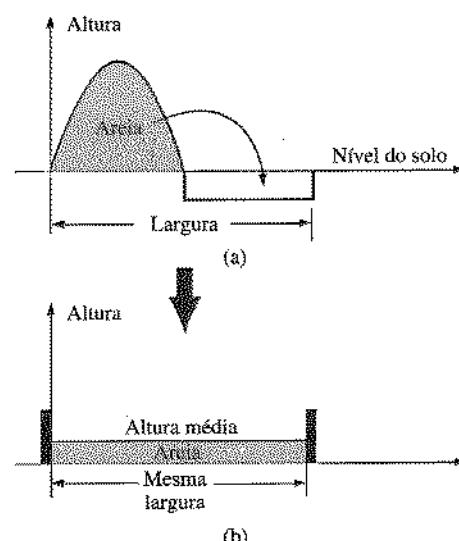


Fig. 13.35 Influência de depressões (valores negativos) sobre o valor médio.

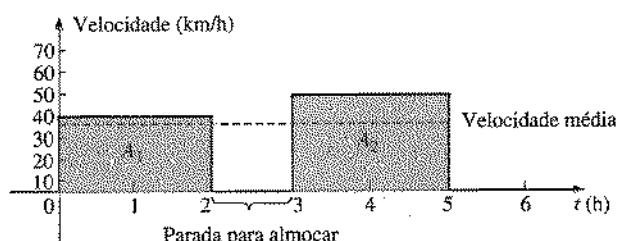


Fig. 13.36 Gráfico da velocidade em função do tempo para uma viagem de automóvel.



Alguns motoristas, depois de terem percorrido uma distância considerável, gostam de calcular a velocidade média do veículo. Em geral isto é feito dividindo o número de quilômetros percorrido pelo número de horas necessárias para percorrer essa distância. Por exemplo: se uma pessoa viajou 180 km em 5 horas, a velocidade média foi de 36 km/h. Esta distância pode ter sido percorrida com várias velocidades em diferentes intervalos de tempo, como vemos na Fig. 13.36.

Calculando a área total sob a curva $v \times t$ para 5 horas e dividindo o resultado pelo tempo total da viagem, novamente obtemos 36 km/h, ou seja

$$\begin{aligned} \text{velocidade média} &= \frac{\text{área sob a curva}}{\text{comprimento da curva}} \quad (13.25) \\ &= \frac{A_1 + A_2}{5 \text{ h}} \\ &= \frac{(40 \text{ km/h})(2 \text{ h}) + (50 \text{ km/h})(2 \text{ h})}{5 \text{ h}} \\ &= \frac{180}{5} \text{ km/h} \\ &= 36 \text{ km/h} \end{aligned}$$

A Eq. (13.25) pode ser aplicada a qualquer variável, como por exemplo a corrente ou a tensão. Se representarmos por G o valor médio, teremos

$$G \text{ (valor médio)} = \frac{\text{soma algébrica das áreas}}{\text{comprimento da curva}} \quad (13.26)$$

Devemos calcular a soma *algébrica* das áreas, pois algumas podem estar abaixo do eixo horizontal. As áreas acima do eixo são tomadas com sinal positivo, e as áreas abaixo do eixo, com sinal negativo. O valor médio, naturalmente, poderá ser positivo ou negativo.

O valor médio de *qualquer* corrente ou tensão é o valor indicado por um medidor de corrente contínua. Em outras palavras, o valor médio de uma forma de onda periódica é o valor de corrente contínua equivalente. Em cursos mais avançados, o leitor encontrará fontes de tensão contínua e alternada no mesmo circuito. As tensões e correntes nesses circuitos têm uma componente contínua (que corresponde ao valor médio da forma de onda) e uma componente alternada (cujo valor médio é zero).

EXEMPLO 13.13 Determine o valor médio das formas de onda da Fig. 13.37.

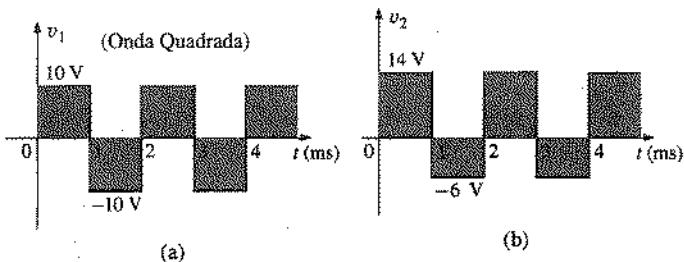


Fig. 13.37 Exemplo 13.13.

Soluções:

a. Vemos, por inspeção, que a área acima do eixo dos t é igual à área abaixo do mesmo eixo e portanto o valor médio é zero. Chegamos ao mesmo resultado usando a Eq. (13.26):

$$\begin{aligned} G &= \frac{(10 \text{ V})(1 \text{ ms}) - (10 \text{ V})(1 \text{ ms})}{2 \text{ ms}} \\ &= \frac{0}{2 \text{ ms}} = 0 \text{ V} \end{aligned}$$

b. Usando a Eq. (13.26),

$$\begin{aligned} G &= \frac{(14 \text{ V})(1 \text{ ms}) - (6 \text{ V})(1 \text{ ms})}{2 \text{ ms}} \\ &= \frac{14 \text{ V} - 6 \text{ V}}{2} = \frac{8 \text{ V}}{2} = 4 \text{ V} \end{aligned}$$

como vemos na Fig. 13.38.

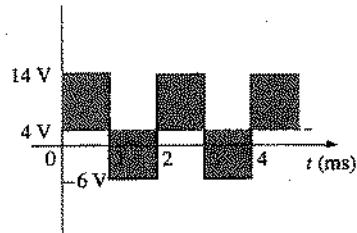


Fig. 13.38 Ilustração do valor médio da forma de onda da Fig. 13.37(b).

Na realidade, a forma de onda da Fig. 13.37(b) é a onda quadrada da Fig. 13.37(a) somada a uma tensão contínua de 4 V:

$$v_2 = v_1 + 4 \text{ V}$$

EXEMPLO 13.14 Calcule os valores médios das seguintes formas de onda:

- a. Fig. 13.39.
- b. Fig. 13.49.

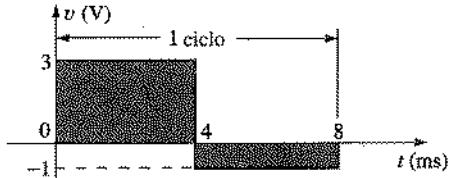


Fig. 13.39 Exemplo 13.14 (parte a).

Soluções:

$$a. G = \frac{+(3 \text{ V})(4 \text{ ms}) - (1 \text{ V})(4 \text{ ms})}{8 \text{ ms}} = \frac{12 \text{ V} - 4 \text{ V}}{8} = 1 \text{ V}$$

Observe a Fig. 13.41.

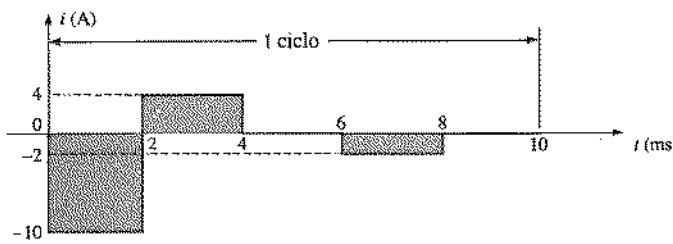


Fig. 13.40 Exemplo 13.14 (parte b).

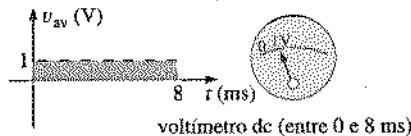


Fig. 13.41 Resposta de um medidor dc à forma de onda da Fig. 13.39.

$$\text{b. } G = \frac{-(10 \text{ V})(2 \text{ ms}) + (4 \text{ V})(2 \text{ ms}) - (2 \text{ V})(2 \text{ ms})}{10 \text{ ms}} \\ = \frac{-20 \text{ V} + 8 \text{ V} - 4 \text{ V}}{10} = \frac{-16 \text{ V}}{10} = -1,6 \text{ V}$$

Observe a Fig. 13.42.

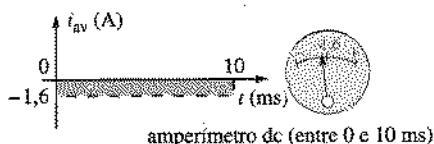


Fig. 13.42 Resposta de um medidor dc à forma de onda da Fig. 13.40.

No exemplo precedente não foi difícil calcular as áreas porque as formas de onda eram retangulares e é muito fácil determinar a área de um retângulo. No caso de formas de onda mais complexas, porém, a situação não é tão simples. É possível obter uma solução aproximada dividindo a área em retângulos ou outras formas geométricas simples, cuja área podemos calcular com facilidade. Por exemplo: vamos demonstrar daqui a pouco que

a área do semicírculo positivo (ou negativo) de uma senóide é igual a $2A_m$.

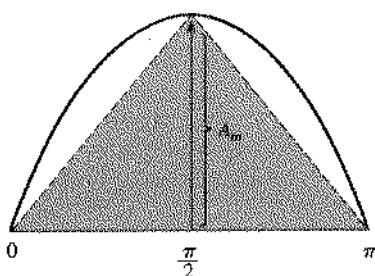


Fig. 13.43 Aproximação do semicírculo positivo de uma senóide por dois triângulos retângulos.

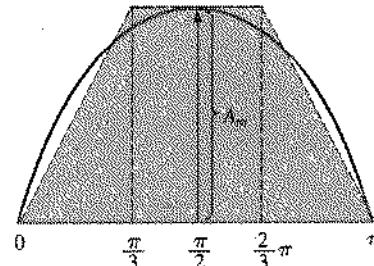


Fig. 13.44 Uma aproximação melhor do semicírculo positivo de uma senóide.

Substituindo a forma de onda real por dois triângulos (Fig. 13.43) e usando a fórmula para a área de um triângulo (base \times altura/2), obtemos uma estimativa grosseira da área real:

$$\text{Área sombreada} = 2\left(\frac{1}{2}bh\right) = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)(A_m)\right] = \frac{\pi}{2}A_m \\ \approx 1,58A_m$$

Obtemos uma aproximação melhor usando um retângulo e dois triângulos (Fig. 13.44):

$$\text{Área} = A_m \frac{\pi}{3} + 2\left(\frac{1}{2}bh\right) = A_m \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}A_m = \frac{2}{3}\pi A_m \\ = 2,094A_m$$

um resultado bem mais próximo do valor real. Quanto maior o número de subdivisões utilizado, maior a precisão do método.

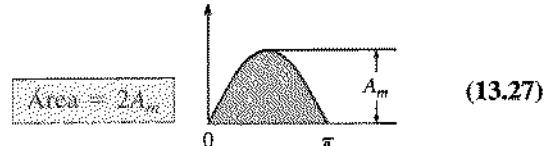
O valor exato, $2A_m$, só pode ser obtido por *integração*. O cálculo de integrais é apresentado aqui apenas para que o leitor tome conhecimento de sua existência; não será necessário conhecer integração para continuar a fazer uso deste texto. Trata-se, porém, de uma ferramenta matemática extremamente útil, que o leitor deve aprender o mais cedo possível. Para calcular a área sob o pulso positivo usando integração, começamos com a expressão

$$\text{Área} = \int_0^{\pi} A_m \sin \alpha \, d\alpha$$

onde \int é o símbolo de integração, 0 e π são os limites de integração, $A_m \sin \alpha$ é a função a ser integrada e $d\alpha$ indica que α é a variável de integração.

Integrando a expressão acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= A_m[-\cos \alpha]_0^{\pi} \\ &= -A_m(\cos \pi - \cos 0^\circ) \\ &= -A_m[-1 - (+1)] = -A_m(-2) \end{aligned}$$



Uma vez calculada a área do semicírculo da senóide, podemos determinar o valor médio usando a Eq. (13.26):

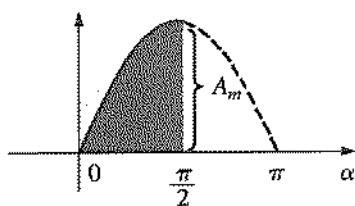


Fig. 13.45 Determinação do valor médio da metade do semicírculo de uma senóide.

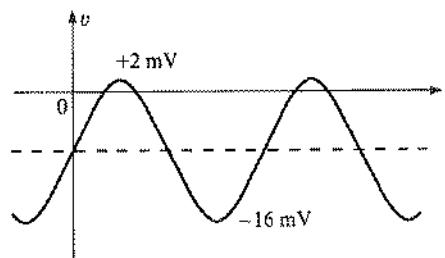


Fig. 13.47 Exemplo 13.16.

$$G = \frac{2A_m}{\pi}$$

e

$$G = 0.637A_m \quad (13.28)$$

Para a forma de onda da Fig. 13.45,

$$G = \frac{(2A_m/2)}{\pi/2} = \frac{2A_m}{\pi} \quad (\text{a média é a mesma que para um semicírculo completo})$$

EXEMPLO 13.15 Determine o valor médio da forma de onda senoidal da Fig. 13.46.

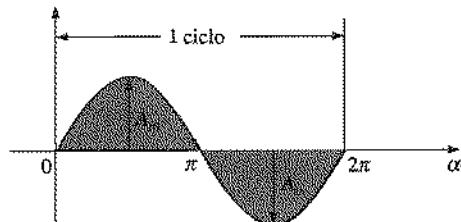


Fig. 13.46 Exemplo 13.15.

Solução: Por inspeção, vemos que:

o valor médio de qualquer função senoidal para um período completo é sempre zero.

O mesmo resultado pode ser obtido usando a Eq. (13.26):

$$G = \frac{+2A_m - 2A_m}{2\pi} = 0 \text{ V}$$

EXEMPLO 13.16 Determine o valor médio da forma de onda da Fig. 13.47.

Solução: O valor pico a pico desta tensão é $16 \text{ mV} + 2 \text{ mV} = 18 \text{ mV}$. A amplitude de pico desta onda é portanto $18 \text{ mV}/2 = 9 \text{ mV}$. Subtraindo 9 mV dc 2 mV (ou somando 9 mV a -16 mV) obtemos um valor médio (ou nível dc) de -7 mV , indicado pela linha tracejada da Fig. 13.47.

EXEMPLO 13.17 Determine o valor médio da forma de onda da Fig. 13.48.

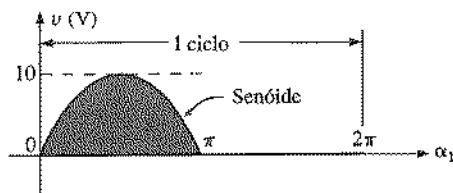


Fig. 13.48 Exemplo 13.17.

Solução:

$$G = \frac{2A_m + 0}{2\pi} = \frac{2(10 \text{ V})}{2\pi} \approx 3,18 \text{ V}$$

EXEMPLO 13.18 No caso da forma de onda da Fig. 13.49, verifique se o valor médio é positivo ou negativo e determine seu valor aproximado.

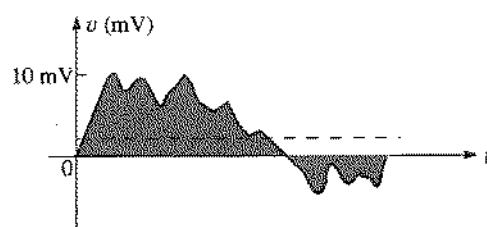


Fig. 13.49 Exemplo 13.18.

Solução: Pela aparência do gráfico, o valor médio é positivo e está perto de 2 mV . Em algumas ocasiões o leitor terá que fazer avaliações deste tipo.

Instrumentação

Podemos encontrar o valor médio (ou nível dc) de qualquer forma de onda utilizando um multímetro digital (MMD) ou um osciloscópio. No caso de circuitos de corrente contínua, basta colocar o MMD no modo dc e efetuar a leitura do valor de corrente ou tensão. O osciloscópio só pode ser utilizado para medir valores de tensão, seguindo a seqüência abaixo:

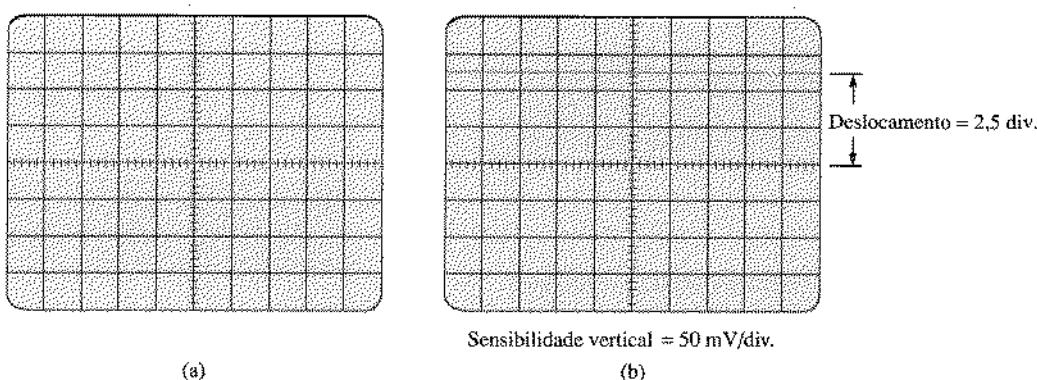


Fig. 13.50 Uso do osciloscópio para medir tensões contínuas: (a) chave na posição GND; (b) deslocamento vertical devido a uma tensão contínua com a chave na posição DC.

1. Na lista de opções DC-GND-AC associada a cada um dos canais verticais, escolha a opção GND. Esta escolha bloqueia qualquer sinal que tente entrar pela ponta de prova do osciloscópio e faz com que apareça na tela uma linha horizontal. Faça com que esta linha coincida com o eixo horizontal, como na Fig. 13.50(a).
 2. Conecte a ponta de prova do osciloscópio à tensão que deseja medir (se isto já não tiver sido feito) e mude a chave seletora para a opção DC. Se existir uma tensão contínua, a reta horizontal será deslocada para cima ou para baixo, como na Fig. 13.50(b). Obtemos o valor médio multiplicando este deslocamento pela sensibilidade vertical. Um deslocamento para cima significa uma tensão positiva (a ponta de prova vermelha ou positiva do osciloscópio está ligada ao potencial mais alto), enquanto um deslocamento para baixo indica uma tensão negativa (a ponta de prova vermelha ou positiva do osciloscópio está ligada ao potencial mais baixo).

Em geral,

$$V_{dc} = (\text{deslocamento vertical em div.}) \times (\text{sensibilidade vertical em V/div.}) \quad (13.29)$$

Para a forma de onda da Fig. 13.50(b),

$$V_{th} = (2.5 \text{ div.})(50 \text{ mV/div.}) = 125 \text{ mV}$$

Podemos também utilizar o osciloscópio para medir o valor médio de uma forma de onda qualquer através da seguinte sequência de operações:

1. Usando a opção GND, recoloque a reta horizontal no meio da tela.
 2. Coloque a chave no modo AC (todas as componentes contínuas do sinal serão bloqueadas; somente as componentes variáveis aparecerão na tela) e observe a localização de algum ponto bem definido, como a base da meia onda retificada na Fig. 13.51(a), ou seja, anote a posição deste ponto na escala vertical. Lembre-se, para referência futura, de que quando você usar a opção AC o computador distribuirá a forma de onda acima e abaixo do eixo horizontal de modo a anular o valor médio, ou seja, as áreas acima e abaixo do eixo serão iguais.
 3. Mude agora a chave para a posição DC (para permitir que tanto a componente contínua quanto a variável do sinal entrem no osciloscópio) e observe o deslocamento do ponto anotado no item 2, como na Fig. 13.51(b). A Eq. (13.29) pode então ser usada para determinar o valor médio da forma de onda. No caso da Fig. 13.51(b), este valor será aproximadamente

$$V_{\text{media}} = V_{\text{dc}} = (0.9 \text{ div.})(5 \text{ V/div.}) = 4.5 \text{ V}$$

A sequência de operações que acabamos de expor pode ser aplicada a qualquer sinal alternado, como por exemplo o da Fig.

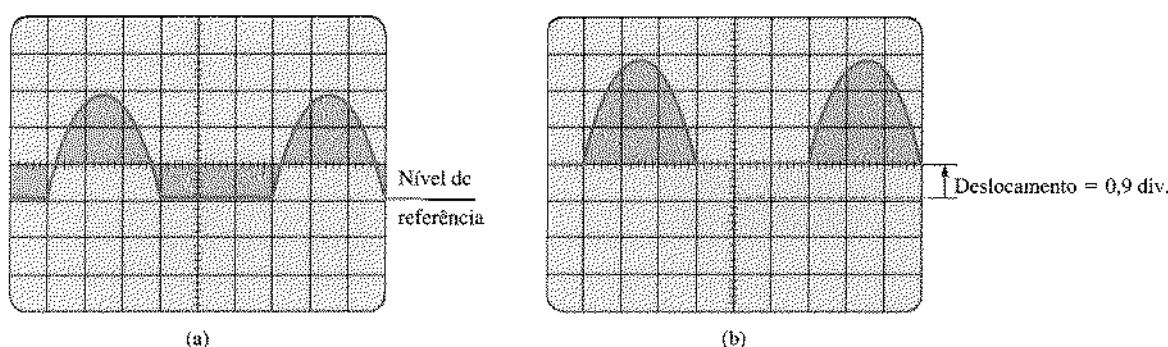


Fig. 13.51 Determinação do valor médio de um onda não-senoidal usando um osciloscópio: (a) canal vertical no modo ac; (b) canal vertical no modo dc.

13.49. Em alguns casos pode ser necessário, para obter o valor médio, deslocar a posição inicial da forma de onda, na opção AC, para uma região diferente da tela ou escolher uma escala de tensão mais alta. Um MMD pode fornecer o valor médio de qualquer forma de onda, bastando para isso escolher a escala apropriada.

13.7 VALOR EFICAZ

Nesta seção vamos discutir a diferença entre correntes contínuas e alternadas no que diz respeito à potência dissipada no circuito e aprender a calcular a amplitude da corrente alternada senoidal necessária para fornecer a mesma potência que uma corrente contínua dada. O leitor pode se perguntar: como é possível que uma corrente alternada forneça potência ao circuito se seu valor médio é zero? À primeira vista, poderia parecer que a potência fornecida durante a parte positiva do ciclo seria absorvida durante a parte negativa do ciclo; como as duas têm o mesmo valor absoluto, a potência total seria nula. É preciso lembrar, porém, que a potência dissipada em um resistor é sempre positiva, *independentemente do sentido da corrente*. É claro que essa potência depende do valor instantâneo da corrente, mas durante um ciclo completo a potência total dissipada é a soma das potências dissipadas nos semiciclos positivo e negativo, e não a diferença.

Utilizando o arranjo experimental ilustrado na Fig. 13.52, podemos encontrar uma relação entre correntes e tensões contínuas e alternadas. Um resistor em um recipiente com água é ligado por chaves a duas fontes, uma de corrente contínua e outra de corrente alternada. Quando a chave 1 é fechada, uma corrente contínua I_{dc} , que depende da resistência R e da tensão E da bateria, atravessa o resistor R . A temperatura atingida pela água é função da potência dissipada (convertida em calor) pelo resistor.

Quando a chave 2 é fechada e a chave 1 é deixada aberta, a corrente no resistor é uma corrente alternada cuja amplitude de pico vamos chamar de I_m . A temperatura atingida pela água novamente é função da potência dissipada pelo resistor. Para determinar o valor de I_m para o qual a potência dissipada é a mesma que no caso contínuo, em que a corrente era de I_{dc} , basta fazermos variar o valor da tensão alternada *e* até que a temperatura atingida pela água seja a mesma que no caso anterior e medir a amplitude de pico da corrente nessas condições.

A potência instantânea fornecida pela fonte de corrente alternada é dada por

$$P_{ac} = (i_{ac})^2 R = (I_m \operatorname{sen} \omega t)^2 R = (I_m^2 \operatorname{sen}^2 \omega t)R$$

mas

$$\operatorname{sen}^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) \quad (\text{identidade trigonométrica})$$

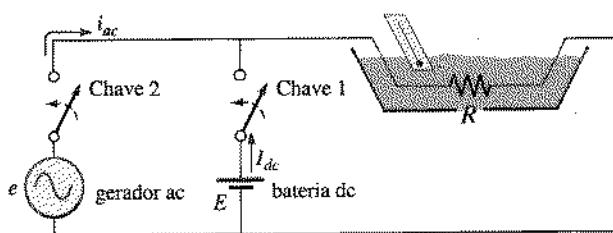


Fig. 13.52 Arranjo experimental para estabelecer uma relação entre correntes e tensões contínuas e alternadas.

Logo,

$$P_{ac} = I_m^2 \left[\frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) \right] R$$

e

$$P_{ac} = \frac{I_m^2 R}{2} - \frac{I_m^2 R}{2} \cos 2\omega t \quad (13.30)$$

O primeiro termo corresponde à *potência média* fornecida pela fonte alternada, já que o valor médio do segundo termo é nulo por se tratar de uma forma de onda co-senoidal. Igualando a potência média fornecida pela fonte de corrente alternada à potência fornecida pela fonte de corrente contínua, temos:

$$P_{av(ac)} = P_{dc}$$

$$\frac{I_m^2 R}{2} = I_{dc}^2 R \quad \text{e} \quad I_m = \sqrt{2} I_{dc}$$

$$\text{ou} \quad I_{dc} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m$$

o que significa o seguinte:

Do ponto de vista da potência dissipada, uma corrente alternada equivale a uma corrente contínua igual a 0,707 vezes a sua amplitude de pico.

O valor da corrente contínua equivalente, do ponto de vista de dissipação de potência, a uma corrente alternada é chamado de *valor eficaz*.

Para resumir,

$$I_{eq(dc)} = I_{dc} = 0,707 I_m \quad (13.31)$$

$$\text{ou} \quad I_m = \sqrt{2} I_{dc} = 1,414 I_{dc} \quad (13.32)$$

$$\text{e} \quad E_{dc} = 0,707 E_m \quad (13.33)$$

$$\text{ou} \quad E_m = \sqrt{2} E_{dc} = 1,414 E_{dc} \quad (13.34)$$

Para darmos um exemplo numérico simples, seria necessária uma corrente alternada de amplitude de pico $1,414 \times 10 = 14,14$ A para fornecer ao resistor da Fig. 13.52 a mesma potência que uma corrente contínua de 10 A. O valor eficaz de qualquer grandeza cuja variação com o tempo é conhecida pode ser calculado a partir da seguinte equação, deduzida a partir do experimento que acabamos de descrever:

$$I_{eq} = \sqrt{\frac{\int_0^T i^2(t) dt}{T}} \quad (13.35)$$

ou

$$I_{eq} = \sqrt{\frac{\text{área } (i^2(t))}{T}} \quad (13.36)$$

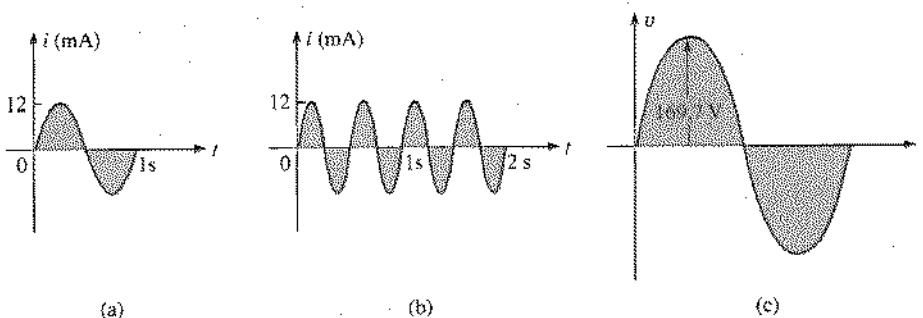


Fig. 13.53 Exemplo 13.19.

Assim, para calcular o valor eficaz, devemos elevar $i(t)$ ao quadrado e então determinar a área sob a função $i^2(t)$ para um intervalo igual ao período T . Dividimos em seguida o resultado por T , obtendo o *valor médio* de $i^2(t)$. Finalmente, extraímos a *raiz quadrada* do valor médio. O valor assim obtido é o valor eficaz, também denominado *valor médio quadrático* ou *valor rms* (do inglês root-mean-square).

EXEMPLO 13.19 Encontre os valores eficazes para as formas de onda senoidais da Fig. 13.53.

Solução: Na parte (a), $I_{ef} = 0,707 (12 \times 10^{-3} \text{ A}) = 8,484 \text{ mA}$. Na parte (b), novamente $I_{ef} = 8,484 \text{ mA}$. Note que a mudança da freqüência não alterou o valor eficaz. Na parte (c), $V_{ef} = 0,707 (169,73) \text{ V} \equiv 120 \text{ V}$, a tensão eficaz das tomadas residenciais.

EXEMPLO 13.20 A fonte de 120 V da Fig. 13.54(a) fornece 3,6 W à carga. Determine as amplitudes de pico (E_m) da tensão (E_m) e da corrente (I_m) para que a fonte alternada da Fig. 13.54(b) forneça a mesma potência a uma carga idêntica.

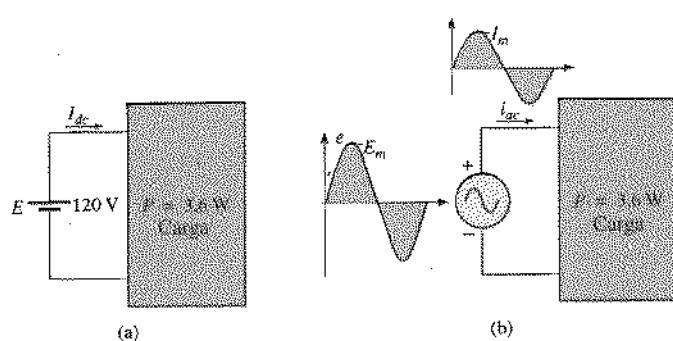


Fig. 13.54 Exemplo 13.20.

Solução:

$$P_{dc} = V_{dc} I_{dc}$$

$$I_{dc} = \frac{P_{dc}}{V_{tc}} = \frac{3,6 \text{ W}}{120 \text{ V}} = 30 \text{ mA}$$

$$I_m = \sqrt{2} I_{ac} = (1.414)(30 \text{ mA}) = 42.42 \text{ mA}$$

$$E_m = \sqrt{2}E_{ac} = (1414)(120 \text{ V}) = 169,68 \text{ V}$$

EXEMPLO 13.21 Determine o valor eficaz da forma de onda da Fig. 13.55.

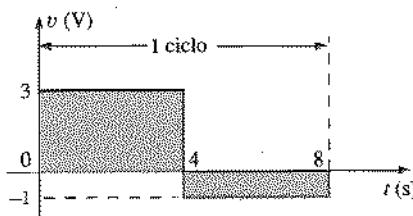


Fig. 13.55 Exemplo 13.21.

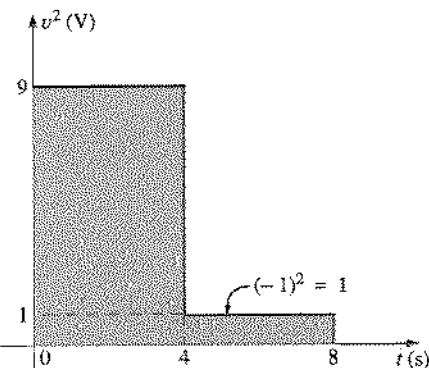


Fig. 13.56 Forma de onda da Fig. 13.55 elevada ao quadrado.

Solução:

O gráfico de v^2 aparece na Fig. 13.55. Temos:

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{(9)(4) + (1)(4)}{8}} = \sqrt{\frac{40}{8}} = 2,236 \text{ V}$$

EXEMPLO 13.22 Calcule o valor eficaz da tensão da Fig. 13.57.

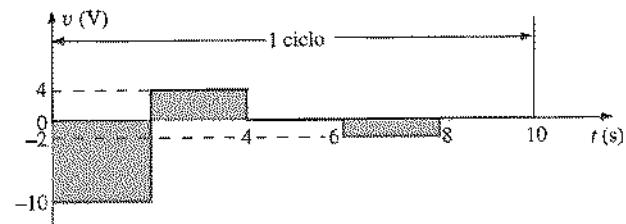


Fig. 13.57 Exemplo 13.22.

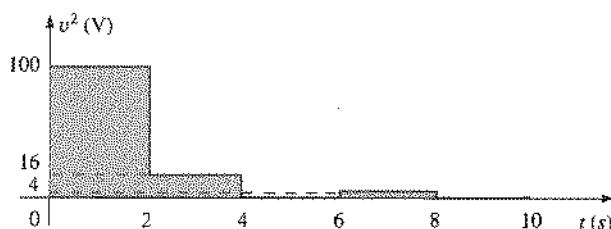


Fig. 13.58 Forma de onda da Fig. 13.57 elevada ao quadrado.

Solução:O gráfico de v^2 aparece na Fig. 13.58. Temos:

$$V_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{(100)(2) + (16)(2) + (4)(2)}{10}} = \sqrt{\frac{240}{10}} = 4,899 \text{ V}$$

EXEMPLO 13.23 Determine os valores médio e eficaz da onda quadrada da Fig. 13.59.

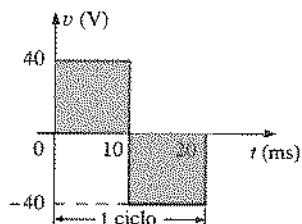


Fig. 13.59 Exemplo 13.23.

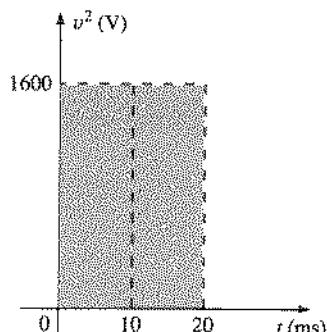


Fig. 13.60 Forma de onda da Fig. 13.59 elevada ao quadrado.

Solução: Por inspeção, o valor médio é zero.O gráfico de v^2 aparece na Fig. 13.60. Temos:

$$\begin{aligned} V_{\text{ef}} &= \sqrt{\frac{(1600)(10 \times 10^{-3}) + (1600)(10 \times 10^{-3})}{20 \times 10^{-3}}} \\ &= \sqrt{\frac{32.000 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-3}}} = \sqrt{1600} \\ V_{\text{ef}} &= 40 \text{ V} \end{aligned}$$

(o valor máximo da forma de onda da Fig. 13.59).

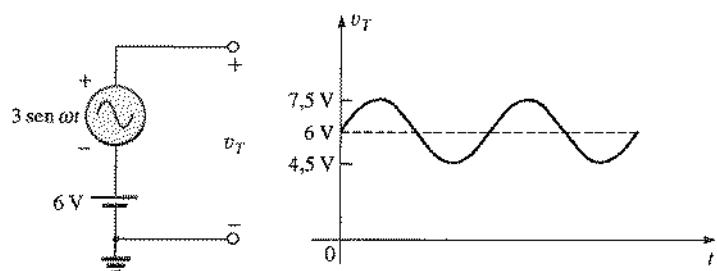


Fig. 13.61 Geração de uma tensão com componentes dc e ac e gráfico da forma de onda resultante.

Como as formas de onda que utilizamos nesses exemplos são as mesmas que foram utilizadas nos exemplos de valor médio, é interessante que o leitor compare os valores médios e eficazes dessas formas de onda.

Neste livro, os valores eficazes de tensões e correntes senoidais são representados, respectivamente, pelos símbolos E e I . Estes símbolos são idênticos aos utilizados para tensões e correntes contínuas. Para evitar confusão, a amplitude de pico de uma forma de onda terá sempre um subscrito m associado a ela: $I_m \text{ sen } \omega t$. *Advertência:* Quando for calcular o valor eficaz do semicírculo positivo de uma forma de onda senoidal, observe que a área do semicírculo positivo elevada ao quadrado *não é* $(2A_m)^2 = 4A_m^2$; a área deve ser calculada através de uma nova integração. O mesmo se aplica a qualquer forma de onda não-retangular.

Uma situação interessante é aquela na qual uma forma de onda possui uma componente contínua e outra alternada. Esta combinação, que pode ser produzida por uma fonte como a que aparece na Fig. 13.61, é encontrada freqüentemente na análise de circuitos eletrônicos.

Surge naturalmente a questão: Qual é o valor eficaz da tensão v_T ? Pode-se tentar supor que é simplesmente a soma dos valores eficazes das componentes do sinal, isto é, que $V_T(\text{ef}) = 0,7071(1,5 \text{ V}) + 6 \text{ V} = 1,06 \text{ V} + 6 \text{ V} = 7,06 \text{ V}$. O valor correto, no entanto, é dado por

$$V_{\text{ef}} = \sqrt{V_{\text{dc}}^2 + V_{\text{ac rms}}^2} \quad (13.37)$$

que, no caso do exemplo acima, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} V_{\text{ef}} &= \sqrt{(6 \text{ V})^2 + (1,06 \text{ V})^2} \\ &= \sqrt{37,124 \text{ V}} \\ &\approx 6,1 \text{ V} \end{aligned}$$

um valor bem menor do que o que acabamos de encontrar. A demonstração da Eq. (13.77) aparece no Cap. 24.

Instrumentação

Se você estiver utilizando um MMD, é importante observar se ele é um *aparelho projetado para medir valores rms* ou simplesmente um medidor comum calibrado (da forma que será descrita na próxima seção) para medir valores médios. Um medidor *projeto para medir rms* pode fornecer o valor eficaz de *qualquer* forma de onda (como as das Figs. 13.49 e 13.61), não estando portanto limitado às ondas senoidais. Como em geral não existe nenhuma indicação a esse respeito no instrumento, é interessante consultar o manual de instruções antes de efetuar medi-

das em sistemas nos quais podem aparecer formas de onda diferentes da senoidal.

13.8 MEDIDORES E INSTRUMENTOS DE CORRENTE ALTERNADA

O galvanômetro de d'Arsonval usado em medidores de corrente contínua também pode ser utilizado para medir tensões e correntes senoidais se o *círcuito retificador em ponte* da Fig. 13.62 for colocado entre o sinal a ser medido e o galvanômetro.

O retificador em ponte, composto por quatro diodos (retificadores eletrônicos), converterá o sinal de entrada, cujo valor médio é nulo, em outro cujo valor médio depende da amplitude do sinal de entrada. O processo de retificação é descrito com clareza na maioria dos textos básicos de eletrônica. Em essência, os diodos permitem a passagem da corrente de um modo tal que o sinal de entrada da Fig. 13.63(a) é convertido no que aparece na Fig. 13.63(b). A parte negativa do sinal é “invertida” pelo retificador em ponte. A forma de onda que aparece na Fig. 13.63(b) é chamada de *onda retificada completa*.

O valor médio zero associado à Fig. 13.63(a) é assim substituído por outro dado por

$$G = \frac{2V_m + 2V_m}{2\pi} = \frac{4V_m}{2\pi} = \frac{2V_m}{\pi} = 0,637V_m$$

O deslocamento do ponteiro nos dará então a amplitude de pico do sinal multiplicada por 0,637.

Calculando a razão entre os valores eficaz e retificado, temos:

$$\frac{V_{rms}}{V_{dc}} = \frac{0,707V_m}{0,637V_m} \cong 1,11$$

o que mostra que o valor eficaz é igual a 1,11 vezes a indicação do medidor, ou seja,

Valor eficaz = 1,11 (Valor medido)

onda completa (13.38)

Alguns medidores de corrente alternada utilizam um retificador de meia onda que fornece uma saída como a ilustrada na Fig. 13.64, cujo valor médio é a metade do da forma de onda da Fig. 13.63(b). Nesse caso, temos:

Valor eficaz = 2,22 (Valor medido)

meia onda (13.39)

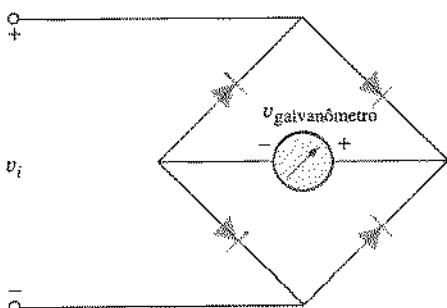


Fig. 13.62 Retificador de onda completa em ponte.

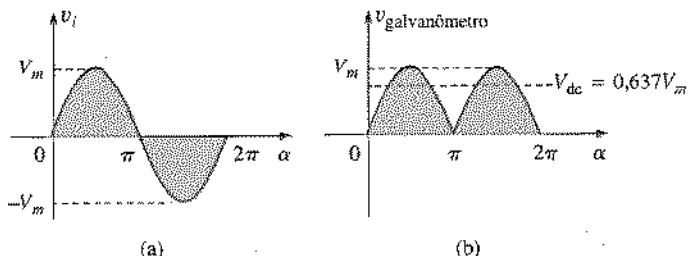


Fig. 13.63 (a) Entrada senoidal; (b) sinal retificado de onda completa.

Um outro tipo de galvanômetro, conhecido como eletrodinâmômetro (Fig. 13.65), pode medir grandezas contínuas e alternadas sem necessidade de alterar os circuitos internos do medidor. Ele é capaz de medir o valor eficaz de qualquer forma de onda, periódica ou não-periódica, já que uma inversão no sentido da corrente causa uma inversão tanto do campo magnético da bobina estacionária quanto do campo da bobina móvel, de modo que a deflexão do ponteiro se dá sempre no sentido positivo da escala.

O VOM, já discutido no Cap. 2, pode ser usado para medir tensões contínuas e alternadas com o auxílio de um galvanômetro de d'Arsonval e circuitos de chaveamento apropriados. Quando este medidor é utilizado para medidas de corrente contínua, uma chave no mostrador conecta a resistência em série adequada para a escala escolhida e permite aplicação da tensão contínua diretamente ao galvanômetro. Para medir tensões alternadas, a chave seletora introduz, quando colocada na posição correta, um circuito que utiliza um retificador de onda completa ou de meia onda para estabelecer uma tensão contínua. Como mencionamos anteriormente, a escala é calibrada de modo a indicar o valor desejado.

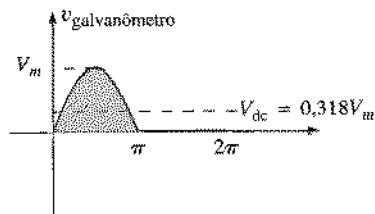


Fig. 13.64 Sinal retificado de meia onda.

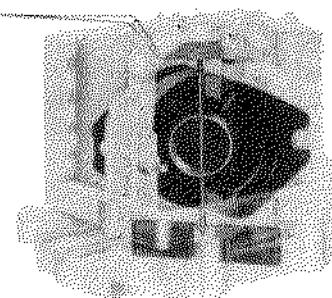


Fig. 13.65 Eletrodinâmômetro. (Cortesia da Weston Instruments, Inc.)

EXEMPLO 13.24 Determine a leitura dos medidores em cada uma das situações da Fig. 13.66.

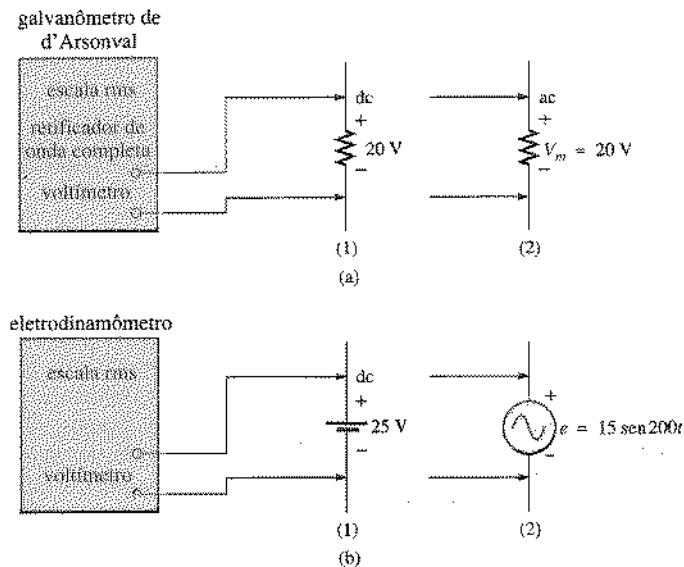


Fig. 13.66 Exemplo 13.24.

Solução: Parte (a), situação (1): De acordo com a Eq. (13.38)

$$\text{Indicação do medidor} = 1,11(20 \text{ V}) = 22,2 \text{ V}$$

Parte (a), situação (2):

$$V_{\text{rms}} = 0,707V_m = 0,707(20 \text{ V}) = 14,14 \text{ V}$$

Parte (b), situação (1):

$$V_{\text{rms}} = V_{\text{dc}} = 25 \text{ V}$$

Parte (b), situação (2):

$$V_{\text{rms}} = 0,707V_m = 0,707(15 \text{ V}) \approx 10,6 \text{ V}$$

Grande parte dos MMD utiliza um retificador de onda completa para converter o sinal de entrada alternado em outro com valor médio diferente de zero. No caso do MMD da Fig. 2.27, é utilizado o fator de escala da Eq. (13.38), ou seja, o valor médio é multiplicado por 1,11 para obter o valor RMS. Os medidores digitais não possuem peças móveis, como os galvanômetros de d'Arsonval ou os eletrodinamômetros, para indicar o valor medido na forma da deflexão de um ponteiro. Nesse caso, o valor medido é simplesmente convertido, com o auxílio de um circuito integrado, para o valor numérico correto a ser exibido no mostrador do aparelho.

Podemos utilizar medidores digitais também quando o sinal de entrada não for senoidal, mas devemos conhecer primeiro o fator multiplicativo para a forma de onda em questão (que na maioria dos casos pode ser encontrado no manual de instruções do medidor). Por exemplo: a resposta de um DMM na escala de valor eficaz é igual a 1,11 vezes a amplitude de pico de uma onda

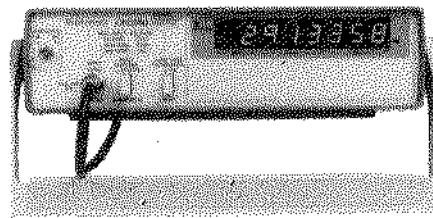


Fig. 13.67 Freqüencímetro. (Cortesia da Tektronix, Inc.)

quadrada. No caso de uma onda triangular, a resposta é 0,555 vezes o valor de pico. Naturalmente, para uma onda senoidal, a resposta é 0,707 o valor de pico.

É sempre recomendável ler o manual de instruções de qualquer instrumento (mesmo que rapidamente) antes de utilizá-lo.

No caso de medidas de freqüência, o freqüencímetro ilustrado na Fig. 13.67 fornece resultados em forma digital para ondas senoidais, quadradas e triangulares no intervalo de 5 Hz a 100 MHz, com amplitudes variando de 30 mV a 42 V. Note a relativa simplicidade do painel e a alta precisão do resultado.

Na Fig. 13.68 vemos um Amp-Clamp (nome comercial), instrumento capaz de medir correntes alternadas na faixa de ampéres sem necessidade de interromper o circuito. A bobina existente na extremidade do aparelho é aberta apertando-se um "gatilho" e colocada em torno do condutor cuja corrente se deseja medir. A bobina se comporta como o secundário de um transformador, e a corrente nela induzida é usada para indicar o valor rms da corrente no condutor. O instrumento tem uma precisão de $\pm 3\%$ do valor final da escala para uma freqüência de 60 Hz, e as escalas vão de 6 A até 300 A. A inclusão de duas pontas de prova permite que o instrumento seja usado também como voltímetro e ohmímetro.

Um dos instrumentos mais importantes e versáteis nos laboratórios e indústrias eletrônicas é o osciloscópio, que já foi mencionado anteriormente neste capítulo. Ele nos fornece uma representação gráfica do sinal na tela de um tubo de raios catódicos para ajudar na pesquisa de defeitos e também para medir amplitudes, freqüências, períodos, componentes contínuas etc. O osciloscópio analógico da Fig. 13.69 pode exibir duas formas de onda simultaneamente (osciloscópio de dois canais) utilizando uma interface "inteligente", localizada no painel frontal. As escalas vertical e horizontal são selecionadas pressionando-se botões de menu que fazem aparecer opções na tela. Podem ser armazenados na memória até quatro conjuntos de medidas para uso posterior.

Um estudante acostumado a assistir televisão pode ficar confuso quando utiliza um osciloscópio pela primeira vez. Existe, pelo menos a princípio, uma tendência a supor que o osciloscópio

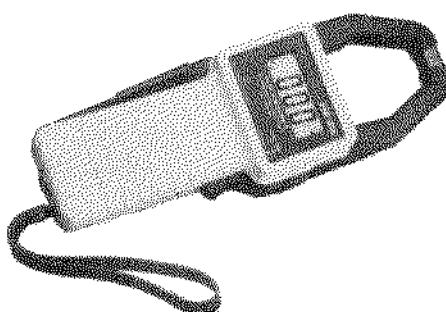


Fig. 13.68 Amp-Clamp®. (Cortesia da Simpson Instruments, Inc.)

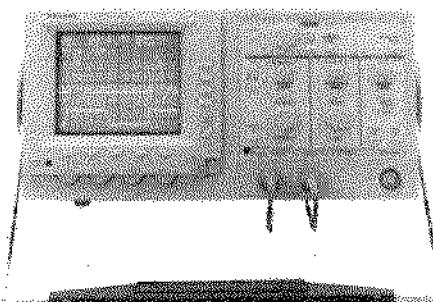


Fig. 13.69 Osciloscópio de dois canais. (Cortesia da Tektronix, Inc.)

está gerando a forma de onda na tela, de modo semelhante a uma estação de TV. Assim, é importante ter em mente que

um osciloscópio mostra na tela somente sinais gerados por fontes externas que estão ligadas aos seus terminais de entrada. Na ausência de um sinal externo, teremos na tela do osciloscópio apenas uma reta horizontal.

Nos modelos mais modernos de osciloscópio existe uma chave ou um botão giratório com as opções DC/GND/AC, como ilustra a Fig. 13.70(a), que é freqüentemente ignorada ou considerada muito superficialmente quando estamos aprendendo a utilizar o osciloscópio. A Fig. 13.70(b) ilustra, em essência, o efeito de cada posição da chave. Na posição DC as componentes contínua e alternada são aplicadas diretamente ao circuito de entrada do osciloscópio e mostradas na tela. Na posição AC a componente contínua do sinal é bloqueada pelo capacitor, mas a componente alternada é exibida na tela. Na posição GND o sinal de entrada não chega ao circuito de entrada do osciloscópio, pois é desviado para a terra; em consequência, a tela do osciloscópio mostra apenas uma linha horizontal.

13.9 ANÁLISE COMPUTACIONAL

PSpice (DOS)

Existe uma grande semelhança entre as aplicações do PSpice a sistemas contínuos e alternados. O formato básico do arquivo de entrada é muito semelhante, e os elementos passivos (resistores, indutores e capacitores) são especificados exatamente da mesma forma. Os conceitos novos mais importantes são a freqüência ou freqüências de interesse e os ângulos de fase, como exemplificaremos a seguir.

Fontes Alternadas Independentes O termo *independente* significa simplesmente que o valor associado à fonte não depen-

de de qualquer outro parâmetro do circuito. Como os valores utilizados e medidos com mais freqüência são os eficazes, utilizaremos estes valores para todas as tensões e correntes senoidais. O formato de entrada para uma fonte de tensão alternada independente é o seguinte:

VSOURCE	1	0	AC	20V	0
Nome	N6	N6	Magnitude	ACMAG	Ângulo de fase

Os parâmetros assinalados com chaves são, do mesmo modo que nos circuitos dc, especificados pelo usuário. Os outros devem aparecer do modo indicado, sempre nas mesmas posições relativas.

Para especificar uma fonte de corrente $I_C = 10 \text{ mA} \angle 30^\circ$ (cuja seta no interior do símbolo gráfico vai do nó 3 para o 4), devemos incluir o seguinte comando no arquivo de entrada:

12 3 4 AC 10MA 30

Se deixarmos em branco o valor de ACMAG, o programa utilizará o valor de 1 V, enquanto a ausência de um valor de entrada para ACPHASE fará com que o programa utilize o valor de zero grau.

Observe que o comando usado para definir uma fonte alternada independente não inclui a freqüência. Este parâmetro deve ser especificado pelo comando seguinte.

PSpice (Windows)

Os esquemas oferecem uma grande variedade de fontes alternadas de tensão e corrente. As mais apropriadas para os objetivos deste livro, no entanto, são a fonte de tensão VSIN e a fonte de corrente ISIN, porque os atributos que devem ser definidos incluem todos os de interesse usual no caso de circuitos senoidais. A fonte ISCR também será usada ocasionalmente porque possui um símbolo em forma de seta semelhante ao que aparece neste livro. O símbolo para ISIN é uma senóide com o sentido da corrente indicado por um sinal positivo ou negativo. A utilização das fontes VAC, VSCR e ISCR é indicada nos casos em que desejamos obter o valor e a fase de uma grandeza específica ou queremos traçar o gráfico de um transiente em função da freqüência. Elas não fornecerão este mesmo gráfico em função do tempo, no entanto, mesmo que as informações sobre o transiente e a freqüência tenham sido fornecidas em Analysis.

No caso de fontes senoidais, serão fornecidos os valores de pico das formas de onda, e não os seus valores eficazes. Quando solicitarmos o gráfico de uma grandeza e o valor calculado for o valor de pico de uma resposta transiente, isto ficará claro. No caso da resposta AC, no entanto, podemos supor que o valor fornecido seja o eficaz e que a leitura na saída seja também rms. Somente no caso em que desejarmos traçar um gráfico o valor será associado ao pico da forma de onda. O ângulo de fase não é alterado pela escolha entre valores de pico e rms para a tensão e a corrente. Caso não sejam fornecidos os valores de entrada de alguns parâmetros, o programa utilizará valores padronizados. Na falta de especificações, as entradas de DC e AC serão supostas nulas, e os valores transitórios serão tomados como iguais aos valores DC. Quando estiver utilizando VSIN entre sempre com o valor 0 V para VOFF (a menos que outro valor seja apropriado) e forneça os valores AC e VAMPL (que devem ser iguais),

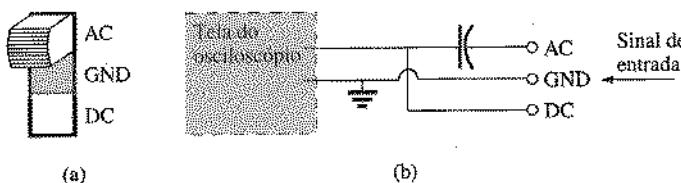


Fig. 13.70 Chave AC-GND-DC para o canal vertical de um osciloscópio.



além de fornecer o ângulo **PHASE** associado à fonte. Se não forem especificados, os valores de **TD** (tempo de retardo), **DF** (fator de amortecimento) e **DC** serão tomados como 0 pelo programa. Considerações semelhantes são válidas para **ISIN**. Informações adicionais sobre os vários tipos de fontes disponíveis podem ser obtidas no MicroSim Circuit Analysis User's Guide.

Cada uma das fontes pode ser obtida através da seqüência **Draw-Get New Part-Add Part-Browse-source.slb**, seguida pela identificação da fonte desejada através de um clique no botão esquerdo do mouse. Após um comando *OK* a fonte aparecerá na tela. Para colocar a fonte no local desejado pressionamos o botão esquerdo e finalizamos o processo clicando novamente o botão direito. Para especificar os parâmetros da fonte, aperte duas vezes o botão direito do mouse com o cursor sobre ela e digite os valores desejados. No caso de uma fonte como **VSIN**, observe que **TD**, **DF** e **PHASE** já aparecem com o valor inicial 0. Para mudar o nome do esquema, entre com **Include System defined Attributes** e mude **PKGREF** para o nome desejado. Certifique-se de que usou **SaveAttr** para os dados das fontes, e, se quiser que algum dos dados apareça na tela, utilize a opção **Change Display**. Observe como o nome e o valor são definidos na parte superior da caixa de diálogo. Se quiser que ambos apareçam na tela, escolha **Both name and value**.

C++

A ausência de novos circuitos neste capítulo limita bastante a possibilidade do uso de "pacotes" computacionais. As portas estão abertas, porém, para o uso de uma linguagem de programação para escrever programas que possam ser úteis na aplica-

ção de alguns dos conceitos apresentados no capítulo. Vamos examinar, especificamente, o programa em C++ ilustrado na Fig. 13.71, projetado para calcular o valor médio de um pulso com até 5 níveis diferentes.

O programa começa com um cabeçalho e uma diretriz do pré-processador. Lembre-se de que o arquivo de cabeçalho *iostream.h* estabelece o canal de entrada e saída entre o programa e o sistema operacional. Observe que a parte principal do programa, *main()*, se estende até o final, como mostram as chaves {}. Todos os cálculos serão efetuados e as respostas impressas na tela através de comandos incluídos nesta região.

Todas as variáveis empregadas em cálculos são definidas, dentro da parte principal do programa, como sendo de ponto flutuante (valores decimais) ou inteiras (números inteiros). Os comentários à direita identificam cada uma das variáveis. Em seguida aparece a pergunta: "quantos níveis diferentes tem a forma de onda?" usando o comando *cout* (comment out). O comando *cin* (comment in) permite que o usuário responda. A seguir o comando *for* é utilizado para estabelecer um número de repetições da seqüência entre parênteses () definido pela variável *levels*. O formato desta declaração *for* é tal que o primeiro número entre parênteses () é o valor inicial da variável *count* (1 neste caso), seguido por um ponto-e-vírgula e uma expressão de teste estabelecendo quantas vezes a seqüência deve ser repetida. Em outras palavras, se *levels* for igual a 5, na primeira passagem pelo comando *for* o número 1 será comparado com 5 e a expressão de teste será satisfeita porque 5 é maior do que 1.

Na passagem seguinte, a variável *count* passará a ser 2 e o teste será repetido. Depois de algumas passagens, *count* será igual a 5, a expressão de teste não será satisfeita e o programa passará para a próxima declaração, que é *Vave = VTsum/T*. O último

Heading	//C++ Average Waveform Voltage Calculation
Preprocessor directives	#include <iostream.h> //needed for input/output
main()	
Define form and name of variables	float Wave; //average value of waveform float Vlevel; //voltage level during time Tlevel float VTsum = 0; //used for adding voltage-time products float T = 0; //total waveform time float Tlevel; //time duration of Vlevel int levels; //the number of levels in the waveform int count; //loop counter
Obtain # of levels	cout << "How many levels do you wish to enter (1..5) ? "; cin >> levels; //get number of levels from user
Body of program	for(count = 1; count <= levels; count++) //begin loop { cout << "\n"; cout << "Enter voltage level " << count << ": "; cin >> Vlevel; //get voltage from user cout << "Enter time for level " << count << ": "; cin >> Tlevel; //get time from user VTsum += Vlevel * Tlevel; //add product to VTsum T += Tlevel; //add Tlevel to total waveform time
Calculate Vave	Vave = VTsum / T; //calculate average value cout << "\n"; cout << "The average value of the waveform is: " cout << Vave << " volts.\n";
Display results	

Fig. 13.71 Programa em C++ para obter o valor médio de uma forma de onda com até cinco pulsos negativos ou positivos.

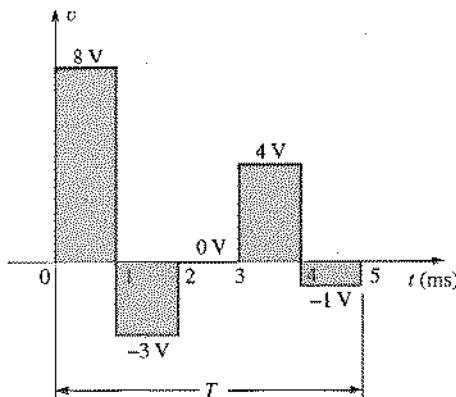


Fig. 13.72 Forma de onda com cinco pulsos a ser analisada pelo programa em C++ da Fig. 13.71.

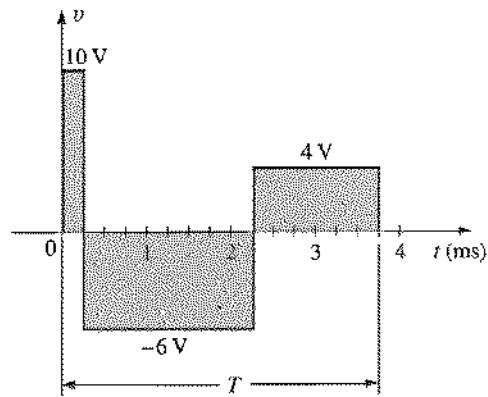


Fig. 13.74 Forma de onda com três pulsos a ser analisada pelo programa C++ da Fig. 13.71.

parâmetro da declaração `for`, `count++`, simplesmente soma 1 ao valor da variável `count` depois de cada iteração. A primeira linha após a declaração `for` indica que uma linha deve ser pulada, seguindo-se uma pergunta na tela sobre o valor da tensão no primeiro intervalo de tempo. A pergunta inclui o valor atual da variável `count` seguido por uma vírgula. Em C++ todos os caracteres de saída devem ser escritos entre aspas (o que não é necessário para valores numéricos). Observe a ausência de aspas para `count`, que está associada a um valor numérico. Em seguida, o usuário entra com o primeiro valor da tensão através de `cin` seguida por uma solicitação do intervalo de tempo. Não são fornecidas unidades neste caso, pois o tempo é simplesmente tomado como uma parcela do tempo total. Assim, por exemplo, se o intervalo de tempo total é 5 μ s e o primeiro subintervalo é 2 μ s, entramos com o algarismo 2.

É calculada então a área sob o pulso para obter a variável `VTSUM`, que tinha sido inicialmente tomada como sendo igual a 0. No passo seguinte o valor de `VTSUM` é o obtido no primeiro passo mais a nova área. Em outras palavras, `VTSUM` representa a área total acumulada. Da mesma forma, `T` representa o tempo acumulado.

Em seguida a uma resposta FALSE para a expressão de teste da declaração `for`, o programa passa a calcular o valor médio da

forma de onda utilizando os valores de tempo e área acumulados. O programa então pula uma linha e mostra na tela o valor médio com as duas últimas declarações `cout`. Foram adicionados colchetes à esquerda do programa para ajudar a identificar suas várias partes.

Dispomos agora de um programa capaz de calcular o valor médio de qualquer forma de onda com até 5 pulsos positivos ou negativos. O programa pode ser gravado e utilizado quando necessário. Operações como estas não estão disponíveis em qualquer das formas do PSpice ou em qualquer pacote disponível no mercado. O conhecimento de uma linguagem e alguns minutos de trabalho foram suficientes para escrever um pequeno programa que poderá ser útil durante muitos anos.

Dois exemplos ilustrarão o formato dos dados de saída. A forma de onda da Fig. 13.72 tem 5 níveis; ao ser executado, o programa gerou o arquivo de saída que aparece na Fig. 13.73. O valor médio é, como vemos, 1,6 V. A forma de onda da Fig. 13.74 tem três pulsos de diferentes larguras. Note como os intervalos de tempo foram fornecidos ao programa. Cada um deles foi expresso como um múltiplo da unidade de medida do eixo horizontal. O valor da variável `levels` neste caso é 3 e portanto a declaração `for` realiza apenas três iterações. O resultado é um valor médio negativo de -0,933 volt, como vemos no arquivo de saída na Fig. 13.75.

```

How many levels do you wish to enter (1..5) ? 5
Enter voltage level 1: 8
Enter time for level 1: 1

Enter voltage level 2: -3
Enter time for level 2: 1

Enter voltage level 3: 0
Enter time for level 3: 1

Enter voltage level 4: 4
Enter time for level 4: 1

Enter voltage level 5: -1
Enter time for level 5: 1

The average value of the waveform is 1.6 volts.

```

Fig. 13.73 Resultados para a forma de onda da Fig. 13.72.



```

How many levels do you wish to enter (1..5) ? 3
Enter voltage level 1: 10
Enter time for level 1: .25
Enter voltage level 2: -5
Enter time for level 2: .2
Enter voltage level 3: 4
Enter time for level 3: 1.5
The average value of the waveform is -0.933333 volts.

```

Fig. 13.75 Resultados para a onda da Fig. 13.74.

PROBLEMAS

SEÇÃO 13.2 Tensão Alternada Senoidal: Características e Definições

1. Para a forma de onda periódica da Fig. 13.76:
- Encontre o período T .
 - Quantos ciclos aparecem na figura?
 - Qual é a freqüência?
 - Determine a amplitude positiva e o valor pico a pico (pense!).

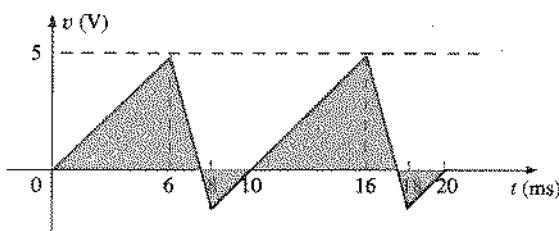


Fig. 13.76 Problema 1.

2. Repita o Problema 1 para a forma de onda periódica da Fig. 13.77.

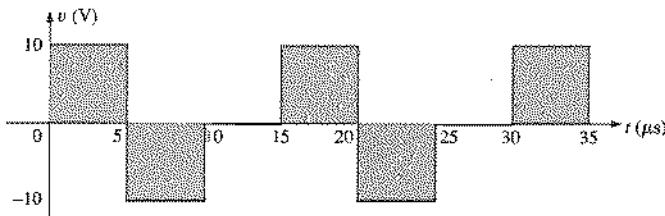


Fig. 13.77 Problemas 2 e 47.

3. Determine o período e a freqüência da onda dente de serra da Fig. 13.78.

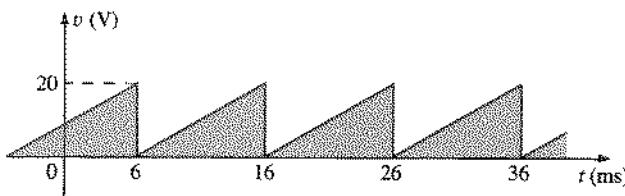
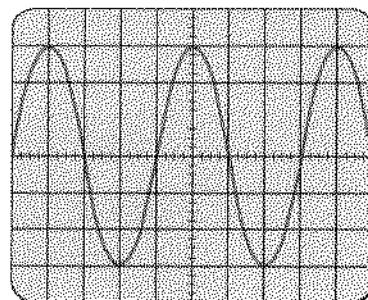


Fig. 13.78 Problemas 3 e 48.

- Calcule o período de uma onda cuja freqüência é:
 - 25 Hz
 - 35 MHz
 - 55 KHz
 - 1 Hz
- Calcule a freqüência de uma onda cujo período é:
 - 1/60 s
 - 0,01 s
 - 34 ns
 - 25 μs
- Calcule o período de uma onda senoidal que completa 80 ciclos em 24 ms.
- Se a freqüência de uma onda é 20 Hz, qual o tempo (em segundos) necessário para que complete 5 ciclos?
- Qual a freqüência de uma onda periódica que completa 42 ciclos em 6 segundos?
- Faça um esboço de uma onda quadrada periódica como a que aparece na Fig. 13.77 com freqüência 20.000 Hz e valor de pico 10 mV.
- Para a forma de onda representada na tela de osciloscópio da Fig. 13.79:
 - Determine a amplitude de pico.
 - Encontre o período.
 - Calcule a freqüência.

Se uma tensão contínua de + 25 mV fosse somada ao sinal de entrada, qual seria o aspecto da forma de onda na tela? Faça o desenho.



Sensibilidade vertical = 50 mV/div.
Sensibilidade horizontal = 10 μs/div.

Fig. 13.79 Problema 10.

SEÇÃO 13.3 A Senóide

- Converta os valores dos seguintes ângulos de graus para radianos:
 - 45°
 - 270°
 - 60°
 - 178°
 - 120°
 - 221°

12. Converta para graus os seguintes valores em radianos:
 a. $\pi/4$
 b. $\pi/6$
 c. $\pi/10$
 d. $7\pi/6$
 e. 3π
 f. $0,55\pi$
13. Determine a velocidade angular associada a uma onda cujo período é:
 a. 2 s
 b. 0,3 ms
 c. $4 \mu\text{s}$
 d. $1/25$ s
14. Determine a velocidade angular associada a uma onda cuja freqüência é:
 a. 50 Hz
 b. 600 Hz
 c. 2 kHz
 d. 0,004 MHz
15. Encontre a freqüência e o período de ondas senoidais associadas a uma velocidade angular de:
 a. 754 rad/s
 b. 8,4 rad/s
 c. 6.000 rad/s
 d. $1/16$ rad/s
16. Determine o intervalo de tempo necessário para uma onda senoidal com $f = 60$ Hz sofrer uma variação de fase de 45° .
17. Se uma onda senoidal sofre uma variação de fase de 30° em 5 ms, determine a velocidade angular associada à onda.

SEÇÃO 13.4 Expressão Geral para Tensões e Correntes Senoidais

18. Encontre a amplitude e a freqüência das seguintes funções:
 a. $20 \sin 377t$
 b. $5 \sin 754t$
 c. $10^6 \sin 10,000t$
 d. $0,001 \sin 942t$
 e. $-7,6 \sin 43,6t$
 f. $(\frac{1}{42}) \sin 6,283t$
19. Faça o esboço do gráfico da função $5 \sin 754t$ usando como unidade do eixo das abscissas:
 a. o ângulo em graus
 b. o ângulo em radianos
 c. o tempo em segundos
20. Esboce o gráfico da função $10^6 \sin 10,000t$ usando como unidade do eixo das abscissas:
 a. o ângulo em graus
 b. o ângulo em radianos
 c. o tempo em segundos
21. Esboce o gráfico da função $-7,6 \sin 43,6t$, usando como unidade do eixo das abscissas:
 a. o ângulo em graus
 b. o ângulo em radianos
 c. o tempo em segundos
22. Se $e = 300 \sin 1,57t$, qual o tempo necessário (em segundos) para a onda completar meio ciclo?
23. Dada $i = 0,5 \sin \alpha$, calcule i para $\alpha = 72^\circ$.
24. Dada $v = 20 \sin \alpha$, calcule v para $\alpha = 1,2\pi$.
- *25. Dada $v = 30 \times 10^{-3} \sin \alpha$, determine os ângulos para os quais v vale 6 mV.
- *26. Determine a expressão matemática para uma tensão senoidal tal que $v = 40$ V para $\alpha = 30^\circ$ e $t = 1$ ms.

SEÇÃO 13.5 Relações de Fase

27. Esboce o gráfico de $\sin(377t + 60^\circ)$ usando como unidade do eixo das abscissas:
 a. o ângulo em graus
 b. o ângulo em radianos
 c. o tempo em segundos

28. Esboce os gráficos das seguintes formas de onda:
 a. $50 \sin(\omega t + 0^\circ)$
 b. $-20 \sin(\omega t + 2^\circ)$
 c. $5 \sin(\omega t + 60^\circ)$
 d. $4 \cos \omega t$
 e. $2 \cos(\omega t + 10^\circ)$
 f. $-5 \cos(\omega t + 20^\circ)$

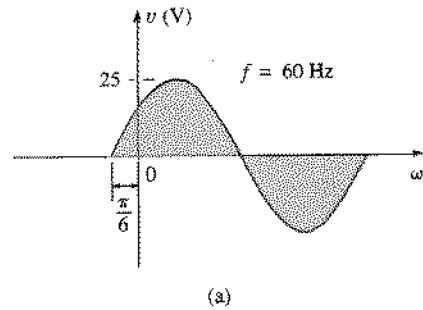
29. Calcule a diferença de fase entre as formas de onda de cada par:

- a. $v = 4 \sin(\omega t + 50^\circ)$
 $i = 6 \sin(\omega t + 40^\circ)$
- b. $v = 25 \sin(\omega t - 80^\circ)$
 $i = 5 \times 10^{-3} \sin(\omega t - 10^\circ)$
- c. $v = 0,2 \sin(\omega t - 60^\circ)$
 $i = 0,1 \sin(\omega t + 20^\circ)$
- d. $v = 200 \sin(\omega t - 210^\circ)$
 $i = 25 \sin(\omega t - 60^\circ)$

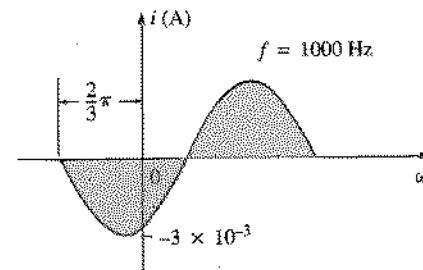
*30. Repita o Problema 29 para os seguintes pares:

- a. $v = 2 \cos(\omega t - 30^\circ)$
 $i = 5 \sin(\omega t + 60^\circ)$
- b. $v = -1 \sin(\omega t + 20^\circ)$
 $i = 10 \sin(\omega t - 70^\circ)$
- c. $v = -4 \cos(\omega t + 90^\circ)$
 $i = -2 \sin(\omega t + 10^\circ)$

31. Escreva expressões analíticas para as formas de onda da Fig. 13.80 com o ângulo de fase em graus.



(a)



(b)

Fig. 13.80 Problema 31.

32. Repita o Problema 31 para as formas de onda da Fig. 13.81.
- *33. O gráfico da tensão senoidal $v = 200 \sin(2\pi 1,000t + 60^\circ)$ aparece na Fig. 13.82. Determine o tempo t_1 .
- *34. O gráfico da corrente senoidal $i = 4 \sin(50,000t - 40^\circ)$ aparece na Fig. 13.83. Determine o tempo t_1 .
- *35. Determine a diferença de fase em milissegundos entre as seguintes formas de onda:

$$v = 60 \sin(1800t + 20^\circ)$$

$$i = 1,2 \sin(1800t - 20^\circ)$$

36. Para a figura da tela de um osciloscópio na Fig. 13.84:
 a. Determine os períodos das duas ondas.
 b. Determine as freqüências das duas ondas.
 c. Determine os valores eficazes das duas ondas.
 d. Determine a diferença de fase entre as duas ondas.

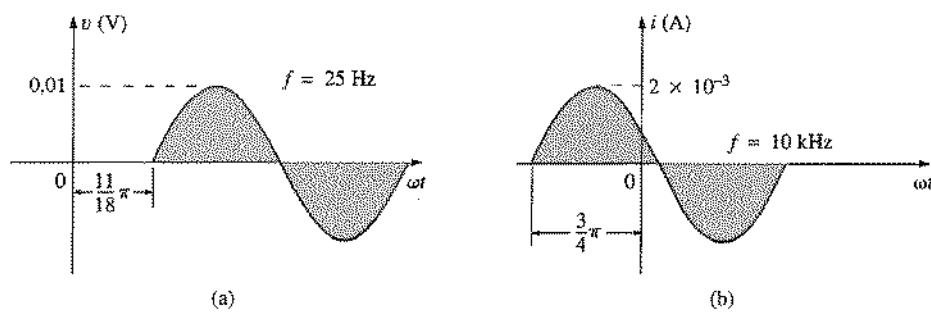


Fig. 13.81 Problema 32.

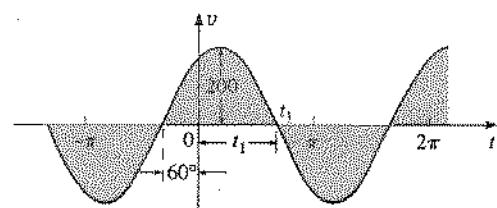


Fig. 13.82 Problema 33.

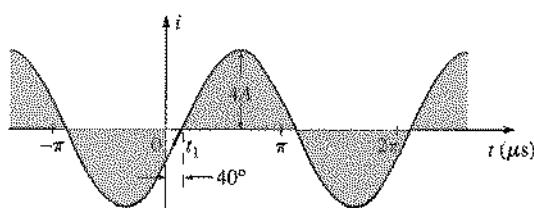
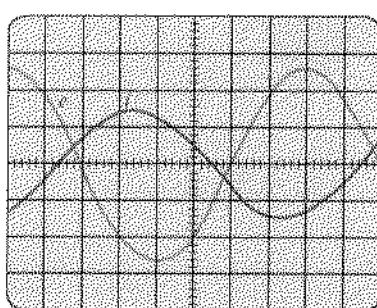


Fig. 13.83 Problema 34.

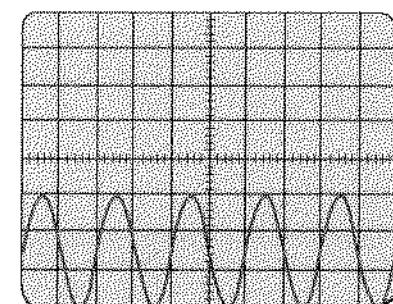


Sensibilidade vertical = 0,5 V/div.
Sensibilidade horizontal = 1 ms/div.

Fig. 13.84 Problema 36.

SEÇÃO 13.6 Valor Médio

37. Para a forma de onda na Fig. 13.85:
- Determine o período.
 - Encontre a freqüência.
 - Determine o valor médio.
 - Esbocce a forma de onda que aparecerá na tela do osciloscópio se a entrada do canal vertical mudar de DC para AC.



Sensibilidade vertical = 10 mV/div.
Sensibilidade horizontal = 0,2 ms/div.

Fig. 13.85 Problema 37.

38. Calcule o valor médio das formas de onda periódicas da Fig. 13.86.

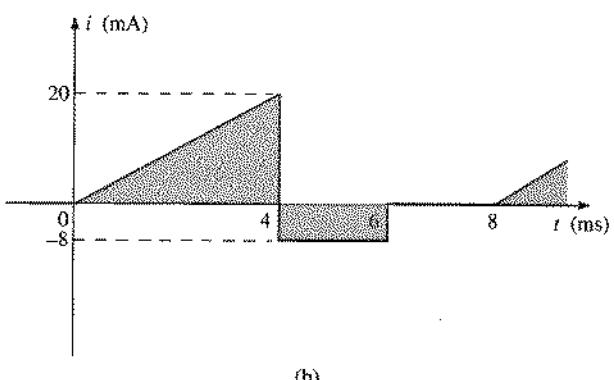
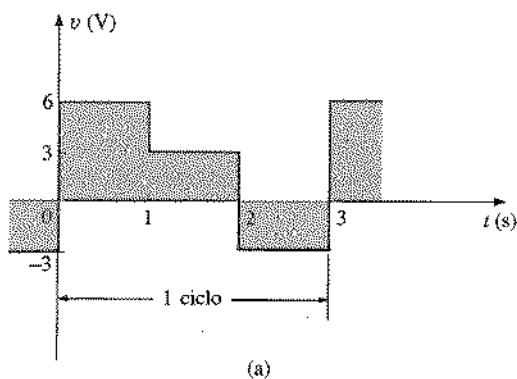


Fig. 13.86 Problema 38.

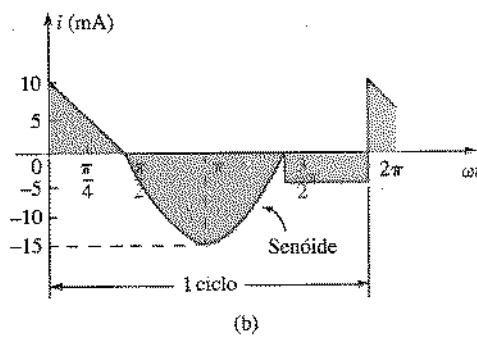
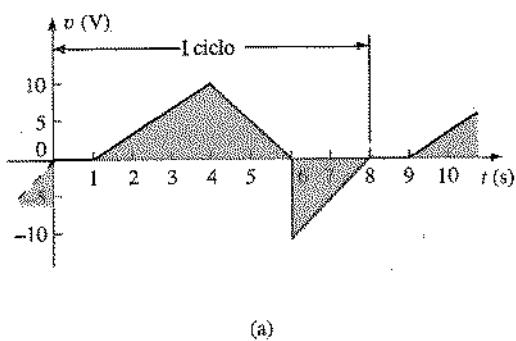


Fig. 13.87 Problema 39.

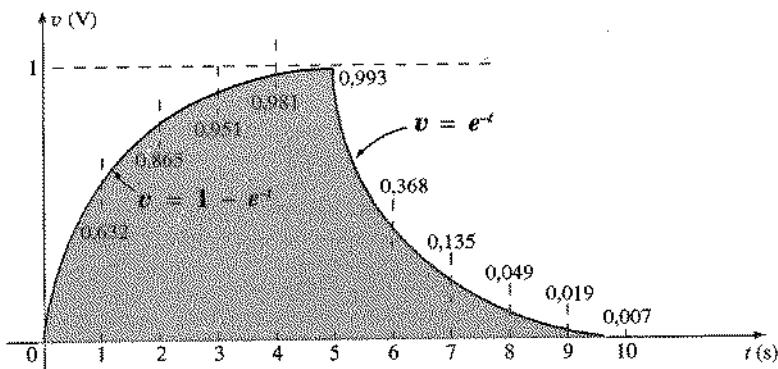
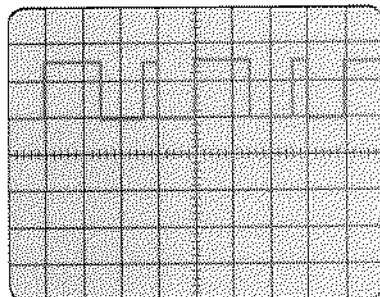


Fig. 13.88 Problema 40.



Sensibilidade vertical = 10 mV/div.
Sensibilidade horizontal = 10 μ s/div.

Fig. 13.89 Problema 41.

39. Calcule o valor médio das formas de onda periódicas da Fig. 13.87.

- *40. a. Encontre, utilizando o método de aproximar uma forma de onda por formas geométricas simples, a área sob a curva da Fig. 13.88 de 0 a 10 s. Compare o resultado com o valor exato de 5 volts-segundo (V·s).

- b. Ache o valor médio da forma de onda de 0 a 10 s.

- *41. Para a forma de onda na Fig. 13.89:

- a. Determine o período.

- b. Encontre a freqüência.

- c. Calcule o valor médio.

- d. Desenhe a imagem que aparecerá na tela do osciloscópio se mudarmos o canal vertical de DC para AC.

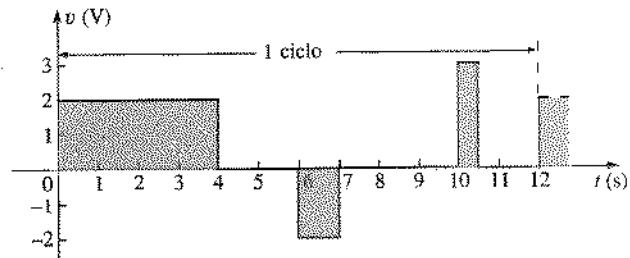


Fig. 13.90 Problema 44.

SEÇÃO 13.7 Valor Eficaz

42. Ache os valores eficazes das seguintes formas de onda senoidais:

- $v = 20 \operatorname{sen} 754t$
- $v = 7,07 \operatorname{sen} 377t$
- $i = 0,006 \operatorname{sen}(400t + 20^\circ)$
- $i = 16 \times 10^{-3} \operatorname{sen}(377t - 10^\circ)$

43. Escreva expressões matemáticas para tensões e correntes senoidais com uma freqüência de 60 Hz, fase zero e os seguintes valores eficazes:

- 1,414 V
- 70,7 V
- 0,06 A
- 24 μ A

44. Ache o valor eficaz da forma de onda periódica da Fig. 13.90.

45. Ache o valor eficaz da forma de onda periódica da Fig. 13.91.

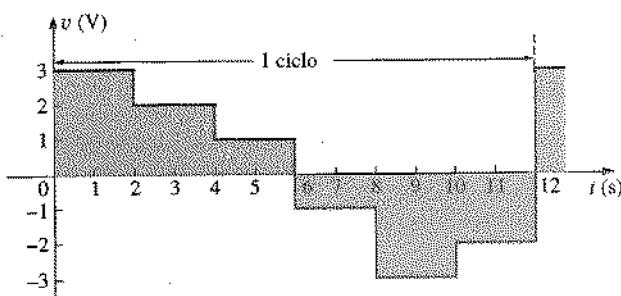


Fig. 13.91 Problema 45.



46. Quais são os valores médio e eficaz da onda quadrada da Fig. 13.92?

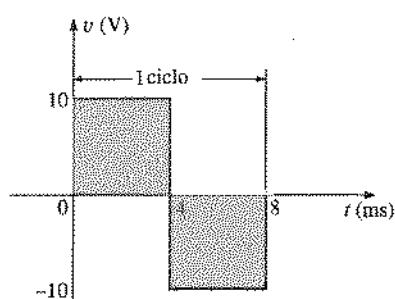


Fig. 13.92 Problema 46.

47. Quais são os valores médio e eficaz da forma de onda da na Fig. 13.77?

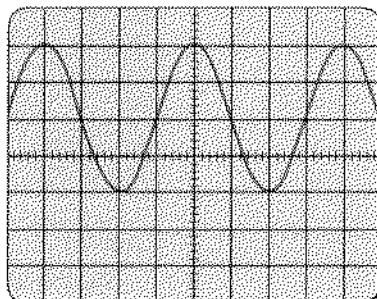
48. Qual é o valor médio da forma de onda da Fig. 13.78?
 49. Determine o período, a freqüência, o valor médio e o valor eficaz das formas de onda da Fig. 13.93.

SEÇÃO 13.8 Medidores e Instrumentos de Corrente Alternada

50. Determine a leitura do medidor para as duas situações na Fig. 13.94.

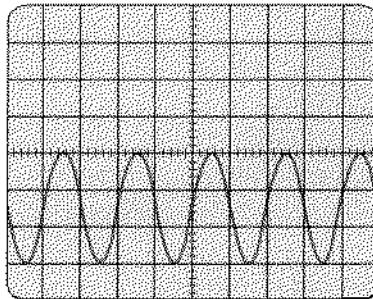
PROBLEMAS UTILIZANDO COMPUTADORES Linguagens de Programação (C++, BASIC, PASCAL etc.)

51. Dada uma função senoidal, escreva um programa para calcular o valor eficaz, a freqüência e o período.
 52. Dadas duas funções senoidais, escreva um programa para determinar a diferença de fase entre elas.
 53. Dada uma onda quadrada, escreva um programa para calcular o valor médio e o valor eficaz.



Sensibilidade vertical = 20 mV/div.
 Sensibilidade horizontal = 10 μ s/div.

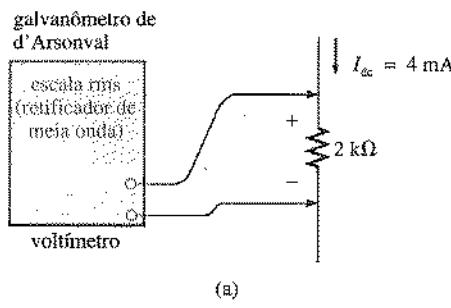
(a)



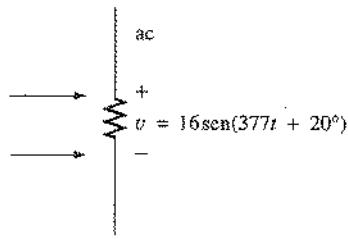
Sensibilidade vertical = 0,2 V/div.
 Sensibilidade horizontal = 50 μ s/div.

(b)

Fig. 13.93 Problema 49.



(a)



(b)

Fig. 13.94 Problema 50.

GLOSSÁRIO

Amp-Clamp (Nome comercial) Instrumento que permite medir correntes sem abrir o circuito e que pode ser usado também como voltímetro e ohmímetro convencional.

Amplitude de pico Valor máximo de uma forma de onda em relação ao valor médio.

Ciclo Parte de uma forma de onda contida em um período.

Eletrodinâmômetros Instrumentos que podem medir valores ac e dc sem alterações nos circuitos internos.

Forma de onda Gráfico de uma grandeza física em função de uma variável como posição, tempo, ângulo etc.

Forma de onda alternada Forma de onda que oscila em relação a um nível de referência.

Forma de onda alternada senoidal Forma de onda alternada que é uma função senoidal de t .

Forma de onda periódica Forma de onda que se repete após um certo intervalo de tempo.

Freqüência (f) Inverso do período. Número de ciclos por segundo de uma onda periódica. É medida em hertz (Hz).

Freqüencímetro Instrumento usado para a medir a freqüência de sinais periódicos.

Medidor de ac tipo retificador Instrumento calibrado para indicar o valor eficaz de uma tensão ou corrente utilizando um retificador e um galvanômetro de d'Arsonval.

Osciloscópio Instrumento que mostra na tela de um tubo de raios catódicos as características de um sinal variável no tempo.

Período (T) Intervalo após o qual uma forma de onda começa se repetir.

Radiano Unidade de medida para ângulos. Um radiano é aproximadamente igual a $57,3^\circ$; 2π rad são iguais a 360° .

Relação de fase Indicação de qual entre duas ondas está atrasada em relação a outra e de quantos graus ou radianos.

Valor eficaz Valor de corrente contínua equivalente, do ponto de vista de dissipação de potência, a uma corrente alternada.

Valor instantâneo Amplitude de uma forma de onda em um instante de tempo qualquer. É representado por letras minúsculas.

Valor de pico Valor máximo de uma função medido a partir do nível zero.

Valor médio Valor associado a uma onda tal que a área sob a curva acima deste valor é igual à área abaixo deste valor.

Valor pico a pico Diferença entre os valores dos picos positivo e negativo.

Valor rms O mesmo que valor eficaz.

Velocidade angular (associada a uma onda senoidal). Velocidade angular do vetor que gera uma função senoidal. Também chamada freqüência angular.