

João Baptista Bayão Ribeiro

TELECOMUNICAÇÕES

2º Volume

1ª Edição

Rio de Janeiro
J. B. Bayão
2012

Curriculum do Autor

João Baptista Bayão Ribeiro é formado em Engenharia de Telecomunicações pela UFF (Universidade Federal Fluminense) em 1971. Trabalhou na Philips do Brasil como Engenheiro Instalador, na Divisão de Equipamentos Científicos e Industriais e simultaneamente como professor da UFF em tempo parcial. Depois ingressou no Laboratório de Desenvolvimento da antiga Telerj, onde trabalhou em Normas Técnica de Operação e de Sistemas. É pós-graduado em Engenharia Elétrica pelo COPPE-UFRJ, onde obteve o título de MsC em 1979. Na década de 80 trabalhou no CpqD em Campinas, na especificação do projeto Trópico, como Engenheiro da Telecom, de S. Paulo. De volta à Telerj, trabalhou no Planejamento de Redes Telefônicas e de Dados. Fez inúmeros trabalhos para a antiga Telebrás, tendo participado ativamente do processo de digitalização do Sistema Telefônico no Brasil. Participou de vários Congressos e foi Professor em várias turmas de técnicos e engenheiros do SBT no Centro Nacional de Treinamento da Telebrás, em Brasília. Aposentou-se como professor em DE pela Escola de Engenharia da UFF, onde lecionou por vários anos após a privatização do Sistema Telebrás e extinção da antiga Telerj. Foi também Professor Substituto no IME, e Professor do curso à distância “Tecnologias Modernas de Telecomunicações”, promovido pelo Centro de Estudos de Pessoal (CEP) do Exército Brasileiro em convênio com a UFF.

Sumário

Este Volume 2 visa apresentar ao estudante de engenharia de Telecomunicações, alguns aspectos relativos a Análise de Sistemas e Sinais em Telecomunicações, tais como classificação de sinais, espectro, densidade de potencia, autocorrelação, ruido, filtros, amostragem, distorções, entre outros.

O objetivo é treinar o uso de alguns modelos matemáticos, voltados principalmente à análise de sinais determinísticos.

Desta forma, é mais voltado ao público especializado, contrariamente ao Volume 1.

Palavras Chave

Sistema, sinal, sinal determinístico, sinal aleatório, telecomunicação, potência, energia, Fourier, perda, ganho, decibel, tempo, frequência, ortogonal, Euler, fasor, espectro, Transformada, função impulso, convolução, função de transferência, distorção, Largura de Banda, filtros ideais, filtros fisicamente realizáveis, amostragem, Nyquist, aliasing, densidade espectral, autocorrelação, espectro de densidade, ruido, distorções, retardo de grupo, distorção linear, distorção não-linear.

Direitos Autorais

Este documento é protegido por Copyright © 2010 por seu autor listado abaixo. Você pode distribuir e/ou modificar este trabalho, tanto sob os termos da Licença Pública Geral GNU (<http://www.gnu.org/licenses/gpl.html>), versão 3 ou posterior, ou da Licença de Atribuição Creative Commons (<http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/>), versão 3.0 ou posterior.

Autor: João Baptista Bayão Ribeiro

Feedback: jribeiro@telecom.uff.br

Índice

Introdução.....	7
Sinal Periódico.....	9
Sinal Determinístico e Sinal Aleatório.....	10
Potência e Energia.....	12
Potência instantânea.....	12
Potência instantânea normalizada.....	12
Potência média.....	13
Potência média total.....	13
Energia.....	14
Energia total.....	14
Sinal de energia.....	15
Sinal de potência.....	15
EXERCÍCIOS - Sequência A.....	16
Perda ou Ganho.....	19
Decibel.....	20
EXERCÍCIOS – Sequência B.....	21
dB em relação à 1mW – dBm.....	22
dB em relação à 1W – dBW.....	22
EXERCÍCIOS – Sequência C.....	24
Domínio do Tempo e Domínio da Frequência.....	27
Funções Ortogonais e Funções Senoidais.....	29
Funções senoidas:.....	30
Parâmetros:	30
Representação de Euler de funções senoidais.....	30
Para o cosseno:.....	30
Para o seno:.....	31
Sinais Senoidais no Domínio da Frequência-Espectros.....	33
Representação unilateral de $x(t)=A \cos (\omega t + \alpha)$	33
Representação bilateral de $x(t)=A \cos (\omega t+\alpha)$	34
Representação unilateral de $x(t)=A \sin(\omega t+\alpha)$	35
Representação bilateral para $x(t)= A \sin(\omega t+\alpha)$	35
EXERCÍCIOS-Sequência D.....	37
Série de Fourier.....	38
EXERCÍCIOS – Sequência E.....	40
Forma compacta da série trigonométrica:.....	41
EXERCÍCIOS – Sequência F.....	43
Forma complexa da série de Fourier.....	43
EXERCÍCIOS – Sequência G.....	45
Transformada de Fourier.....	47
EXERCÍCIOS – Sequência H	49
Função Impulso.....	51
EXERCÍCIOS – Sequência I.....	52
Convolução.....	54
EXERCÍCIOS – Sequência J.....	56
Convolução no Tempo e na Frequência:.....	57
EXERCÍCIOS – Sequência K.....	58
Sistemas Lineares-Função de Transferência.....	60
EXERCÍCIOS – Sequência L.....	62
Transmissão sem Distorção	66

Função de transferência para transmissão sem distorção:.....	66
Largura de Banda.....	67
Filtros Ideais.....	69
1-Filtro passa baixa (FPB).....	69
2-Filtro passa alta (FPA).....	71
3-Filtro passa faixa (FPF).....	72
EXERCÍCIOS – Sequência M.....	74
Filtros Fisicamente Realizáveis.....	77
Largura de banda W de filtros fisicamente realizaveis.....	78
Filtro passa baixa RC.....	79
EXERCÍCIOS – Sequência N.....	81
Amostragem.....	86
Teorema da amostragem.....	86
Amostra de $x(t)$ e sua representação.....	87
Espectro do sinal amostrado	89
Exemplo da amostragem de um sinal senoidal.....	91
EXERCÍCIOS – Sequência O.....	93
Reconstituição do Sinal Analógico	95
Efeito “aliasing”.....	96
EXERCÍCIOS – Sequência P.....	101
Densidade Espectral de Energia e de Potência.....	103
Densidade espectral de energia, ou espectro de densidade de energia.....	104
Autocorrelação de $g(t)$	105
Função de autocorrelação e a densidade espectral.....	106
Autocorrelação e espectro de densidade de potência.....	106
Potência e espectro de densidade de potência.....	108
Ruido.....	110
Espectro de densidade de potência do ruido AWGN.....	112
EXERCÍCIOS – Sequência Q.....	113
Distorções.....	116
Distorção de atenuação ou de amplitude.....	116
Distorção de fase ou retardo de grupo.....	116
Distorção não linear.....	121
Linearização em torno do ponto de operação.....	122
EXERCÍCIOS – Sequência R.....	124
Bibliografia.....	127

Introdução

O enfoque ao estudo será o do modelamento matemático, que se torna independente da implementação física, ou da tecnologia, embora utilizemos, à título de exemplo e ilustração, alguns sistemas físicos de circuitos elétricos que podem implementar algumas das funcionalidades dos modelos estudados.

Utilizaremos duas abordagens ao estudo e tratamento de sinais e sistemas, que chamaremos de abordagem no domínio do tempo e no domínio da frequência.

Muitas vezes essas abordagens são complementares, e ambas as técnicas são utilizadas na análise, no desenvolvimento e na operação dos sistemas. Essas técnicas tradicionais empregam ferramentas bem conhecidas, como o cálculo diferencial e integral e as transformadas de Fourier e Laplace.

Técnicas mais recentes admitem a concepção de modelos que atuam com sinais codificados digitalmente. Essas técnicas permitem novas formas de análise de sistemas, utilizando conceitos como amostragem de sinais analógicos, discretização no tempo, na frequência e na amplitude dos sinais e codificação. Qualquer forma de onda pode ser transformada em sequências codificadas de pulsos retangulares nominais.

Apesar do desenvolvimento observado na área digital, sistemas analógicos ainda são muito utilizados. Ao estudá-los, usando as técnicas tradicionais de análise no domínio do tempo e da frequência, estamos dando os passos iniciais para o entendimento das novas técnicas de análise, projeto e operação dos modernos sistemas de comunicações.

Preferencialmente, certos pré-requisitos são requeridos, sendo o assunto tratado específico de cadeiras do 6º ou 7º Períodos em cursos de Engenharia de Telecomunicações, como a cadeira Princípios III, do novo currículo aplicado ao curso de Telecomunicações da Escola de Engenharia da UFF. Mas pode também ser usado por estudantes de outras faculdades em cursos equivalentes ao da UFF.

Os pré-requisitos são conhecimentos básicos em sistemas de controle, circuitos elétricos e matemática aplicada, principalmente as noções de cálculo diferencial e integral, sinais e transformadas de Fourier.

É desejável também o conhecimento e a possibilidade de uso de pelo menos um dos softwares matemáticos, como o *Scilab* ("free" -pode ser baixado gratuitamente

da Internet), *Matlab®*, *Maple®* ou *MathCad®* (esses são pagos).

Conforme Wikipedia, em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Scilab> ; “*O Scilab é um software científico para computação numérica semelhante ao Matlab que fornece um poderoso ambiente computacional aberto para aplicações científicas*”.

Essa possibilidade irá facilitar a realização de alguns Exercícios propostos ao longo do texto.

A realização desses Exercícios, apesar de ser uma tarefa um tanto cansativa para o leitor, é uma atividade muito importante ao perfeito entendimento da matéria exposta, pois proporcionará a oportunidade para a realização de pesquisas e a fixação de conceitos relativos ao assunto em pauta. Portanto, recomendamos que não tenham pressa e tentem realizar os exercícios na sequência proposta. Aguns exercício se apresentam com respostas expostas para conferênciа , porém destaca-se que o mais importante é o processo empregado em sua execução, e a realização dos gráficos pedidos.

O uso de recursos informáticos para acesso à Internet também é fundamental para o estudo dos assuntos tratados no livro, pois permite a consulta de referências e fontes disseminadas pela rede, além das citadas no texto. Esses recursos podem vir na forma de um PC Desktop, Laptop, Notbook, Netbook ou Tablet.

Sinal Periódico

Um sinal $x(t)$ é dito periódico no tempo se existe uma constante $T_0 > 0$ tal que:

$$x(t) = x(t + T_0) \quad (2-1)$$

para

$$-\infty < t < \infty$$

T_0 é chamado período de $x(t)$. O período T_0 define a duração de um ciclo completo de $x(t)$.

A Figura 2.1 apresenta um sinal periódico $x(t)$, no caso um trem de pulsos retangulares periódico de período T_0 e nível médio, ou de CC, igual a $A\tau/T_0$, sendo A amplitude do pulso, τ sua largura e T_0 o período.

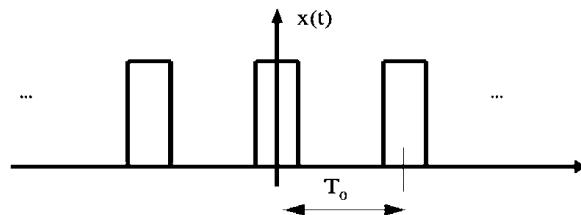


Figura 2.1

O ponto inicial para a contagem de tempo de um sinal periódico é arbitrário.

Quando possível, este instante é definido de modo a simplificar a descrição matemática do sinal periódico, geralmente forçando o aparecimento de simetrias no seu desenho geométrico.

Assim, uma onda periódica retangular pode ser feita um sinal par em sua descrição matemática, como na Figura 2.1.

Se fosse uma onda triangular, de nível CC = 0, poderia ser ajustado para um sinal ímpar.

Sinal Determinístico e Sinal Aleatório

Um sinal determinístico é aquele cujo valor em um instante futuro pode ser previsto com exatidão, a partir do conhecimento de seu valor no instante presente e de sua lei de formação, ou equação.

Exemplo:

Um pulso exponencial $x(t)=e^{-t}$ para $t > 0$, conforme Figura 2.2.

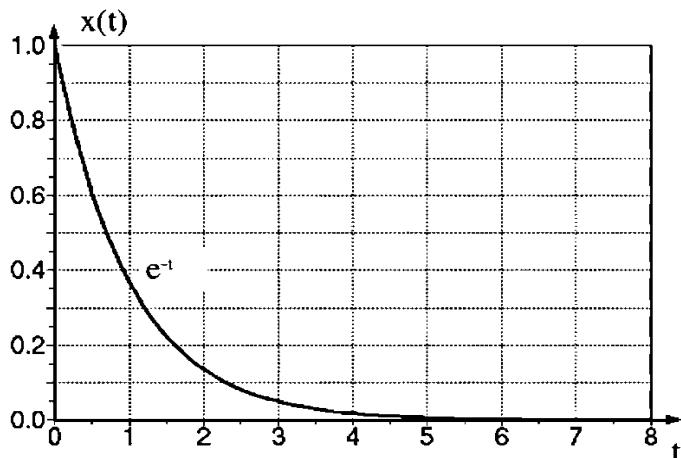


Figura 2.2

Um sinal é aleatório quando seu comportamento só pode ser descrito em termos estatísticos.

Assim, o conhecimento do valor $x(t_0)$ não permite determinar exatamente $x(t_1)$, sendo $t_1 > t_0$ (t_0 é o valor atual, ou presente, e t_1 é um valor futuro).

Não há uma equação exata para descrever $x(t)$.

Entretanto, por exemplo, a probabilidade de que $x(t_1)$ esteja dentro de determinada faixa de valores pode ser estimada.

Exemplo :

A Figura 2.3 apresenta uma descrição gráfica de um sinal de ruído , exemplo de um típico sinal aleatório .

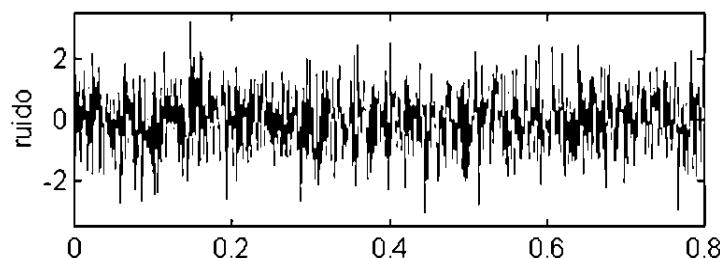


Figura 2.3

Em sistemas de comunicações os 4 tipos de sinais (periódico e não periódico, determinístico e aleatório) podem ocorrer individualmente ou misturados em pontos do sistema.

Por exemplo, um sistema é testado com um sinal periódico retangular de determinada frequência de repetição, injetando na entrada do sistema um sinal proveniente de um gerador, com características específicas de amplitude e duração do pulso.

Ao mesmo tempo, o sistema é submetido a condições próprias de operação, tais como ajuste de ganho, que devem ser verificadas pela resposta do sistema ao sinal de teste.

Teremos então, em determinado ponto do sistema, a ocorrência simultânea de um sinal periódico e de um sinal aleatório, que pode ser proveniente do ruído captado pelo sistema ou do próprio sinal de teste.

Potência e Energia

Potência instantânea

A potência instantânea dissipada por um sinal $x(t)$, em uma carga resistiva de valor $R \Omega$, depende se $x(t)$ representa um sinal de tensão ou de corrente. Sua unidade no sistema MKS é o Watt (W).

A Figura 2-4 apresenta a expressão de $p(t)$ para ambos os casos.

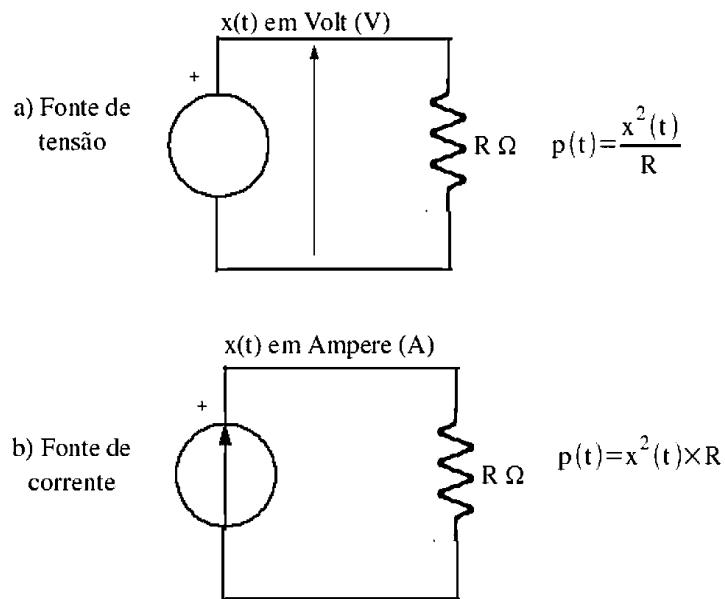


Figura 2-4

$x(t)$: tensão elétrica (V) ou corrente (A)

R : carga (Ω)

p : potência instantânea (W)

Potência instantânea normalizada.

Em estudo de sistemas de comunicações, a potência pode ser normalizada, assumindo-se $R=1\Omega$. Se o valor não normalizado da potência for necessário, ele pode ser calculado, a partir do conhecimento da impedância no ponto.

Assim,

$$p(t) = x^2(t) \quad (2-2)$$

Com a normalização de R a 1Ω , a expressão da potência instantânea é a mesma, $x(t)$ sendo uma forma de onda de tensão ou de corrente, conforme mostra a Figura 2-5.

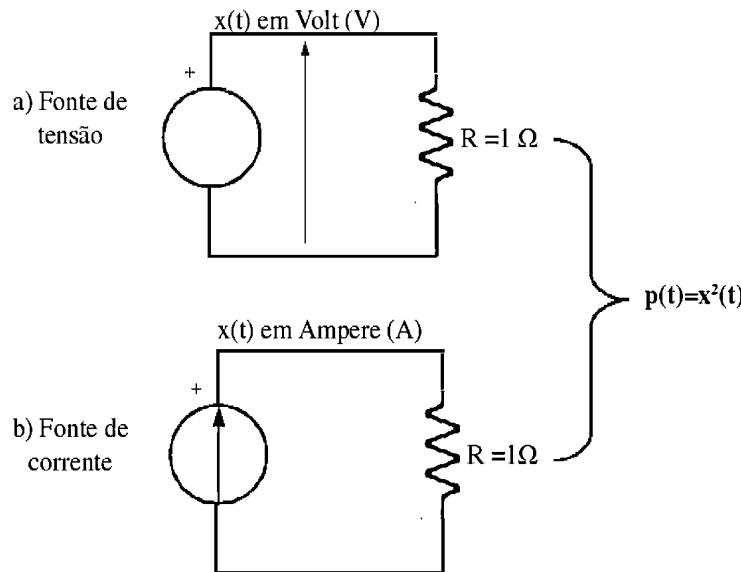


Figura 2-5

Potência média.

Uma vez estabelecido o intervalo de tempo T_0 , a potência média neste intervalo é definida como:

$$P_m = \frac{1}{T_0} \int_{t_i}^{t_i + T_0} x^2(\tau) d\tau \quad (2-3)$$

Potência média total.

$$P = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{t_i}^{t_i + T_0} x^2(\tau) d\tau \quad \text{Corresponde à potência média para } T_0 \rightarrow \infty \quad (2-4)$$

Quando $x(t)$ for periódico, a potência média total é igual à potência média

calculada quando T_0 é igual ao período do sinal:

$$P = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{t_i}^{t_i + T_0} x^2(\tau) d\tau = \frac{1}{T_0} \int_{t_i}^{t_i + T_0} x^2(\tau) d\tau \quad (2-5)$$

Energia.

Energia representa potência x tempo, que fisicamente significa trabalho.

Ou seja, dada uma certa potência, quanto maior o tempo durante o qual aquela potência se manifestar maior a energia dissipada pelo sinal ou fornecida por ele durante aquele tempo.

Por isso é que para medir a quantidade de eletricidade fornecida pela companhia distribuidora medimos a quantidade total de energia elétrica consumida pelas nossas casas.

O que importa é o acúmulo energético. Assim, um lâmpada de 30W ligada durante 24h consome tanta energia quanto um chuveiro elétrico de 3600W ligado durante 12min ($30 \times 24 = (3600 \times 1/5)$).

A unidade de medida da energia no sistema MKS é o Joule (J), sendo $1J = 1W \times s$. (Por conveniência, para medir o gasto energético residencial, utilizamos um múltiplo do J, o kW×hora).

Assim, a energia medida ou dissipada durante o tempo T é dada por:

$$E_T^x = \int_{t_0}^{t_0 + T} x^2(t) dt \quad (2-6)$$

Energia total

Da mesma forma que a potência média total , a energia total é definida para $T_0 \rightarrow \infty$.

$$E = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \int_{t_i}^{t_i + T_0} x^2(\tau) d\tau \quad (2-7)$$

Sinal de energia.

Um sinal de energia é aquele que possui energia total finita.

Como consequência, sua potência média total é igual a zero.

Exemplo: Um pulso de amplitude e duração finitas.

Algumas vezes é conveniente lidar diretamente com a energia. Isto ocorre principalmente com formas de onda utilizadas para gerar pulsos em sistemas digitais, os quais tendo duração mensurável, são parametrizados em uma base de energia/pulso.

Algumas vezes, também, pode haver a necessidade da análise de sinais que podem ser considerados sinais de energia, como por exemplo surtos de tensão ou de corrente, causados por indução de elementos externos aos sistemas (queda de raios, por exemplo), na simulação para teste e projeto de sistemas de proteção de linhas e aparelhos.

Sinal de potência.

É aquele cuja potência média é finita e diferente de zero.

Como consequência, sua energia total é sempre $E=\infty$.

Exemplo: Um sinal aleatório, com duração teoricamente infinita¹.

Em sua maioria, os sinais que lidamos em sistemas de comunicações são sinais de potência (sinais periódicos ou sinais aleatórios como a informação ou o ruído).

¹ Na verdade, nenhum sinal tem duração infinita. Entretanto, se o seu tempo de duração for muito maior que o tempo de manifestação de parâmetros significativos do sinal sendo observado, ele pode ser considerado infinito por simplificação.

EXERCÍCIOS - Sequência A

A-2.1-Qual a potência total de um sinal de energia?

A-2.2-Qual a energia total de um sinal de potência?

A-2.3-Um sinal pode ser de energia e de potência simultaneamente? Justifique sua resposta.

A-2.4-Calcule a energia do pulso de RF (rádio frequência) definido pela fórmula abaixo:

$$x(t) = \begin{cases} A \sin 2\pi f_0 t & \text{para } t_0 < t < T \\ 0 & \text{para qualquer outro } t \end{cases}$$

Sugestão: Para facilitar, considere $t_0=0$. Note que $1/f_0$ não necessariamente é igual a T (ou seja, o pulso de RF não necessariamente tem uma duração múltipla inteira de um período $1/f_0$). T deve conter pelo menos 5 períodos do pulso de RF (rádio frequência). O pulso não é periódico. Ele só ocorre uma vez. T é a duração do pulso.

A-2.5-Repita o Exercício A-2.4, desta vez supondo que T (duração do pulso) seja um múltiplo inteiro do período da função senoidal que forma o pulso de RF ($1/f_0$).

A-2.6-Calcule a potência total dissipada pelo pulso de RF do Exercício A-2.4.

A-2.7-Calcule a potência dissipada pelo pulso de RF do Exercício A-2.5 no intervalo de t_0 a t_0+T .

R: $A^2/2$

A-2.8-O pulso de RF do Exercício A-2.5 é um sinal de energia, no entanto, o Exercício A-2.7 calculou sua potência como sendo $A^2/2$. Como explicar este fato?

A-2.9-Calcule a potência total do sinal periódico $\{A |\sin(2\pi f_0 t)|\}$ conforme a

Figura 2.6. Este sinal constitui uma onda senoidal retificada. Suponha sua duração como sendo infinita ($-\infty < t < \infty$).

R: $P=A^2/2$.

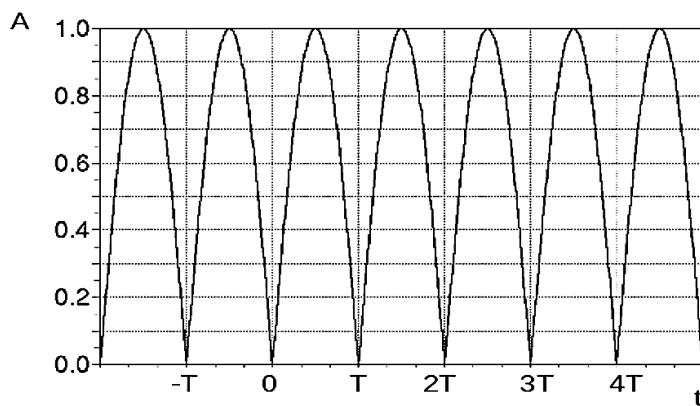
A-2.10-Calcule a potência média de 3 períodos do sinal periódico da Figura 2.6

R: $A^2/2$

A-2.11-Calcule a energia de 3 períodos do sinal periódico da Figura 2.6.

R: $3TA^2/2$

$$x(t) = A |\sin(2\pi f_0 t)|$$



Sendo $T=1/(2f_0)$

Figura 2.6

A-2.12-Uma sequência periódica de pulsos retangulares, como na Figura 2.1, de largura de pulso τ e período T , pode ser representado pela fórmula $x_T(t)=A\Pi_T(t/\tau)$. Baseado nesta representação, faça um gráfico para $x_T(t)=A\Pi_T[(t-\tau_1)/\tau_2]$.

A-2.13-Baseado no resultado do Exercício A-2.12, faça um gráfico para $x_T(t)=2\Pi_4(t-1/2)$. Qual o valor de $x_T(t)$ para $t=0,5$; $t=-0,5$ e $t=-3,5$?

R: 2; 0 e 2.

A-2.14-Faça um gráfico para $2\Pi_4(t/0,5)$. Faça $-6 < t < 6$.

A-2.15-Faça um gráfico para $x_T(t)=\Pi_4[2(t-1)]$. Faça $-4 < t < 9$.

A-2.16-Faça um gráfico de $x_T(t)=\Pi_4(2t-1)$. Faça $-4 < t < 10$.

A-2.17-Se um pulso retangular de energia de largura τ e amplitude A, centrado na origem, fosse representado como $A\pi(t/\tau)$, como seria a representação matemática para o sinal periódico da Figura 2.1 em termos de um somatório infinito de pulsos de energia de largura τ e amplitude A, centrados em $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$?

A-2.18-Trace o gráfico do sinal $x(t) = [\sin(\pi t)]/(\pi t)$, para $-10 < t < 10$. O sinal $x(t)$, assim definido, é também conhecido como $x(t) = \text{sinc}(t)$. Qual o valor máximo do sinal $x(t)$, e para que valor de t ele ocorre? O 1º zero do sinal $x(t)$ ocorre para que valor de t ? O sinal $x(t)$ é um sinal de energia ou de potência? Por quê?

R: Valor máximo=1 em $t=0$; 1º zero do sinal $x(t)$ em $t=\pm 1$.

Perda ou Ganho

Em um sistema de comunicações, algumas vezes é necessário relacionarmos a potência média de um sinal presente em um determinado ponto do sistema com a potência média do sinal em outro ponto (por exemplo, o sinal na saída do sistema com o sinal na entrada do sistema).

Este relacionamento pode ser realizado simplesmente dividindo-se uma pela outra.

Assim, se $P_{\text{saída}} = 10 \times P_{\text{ent}}$, é razoável pensar que o sistema introduziu um ganho de valor 10.

Desta forma, se

$$P_{\text{ent}} = 5\text{W}, P_{\text{saída}} = 50\text{W}$$

$$P_{\text{ent}} = 0,5\text{W}, P_{\text{saída}} = 5\text{W}$$

$$P_{\text{ent}} = 5 \cdot 10^{-6}\text{W}, P_{\text{saída}} = 5 \cdot 10^{-5}\text{W}$$

Para todos os casos acima, o sistema introduziu um ganho de 10 (adimensional).

Assim, como houve ganho, poderia ter havido perda, neste caso $P_{\text{saída}} < P_{\text{ent}}$.

Em geral, ao compararmos a potência em pontos diferentes do sistema, estamos interessados em pontos pelos quais flui o mesmo tipo de sinal, qualitativamente falando (por exemplo, sinais analógicos de voz na mesma banda básica, ou sinais digitais modulados enviados para um satélite ocupando uma determinada banda).

Decibel

Suponha que um sinal $x(t)$ é transmitido por um sistema de comunicações, e nesse processo ele pode ser atenuado, ou amplificado, no sentido de que sua potência média pode diminuir ou aumentar, respectivamente. Os valores de potência média deste sinal em dois pontos diferentes do sistema podem ser relacionados de duas formas:

1-Relação linear, obtida dividindo-se diretamente os valores de potência

2-Relação logarítmica, obtida de acordo com:

$$X(\text{dB}) = 10 \log_{10} \frac{P_a}{P_b} \quad (2-8)$$

O valor assim obtido (X) diz-se estar expresso em decibel (a relação abrevia-se dB, de decibel).

O valor expresso em dB pode representar uma perda ou um ganho. Se P_a representa a potência no ponto A e P_b no ponto B, se $X(\text{dB})$ for positivo então $P_a > P_b$. Se $X(\text{dB})$ for negativo, então $P_a < P_b$.

A relação $X(\text{dB})$ também pode representar a relação entre as potências de dois sinais A e B no mesmo ponto do sistema. É o caso, por exemplo, da relação entre a potência de um sinal útil (sinal de informação - SdB) e um sinal de ruído (NdB) [o ruído é um sinal indesejável, e infelizmente está presente em todos os pontos de um sistema, com maior ou menor intensidade – a simbologia N é derivada da expressão “Noise”, que significa ruído, em inglês].

Assim, se $S/N = 30\text{dB}$, significa que naquele ponto do sistema o sinal útil tem potência 1000 vezes maior do que o sinal de ruído.

EXERCÍCIOS – Sequência B

B-2.1-Em um sistema de comunicações, transmitindo de A para B conforme ilustra a Figura 2-7, a potência do sinal em A é $P_A=3,2\text{mW}$. A potência do sinal em B é $P_B=1,9\mu\text{W}$.

Calcule P_A/P_B utilizando valores lineares e logarítmicos. Houve ganho ou perda?

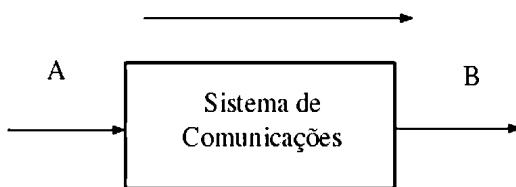


Figura 2-7

B-2.2-Em um sistema de comunicações, transmitindo de A para B, a potência do sinal em A é $P_A=1,9\mu\text{W}$, e a potência do sinal em B é $P_B = 1\text{mW}$. Calcule P_A/P_B utilizando valores lineares e logarítmicos. Houve ganho ou perda?

B-2.3-No Exercício B-2.1, qual é a relação, em dB, de P_B para P_A , e como interpretar este resultado?

B-2.4-No Exercício B-2.2, qual a relação, em dB, de P_B para P_A , e como se interpreta o resultado?

B-2.5-Um sistema de transmissão apresenta ganho entre dois pontos, A e B, e a relação da potência de A, P_A para a potência de B, P_B , é de +10dB. Qual o sentido de transmissão?

B-2.6-Um sistema de transmissão apresenta perda entre dois pontos A e B, e a relação P_A/P_B vale -3,5dB. Qual o sentido de transmissão?

B-2.7-Vamos supor que desejamos relacionar em unidades logarítmicas a tensão em V. Como seria essa relação expressa em decibéis? Justifique.

B-2.8-Em se tratando de tensões, a relação em dB é como no Exercício B-2.7. Se entre dois pontos de um sistema temos uma relação $P_1/P_0=0.5$, qual a relação entre as tensões V_1/V_0 nestes pontos, sabendo que V_1 gerou P_1 e V_0 gerou P_0 , e que a impedância nos dois pontos podem serem consideradas iguais?

B-2.9-Em um sistema de comunicações, no ponto A, a tensão é de 1,3 V. No ponto B, a tensão deste sinal é 0,5 V. Qual o valor, em dB, da relação V_B para V_A ? Suponha impedância de A = impedância de B.

B-2.10-Em referência ao Exercício B-9, supondo que a impedância no ponto A seja igual à impedância no ponto B, e sendo ambas iguais a 50Ω , qual o valor das potências em A e B, em W?

dB em relação à 1mW – dBm

A potência de um sinal também pode ser expressa em unidades logarítmicas. A definição é semelhante ao decibel, comparando-se o valor de potência no ponto desejado com um valor de referência. Quando esse valor de referência é igual a $P_0=1\text{mW}$, a unidade de medida resultante denomina-se dBm (dB em relação a 1mW). O dBm é muito utilizado em cálculos de potência de sinais. Assim,

$$X(\text{dBm}) = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_0} \quad \text{onde} \quad P_0 = 1\text{mW} = 10^{-3}\text{W} \quad (2-9)$$

dB em relação à 1W – dBW

Algumas vezes usa-se um valor de referência $P_0= 1\text{W}$. Neste caso, a unidade de medida recebe o nome de dBW (dB em relação a 1W).

Em cálculos de balanceamento de enlaces em sistemas de transmissão via satélite, costuma-se usar dBW na indicação de potências.

Exemplo de alguns valores: Potência de sinal gerada pelo transmissor para o

satélite: 20dBW (100w). Sinal transmitido para o satélite (inclui potência do transmissor+ ganho da antena parabólica): +70dBW (enlace de subida a 8,0GHz).

Potência recebida pelo satélite: -110,0dBw ($10^{-11}w$). (Satélite geoestacionário a 35800 km de altitude). Inclui perdas no caminho de transmissão (203dB: perda de propagação no espaço livre) e ganho da antena parabólica de recepção no satélite (+36dB) e alguns outros fatores.

EXERCÍCIOS – Sequência C

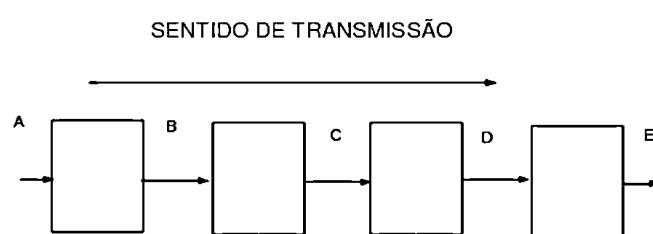
C-2.1-Usando a definição de dBm, faça o seguinte:

- a-Expresse em dBm uma potência de 10mW;
- b-Expresse em dBm uma potência de 0,01mW;
- c-Expresse em dBm uma potência de 1mW;
- d-Expresse em dBm uma potência de 150mW;
- e-Expresse em dBm uma potência de 0,15mW;
- f- Expresse em dBm uma potência de 2mW;
- g- Expresse em dBm uma potência de 0,5mW.

C-2.2-Usando a definição de dBm, faça o seguinte:

- a-Expresse em mW uma potência $X=5\text{dBm}$;
- b- Expresse em mW uma potência $X=-8\text{dBm}$;
- c-Expresse em mW uma potência $X=100\text{dBm}$;
- d-Expresse em mW uma potência $X=-100\text{dBm}$;
- e-Expresse em mW uma potência $X=8\text{dBm}$;
- f-Expresse em mW uma potência $X=11\text{dBm}$;
- g-Expresse em mW uma potência $X=0\text{dBm}$.

C-2.3-Um sistema de transmissão, mostrado na Figura 2.8, com o sentido de transmissão dado, apresenta os valores indicados de potência de sinal nos pontos A, B, C, D e E. Indique se cada bloco insere perda ou ganho, dando o respectivo valor para cada bloco. Indique o valor total do ganho do sistema.



$$A=0 \text{ dBm}; B= -10 \text{ dBm}; C=+3 \text{ dBm}; D= -30 \text{ dBm}; E= -5 \text{ dBm}$$

Figura 2.8

C-2.4-Em um sistema de comunicações ocorre a soma de dois sinais, de potências S_1 e N_1 , respectivamente. Calcule a potência do sinal resultante.

Dados: $S_1=10\text{mW}$ $N_1 = 3\text{mW}$.

Expresse o resultado em dBm.

C-2.5-Em um sistema de comunicações ocorre a soma de dois sinais, de potências S_1 e N_1 , respectivamente. Calcule a potência do sinal resultante.

Dados: $S_1=-3\text{dBm}$ $N_1=-15\text{dBm}$

Expresse o resultado em dBm.

C-2.6-A relação sinal/ruido, S/N , em um ponto de um sistema de comunicações, é definida como sendo a razão entre a potência do sinal S , em mW, e a potência do ruido N , também em mW, naquele ponto.

Sendo $S=10\text{mW}$ e $N=5\times10^{-4}\text{W}$, expresse a relação S/N em dB.

C-2.7-Em um ponto de um sistema de comunicações, a potência do sinal, S , é de -20dBm , e a potência do ruido, N , de -45dBm . Qual a relação S/N em dB?

C-2.8-Em um ponto de um sistema de comunicações a impedância é definida como sendo $= 600 \Omega$ resistivos. Se a potência especificada de sinal no ponto é -10dBm , qual o valor em V do sinal? Considere o sinal como sendo senoidal e de 1 KHz de frequência.

C-2.9-A carga máxima em um ponto de um sistema é 10dBm . Este valor está normalizado a 1Ω . Se a impedância real for 75Ω , qual o valor da amplitude máxima ponto a ponto A de um sinal senoidal a ser aplicado neste ponto, que satisfaça a especificação de carga máxima?

C-2.10-Na entrada de um sistema, deseja-se efetuar um teste onde injetam-se duas frequências diferentes, $f_1\text{Hz}$ e $f_2\text{Hz}$. Se ambas geram uma potência de 0dBm , qual a potência total gerada?

C-2.11-Em um enlace para um satélite, temos a seguinte situação:

Potência do transmissor = 25dBW;

Ganho de transmissão da antena = 63,4dB;

Perdas de propagação = 202,7dB;

Tolerância para desvaneçimentos de sinal e outras perdas = 10dB;

Ganho das antenas de recepção no satélite = 33dB

Preencha a tabela abaixo, calculando a potência total recebida pelo satélite em dBW e em W.

Cálculo de Balanceamento

Potência do transmissor (+) = : dBW

Ganho de transmissão da antena (+) = : dB;

Potência total transmitida = : dBW

Perdas de propagação (-) = : dB;

Tolerância para desvaneescimentos

de sinal e outras perdas (-) = : dB;

Ganho das antenas de recepção no

satélite (+) = : _____ dB;

Potência total recebida pelo satélite (?) = : dBW

W

Domínio do Tempo e Domínio da Frequência

Conforme o site http://pt.wikipedia.org/wiki/Dom%C3%ADnio_do_tempo da Wikipedia “**Domínio do tempo** é um termo usado em análise de sinais para descrever a análise de funções matemáticas com relação ao tempo. No domínio do tempo, o valor da função é conhecido em cada instante, no caso de tempo contínuo, ou em vários instantes separados, no caso de tempo discreto.”

Assim, podemos dizer que no domínio do tempo a variável livre, nas equações que tratam de sinais e suas relações, representa tempo.

Ainda segundo Wikipedia, “Em análise de sinais, **domínio da frequência** designa a análise de funções matemáticas com respeito à frequência, em contraste com a análise no domínio do tempo. A representação no domínio da frequência pode também conter informação sobre deslocamentos de fase.”

(site http://pt.wikipedia.org/wiki/Dom%C3%ADnio_da_frequ%C3%Aancia).

Desta forma, podemos dizer que no domínio da frequência temos equações com até duas variáveis independentes. Estas variáveis são a frequência e a fase.

Com isto, entendemos que um sinal ou relações em um sistema, podem ser representados sob pelo menos dois ponto de vista principais, um em que existe uma variável livre que é o tempo, e outro em que a variável livre é a fase ou a frequência. Podemos alternar entre uma representação ou outra, desde que haja uma definição precisa entre as duas representações.

Exemplo: Conforme a Figura 2-9, uma onda quadrada pode ser representada no domínio do tempo, pela sua forma de onda, ou no domínio da frequência pela sua frequência básica de repetição.

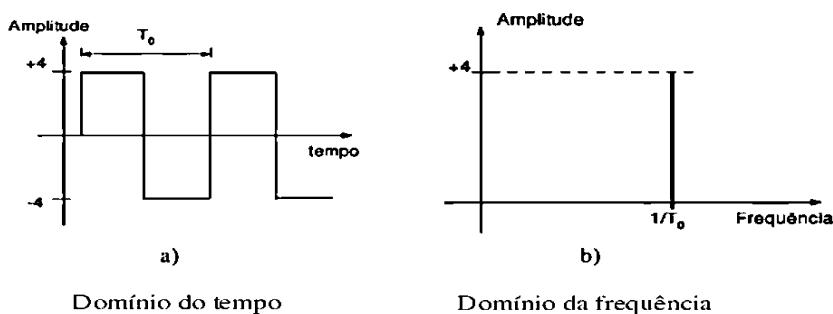


Figura 2-9

Esta é apenas uma das possíveis representações.

Outra representação veremos adiante, com a série de Fourier.

Desde que se convencione que a forma da onda é sempre a de pulsos quadrados, e que a amplitude da frequência sendo positiva significa que a onda quadrada inicia com uma excursão positiva conforme a Figura 2-9, a representação no domínio da frequência não deixa margem a dúvidas. Só fica indeterminada a fase inicial da onda quadrada, que pode ser indicada em um outro gráfico.

Sabendo-se as convenções, é possível representar outras formas de onda no domínio da frequência conforme acima, colocando-as como sendo compostas de ondas quadradas.

A Figura 2-10 apresenta um exemplo de como a forma de onda em 2-10 c) pode ser considerada uma composição (no caso, soma) das formas de onda em 2-10 a) e b).

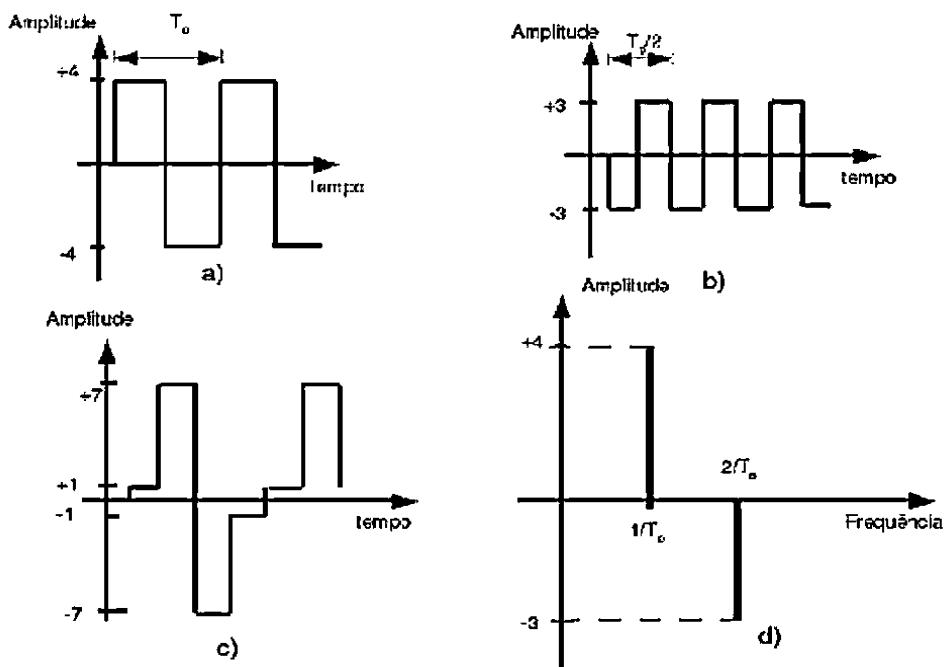


Figura 2-10

Funções Ortogonais e Funções Senoidais

Uma determinada forma de onda pode ser decomposta em um conjunto de funções básicas, que são somadas para gerar a dita forma de onda.

Veja como exemplo a Figura 2-10, onde a temos a forma de onda em 2-10c), que pode ser considerada uma composição das formas de onda em 2-10 a) e b).

A questão é saber que propriedades são desejáveis para a forma de onda básica, a partir da qual as demais formas de onda são geradas. Um dos requisitos é que este conjunto de funções básicas seja o mais abrangente possível, isto é, que se consiga representar o maior número possível de formas de onda.

Por exemplo, as formas de onda empregadas na representação da Figura 2-10 são limitadas a representação de formas retangulares.

Apesar de muitas funções poderem ser utilizadas como básicas, pode ser demonstrado que uma boa função básica atende ao requisito chamado *ortogonalidade*.

A palavra “ortogonal” vem dos termos gregos “ortho”-reto e “gonia”-ângulo. Portanto ortogonal aponta para o significado ângulo reto (por exemplo, dois vetores bidimensionais fazendo entre si um ângulo de 90° são ortogonais).

Matematicamente, para um conjunto de funções ortogonais a integral do produto de qualquer par de funções ortogonais é igual a zero .

Assim,

$$\int_a^b f_m(x)f_n(x)dx = 0 \quad \text{sendo } m \neq n \quad (2.10)$$

Se $m=n$, temos a área sob o quadrado de f , integrada de a até b .

Existem muitos conjuntos de funções ortogonais, entre eles o conjunto dos sinais senoidais.

Algumas características tornam interessante o uso de funções senoidais como funções básicas para um conjunto ortogonal:

a) Muitos sistemas físicos lineares têm seu comportamento descrito por uma equação da forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

cuja solução vem em forma de funções senoidais.

b) Funções senoidais são periódicas.

c) A descrição de funções senoidais é invariante para diversas transformações, como derivação ou seja, a derivada de $\cos(x)$ (que é uma função senoidal) continua a ser senoidal.

Aqui, nós empregaremos a expressão *forma de onda senoidal* ou *função senoidal* para se referir tanto a função $\cos x$ quanto a função $\sin x$. (veja a Figura 1-11).

Funções senoidas:

$$y_1 = A \sin \theta \text{ ou } y_2 = A \cos \theta$$

$$A \sin \theta = A \cos(\theta - 90^\circ)$$

Parâmetros:

A: amplitude (uma grandeza qualquer, por exemplo, V ou A ou W)

θ : ângulo ou fase (rad ou graus)

t: tempo (s)

$$\theta = \omega t + \alpha$$

ω : frequência angular (rad/s)

α : fase inicial (rad ou graus)

$$\omega = 2\pi f$$

f: frequência (Hertz)

$$f = 1/T_0$$

T_0 : período. (s)

Representação de Euler de funções senoidais

Para o cosseno:

$$A \cos(\omega t + \alpha) = \frac{A e^{+(j\omega t + \alpha)} + A e^{-(j\omega t + \alpha)}}{2} \quad (2-11)$$

Esta equação admite uma interpretação gráfica. A função cosseno é dada pela soma de dois fasores² girantes, um no sentido horário (expoente negativo) e outro

² Um fasor é um vetor girante centrado na origem (0,0) de um plano complexo, onde o eixo das abscissas representa o eixo imaginário e o eixo real das ordenadas o eixo dos reais.

no sentido anti horário (expoente positivo). Os dois fasores girando em sentidos opostos e com a mesma velocidade anulam a componente imaginária, que estaria defasada de 90° . A velocidade angular dos fasores é igual a ω .

A Figura 2-11 ilustra essa visualização.

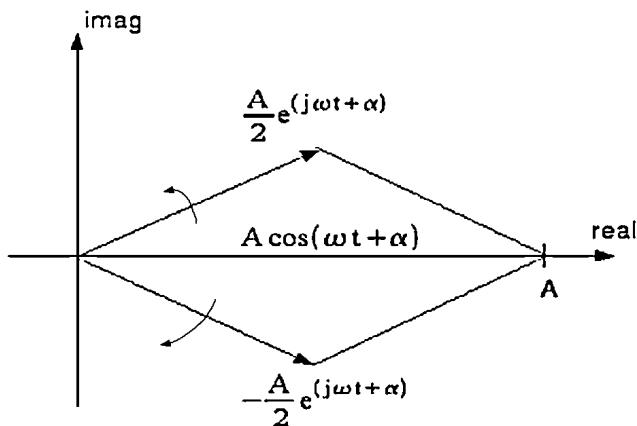


Figura 2-11

Para o seno:

$$\text{Asen}(\omega t + \alpha) = \frac{Ae^{+j(\omega t + \alpha)} - Ae^{-j(\omega t + \alpha)}}{2j} \quad (2-12)$$

Para o seno^{3]}, da mesma forma que para o cosseno, esta fórmula admite a seguinte interpretação gráfica, conforme a Figura 2-12. Novamente, temos a soma de dois fasores, só que um deles está rebatido na origem, devido ao sinal negativo. Desta vez, a soma dos dois fasores, anula a componente real, restando uma componente no eixo imaginário

A soma resultante é um imaginário, daí a necessidade da divisão por j para o resultado ser um número real.

A velocidade de rotação dos fasores é igual a ω .

³ Na representação de Euler, a componente em cosseno é a projeção do fasor sobre o eixo real, e a componente em seno é a projeção do fasor sobre o eixo imaginário.

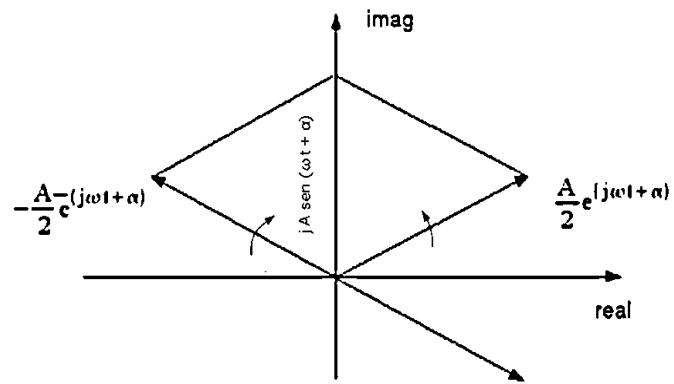


Figura 2-12

Sinais Senoidais no Domínio da Frequência-Espectros

Um sinal senoidal possui três parâmetros básicos; amplitude, frequência e fase . Uma vez que uma representação gráfica no domínio da frequência gera um gráfico bidimensional, precisamos de dois gráficos, um para a amplitude e outro para a fase.

Esses gráficos são representativos do *espectro de frequências* dos sinais.

Assim, cada frequência, ou cada sinal senoidal, gera uma *raia do espectro*, que corresponde, no gráfico, à uma linha vertical da amplitude ou fase da componente espectral.

Dois tipos de representação podem ser utilizados – representação *unilateral* e representação *bilateral*.

A representação unilateral, também chamada representação positiva do espectro, corresponde à representação dá um sentido físico para a frequência. Temos dois gráficos, (um para a amplitude e outro para a fase), ambos apenas para frequências positivas, (eixo das ordenadas em ambos os gráficos) que pode ser graduado em Hz ou em rad/s.

A representação bilateral, apesar de à primeira vista parecer mais complicada, na verdade irá simplificar muitas equações posteriores relativas à análise espectral de sistemas, pois como veremos o deslocamento de um espectro para diferentes regiões de frequência ocorrerá de forma a proporcionar raciocínios envolvendo deslocamentos de regiões negativas para positivas, explicando facilmente o surgimento de novas frequências espetrais positivas e reais.

Representação unilateral de $x(t)=A \cos (\omega t + \alpha)$

Conforme mostra a Figura 2-13, o espectro unilateral do cosseno utiliza dois gráficos para a representação no domínio da frequência, um para a amplitude e outro para a fase.

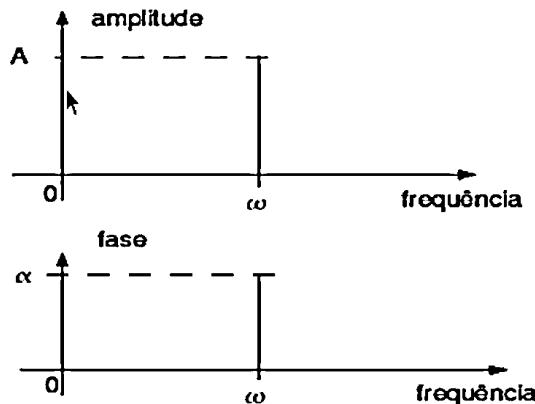


Figura 2-13

Representação bilateral de $x(t)=A \cos(\omega t+\alpha)$

A representação bilateral é baseada na representação fasorial de Euler:

Veja a Equação (2-11).

Assim, aparece o conceito de frequência negativa, que não tem significado físico, apenas matemático, representando um fasor girando no sentido negativo ($e^{-j\omega t}$). A Figura 2-14 apresenta o espectro bilateral do cosseno:

O gráfico de amplitudes é sempre positivo, apresentando simetria par. Já o gráfico de fases apresenta simetria ímpar.

Note que são necessários dois fasores conjugados para a formação de um sinal real, no caso o cosseno. Fasores conjugados têm a mesma amplitude e fases opostas, girando em direções opostas mas sempre na mesma velocidade.

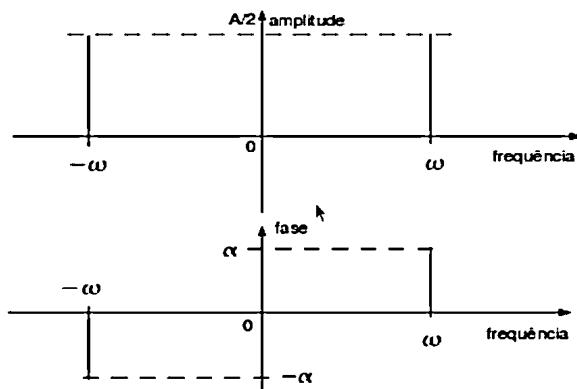


Figura 2-14

Representação unilateral de $x(t)=A\sin(\omega t+\alpha)$

Por convenção, os gráficos do espectro de frequências representam cossenos.

Entretanto reconhecendo que, topologicamente falando, o seno também tem a mesma forma de onda que o cosseno, diferindo apenas por uma diferença na fase (os dois são defasados de 90°), os gráficos de espectro de frequência também podem representar senos.

Uma forma de fazer isto, sem mudar as convenções iniciais, seria usar a relação trigonométrica $\sin(\omega t+\alpha)=\cos(\omega t+\alpha-90^\circ)$.

Outra forma seria convencionar quando um gráfico de espectro representa o seno ou quando representa o cosseno.

A Figura 2-15 apresenta o espectro unilateral do seno, baseado em que $\sin(\omega t+\alpha)=\cos(\omega t+\alpha-90^\circ)$.

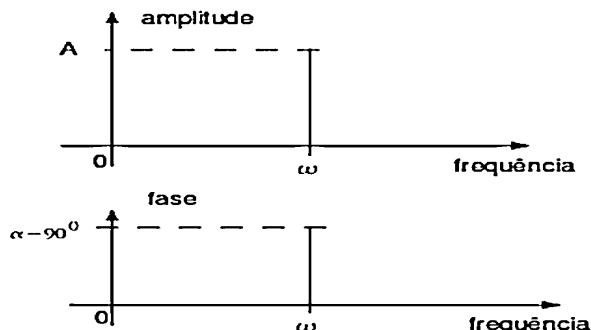


Figura 2-15

Representação bilateral para $x(t)=A\sin(\omega t+\alpha)$

Assim como no caso anterior de cosseno, a representação bilateral é baseada na fórmula de Euler, conforme a Equação (2-12).

Assim, temos os gráficos de amplitude e fase representados na Figura 2-16^{4,5}, baseados também na relação $\sin(\omega t+\alpha)=\cos(\omega t+\alpha-90^\circ)$.

4 São necessários dois fasores conjugados para a formação de um sinal real, como no caso do cosseno.

5 Dividir por j equivale a acrescentar uma fase de -90° .

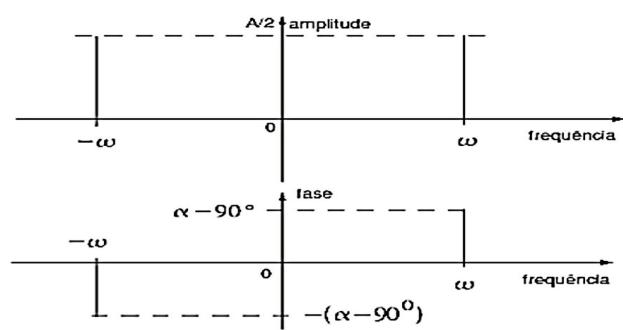


Figura 2-16

EXERCÍCIOS-Sequência D

D-2.1-Trace o espectro unilateral de frequências do sinal $y(t)=2+7 \cos(2\pi 10 t + \pi/4) + 4 \sin(2\pi 25 t) - 3 \cos(2\pi 30 t)$

D-2.2- Repita D-2.1 para a forma bilateral do espectro de frequências.

D-2.3-Suponha que se resolva traçar um gráfico de espectro unilateral de frequências do sinal no Exercício D-2.1, só que utilizando uma escala logarítmica para o eixo das abscissas. Como seria o aspecto deste gráfico?

D-2.4-Repita D-2.3 para o gráfico de espectro bilateral.

D-2.5-Como seriam genericamente traçados gráficos de módulo e fase para o espectro bilateral do sinal definido pela série:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

onde X_n é um número complexo função de n , isto é, $X_n = x(n) + jy(n)$, n inteiro e variando de $-\infty < n < +\infty$, sendo $x(t)$ um sinal real.

Isto implica em que $X_{-n} = X_{+n}^*$, ou seja, $x(-n) = x(n)$ e $y(-n) = -y(n)$.

Série de Fourier

A série de Fourier decompõe matematicamente um sinal periódico qualquer em um somatório de funções senoidais.

Essas funções senoidais formam um conjunto de funções ortogonais, e atendem à condição da Equação (2.10). Assim, as funções base deste conjunto de funções ortogonais são funções senoidais. Pode-se dizer que, ao calcular os valores de amplitude e fase de cada componente senoidal a série de Fourier fornece o espectro de frequências de um sinal periódico.

Genericamente, o número de termos da série de Fourier é infinito. Em casos particulares, ou para aproximações numéricas, este número pode ser finito.

A análise de sinais no domínio da frequência estuda o comportamento das componentes espetrais de um sinal, componentes que podem ser interpretadas como integrantes da série de Fourier do sinal. Este tipo de análise é particularmente útil em se tratando de sistemas lineares e invariantes no tempo, que atendem ao princípio da superposição. Sua ação sobre o sinal periódico pode ser computada como o somatório, ou a resultante das ações individuais sobre cada componente espectral.

Forma expandida da série trigonométrica:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (2.13)$$

onde

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

sendo T_0 o período de $x(t)$.

Cada componente da série tem frequência $n\omega_0$. Na série trigonométrica, cada frequência tem uma componente em *cosseno* de amplitude a_n e uma componente em *seno* de amplitude b_n . O coeficiente a_0 fornece a chamada componente de corrente contínua (CC) do sinal.

Dado um determinado sinal periódico $x(t)$, o conjunto das componentes a_0, a_n, b_n e a frequência da fundamental ω_0 completamente identificam o sinal.

Assim, um sinal periódico pode ser analisado no domínio do tempo, através de sua forma de onda $x(t)$, ou no domínio da frequência, através de seu espectro,

obtido calculando-se suas componentes espectrais a_0 , a_n e b_n e sabendo-se a frequência ω_0 da fundamental, que depende apenas do período do sinal.

As componentes espectrais a_0 , a_n e b_n são obtidas aplicando-se a condição de ortogonalidade da Equação 2.10, obtendo-se:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) dt \quad (2.14)$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (2.15)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (2.16)$$

A integração é feita ao longo de um período. O instante inicial t_0 é arbitrário, e geralmente é escolhido de forma a gerar simetrias espaciais na definição da forma de onda $x(t)$, simplificando assim o cálculo dos coeficientes.

Observe que como resultado desse cálculo obtém-se um valor para a_0 , que corresponde ao valor médio do sinal $x(t)$, e dois vetores, teoricamente de comprimento infinito (isto é, com infinitas componentes), de componentes reais em função de n .

A ocorrência de simetrias na definição de $x(t)$ provoca o anulamento de um dos vetores a_n ou b_n , daí a importância na escolha de t_0 . Desta forma, demonstra-se que, se $x(t)$ é uma função par, $b_n=0$ para qualquer n , e se $x(t)$ é ímpar, $a_n=0$ para qualquer n . Traçando-se gráfico de barras dos valores de a_0 , a_n e b_n em função da frequência obtém-se o espectro de frequência unilateral de $x(t)$ (n é sempre positivo).

O componente de CC (a_0) ocorre na origem, ou seja corresponde a $\omega=0$ ou $f=0$.

Os demais componentes ocorrem para a fundamental ($n=1$, correspondendo a $f_1=1/T_0$ ou $\omega_1=2\pi/T_0$) e múltiplos ($n=2, n=3, n=4, \dots$). Os componentes múltiplos da fundamental são chamados harmônicos.

EXERCÍCIOS – Sequência E

E-2.1-Calcule a série de trigonométrica de Fourier (coeficientes na forma expandida) e trace o espectro de frequências unilateral do sinal periódico da Figura 2-1.

São dados $T_0=4$. Largura de pulso = 1. Amplitude = 2.

$$R: a_0 = 0,5 \quad a_n = (4/\pi n) \sin(n\pi/4) \quad b_n = 0.$$

E-2.2-Calcule a série trigonométrica de Fourier (coeficientes na forma expandida) de um trem de pulsos retangulares, de amplitude A, largura τ e período T_0 . Confirme o resultado obtido no Exercício E-2.1.

$$R: a_0 = A\tau/T_0 \quad a_n = (2A/\pi n) \sin(n\pi\tau/T_0) \quad b_n = 0.$$

E-2.3-Faça um desenho do espectro unilateral de frequências do trem de pulsos retangulares de amplitude 2 V, largura 1,5 s e período 4 s. Faça n variar de 0 a 8, calculando 8 componentes do espectro.

R:

n	ω (rad/s)	a_n	b_n
0	0	0,75	0
1	1,57	1,18	0
2	3,14	0,45	0
3	4,71	-0,16	0
4	6,28	-0,38	0
5	7,85	-0,10	0
6	9,42	0,15	0
7	10,99	0,17	0
8	12,56	0,00	0

Note que a frequência do n -ésimo harmônico é n vezes a da fundamental ($n=1$).

E-2.4-Para os dados do Exercício E-2.3, faça um esboço para a forma de onda resultante da soma da fundamental com a 4ª harmônica do sinal. Considere $t \leq 8$.

E-2.5-Para os dados do Exercício E-2.3, demonstre que o 1º nulo ocorre quando $n\tau/T_0 = K$, sendo K o menor inteiro positivo e real. Determine n e K .

R: $n=8$ e $K=3$.

Forma compacta da série trigonométrica:

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (2.17)$$

Os coeficientes se relacionam com os coeficientes da forma expandida da seguinte forma:

$$c_0 = a_0 \quad (2.18)$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (2.19)$$

$$\theta_n = -\operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n} \quad (2.20)$$

Conforme verificamos, a forma compacta é apenas uma outra forma de se escrever a forma expandida, onde ao invés de termos a_n (coeficiente do cosseno) e b_n (coeficiente do seno) temos c_n (coeficiente de um sinal senoidal resultante da soma de um cosseno com um seno de mesma frequência) e a fase resultante θ_n .

O espectro continua a ser unilateral, com dois gráficos, um para c_n e outro para θ_n .

EXERCÍCIOS – Sequência F

F-2.1-Repita o Exercício E-2.1 para a forma compacta da série de Fourier.

R: $c_0=0,5$ $c_n^6=(4/\pi n)\sin(n\pi/4)$ $\theta_n=0$.

F-2.2-Repita o Exercício E-2.2 para a forma compacta da série de Fourier.

R: $c_0=a_0$, $c_n=a_n$, $b_n=0$

F-2.3-Repita o Exercício E-2.3 para a forma compacta da série de Fourier.

F-2.4-Prove as Equações 2.18, 2.19 e 2.20.

Forma complexa da série de Fourier

A forma complexa da série de Fourier utiliza a equivalência de Euler expressa nas Equações (2.11) e (2.12), representando o cos e o sen como a soma de dois fasores, um girando no sentido anti-horário (frequência positiva) e outro no sentido horário (frequência negativa).

Surge então, para essa representação, o conceito de frequência negativa, que não tem significado físico, apenas matemático.

Assim, uma frequência física, real, é dada pela soma de dois fasores, um de frequência positiva e outro, de mesma amplitude, de frequência negativa.

A expressão resultante é bastante compacta, e por isso será bastante utilizada neste livro.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad \text{A série em forma complexa de Fourier se escreve:} \quad (2.21)$$

O coeficiente X_n é calculado pela fórmula:

6 A rigor, c_n é sempre positivo, pois representa módulo (valor absoluto). Portanto, os valores negativos da função sen deveriam se refletir na fase, fazendo $\theta_n=180^\circ$ quando $\sin<0$. Por simplificação, admite-se valores para $c_n<0$ e $\theta_n=0$ sempre.

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-j n \omega_0 t} dt \quad (2.22)$$

onde T_0 é o período de $x(t)$.

O espectro de frequências do sinal $x(t)$ será dado por dois gráficos, ambos função de $n\omega_0$ ou de n , $-\infty < n < \infty$.

Sendo n sempre um inteiro, $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, os gráficos serão sempre gráficos de barra, cada barra proporcional ao valor $|X_n|$ ou θ_n , conforme seja o gráfico de módulo ou o gráfico de fases, pois X_n é um número complexo, e pode ser escrito na forma módulo e fase: $X_n = |X_n|e^{j\theta_n}$.

Para uma função $x(t)$ real, temos sempre o gráfico de $|X_n|$ par e o gráfico de θ_n ímpar.

A série exponencial de Fourier fornece um espectro bilateral, onde a parte negativa do eixo das frequências significa a formação de um fasor girando no sentido horário (-), e necessita de um outro fasor na parte positiva, de mesma amplitude e girando no sentido anti-horário (+), para a representação de um sinal real.

EXERCÍCIOS – Sequência G

G-2.1-A figura 2.17 apresenta um circuito de um retificador de onda completa. Para este circuito, quando a entrada $x_e(t)$ for o sinal senoidal $x_e(t)=A\sin(2\pi f_0 t)$ a saída será o sinal retificado $x_s(t)=|A\sin(2\pi f_0 t)|$. (veja a Figura 2-6). Calcule a série complexa de Fourier para $x_s(t)$. Forneça as frequências das 4 primeiras harmônicas e o nível de corrente contínua do sinal.

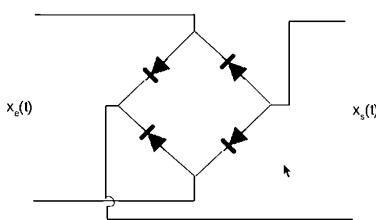


Figura 2-17

$$X_n = \frac{2A}{\pi} \left(\frac{1}{1-4n^2} \right) \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

R:

Tomando-se como referência a frequência f_0 do sinal senoidal de entrada, temos:

fundamental : $n=1 : f_{s1}=2f_0$.

2^{o} harmônico : $f_{s2}=4f_0$.

3^{o} harmônico : $f_{s3}=6f_0$.

4^{o} harmônico : $f_{s4}=8f_0$.

O nível de corrente contínua será dado por $2A/\pi$.

G-2.2-Faça um esboço do espectro de frequências complexo de Fourier dos sinais $x_e(t)$ e $x_s(t)$ do Exercício G-2.1. Calcule até a 5^a harmônica.

G-2.3-De que maneira o conteúdo espectral do sinal de entrada $x_e(t)$ do Exercício G-2.1 foi alterado pelo circuito retificador? E a potência? Analise e comente em relação à distribuição espectral do sinal de saída $x_s(t)$, à distribuição de potência na frequência do sinal de entrada em relação ao sinal de saída e em relação a linearidade do circuito retificador.

G-2.4-Calcule a série exponencial de Fourier de um trem de pulsos retangulares, de amplitude A, largura τ e período T_0 . Assuma simetria par pela escolha adequada de t_0 , conforme a Figura 2-1.

R:

$$X_n = A \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(n \frac{\tau}{T_0}\right)$$

G-2.5-Trace o gráfico do

espectro bilateral do trem de pulsos do Exercício G-2.4. Para o traçado, considere $T_0=4\tau$ e repita para $T_0=10\tau$, primeiro mantendo T_0 invariável e variando τ , e depois mantendo o valor de τ constante e variando T_0 .

G-2.6-Para o Exercício G-2.5, verifique e relate o que acontece com os espectros. Em particular, determine quantas raias do espectro existem desde $n=0$ até a primeira raia nula e relacione este resultado com os valores de T_0 e τ . Verifique também onde ocorre o 1º nulo do espectro, para n , f e ω . Verifique o que acontece se $T_0/\tau=4,75$.

G-2.7-A partir das fórmulas de Euler, Equações 2-11 e 2-12, mostre que $c_n=2|X_n|$.

Transformada de Fourier

Quando $f(t)$ é uma função não periódica qualquer seu espectro de frequências é calculado através da transformada de Fourier. A transformada de Fourier pode ser justificada como uma passagem ao limite da série de Fourier. Para visualizarmos essa passagem, consideremos um sinal periódico qualquer, $f_T(t)$, conforme ilustrado na Figura 2-18, e imaginemos que seu período T tende a infinito.

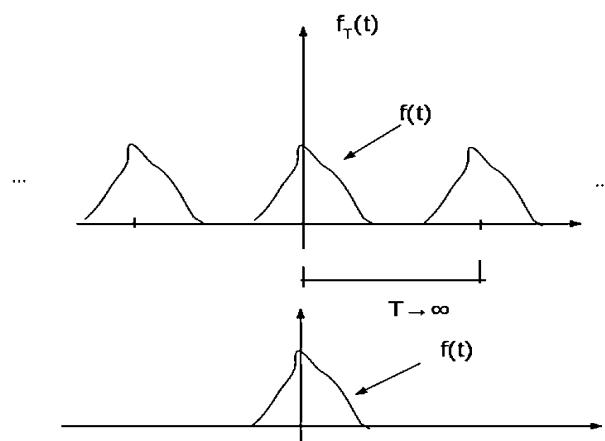


Figura 2-18
Função
periódica quando T tende a infinito

A série de Fourier de $f_T(t)$ se escreve:

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

onde

$$F_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Quando $T_0 \rightarrow \infty$, a função periódica $f_T(t)$ tende a $f(t)$ – vide Figura 2.18. Também ω_0 se torna tão pequeno que podemos considerá-lo um infinitésimo, e a variável discreta $n\omega_0$ se transforma na variável contínua ω . As raias do espectro se tornam tão unidas que se transformam em uma função contínua, porém de amplitude muito pequena, praticamente um infinitésimo, pois são proporcionais a $1/T_0$, como mostra a equação para F_n .

Substituindo-se o valor de F_n na série de Fourier para $f_T(t)$, e fazendo $t_0 = -T_0/2$,

sem perda de generalidade, vem:

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(\gamma) e^{-jn\omega_0\gamma} d\gamma \right) e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(\gamma) e^{-jn\omega_0\gamma} d\gamma \right) \omega_0 e^{jn\omega_0 t}$$

Quando $T_0 \rightarrow \infty$, $\omega_0 \rightarrow d\omega$ e $n\omega_0 \rightarrow$
variável contínua ω e $f_T(t)$
 $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma) e^{-j\omega\gamma} d\gamma \right] e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \rightarrow f(t)$. O somatório tende
a uma integral e temos:

Assim, temos :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.23)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.24)$$

As equações (2.23) e (2.24) definem respectivamente a transformação direta e inversa de Fourier.

Como, de um modo geral, $F(\omega)$ é uma função complexa, pode ser representada nas formas polar e cartesiana:

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\phi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$$

onde

$$|F(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \quad \text{e} \quad \phi(\omega) = \arctg \left[\frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right]$$

Como a transformada de Fourier é definida como uma integral, é na verdade uma soma infinita de termos infinitamente pequenos, dando como resultado um valor finito.

Se $f(t)$ representa um sinal real, isto é, sem partes imaginárias, então $|F(\omega)|$ é uma função par, e $\phi(\omega)$ uma função ímpar.

A transformada de Fourier é um item de conhecimento matemático que é pré-requisito à matéria deste livro, devendo haver sido estudado em disciplina específica do curso básico da Engenharia.

EXERCÍCIOS – Sequência H

H-2.1-Calcule o espectro de densidade de frequências de um pulso retangular de largura τ e amplitude A. Desenhe o gráfico de $F(\omega)$ pelo menos até $|\omega|<8\pi/\tau$.

R: $F(\omega)=At\text{sinc}(\omega\tau/2\pi)$ sendo $\text{sinc}(x)=\text{sen}(\pi x)/\pi x$.

H-2.2-Calcule o espectro de densidade de frequências do sinal $x(t)=A\Pi[(t-\tau)/\tau]$, sendo $x(t)$ uma função retangular de amplitude A, centrada em $t=\tau$ e de largura τ . Desenhe o gráfico de $X(\omega)$ (módulo e fase) pelo menos até $|\omega|<8\pi/\tau$.

R: $At\text{sinc}(\omega\tau/2\pi)e^{j\omega\tau}$

H-2.3-Esboce o gráfico do espectro de densidade de frequências do sinal $x(t)=2\Pi[(t-3)/1,5]$, representado na Figura 2-19.

H-2.4-Para o sinal $x(t)=2\Pi[(t-3)/1,5]$, representado na Figura 2-19, calcule a contribuição para o valor do pulso em $t=3s$, pela faixa de frequências do espectro que vai de 0,9 a 1,1Hz.

R: -0,5 V para o valor do pulso em $t = 3s$, que é de 2 V.

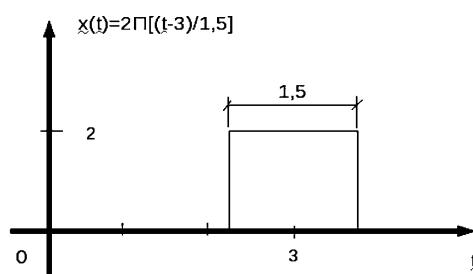


Figura 2-19

H-2.5-Para o pulso retangular especificado no Exercício H-2.4, calcule a contribuição da mesma faixa de frequências de 0,9 a 1,1Hz para o valor do pulso em 0,7s.

R: 0,076 V aproximadamente.

H-2.6-Qual a contribuição da frequência de 1Hz para o valor do pulso especificado em H-2.4 em t=3s?

R: 0 V.

H-2.7-Utilizando a propriedade da derivação no tempo, calcule o espectro de densidade de frequências do sinal da Figura 2-20.

R:

$$X(\omega) = \frac{-16 \operatorname{sinc}\left(\frac{4\omega}{\pi}\right)}{\omega^2}$$

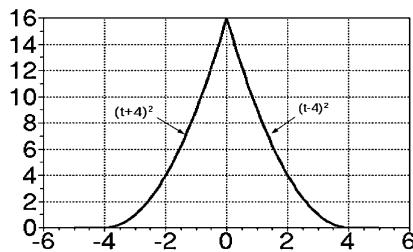


Figura 2-20

H-2.8-Compare e comente as eventuais diferenças entre os espectros de densidade de frequência dos sinais $x_1(t)=2\Pi(t/4)$ e $x_2(t)=2\Pi(t/8)$. Faça gráficos dos sinais no domínio do tempo e dos respectivos espectros, observando as respectivas escalas.

R:

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= 8 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega 2}{\pi}\right) \\ X_2(\omega) &= 16 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega 4}{\pi}\right) \end{aligned}$$

H-2.9-Sendo $F(\omega)$ a transformada de Fourier de $f(t)$, ache a transformada de Fourier de $f(t)\cos(\omega_0)t$. Apresente uma solução literal e uma solução gráfica.

R: $1/2F(\omega-\omega_0)+1/2F(\omega+\omega_0)$

H-2.10-Calcule a transformada de Fourier do pulso exponencial: $f(t)=\begin{cases} e^{-at} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$

R:

$$F(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

Função Impulso

A função impulso unitário $\delta(t)$, também chamada impulso de Dirac, pode ser definida simplificadamente como uma função cuja área total é igual a 1, ou seja

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2-25)$$

Além disso, só existe em $t=0$.

Um impulso $\delta(t)$ é graficamente representado por uma seta na origem, de comprimento proporcional à sua área, que no caso é igual a 1 conforme mostra a Equação 2-25. A Figura 2-21 ilustra a representação gráfica de um impulso unitário.

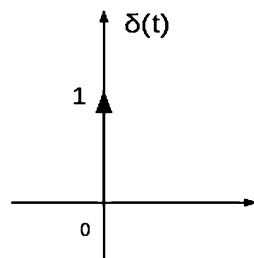


Figura 2-21

Pela definição apresentada, a função impulso de Dirac só existe quando o argumento da função é igual a zero. Como só existe no ponto $t=0$, sua duração é igual a zero, no entanto a área total sob a função é igual a 1. Para compatibilizar esta duas condições, que são contrárias ao conhecimento que temos de uma função, imaginamos então que a amplitude da função impulso é infinita.

Assim, dizemos que a função impulso de Dirac tem amplitude infinita, intensidade igual a 1 e está localizada no valor do argumento = 0.

Genericamente, uma função impulso pode estar centrada em um ponto qualquer do eixo, e possuir uma área diferente de 1. Nesse caso, sua representação gráfica é uma seta de comprimento proporcional à área, centrada no ponto adequado do eixo. De qualquer modo, sempre imaginamos que sua amplitude é infinita.

EXERCÍCIOS – Sequência I

I-2.1-Qual o valor da função $\delta(t)$ em $t=1s$?

I-2.2-Qual a área total sob a função $\delta(t)$?

I-2.3-Qual o valor da função impulso $\delta(t)$ em $t=0$?

I-2.4-Qual o valor da integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t)dt \quad (2.26)$$

I-2.5-Qual o valor da função $\delta(t)f(t)$ em $t=0,5s$? $f(t) \neq 0$ para $t=0.5s$.

I-2.6-Qual o valor da função $\delta(t)f(t)$?

I-2.7-Qual o valor da integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-T)f(t)dt \quad (2.27)$$

I-2.8-Qual o valor da integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\delta(t-1)dt \quad (2.28)$$

I-2.9-Represente graficamente as funções em a, b,c e d abaixo:

a) $\delta(t-T)$; b) $f(t)\delta(t-T)$, sendo $f(t)$ uma função qualquer;

c)

d)

$$\sum_{n=1}^5 \delta(t-nT)$$

$$f(t) \sum_{n=1}^5 \delta(t-nT)$$

I-2.10-Calcule a transformada de Fourier de um impulso unitário. Interprete o resultado.

I-2.11-Faça um gráfico do espectro de densidade de frequências do impulso unitário.

I-2.12-A partir da definição da série complexa de Fourier, e da transformada de Fourier de $e^{j\omega_0 t}$, defina formalmente uma expressão para o espectro de densidade de frequências ou transformada de Fourier de um sinal periódico. Interprete o resultado.

R:

$$X_T(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

sendo $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$\text{e } X_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$
(2-29)

I-2.13-Calcule o espectro de densidade de frequências de uma sequência periódica de impulsos periódicos, conforme ilustrado na Figura 2-22. Forneça o gráfico do espectro e interprete o resultado.

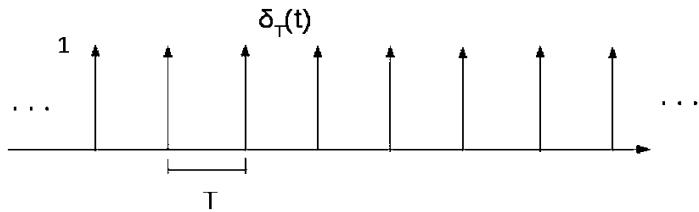


Figura 2-22

R:

$$\delta\omega_0(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

onde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

(2-30)

I-2.14-Calcule o espectro de densidade de frequências de um sinal senoidal de frequência f_0 Hz.

Convolução

A convolução entre duas funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ é definida pela integral:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau \quad (2-31)$$

τ é a variável de integração. Como é uma integral com limites, o resultado é uma função de t , $y(t)$.

Sendo assim, podemos escrever que:

$$y(t_0) = y(t)|_{t=t_0} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t_0-\tau) d\tau \quad (2-32)$$

Esta forma admite uma interpretação interessante:

O valor da convolução entre duas funções, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ para $t = t_0$, ou seja $y(t_0)$, é numericamente igual a área sob o produto das funções $x_1(\tau)$ e $x_2(t_0-\tau)$. Como τ é a variável dentro da integral, $x_1(\tau)$ é a própria função $x_1(t)$ [apenas mudou o nome da variável, de t para τ , mas a função é a mesma]. Como $t_0 = \text{constante}$ dentro da integral, $x_2(t_0-\tau)$ pode ser a função $x_2(-t+t_0)$, ou seja, a função $x_2(t)$ rebatida em torno do eixo vertical, $x_2(-t)$, que sofre um deslocamento t_0 à direita.

A convolução $y(t)$ se escreve com a simbologia $y(t)=x_1(t)*x_2(t)$.

Conforme mostra a Figura 2-23, o resultado final para $t=t_0$ [$y(t_0)$] é a área sob o produto $x_1(\tau)x_2(t_0-\tau)$.

Para obtermos o resultado para qualquer t_0 , temos que imaginar $x_1(t)$ parada e $x_2(t)$ rebatida em torno do eixo vertical e passeando sobre $x_1(t)$, desde um deslocamento t_0 negativo suficiente para haver sobreposição até um deslocamento positivo também suficiente para a sobreposição.

A ausência de sobreposição significa convolução=0.

Se os pulsos tiverem duração infinita, a convolução vai de $-\infty$ a $+\infty$.

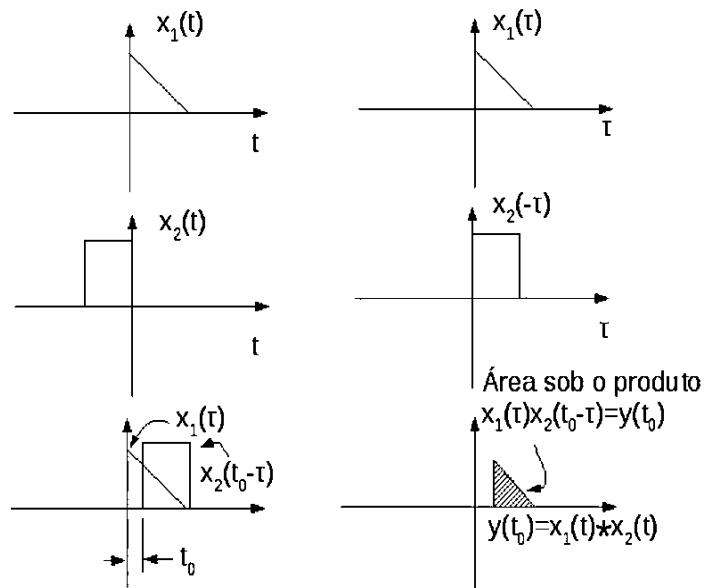


Figura 2-23

Uma vez que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau \quad (2-33)$$

é indiferente qual das duas funções é rebatida, para o resultado da convolução.

A convolução é uma operação básica.

Pode-se demonstrar que o resultado do processamento de um sinal qualquer $x(t)$ por um sistema linear e invariante no tempo, que atende ao princípio da superposição, é a convolução entre $x(t)$ [o sinal de entrada] e a função característica $h(t)$ do sistema, que é a resposta ao impulso unitário do sistema.

EXERCÍCIOS – Sequência J

J-2.1 Determine a expressão e apresente o esboço da convolução entre os pulsos $x_1(t)=\Pi(t/4)$ e $x_2(t)=\Pi(t/8)$.

As funções $x_1(t)=\Pi(t/4)$ e $x_2(t)=\Pi(t/8)$ são pulsos retangulares centrados na origem, de amplitude =1 e largura 4 e 8, respectivamente.

R: $y(t) = 0$ para $t < -6$

$$y(t)=(t+6) \text{ para } -6 < t < -2$$

$$y(t)=4 \text{ para } -2 < t < 2$$

$$y(t)=(-t+6) \text{ para } 2 < t < 6$$

$$y(t)=0 \text{ para } t > 6$$

J-2.2-Determine a expressão e faça o gráfico da convolução entre as funções $u(t)$ e $\Lambda_w(t)$.

A função $u(t)$ é o degrau unitário, cuja amplitude =1 para $t > 0$, e = 0 para $t < 0$, e $\Lambda_w(t)$ é o pulso triangular, centrado na origem, de amplitude =1 e largura = $2W$.

R:

$$y(t)=0 \text{ para } t < -W$$

$$y(t)=[t^2+2tW+W^2]/[2W] \text{ para } -W < t < 0$$

$$y(t)=W-[-t^2+2tW-W^2]/[2W] \text{ para } 0 < t < W$$

$$y(t)=W \text{ para } t > W$$

Convolução no Tempo e na Frequência:

A propriedade da convolução no tempo estabelece que, se

$$\begin{array}{ccc} x_1(t) & \xleftrightarrow{\text{e}} & X_1(\omega) \\ & & \\ x_2(t) & \xleftrightarrow{\text{e}} & X_2(\omega) \end{array} \quad (2-34)$$

então

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{\text{e}} Y(\omega) = X_1(\omega) \times X_2(\omega) \quad (2-35)$$

No domínio da frequência, temos que, se:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega) \quad (2-36)$$

então

$$y(t) = x_1(t) \times x_2(t) \quad (2-37)$$

Resumindo

Domínio do tempo	Domínio da frequência	
$x_1(t) * x_2(t)$	\longleftrightarrow	$X_1(\omega) \times X_2(\omega)$
$x_1(t) \times x_2(t)$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$

(2-38)

EXERCÍCIOS – Sequência K

K-2.1-Um sistema tem resposta ao impulso de Dirac igual a $h(t)$. Se a ele é aplicado um sinal de entrada $g(t)$, determine o espectro do sinal de saída, $Y(\omega)$, em função do espectro do sinal de entrada, $G(\omega)$ e da transformada $H(\omega)$ de $h(t)$. Sabe-se que $y(t)=g(t) * h(t)$. Comente o resultado.

R: $Y(\omega)=H(\omega).G(\omega)$

K-2.2-Utilizando a propriedade da convolução no tempo demonstre a comutatividade da convolução entre $x_1(t)$ e $x_2(t)$ [isto é, $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$].

K-2.3-Utilizando a propriedade adequada, calcule pela convolução a transformada de Fourier do pulso triangular [$A \wedge_{\tau}$].

R: $A\tau \text{sinc}^2(\omega\tau/2\pi)$.

K-2.4-Deduza uma fórmula geral para a convolução entre dois pulsos retangulares centrados na origem, não necessariamente iguais. Faça o gráfico do resultado. (Veja o resultado do Exercício K-2.1).

R: Um trapézio simétrico em relação ao eixo vertical, centrado na origem, cuja altura vale $A_1 A_2 \tau_2$, o lado superior vale $\tau_1 - \tau_2$ e a base vale $\tau_1 + \tau_2$.

K-2.5-Analise, a partir da propriedade da convolução na frequência, o espectro de densidade de frequências de $x^2(t)$. Comente o resultado obtido, principalmente se $x(t)$ for um sinal limitado em frequência [isto é, se $X(\omega)=0$ além de um certo valor para ω].

K-2.6-Utilizando a definição de convolução expressa em (2-31) e considerando $x_1(t)=\delta(t)$, obtenha a convolução $x_1(t) * x_2(t)$, sendo $x_2(t)$ uma função qualquer. Dê uma interpretação gráfica ao resultado.

K-2.7-Refaça o Exercício K-2.6 utilizando a análise no domínio da frequência aplicada às funções impulso.

K-2.8-Utilize o Exercício K-2.6 para obter a convolução $y(t)=\delta(t-T) * x_2(t)$, sendo $x_2(t)$ um sinal qualquer.

K-2.9-Repita o Exercício K-2.8 utilizando expressões no domínio da frequência.

K-2.10-Utilizando a convolução de uma função qualquer $x(t)$ com uma função degrau unitário, calcule a transformada da $\int x(t)dt$.

R:

$$\int_{-\infty}^t x(t)dt \leftarrow \rightarrow \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega) \quad (2-39)$$

Sistemas Lineares-Função de Transferência

No nosso estudo consideraremos principalmente sistemas lineares e invariantes no tempo (abreviadamente sistemas LTI).

Esses sistemas são teóricos, e seu modelo matemático representa uma aproximação do que ocorre na natureza, com os sistemas reais. Muitas vezes, o modelamento de que necessitamos para representar um comportamento físico de um sistema pode ser feito através de sistemas LTI, que são relativamente simples.

A característica básica de um sistema LTI é que a entrada e a saída são relacionadas por uma equação integro diferencial com coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} \dots + a_{-1} \int_{-\infty}^t x(t) dt + a_0 x(t) + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + \dots = \\ \dots + b_{-1} \int_{-\infty}^t y(t) dt + b_0 y(t) + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots \end{aligned} \quad (2-40)$$

onde a_i são os coeficientes relacionados à entrada $x(t)$ e b_i os coeficientes relacionados à saída $y(t)$.

Definindo-se o operador p como:

$$p^m[x(t)] = \frac{d^m x(t)}{dt^m} \quad (2-41)$$

e

$$p^{-m}[x(t)] = \int_{-\infty}^{t_m} \dots \int_{-\infty}^{t_2} \int_{-\infty}^{t_1} x(t) dt_1 dt_2 \dots dt_m \quad (2-42)$$

Então, fica:

$$\sum_m a_m p^m[x(t)] = \sum_n b_n p^n[y(t)] \quad (2-43)$$

Fazendo-se a transformada de Fourier para ambos os membros da equação acima tem-se:

$$[\sum_m a_m (j\omega)^m] X(\omega) = [\sum_n b_n (j\omega)^n] Y(\omega) \quad (2-44)$$

Daí, define-se a função de transferência $H(\omega)$ como sendo a razão entre a

transformada da saída e a transformada da entrada, o que para um sistema LTI resulta na divisão de dois polinômios em ω , de coeficientes constantes e onde $m < n$.

Se $m \geq n$, sempre se pode dividir o numerador pelo denominador (N/D), obtendo-se um resto R e um quociente Q , ambos os polinômios em ω , onde $N/D = Q + R/D$ e a ordem de $R <$ ordem de D .

Desta forma, continua-se a ter a divisão de dois polinômios, R/D , onde a ordem de R é menor que a ordem de D .

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\left[\sum_m a_m (j\omega)^m \right]}{\left[\sum_n b_n (j\omega)^n \right]} \quad (2-45)$$

A função de transferência $H(\omega)$ tem as mesmas características de uma transformada de Fourier conforme definido pelas Fórmulas (2-23) e (2-24).

Aplicando-se as equações (2-38) à equação (2-45) temos que:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (2-46)$$

Com aplicação da equação (2-46), é possível obter-se a saída $y(t)$ a partir da entrada $x(t)$, através de uma convolução no domínio do tempo. Por isso $h(t)$ é chamada *equação característica* do sistema LTI.

Assim, um sistema LTI pode ser representado no domínio da frequência pela sua função de transferência $H(\omega)$ ou no domínio do tempo por sua equação característica $h(t)$, sendo que $H(\omega)$ e $h(t)$ formam um par de transformadas de Fourier:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2-47)$$

e

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2-48)$$

A transformada de Laplace $H(s)$ é também usada na teoria de circuitos elétricos para representar um função de transferência onde s é um complexo, $s = \sigma + j\omega$. Para obter $H(\omega)$ podemos recalcular $H(s)$ para $s=j\omega$, um imaginário puro, desde que $h(t)$ seja causal, o que é o caso da maioria dos sistemas LTI práticos.

EXERCÍCIOS – Sequência L

L-2.1-Um sistema LTI é excitado [função de entrada $x(t)$] por uma função impulso unitário $\delta(t)$ [impulso de Dirac]. Obtenha uma resposta geral para a transformada da saída $y(t)$, em termos da função de transferência $H(\omega)$ do sistema.

*Sugestão: Resolva o Exercício I-2.10, e aplique a equação (2-45).

$$R: Y(\omega) = H(\omega).$$

L-2..2-Um sistema LTI é excitado por uma função de entrada $x(t)$, cuja transformada de Fourier é $X(\omega)$. A saída é $y(t)$. Sendo $H(\omega)$ a função de transferência do sistema LTI, estabeleça uma equação geral, no domínio do tempo, relacionando $y(t)$, $x(t)$ e $h(t)$, transformada inversa de $H(\omega)$, e mostre que $h(t)$ é a resposta impulsiva do sistema LTI.

L-2..3- O resultado obtido no Exercício L-2..2 é muito importante. Ele permite determinar, no domínio do tempo, a resposta $y(t)$ de um sistema LTI à qualquer entrada $x(t)$ desde que se conheça ou determine $h(t)$, que é a resposta impulsiva ou equação característica do sistema. No Exercício L-2..2, ela foi deduzida a partir da Equação 2-45, que foi obtida a partir da definição de função de transferência de sistemas LTI. Partindo agora do resultado do Exercício K-2.6, e interpretando a integral de convolução como o limite de um somatório (onde cada termo do somatório é igual a $[x(\tau) \Delta\tau] \delta(t-\tau)$, $\Delta\tau$ tendendo a zero), demonstre o resultado de L-2.2 utilizando o princípio da superposição aplicado a sistemas LTI.

L-2..4-Calcule a resposta no tempo de um sistema LTI à uma entrada $x(t) = e^{j\omega_0 t}$. Utilize a definição de convolução no tempo.

$$R: y(t) = H(\omega_0) e^{j\omega_0 t}.$$

L-2.5-Um sistema LTI tem resposta impulsiva $h(t)$. Sendo $x(t)$ a entrada, obtenha $Y(\omega)$, em função de $X(\omega)$ e $H(\omega)$. Observe o resultado de L-2 e aplique o teorema da convolução no tempo.

$$R: Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

L-2.6- Calcule a resposta de um sistema LTI à um sinal $x(t) = \cos \omega_0 t$. Utilize a fórmula de Euler para o cosseno e o Exercício L-2..4. Interprete o resultado.

R: $y(t) = |H(\omega_0)| \cos [\omega_0 t + \theta(\omega_0)]$

L-2.7-Estabeleça um método prático para determinar experimentalmente, em laboratório, uma função de transferência de um sistema LTI. Suponha que estão disponíveis um gerador de sinais senoidais, um osciloscópio de dois canais e uma carga resistiva de valor adequado.

L-2.8-Para um circuito elétrico, a função de transferência pode ser obtida conhecendo-se sua topologia e as características elétricas de seus componentes, usando-se ferramentas de cálculo apropriadas. Obtenha a função de transferência para a rede RC conforme a Figura 2-24; forneça também os gráficos bilaterais de módulo e fase.

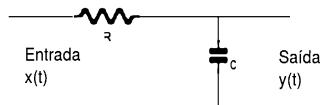


Figura 2-24

R:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Sendo $H(\omega)$ complexo, possui módulo e fase, dados respectivamente por:

$$|H(\omega)| = \frac{a}{\sqrt{|a^2 + \omega^2|}} \quad a = \frac{1}{RC}$$

e

$$\theta(\omega) = -\text{arc tg} \frac{\omega}{a}$$

L-2.9-Usando a transformada inversa da função de transferência, calcule a resposta impulsiva do circuito RC da Figura 2-24.

R:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

$u(t)$ é a função degrau unitário (veja Exercício J-2.2)

L-2.10-Calcule a saída $y(t)$ do circuito RC da Figura 2-24 quando a entrada $x(t)$ for uma função degrau unitário.

R:

$$\text{Se } x(t) = u(t) \text{ (função degrau) então}$$

$$y(t) = [1 - e^{\frac{-t}{RC}}]u(t)$$

L-2.11-No circuito RC da Figura 2-24, $R = 1 \text{ k}\Omega$ e $C = 1 \mu\text{F}$. Calcule $y(t)$ se $x(t) = 10\cos(2\pi \times 10^6 t)$. Interprete o resultado.

R:

$$y(t) = 1,6 \times 10^{-3} \cos(2\pi \times 10^6 t - 90^\circ)$$

L-2.12-No circuito RC da Figura 2-24, $x(t)$ é um pulso retangular definido pela fórmula $x(t) = A\Pi[(t-\tau/2)/\tau]$ (ver Exercício H-2.2). Calcule $y(t)$ e faça gráficos de $y(t)$ para $\tau/RC \gg 1$ e $\tau/RC \ll 1$. Interprete os resultados.

R:

$$y(t) = 0 \quad \text{para } t < 0$$

$$y(t) = A[1 - e^{-\frac{t}{RC}}] \quad \text{para } 0 < t < \tau$$

$$y(t) = A[1 - e^{-\frac{\tau}{RC}}]e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}} \quad \text{para } t > \tau$$

L-2.13-Obtenha a função de transferência e a resposta impulsiva do sistema conhecido como segurador de ordem zero (Zero Order Hold – ZOH) apresentado na Figura 2-25.

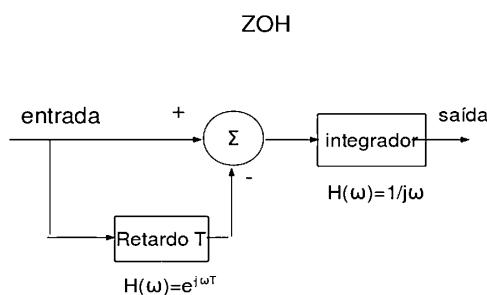


Figura 2-25

Faça os gráficos correspondentes e interprete.

R:

$$H_{eq}(\omega) = T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) e^{-j\frac{\omega T}{2}}$$

$$h_{eq}(t) = \prod \left(\frac{t - \frac{T}{2}}{\frac{T}{2}} \right)$$

L-2.14-Um sistema de transmissão apresenta o efeito de multicaminho, que ocorre quando o sinal chega ao receptor por dois ou mais caminhos com retardos diferentes. Considerando o caso de apenas dois caminhos, o sistema em questão pode ser representado pelo diagrama da Figura-2-26.

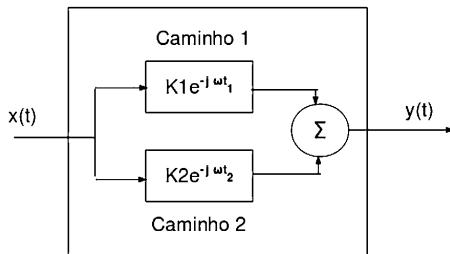


Figura 2-26

Obtenha o módulo e a fase da função de transferência deste sistema e comente o resultado obtido.

Sugestão:

Faça gráficos aproximados de $|H(\omega)|$ e $\theta(\omega)$. Considere $K_1=K_2=1$, e os gráficos vão desde $-\pi/(t_2-t_1)$ a $+\pi/(t_2-t_1)$. Comente sobre os gráficos obtidos.

R:

$$|H(\omega)| = K_1 \sqrt{1 + 2 \frac{K_2}{K_1} \cos \omega(t_2 - t_1) + \left(\frac{K_2}{K_1} \right)^2}$$

$$\theta(\omega) = -\omega t_1 - \operatorname{arctg} \frac{\frac{K_2}{K_1} \sin \omega(t_2 - t_1)}{1 + \frac{K_2}{K_1} \cos \omega(t_2 - t_1)}$$

Transmissão sem Distorção

Um sinal $x(t)$ pode ser transmitido através de um sistema LTI sem sofrer distorção. Isto ocorre se a saída $y(t)$ for uma réplica da entrada $x(t)$. Assim, se $y(t)=Kx(t-t_0)$, sendo K e t_0 constantes, admite-se que o sistema LTI transmitiu sem distorções o sinal de entrada $x(t)$. Desta forma, para que o sinal de saída seja uma réplica do sinal de entrada, caracterizando a transmissão sem distorção, admite-se que possa existir um fator de escala K e um fator de tempo, ou retardo de tempo, t_0 , entre a saída $y(t)$ e a entrada $x(t)$ aplicada ao sistema.

Função de transferência para transmissão sem distorção:

Se

$$y(t)=Kx(t-t_0) \quad (2-49)$$

Então

$$Y(\omega)=KX(\omega)e^{-j\omega t_0} \quad (2-50)$$

Portanto, a função de transferência de um sistema LTI que transmite sem distorção, a função de transferência ideal, será:

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=ke^{-j\omega t_0} \quad (2-51)$$

Desta forma, para transmissão sem distorção, a característica da amplitude da função de transferência deve ser constante, e a característica de fase deve ser linear, isto é, da forma $-\omega t_0$. Vemos que a inclinação da característica de fase é igual ao tempo de retardo introduzido pelo sistema ($-t_0$).

Assim, o retardo deve ser constante e independente da frequência.

Não confundir com a fase introduzida, que deve ser proporcional a ω . Na verdade, quanto maior a frequência, mais negativa é a fase introduzida, para que seja obedecida a característica $-\omega t_0$.

Largura de Banda

Significa a largura da faixa de frequências em que o sinal tem eficácia, ou seja, a diferença entre a maior frequência com amplitude significativa e a menor frequência com amplitude significativa do espectro do sinal, normalmente designada por B (B geralmente expressa em Hz).

Na prática, existirá um valor de B associado a um determinado critério, em função da aplicação.

Por exemplo, na transmissão de sinais de voz, em telefonia fixa, a UIT (União Internacional de Telecomunicações, da qual o Brasil faz parte), cita que alguns países acharam necessário prover pelo menos 20 a 26dB de rejeição, na codificação de frequências de voz na faixa de 15 a 60Hz.

Na faixa superior do espectro de voz, acima de 4.6 KHz, o nível de atenuação recomendado é superior a 25dB.

Então, convencionou-se considerar que o sinal de voz em telefonia ocupa a faixa de 300 a 3400Hz (B=3100Hz).

Na prática, para simplificar o raciocínio em várias situações, utiliza-se um B nominal de 4KHz para o sinal telefônico (espectro unilateral de 0 a 4KHz).

Na transmissão de sinais de voz em comunicações militares, onde o mais importante é a mínima ocupação espectral e o reconhecimento da mensagem, não a identificação da voz do elemento falante, a faixa do sinal é mais reduzida que na telefonia comercial fixa, ficando em torno de 500Hz a 2500Hz (B=2000Hz).

Para outros tipos de sinais, as características são diversas, e também os valores adotados de B. Sistemas que recebem sinais já modulados, como repetidores ou receptores de sinais de satélite, caracterizam-se por receber sinais em alta frequência, os quais podem trabalhar com valores máximos e mínimos de f, em valores absolutos, bem maiores do que B.

Por exemplo, no sistema SPADE, usado no satélite INTELSAT IV, um transponder de 36MHz (espécie de repetidor no satélite) tem a capacidade de receber um sinal modulado em FM com uma portadora de 6302MHz e B=45KHz, e retransmiti-lo para a terra em FM com uma portadora 4077MHz e B= 45 khZ (A portadora representa o valor central de frequências que tem largura de banda B).

Assim, vemos que um sinal, com um banda B=45KHz, pode estar localizado em

valores absolutos de frequência muito diferentes.

A largura de banda B pode também estar associada a um sistema LTI.

Os sinais de voz usados na transmissão telefônica na transmissão em AM e em transmissões militares, podem terem sido gerados pela mesma fonte, por exemplo locutores falando em um microfone, e desta forma teriam o mesmo espectro original.

O que os faz terem espectros diferentes, com larguras de banda B diferentes, para cada aplicação, é que eles foram processados por sistemas LTI também diferentes, adequados a cada aplicação.

Esses sistemas LTI especiais recebem o nome de *filtros*.

Associado a um filtro existirá sempre uma largura de banda WHz, que molda o espectro original do sinal aplicado em sua entrada, gerando o sinal de saída com largura de banda B=WHz.

Deve-se prestar atenção quanto à convenção que está sendo usada para representar o espectro. O valor de largura de banda, relativo a um sinal ou a um sistema linear pode ser bem diferente, se referido a um espectro unilateral ou bilateral.

Filtros Ideais

São sistemas LTI que possuem características de transmissão específicas dentro da faixa de frequências que constitui sua largura de banda W . Fora desta faixa, eles eliminam todo o sinal. Admitem 3 classes principais: 1-Filtro passa baixa (FPB), 2-Filtro passa alta (FPA) e 3-Filtro passa faixa (FPF).

1-Filtro passa baixa (FPB)

A Figura 2-27 apresenta uma visão da função de transferência do FPB (forma bilateral). Como a frequência de corte inferior (ω_{ci}) é igual a $-\omega_c$, e a superior (ω_{cs}) é igual a $+\omega_c$, só existe um valor de frequência de corte que é ω_c , sendo que $W=\omega_c/2\pi$ corresponde à largura de banda física, em Hz, considerando apenas a parte positiva do espectro.

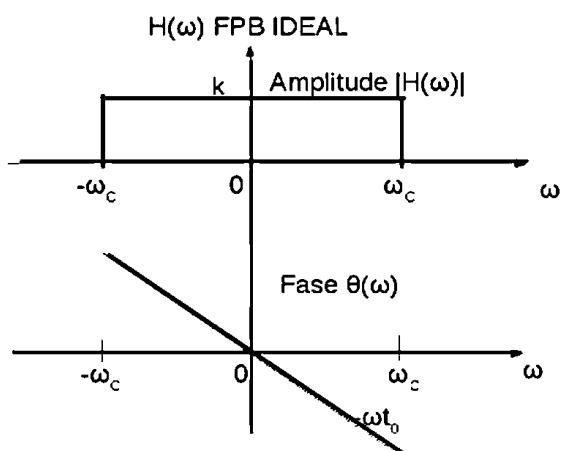


Figura 2-27

Observe que a existência da parte negativa do espectro, é matematicamente necessária para que a função $H_{FPB}(\omega)$ seja uma função real, pois estamos usando o espectro bilateral da transformada de Fourier.

A equação característica de qualquer sistema LTI, inclusive um FPB, é a transformada inversa da função de transferência $H(\omega)$ do sistema. Assim, temos:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \prod \left(\frac{\omega}{4\pi W} e^{-j\omega t_0} \right) \right\}$$

Portanto, utilizando as propriedades da simetria e do desvio no tempo:

$$h(t) = 2W \text{sinc}[2W(t-t_0)]$$

Este resultado é mostrado na Figura 2-28, para $t_0=1$ s e $B=2$ Hz.

Conforme já foi definido no Exercício E-2.3, a função $\text{sinc}(x)=[\text{sen}(\pi x)]/(\pi x)$. No caso, temos o argumento $x=2W(t-t_0)$. Portanto, ela se anula para valores do argumento, isto é, de $x=k$ ($k=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$). O valor máximo ocorre em $x=0$, ou seja, em $t=2B(t-t_0)=0$, isto é, em $t=t_0=1$ s, quando $\text{sinc}(x)=1$, logo $h(1)=2W=4$. Os zeros ocorrerão em $t=2W(t-1)=k=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, ou seja, em $t=1.25, 0.75, 1.5, 0.5$, etc.

Portanto, a distância entre os dois primeiros zeros, a partir do máximo, é $1/W=0.5$ s.

Conforme verificamos, a função $h(t)$ tem existência de $-\infty$ a $+\infty$.

O impulso só é aplicado em $t=0$. No entanto, a resposta do sistema ocorre desde antes, para valores de $t < 0$. É como se o sistema já soubesse que o impulso vai ser aplicado, e começa a responder desde antes, o que fisicamente é impossível de ocorrer.

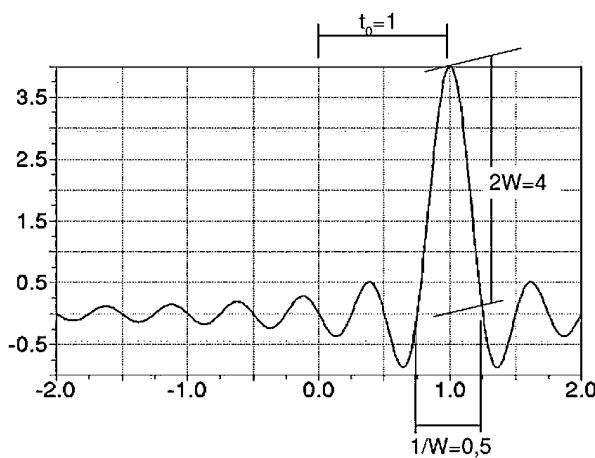


Figura 2-28

Neste caso, dizemos que a resposta do sistema é *antecipatória*, porque ocorre antes da excitação ser aplicada.

Formalmente, sistemas físicos são excitados a partir de $t=0$, e sua resposta também ocorre para $t \geq 0$, sendo chamados sistemas *causais* (plural de causal).

A largura de banda W de um FPB ideal é $\omega_c/2\pi$, e se diz que sua faixa de frequências de passagem é de 0 à W Hz (falando em termos de frequência como uma coisa física, ou seja, falando em termos do espectro unilateral).

Podemos considerar também o espectro bilateral. Neste caso, como já vimos, o conceito de frequência adquire o aspecto matemático de uma variável pertencente aos números reais e portanto pode assumir valores positivos e negativos.

Conforme a relação de Euler, para gerar uma função real é preciso um par de fasores girando em sentidos opostos, ou seja, todo sinal real possui matematicamente um espectro bilateral, no qual o espectro das amplitudes é sempre uma função par, e o espectro de fases é sempre uma função ímpar da variável real, a frequência.

Neste caso, podemos dizer que a largura de banda de um FPB ideal é $2\omega_c$, em rad/s, ou ω_c/π em Hz. Devemos sempre ser claros quando estamos nos referindo ao espectro unilateral ou bilateral.

Para as frequências dentro da faixa de passagem do filtro, isto é, para as frequências entre $-\omega_c$ e $+\omega_c$, o filtro se comporta como um sistema LTI sem distorção, conforme pode se comprovar pela Figura 2.27.

Isto significa que um sinal com faixa de frequências entre $-\omega_c$ e $+\omega_c$, passará inalterado pelo filtro, apenas sofrerá um retardo no tempo, igual a t_0 .

Portanto, um FPB pode ser considerado um dispositivo limitador da banda do sinal. Se o sinal aplicado ao filtro tiver frequências com $|\omega| > |\omega_c|$, elas serão eliminadas pelo filtro, e na saída do mesmo a frequência máxima do sinal terá módulo igual a ω_c .

2-Filtro passa alta (FPA)

A Figura 2-29 apresenta o gráfico de função de transferência do FPA. Conforme podemos observar, o filtro elimina todas as frequências abaixo da frequência de corte ω_c . As frequências acima de ω_c são transmitidas sem distorção ao passarem pelo filtro.

A frequência de corte é também ω_c . Porém, o FPA funciona ao contrário do FPB.

Para o FPA, o valor $W=\omega_c/2\pi$ tem significado diferente do FPB. Enquanto para este W é o valor da largura de banda, em Hz, para o FPA W é infinita.

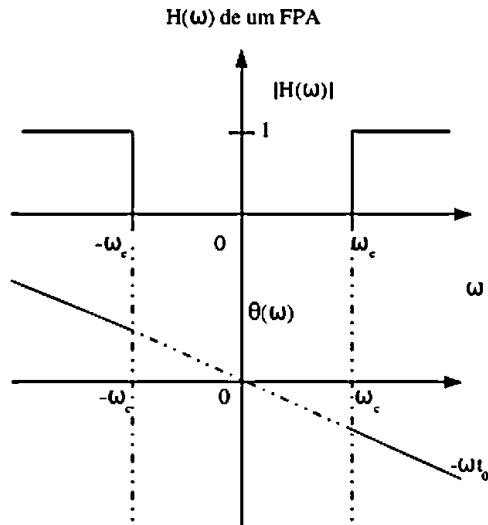


Figura 2-29

Para as frequências dentro da faixa de passagem do filtro, isto é, para as frequências abaixo de $-\omega_c$ e acima de $+\omega_c$, o filtro se comporta como um sistema LTI sem distorção, conforme pode se comprovar pela Figura 2.29. I

sto significa que um sinal com faixa de frequências abaixo de $-\omega_c$ e acima de $+\omega_c$, passará inalterado pelo filtro, apenas sofrerá um retardamento no tempo, igual a t_0 .

Portanto, um FPA pode ser considerado um dispositivo eliminador de frequências baixas do sinal. Se o sinal aplicado ao filtro tiver frequências com $|\omega|<|\omega_c|$, elas serão eliminadas pelo filtro, e na saída do mesmo a frequência mínima do sinal terá módulo igual a ω_c .

O FPA ideal, assim como o FPB, também não pode ser construído fisicamente, pois apresenta uma resposta impulsiva não causal, e serve apenas como modelo matemático simplificador. A resposta impulsiva é requisitada no Exercício M-2.10.

3-Filtro passa faixa (FPF)

O FPF, como o nome indica, permite a passagem livre de apenas uma faixa de frequências. Possui duas frequências de corte, ω_{ci} (frequência de corte inferior) e ω_{cs} (frequência de corte superior). Naturalmente, $\omega_{cs} > \omega_{ci}$ e $W = (\omega_{cs} - \omega_{ci})/2\pi$. A

Figura 2-30 apresenta o espectro bilateral do FPF, $H_{\text{FPF}}(\omega)$.

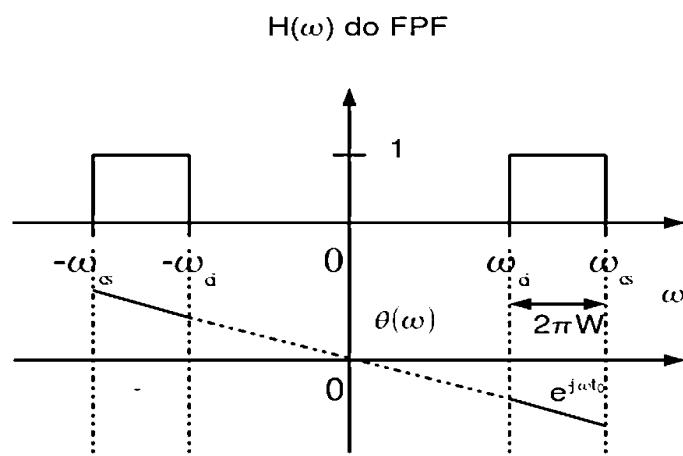


Figura 2-30

EXERCÍCIOS – Sequência M

M-2.1-Considere o sinal $x(t)=10\cos(\ln+\pi/5)+5\sin(2\ln-\pi/4) + \cos(6\ln+\pi/3)$ sendo aplicado na entrada de um FPB ideal com $\omega_c=4\pi$ e $t_0=1$ s. Determine a expressão do sinal $y(t)$ na saída do filtro e trace as formas de onda de $x(t)$ e $y(t)$. Considere t variando de -5 a 5 s, com um intervalo mínimo de 0.1 s.

M-2.2-Trace a resposta impulsiva $h(t)$ para o FPB do Exercício M-2.1. Considere t de -5 a +5 s, com um intervalo mínimo de 0.1 s.

M-2.3-Conforme sabemos, $y(t)=x(t) * h(t)$. Comprove esta relação, obtendo a referida convolução para o caso do Exercício M-2.1.

Sugestão: Elabore uma rotina computacional na linguagem de sua preferência, e utilize como entrada os vetores correspondentes à $x(t)$ e $h(t)$, para t de -5 a +5 s com intervalo de 0.099 s (para evitar divisão por zero). A saída deve ser comparada com $y(t)$ obtido em M-2.1.

M-2.4-De acordo com o Exercício H-2.2, uma função retangular em ω de amplitude A , centrada em ω_0 e de largura $2\omega_c$ se escreveria $A\Pi[(\omega-\omega_0)/2\omega_c]$. Daí, escreva a expressão da função de transferência de um FPB ideal com retardo t_0 . Justifique sua resposta.

$$R: H(\omega) = \Pi[(\omega/2\omega_c)] e^{-j\omega t_0}$$

M-2.5-Sabendo que $W=\omega_c/2\pi$, e também que $B \leq \omega_c/2\pi$ ou $\geq \omega_c/2\pi$, onde ω_c é a frequência de corte do FPB, interprete o significado de B e W e deduza a expressão de $h(t)$:

$$h(t)=2Wsinc[2W(t-t_0)]$$

$h(t)$ é a resposta impulsiva do FPB.

M-2.6-Trace o gráfico do pulso sinc $x(t)=Asinc(2Bt)$. Considere 2 conjuntos de parâmetros: $A1=1$; $B1=2$ e $A2=2$; $B2=4$. A transformada de Fourier do pulso é $X(\omega)=(A/2B)\Pi(\omega/4\pi B)$. Deduza esta expressão e calcule $X(\omega)$ para cada conjunto $[A1,B1]$ e $[A2,B2]$. Trace os gráficos correspondentes e compare com os gráficos dos pulsos sinc. Estabeleça por sua conta as escalas das ordenadas e das abscissas mais

adequadas.

M-2.7-Considere o pulso sinc do Exercício M-2.6 sendo aplicado a um FPB ideal com largura de faixa W Hz ($W=\omega_c/2\pi$), ganho unitário e retardo zero. Considere duas situações: $B>W$ e $B<W$. Para cada uma das situações, calcule a expressão para o sinal de saída $y(t)$. Estabeleça comparações entre os dois casos, anotando o que acontece com a amplitude e a duração no tempo do pulso de entrada nos dois casos.

M-2.8-Considere uma função degrau unitário sendo aplicado à entrada de um FPB ideal de largura de banda W e $t_0=0$. Calcule numericamente a saída $y(t)$ do filtro para $-4/W < t < 4/W$. Utilize o software de sua preferência, mas considere um número suficiente de amostras dos vetores de entrada para que se obtenha um gráfico claro e bem preciso. Discuta a precisão do sinal de saída em função do incremento utilizado nas variáveis e do comprimento dos vetores.

M-2.9-Um FPB tem uma função de transferência dada por:

$$H(\omega) = \begin{cases} (1+k \cos T\omega) e^{-j\omega t_0} & \text{para } |\omega| < 2\pi W \\ 0 & \text{para } |\omega| > 2\pi W \end{cases}$$

conforme mostra a Figura 2-

31. Esta função não tem módulo constante na faixa de passagem do filtro, apresentando uma distorção linear em atenuação.

Um pulso $g(t)$, também limitado em banda à BHz, $B=W$, é aplicado à entrada deste filtro, conforme mostra a Figura 2-32. Ache a saída $r(t)$. Trace o gráfico resultante considerando $k=0,1$; $t_0=0,5$ s; $T=0,1$ s, e $W=1.5$ Hz.

$$R: r(t)=g(t-t_0)+(k/2)g(t-t_0+T)+(k/2)g(t-t_0-T)$$

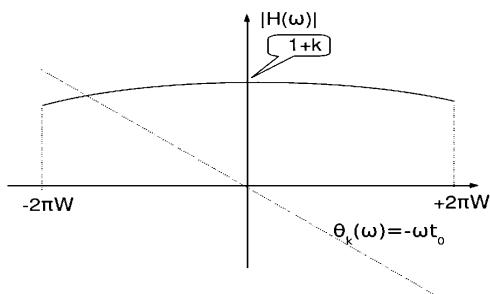


Figura 2-31

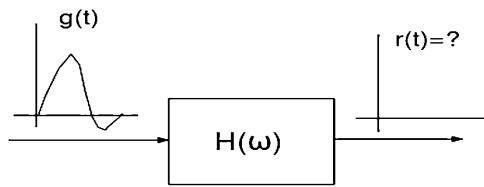


Figura 2-32

M-2.10-Considerando que a função de transferência de um FPA, conforme vemos na Figura 2.29, é igual a 0 para $\omega < \omega_c$ e igual a $e^{-j\omega t_0}$ para $\omega > \omega_c$, deduza a expressão de $H(\omega)$ do FPA baseado na resposta do Exercício M-2.4.

R:

$$H(\omega) = [1 - \Pi\left(\frac{\omega}{4\pi W}\right)] e^{-j\omega t_0}$$

M-2.11-Deduza a expressão da resposta impulsiva $h(t)$ do FPA mostrado na Figura 2-29:

R:

$$h(t) = \delta(t - t_0) - 2W \text{sinc}[2W(t - t_0)]$$

M-2.12-Defina o que seria um Filtro Elimina Faixa. Escreva uma possível função de transferência e função característica para esse filtro. Apresente também algumas aplicações.

M-2.13-Mostre que um Filtro Elimina Faixa pode ser composto pela associação em série, ou cascata de um FPB e um FPA.

Filtros Fisicamente Realizáveis

Um filtro fisicamente realizável deve ser causal. Isto significa que um filtro fisicamente realizável deve ter $h(t)=0$ para $t<0$. [$h(t)$ é a resposta do filtro ao impulso unitário]. A função de transferência $H(\omega)$ é transformada de Fourier de $h(t)$.

Pode ser demonstrado que $h(t)$ causal implica em que $|H(\omega)|$ não pode ser zero, qualquer que seja o intervalo de frequências considerado. Desta forma, um filtro fisicamente realizável sempre permitirá a transferência de sinais da entrada para a saída.

O que acontece é que existe uma banda de frequências, chamada banda de passagem do filtro, em que a transferência é feita quase sem perdas, às vezes até com um pouco de ganho, enquanto que fora da banda de passagem do filtro esta transferência é muito atenuada.

No filtro ideal, $H(\omega)$ tem características de transmissão sem distorção dentro da banda de passagem, e se anula completamente fora desta banda. Na frequência de corte, há uma descontinuidade, pois a característica de corte é vertical. De um lado, $|H(\omega)|=1$, e do outro, $|H(\omega)|=0$.

Em um filtro fisicamente realizável isso não pode acontecer, a curva de corte tem uma característica monotônica, sendo sempre uma curva crescente ou decrescente com ω . Conforme a complexidade e o tipo de construção do filtro, essa característica pode ser mais ou menos inclinada.

Também dentro da banda de passagem do filtro, a característica de fase não é ideal, portanto a característica de transferência tenta se aproximar de uma transmissão sem distorção.

De um modo geral, deve existir uma troca entre a inclinação da curva de corte e a característica de fase; quanto maior a inclinação, mais distante do ideal é a fase, e vice-versa (a fase ideal tem uma relação linear com ω , ou seja, $-\omega t_0$, sendo t_0 o retardo de transmissão através do filtro).

Outro ponto a considerar é a atenuação fora da banda de passagem, ou a chamada atenuação na banda de rejeição do filtro. Como vimos, para um filtro fisicamente realizável, $|H(\omega)|$ nunca pode ser completamente anulada. Portanto, na banda de rejeição, $|H(\omega)|$ terá sempre um valor residual, ainda que muito baixo. Poderá apresentar variações significativas, afastando-se bastante de uma

característica de transferência ideal, porém sempre será menor que o valor na banda de passagem.

É comum a transferência através do filtro ser expressa em termos da potência média dos sinais na entrada e na saída do filtro. Neste caso, é usual se expressar a relação entre a potência média da saída pela potência média da entrada em dB.

Como $|H(\omega)| = |Y(\omega)|/|X(\omega)|$,

$$|H(\omega)|^2 = \frac{|Y(\omega)|^2/R_{\text{saída}}}{|X(\omega)|^2/R_{\text{entrada}}} \quad (2-52)$$

Portanto, o valor $|H(\omega)|^2$ em dB pode ser dado por

$$|H(\omega)|^2 (\text{dB}) = 10 \log_{10} \left(\frac{|Y(\omega)|^2/R_{\text{saída}}}{|X(\omega)|^2/R_{\text{entrada}}} \right) \quad (2-53)$$

Finalmente, para um filtro fisicamente realizável, devemos considerar que a característica da curva de corte não pode ser perfeitamente vertical, como um filtro ideal.

A inclinação pode ser dada pela diferença em frequência correspondendo a determinados valores de atenuação, em dB.

Largura de banda W de filtros fisicamente realizáveis

Um filtro fisicamente realizável pode ter características de FPB, FPF e FPA. Se for um FPB, a curva de corte é decrescente, no sentido de que o ganho na faixa de passagem do filtro decresce com o aumento de ω , durante o corte. Se for um FPA, a curva é crescente, no sentido de que o ganho vai aumentando com ω durante o corte. Se for um FPF, possui duas curvas de corte, uma crescente e outra decrescente.

A frequência de corte é definida estabelecendo-se pontos específicos da curva de corte. Um ponto específico muito usado é o ponto de -3dB. Neste ponto, a potência nominal de saída é $1/2$ da potência nominal na entrada do filtro, o que conforme a Equação 2-53 corresponde a 3dB de atenuação, ou seja, um ponto de -3dB na curva de corte.

Como exemplo, consideremos um FPB, cujo módulo do quadrado da função de transferência aparece na Figura 2-33.

Neste exemplo, o patamar de atenuação ocorre em -7dB, e o ponto de meia potência, de -3dB, determina a frequência de corte ω_c e a largura de banda $W=\omega_c/2\pi$.

Se os sinais de entrada e saída forem senoidais, o que é muito comum em procedimentos de teste, a potência média destes sinais é dada por $A^2/2$, onde A é a amplitude máxima destes sinais. Portanto, para a potência decrescer à metade, o valor eficaz decresce de $0,707 = \sqrt{2}$.

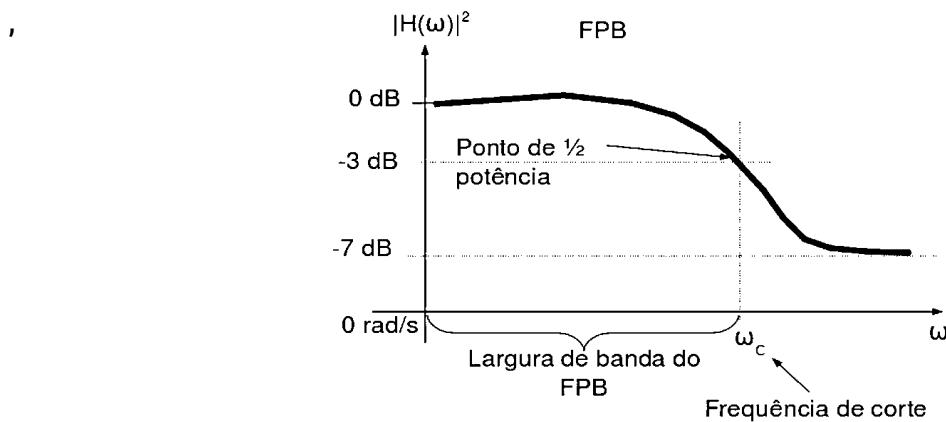


Figura 2-33

Assim como foram utilizados os pontos de -3dB para definir a LB, poderiam ter sido empregados pontos de -10dB, ou -30dB, ou algum outro critério a ser definido. Desta forma, antes de falarmos em LB de um filtro fisicamente realizável, devemos definir qual critério será utilizado para definição de sua LB.

Esta definição de LB pode também ser aplicada aos sinais na entrada do filtro e na saída do filtro, fixando desta forma o valor de B.

Geralmente, critérios equivalentes são empregados para definição da LB W do filtro e B dos sinais de entrada e saída, de modo que $B=W$ nos pontos de entrada e saída do filtro.

Filtro passa baixa RC

A Figura 2-24 apresenta um circuito RC que pode ser considerado um filtro passa baixa fisicamente realizável. Este é um filtro simples, mas bastante utilizado, em

várias aplicações.

Conforme o resultado do Exercício L-2.8,

$$|H(\omega)| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \quad a = \frac{1}{RC}$$

e

$$\theta(\omega) = -\arctg \frac{\omega}{a}$$

As funções derivadas das fórmulas acima devem ser traçadas no Exercício L-2.8.

Entretanto, das fórmulas acima, verifica-se que para $\omega=0$, $\log_{10} |H(\omega)| = 0$. Este é o ponto máximo da curva de atenuação.

Para $\omega=a$, $10 \log_{10} |H(\omega)|^2 = -3$

Portanto, em $\omega=a$, temos um ponto de meia potência. Sendo um ponto característico do FPB RC, podemos dizer que para este filtro a largura de banda $W=a/2\pi Hz$, sabendo que $\omega_c=a=1/RC \text{ rad/s}$

RC é chamado a constante de tempo do filtro.

EXERCÍCIOS – Sequência N

N-2.1-Calcule a função de transferência do filtro passa faixa RLC da Figura 2-34, considerando como sinal de entrada a corrente $x(t)$ e como sinal de saída a tensão $y(t)$.

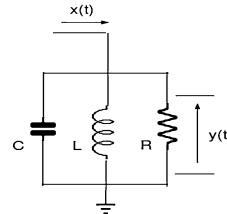


Figura 2-34

R: (Segundo Close):

$$H(\omega) = \frac{R}{1 + jRC \left(\frac{\omega^2 - \frac{1}{LC}}{\omega} \right)}$$

N-2.2-Supondo que para o Exercício N-2.1 , sejam definidos

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

e

$$Q = \frac{R}{\omega_R L} = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

sendo

ω_R – frequência de ressonância do filtro Q – fator de mérito ou fator Q do filtro

Calcule $H(\omega)$, $|H(\omega)|$ e $\theta(\omega)$ em função de ω_R e Q .

R:

$$|H(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{1+Q^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_R^2}{\omega \times \omega_R} \right)^2}}$$

$$\theta(\omega) = -\arctg Q \left(\frac{\omega^2 - \omega_R^2}{\omega \times \omega_R} \right)$$

N-2.3- Trace a curva para o lado positivo do espectro bilateral $|H(\omega)|$ do Exercício N-2.2, identificando seu valor máximo, e em qual frequência ele ocorre. Chamando ω_1 e ω_2 as frequências de meia potência do filtro, ou seja, quando $|H(\omega)|^2 = |H_{\max}(\omega)|^2/2$, calcule-as e a largura de banda W de meia potência do filtro. Qual o papel de Q?

R:

$$\omega_2 = \omega_R \left(1 + \frac{1}{2Q}\right)$$

$$\omega_1 = \omega_R \left(1 - \frac{1}{2Q}\right)$$

$$W = \frac{\omega_2 - \omega_1}{(2\pi)} = \frac{\omega_R}{(2\pi)Q}$$

N-2.4-Analise a função de transferência equivalente para filtros conectados em série (cascata), em paralelo e em realimentação conforme a Figura 2-35. O objetivo é encontrar o filtro equivalente (F_{eq}) em função dos filtro individuais, tendo evidentemente um F_{eq} para cada estrutura apresentada. É suposto que cada um dos filtros não afeta as características dos demais.

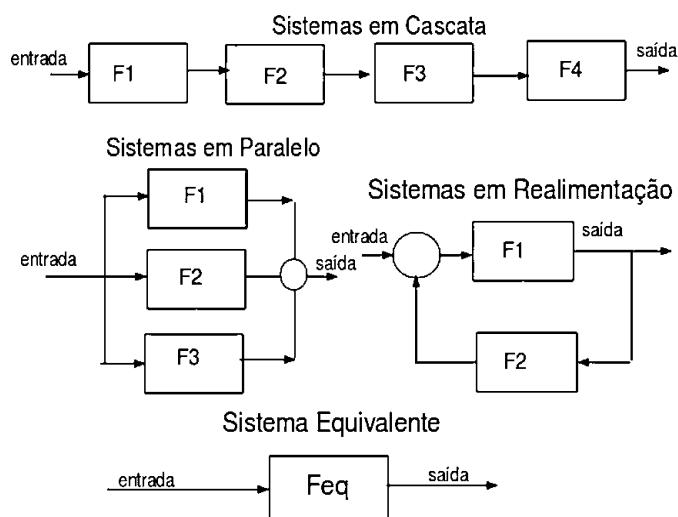


Figura 2-35

N-2.5-Estabeleça a função de transferência de um equalizador⁷ que possa ser

⁷ Um equalizador é um tipo de filtro que é geralmente inserido no caminho de recepção do sinal, de modo que $H_{canal} \cdot H_{equal} = K e^{-j\omega t}$ (ou seja, o equalizador tenta compensar a distorção do canal, de modo que a resposta global seja a de um sistema sem distorção, ao menos na banda do canal).

utilizado para compensar a distorção de amplitude causada pelo efeito de multicaminho do Exercício L-2.14.

R:

$$H_{\text{equal}}(\omega) = \frac{K}{K_1} \frac{e^{-j\omega(t_0-t_1)}}{1 + \frac{K_2}{K_1} e^{-j\omega(t_2-t_1)}}$$

N-2.6-A Figura 2.36 apresenta o esquema básico de um equalizador de linha de retardo com derivações, um filtro transversal, no caso com 3 tomadas. Determine sua função de transferência na banda de passagem do filtro.

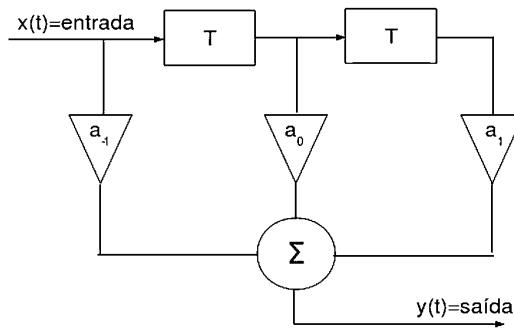


Figura 2-36

R:

$$H_{\text{equal}}(\omega) = (a_{-1}e^{j\omega t} + a_0 + a_1e^{-j\omega T})e^{-j\omega T}$$

N-2.7-Demonstre que o filtro transversal do Exercício N-2.6 pode ser utilizado como equalizador para compensar a distorção de multicaminho apresentada no Exercício L-2.14 e estabeleça valores de a_{-1} , a_0 e a_1 para que isto aconteça.

Sugestão: Utilize o resultado do Exercício N-2.5, fazendo $K=K_1$ e $t_0=t_1$, e utilize a seguinte expansão em série: $1/(1+x)=1-x+x^2-x^3+x^4+\dots$

$$R: a_{-1}=1; \quad a_0=-(K_2/K_1); \quad a_1=(K_2/K_1)^2 \quad e \quad T=t_2-t_1$$

N-2.8-Mostre graficamente que, se $B>W$ na entrada do filtro, então $B=W$ na saída do filtro (FPB ou FPF, naturalmente, pois um FPA tem $W=\infty$).

N-2.9-A Figura 2-37 apresenta o diagrama esquemático de um FPB muito utilizado na prática, chamado filtro Butterworth de 3^a ordem. Considere os

seguintes valores para este circuito:

$$\begin{aligned} R &= 200 \Omega \\ C_1 &= 1/(800\pi W) F \\ C_2 &= 3C_1 \end{aligned}$$

$$L = 400/(3\pi W) H$$

sendo W a largura de banda em Hz, que corresponde aos pontos de -3dB do filtro.

Considerando $W=1000$ Hz, trace o módulo da função de transferência $H(\omega)$ do filtro. Indique os valores em dB de $|H(\omega)|$ para as frequências de 200Hz, 400Hz, 1000Hz, 1200Hz e 2500Hz.

R:	200Hz:	0dB;
	400Hz:	0dB;
	1000Hz:	-3dB
	1200Hz:	-6dB
	2500Hz:	-23,9dB

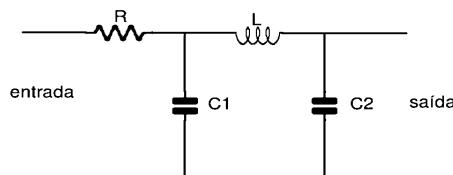


Figura 2-37

N-2.10- Qual o valor aproximado, em unidades lineares, para a atenuação do filtro em 2500Hz? E em 10 KHz?

N-2.11-Trace a resposta impulsiva $h(t)$ do FPB da Figura 2-37.

R:

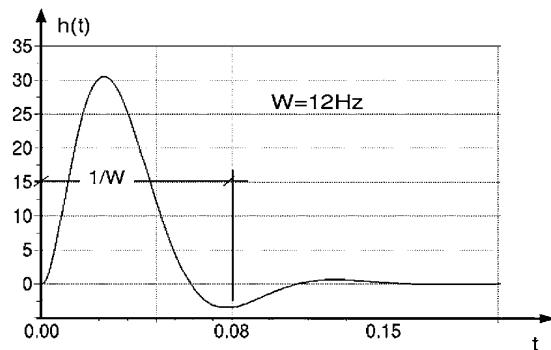


Figura 2-38

Por conveniência a Figura 2-38 foi obtida com os seguintes valores para os elementos do filtro: $W=12\text{Hz}$, $C_1=0,66\mu\text{F}$, $C_2=200\mu\text{F}$, $L=1,7\text{H}$, $R=100\Omega$.

Conforme podemos observar da Figura 2-38, a resposta ao impulso é causal, sendo =0 para $t<0$.

N-2.12-A Figura 2-39 apresenta um diagrama em blocos de um sistema utilizando o FPB da Figura 2-37. Em que condições podemos afirmar que a função de transferência equivalente do sistema é $H_1 H_{\text{FPB}} H_2$?

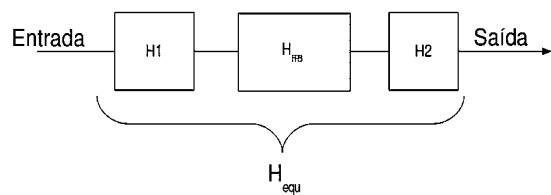


Figura 2-39

N-2.13-Considere um FPB-RC como o da Figura 2-24. Considerando $R=100\Omega$, calcule o valor de C tal que a frequência de corte (-3dB) seja $W=1000\text{Hz}$. Calcule a atenuação, em dB, à 2000Hz. Apresente seus cálculos.

$$\text{R: } 1,6 \mu\text{F}; \quad -7\text{dB}.$$

N-2.14-Ainda para o filtro RC da Figura 2-24, suponha $R=500\Omega$. Para este novo valor de R , calcule o valor de C tal que a frequência de corte (-3dB) continue a ser =1000Hz. Calcule a atenuação, em dB, à 5000Hz. Apresente seus cálculos.

$$\text{R: } 300 \text{ nF}; \quad -14,15\text{dB}.$$

Amostragem

A operação de amostragem é básica na conversão de sinais analógicos em digitais, e vice-versa.

Simplificadamente falando, ela realiza um *recorte* do sinal, transmitindo ou processando apenas determinadas partes, ou *amostras* do sinal. Desta forma, ao invés de se transmitir um sinal analógico durante todo o tempo em que ele está sendo gerado, são transmitidos apenas alguns valores do sinal.

Isto permite que esses valores sejam codificados por exemplo, utilizando códigos binários. Desta forma, um sinal analógico, que possui uma infinidade de valores, pode ser processado ou transmitido digitalmente. E mais: no intervalo de tempo entre duas amostras sucessivas do sinal analógico, o sistema digital pode se ocupar de outras operações, como por exemplo, transmitir ou processar outras amostras pertencentes a outros sinais, ou realizar qualquer outra operação.

Por isso é que um computador pessoal pode realizar simultaneamente diversas tarefas, como por exemplo, tocar uma música ao mesmo tempo em que edita um texto. Na verdade, o computador só realiza uma tarefa de cada vez, apenas produz a ilusão de realizar diversas tarefas simultaneamente porque ele *picota* cada uma, realizando um pedacinho de cada uma de cada vez.

É claro que para a amostragem de um sinal analógico funcione, é preciso que se consiga reconstituir o sinal analógico a partir de suas amostras. Para isso existe uma regra, expressa pelo *teorema da amostragem*, que será visto logo adiante

A operação de conversão A/D ou seu inverso, a operação D/A, são essenciais para os sistemas atuais. Um exemplo clássico está na telefonia, onde a fonte e o destino são analógicos, enquanto os meios de transmissão são digitais. Outro exemplo é um CD de música, a qual é gravada e armazenada no CD em forma digital, sendo convertida em forma analógica para audição. Diversos outros exemplos existem, em várias áreas envolvendo a transmissão e/ou processamento de sinais.

Teorema da amostragem

“Um sinal limitado em frequência à $B\text{Hz}$ (isto é, um sinal cujo espectro de frequências é praticamente =0 para $|\omega| > 2\pi B \text{ rad/s}$) é univocamente determinado

por seus valores (amostras) tomados à intervalos uniformes e menores do que $1/2B$ segundos"

Normalmente, $x(t)$ vai de baixas frequências até certa f_{\max} , e sua largura de banda é aproximadamente $B=f_{\max}$, e portanto deve ser amostrado à uma taxa superior a $2B$ Hz, ou seja, a frequência de amostragem é $f_0 \geq 2B$ Hz.

BHz representa a maior frequência que $x(t)$ é capaz de gerar com amplitude significativa.

Aqui, como método aproximado, será empregado o espectro de densidade de frequências de $x(t)$ para representação no domínio da frequência, dado por sua transformada de Fourier, $X(\omega)$.

A justificativa é que a medição ou determinação da forma exata do espectro não é importante, bastando a suposição de que $X(\omega) \approx 0$ para $\omega > \omega_{\max}$, sendo desta forma ω_{\max} considerada a frequência máxima do espectro de $x(t)$, ou seja, a frequência a partir da qual a contribuição espectral de $x(t)$ é considerada insignificante ou desprezível. Esta frequência ω_{\max} é importante para determinação da frequência de amostragem, f_0 Hz.

A frequência de amostragem, em rad/s, é ω_0 , que deve ser superior a no mínimo $2\omega_{\max}$, sendo $\omega_{\max} = 2\pi B$ rad/s.

Mas o que é, exatamente, uma *amostra* do sinal $x(t)$?

Amostra de $x(t)$ e sua representação

Uma amostra significa a medição do valor do sinal em um determinado instante de tempo.

A Figura 1-5 (na Parte 1) é muito esclarecedora. Ela apresenta uma amostra $x(t_0)$ do sinal $x(t)$.

Uma amostra é, portanto o valor (digamos, em V), do sinal $x(t)$ no instante t_0 (digamos, em s). Mas como determinar, praticamente, o valor de uma amostra?

Devido à largura do pulso, que é muito pequena em relação ao período, X_n é muito pequeno, fazendo com que as áreas dos impulsos sejam correspondentemente pequenas.

O importante, porém, nesta etapa de tomada dos valores das amostras, é que

elas sejam adequadamente registradas, para posterior codificação (veja a Figura 1-4, na Parte 1).

O fato de que a tomada de amostras é muito rápida, permite uma simplificação no modelo matemático usado para representá-la, o qual é mostrado na Figura 2-40.

Na Figura 2-40, o modelo matemático da amostragem utiliza um elemento central, que é um elemento multiplicador.

Assim, a operação de amostragem é representada, essencialmente, por uma multiplicação entre $x(t)$, o sinal de entrada, e uma sequência de impulsos unitários. Essa sequência é periódica, e a taxa de amostragem é $\omega_0=2\pi/T$.

Como resultado temos o sinal amostrado, $x_s(t)$. Cada amostra é representada por um impulso cuja área não é mais unitária, mas sim proporcional ao valor da amostra, $x(t_0)$.

$x(t)$ é um sinal limitado em frequência. Portanto, seu espectro é nulo acima de um determinado valor de frequência, ω_{\max} .

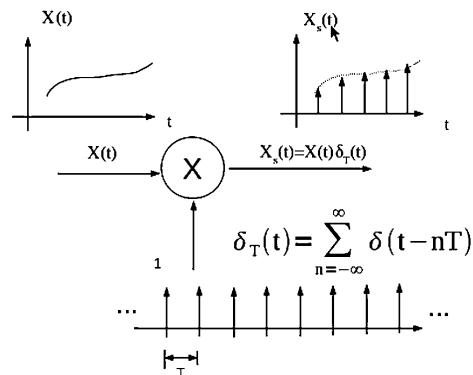


Figura 2-40

Como a forma exata do espectro de $x(t)$ não é relevante ao problema, será genericamente representado conforme a Figura 2-41:

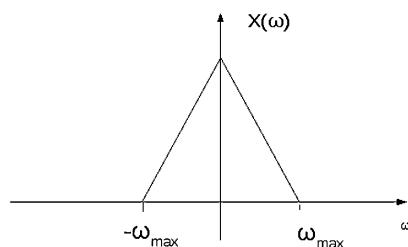


Figura 2-41

As amostras da Figura 2-40 não podem ser produzidas por sistemas físicos reais, pois foram geradas a partir de funções impulso, que têm amplitude infinita.

Na prática o valor de cada amostra é representada pela amplitude de um pulso muito estreito, gerado pela base de tempo do circuito amostrador.

Entretanto, nesta etapa, é conveniente utilizarmos o modelo teórico apresentado na Figura 2-40, pois é simples de ser analisado e atende ao que se deseja, que é mostrar como funciona o teorema da amostragem.

Espectro do sinal amostrado

O sinal amostrado, no domínio do tempo, segundo o modelo da Figura 2-40 é:

$$X_s(t) = X(t)\delta_T(t)$$

conforme mostra a Figura 2-42:

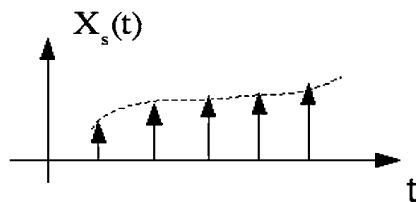


Figura 2-42

Analiticamente, podemos escrever

$$x_s(t) = x(t) \cdot \delta_T(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$$

Considerando que (ver Exercício L-2.13)

$$\delta_T(t) \longleftrightarrow \omega_0 \delta \omega_0(\omega) \quad \text{sendo} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\delta_T(t) \longleftrightarrow \omega_0 \delta \omega_0(\omega) \quad \text{sendo} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Então

$$\begin{aligned}
 x(t) \cdot \delta_T(t) &\leftarrow \rightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \omega_0 \delta \omega_0(\omega) = \\
 \frac{\omega_0}{2\pi} X(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \\
 \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_0)
 \end{aligned}$$

Portanto

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_0)$$

Da equação acima, vemos que o espectro do sinal amostrado é uma função periódica em ω , sendo uma repetição, com o período ω_0 (frequência de amostragem), do espectro fundamental $X(\omega)$. Este fato, em conjunto com $X(\omega)$ limitado em frequência, faz com que a função periódica resultante (periódica em ω , note bem) tenha uma composição espectral com lóbulos que não se sobreponham, desde que atendida a condição de que $\omega_0 > 2\omega_{\max}$.

A situação assim formada permite que se utilize um *filtro* para a recuperação isolada de qualquer parte do espectro periódico. Teoricamente, se este filtro tiver características de um filtro passa baixas ideal, cuja frequência de corte ω_c satisfaça a condição $\omega_{\max} < \omega_c < \omega_0 - \omega_{\max}$, então, na saída do filtro, teremos apenas o espectro do sinal original, $X(\omega)$. A Figura 2-43 ilustra graficamente o que foi descrito pelas equações, inclusive mostrando a ação do FPB sobre o espectro de $X_s(\omega)$.

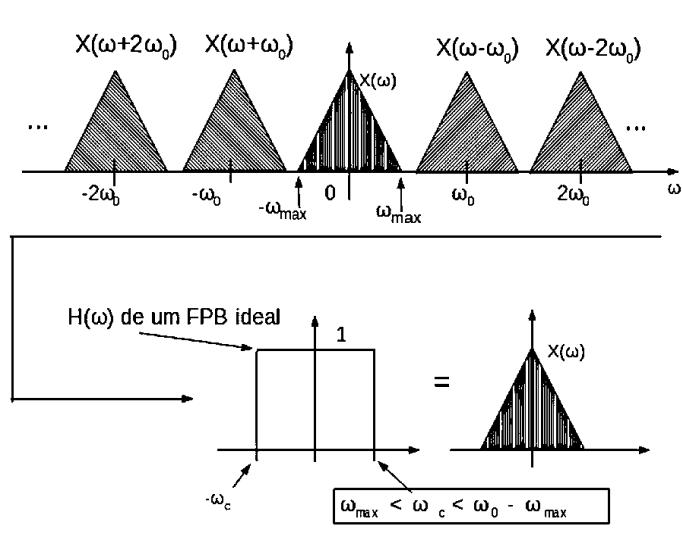


Figura 2-43

Exemplo da amostragem de um sinal senoidal

Vamos exemplificar realizando a amostragem de uma onda analógica senoidal, de frequência $\omega_0=1$ rad/s e período T [$y(t)=\sin(\omega_0 t)$ e $T=2\pi$]. A Figura 2-44 apresenta esta situação.

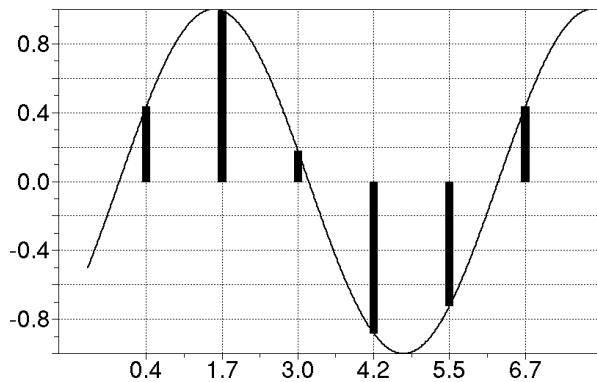


Figura 2-44

O quadro 1 apresenta valores mais precisos de t e y

Conforme podemos observar, para 1 período de $y(t)$ [$T=2\pi= 6.2831853$], temos exatamente a diferença de tempo entre a 6^a amostra e a 1^a, demonstrando que temos assim 5 amostras em 1 período de $y(t)$. ou seja, uma frequência de amostragem 5 vezes maior.

A 6^a amostra repete o valor da 1^a, dando início portanto a um novo ciclo de amostragem.

A forma de onda analógica possui um número infinito de valores (é uma função da variável t, contínua). Portanto, a reconstituição do sinal analógico tem que gerar todos esses valores a partir dos valores numéricos recebido. No caso em exemplo, apenas 5 valores numéricos (5 números) seriam suficientes para reconstituir o sinal analógico senoidal original.

Quadro 1

n	t=n x π/7	y=sin(n x π/7)
1	0.4487990	0.4338837
2	1.705436	0.9909498
3	2.9620731	0.1785569
4	4.2187101	-0.8805955
5	5.4753472	-0.7227949
6	6.7319843	0.4338837

EXERCÍCIOS – Sequência O

O-2.1-Utilizando a notação para funções retangulares definida nos exercícios da sequência A, defina a função de transferência ideal do FPB utilizado na recuperação do sinal amostrado. Suponha que a sequência amostradora $\delta_T(t)$ tenha exatamente o dobro da frequência máxima (BHz) de $x(t)$, ou seja $T=1/2B$ (intervalo de Nyquist). Desenhe o gráfico da função de transferência do sinal amostrado $X_s(\omega)$ nestas condições.

R: $H(FPB)=T\Pi[\omega/(4\pi B)]$.

O-2.2-Desenvolva uma equação no domínio do tempo, que descreva o processo de reconstrução de um sinal analógico $x(t)$ a partir de um FPB aplicado a suas amostras. Considere o modelo de amostragem da Figura 2-40 e utilize o intervalo de Nyquist ($T=1/2B$) na obtenção das amostras.

*Sugestão: Estabeleça a função característica $h(t)$ de um FPB ideal [que nada mais é do que a transformada inversa de $H(FPB)$], a seguir estabeleça a convolução entre $x_s(t)$ e $h(t)$.

R:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{sinc}[2B(t-nT)]$$

O-2.3-Um sinal $x(t)$ é amostrado, e gera os valores de amostras abaixo:

$$\begin{array}{lllll} x(0)=1 & x(1)=2 & x(2)=4 & x(3)=2 & x(4)=1 \\ x(5)=0 & & & & \end{array}$$

Calcule o valor aproximado de $x(2,5)$. Considere que o processo utilizou o intervalo de Nyquist.

R: $x(2,5)=3,22$.

O-2.4-Um sistema de tratamento de sinais resolve fazer a amostragem de um sinal analógico empregando o esquema da Figura 2-45 :

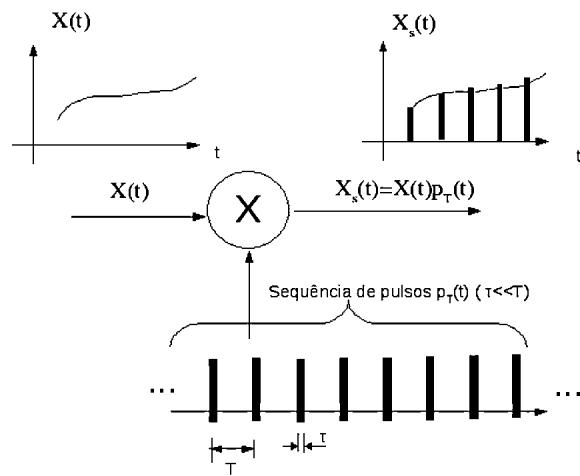


Figura 2-45

Supondo que seja obedecido o teorema da amostragem, isto é: $2\pi/T > 2\omega_{\max}$.

a-Calcule e desenhe o espectro de densidade de frequênciā da sequênciā de pulsos $p_T(t)$.

b-Calcule e desenhe o espectro do sinal amostrado $X_s(\omega)$.

Reconstituição do Sinal Analógico

A menos da aproximação devido ao processo de quantização, o valor numérico de uma amostra $x(t_0)$ é transmitido, ou armazenado, pelo código digital de N bits que o representa (veja Volume 1).

Na reconstituição D/A, temos como ponto de partida uma sequência de códigos, ou uma sequência de valores numéricos de amostras que chegam ao conversor D/A à taxa de amostragem utilizada. Para ser transformada de volta em um sinal analógico, essa sequência de valores precisa adquirir característica física com energia suficiente para gerar um sinal analógico que consiga excitar um sistema subsequente, como um amplificador, por exemplo.

Portanto, a primeira etapa da conversão D/A consiste em reconstituir os pulsos que originaram os valores das amostras. Isto é feito a partir de esquema mostrado na Figura 1-8, da Volume 1, usando um conjunto de fontes de corrente para gerar os valores de amostras a partir da sequência recebida de códigos. Após a geração das amostras, um circuito Hold mantém o último valor gerado até que o próximo seja recebido, dando um formato de *escada* à onda reconstituída. O efeito prático é aumentar a largura do pulso, consequentemente aumentando sua energia. Assim, a saída do Hold descreve uma curva em escada que se aproxima da forma do sinal analógico, conforme a ilustra a Figura 2-46. A saída do Hold possui componentes em alta frequência que precisam ser atenuadas. Isto é feito por um FPB com frequência de corte ω_c que satisfaça a condição $\omega_{max} < \omega_c < \omega_0 - \omega_{max}$. Este FPB tem características severas para a curva de corte.

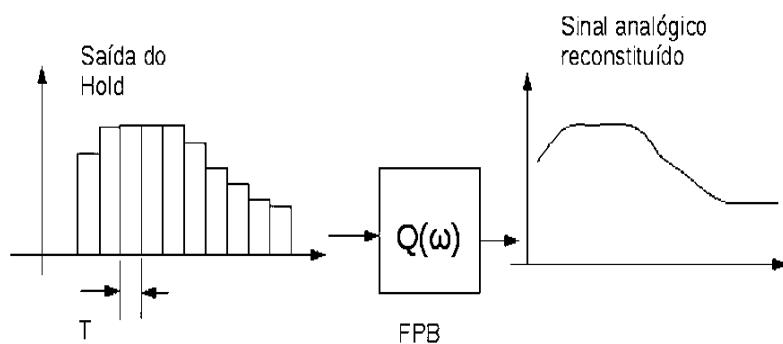


Figura 2-46

Na prática, essas características não são fáceis de serem conseguidas [isto é, é um filtro complexo e caro para ser construído], principalmente se a frequência de

amostragem for próxima de $2\omega_{\max}$.

Por isso, a frequência de amostragem é cerca de 10 vezes ou mais que o valor de ω_{\max} , nos sistemas onde isso é possível, facilitando assim a construção do filtro.

Nos sistemas onde o valor da frequência de amostragem é crítico, devendo estar próximo de $2\omega_{\max}$, (digamos, no máximo 10% maior) uma solução possível é realizar uma interpolação como a de Nyquist (ver Exercício O-2.2), e calcular valores intermediários de amostras (ver Exercício O-2.3).

Por exemplo, podem ser calculadas 4 amostras entre duas amostras transmitidas. Isto permite a construção de circuitos Hold onde o degrau é bem menor (no caso, $T/4$), facilitando a construção do FPB. Para tanto, possivelmente seria empregado um filtro digital, para implementação do interpolador, cujos princípios de funcionamento estão fora do escopo deste livro.

Outra solução possível seria o emprego de circuitos que já realizam uma interpolação (digamos, uma interpolação linear) na saída do gerador de correntes, ao invés do Hold. Isto permitiria a obtenção de curvas mais próximas do verdadeiro sinal analógico, diminuindo os requisitos para o FPB.

Efeito “aliasing”

O efeito “aliasing” ocorre quando, por um motivo ou por outro, o sinal a ser amostrado possui energia significativa em frequências maiores do que $\omega_0/2$ (ω_0 é a frequência de amostragem).

Em primeiro lugar, vamos compreender melhor o efeito “aliasing”, como ocorre e que problemas acarreta, e em seguida como minimizá-lo na prática.

Para começar, imaginemos que pretendemos amostrar um sinal $x(t)$ senoidal de frequência f_1 Hz. Pelo teorema da amostragem, esse sinal deve ser amostrado à uma taxa $f_0 = 1/T \geq 2f_1$ Hz. A Figura 2-47 apresenta o que acontece com o sinal $x(t)$ após a amostragem, do ponto de vista do espectro. Estamos usando o modelo da Figura 2.40. Na Figura 2-47, o teorema da amostragem é obedecido; portanto, o sinal senoidal que foi amostrado é perfeitamente recuperado após o FPB.

Suponha agora que o sinal senoidal de entrada altere sua frequência para $2f_1$ Hz, tornando-se maior que $f_0/2$. Com estes valores de frequência do sinal de entrada, não será possível a recuperação do sinal original na recepção, após o FPB, se a frequência de amostragem não for modificada;

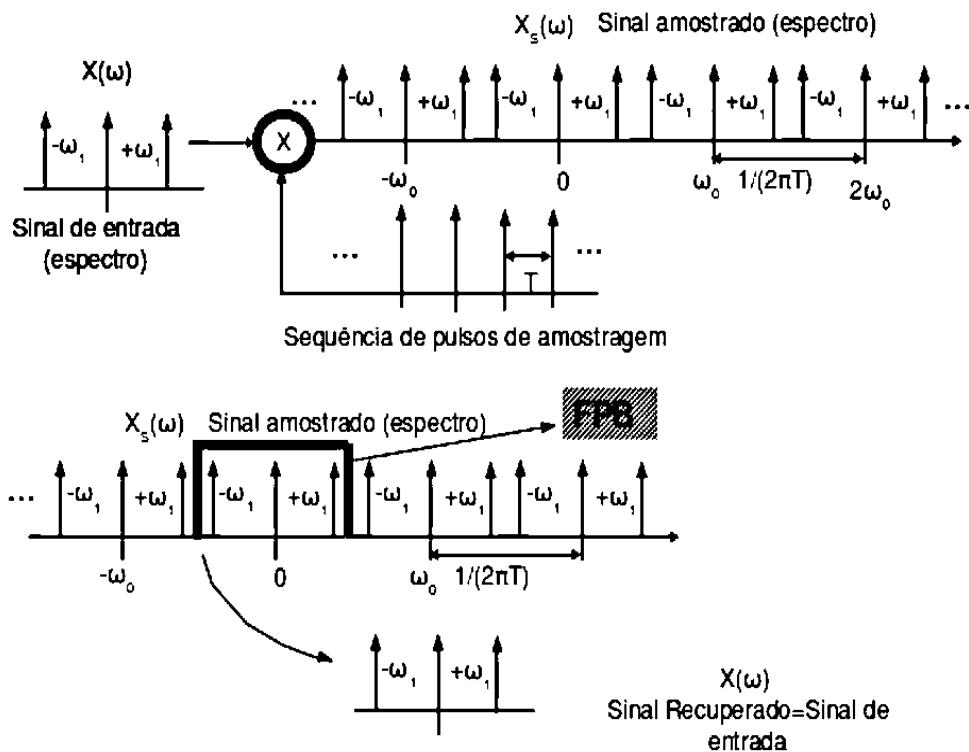


Figura 2-47

A Figura 2-48 mostra o que acontece se tentarmos usar o mesmo esquema da Figura 2-47, numa situação em que não atende a condição em que a frequência de amostragem deve ser no mínimo o dobro da frequência do sinal de entrada, para que este seja corretamente recuperado a partir de suas amostras:

Na Figura 2-48, por hipótese, mantemos o mesmo valor para a frequência de amostragem que na Figura 2-47, entretanto a frequência do sinal de entrada é o dobro.

Desta forma, o teorema da amostragem indica que não será possível recuperar o sinal de entrada, cuja frequência $(2\omega_1) > (\omega_0/2)$. Efetivamente, a análise dos gráficos da Figura 2-48 mostra que a frequência do sinal recuperado é $(\omega_0 - 2\omega_1)$. Este resultado admite uma interpretação gráfica interessante, apresentada na Figura 2-49.

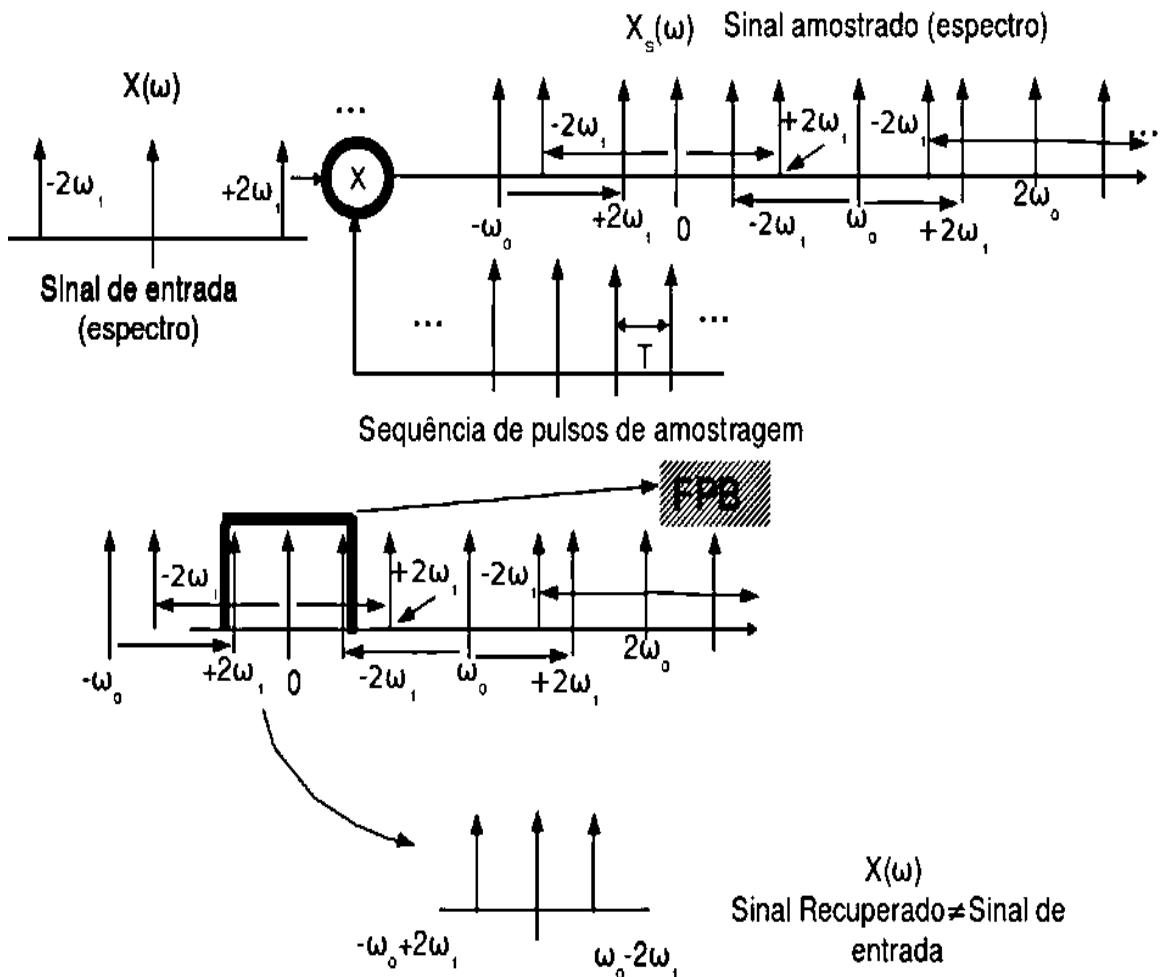


Figura 2-48

Nessa Figura 2-49, ω_2 corresponde à frequência do sinal de entrada, que na Figura 2-48 é igual à $2\omega_1$. Por hipótese, $\omega_2 = \omega_0/2 + \Delta\omega$.

Desta forma, $\omega_2 > \omega_0/2$. Assim, segundo o teorema da amostragem, não será possível a reconstituição do sinal original de entrada na saída do sistema, à partir de suas amostras.

Pela Figura 2-48, vemos que o sinal recuperado possuirá frequência $\omega_A = \omega_0 - \omega_2$.

Mas $\omega_2 = \omega_0/2 + \Delta\omega$. Assim, $\omega_A = \omega_0/2 - \Delta\omega$. Portanto, a frequência ω_2 de entrada foi rebatida em torno da frequência de corte do FPB da recepção, que no caso é um filtro de Nyquist (filtro ideal PB onde a frequência de corte é exatamente igual à metade da frequência de amostragem). Isto caracteriza o efeito "aliasing".

Frequências de entrada superiores à metade da frequência de amostragem ω_0 são rebatidas em torno de $\omega_0/2$, aparecendo na saída e somando-se às frequências já existentes do espectro.

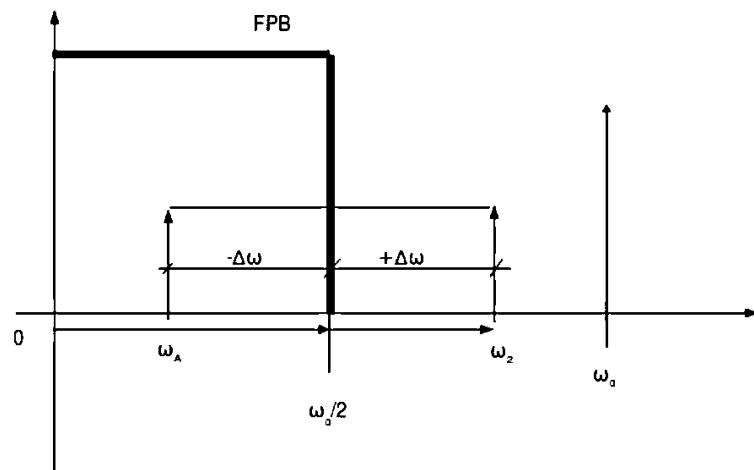


Figura 2-49

A Figura 2-50 ilustra o que acontece quando o sinal de entrada possui várias frequências, representadas por um espectro contínuo. Para que aconteça o efeito "aliasing", $\omega_{\max} > \omega_0/2$. E isto é exatamente o que acontece na Figura 2-50.

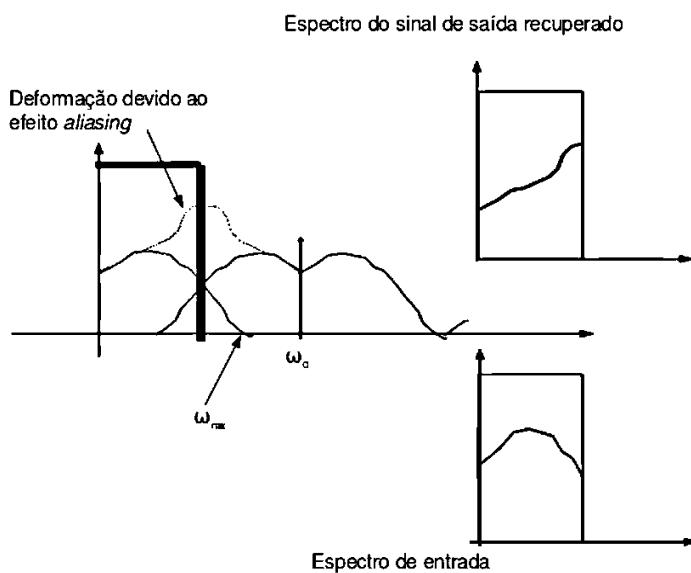


Figura 2-50

As frequências rebatidas pelo efeito "aliasing" em torno de $\omega_0/2$ somam-se às

frequências já existentes do espectro, provocando sua deformação quando forem reconstituídas, principalmente nas frequências mais altas do espectro.

Por exemplo, o espectro médio do sinal proveniente de uma cápsula telefônica, na telefonia fixa, tem um $f_{\text{máx}}$ em torno de 3400, 3500Hz. Entretanto, suponha alguém ouvindo múscia e falando ao telefone. Provavelmente o sinal gerado pelo microfone atingirá frequências superiores a 4 KHz (este valor corresponde a $f_0/2$, nos conversores A/D utilizados em telefonia fixa), gerando portanto o efeito "aliasing" naquela ligação.

É óbvio que todo sistema de conversão A/D-D/A deve ser resguardado contra a possibilidade de ocorrência do efeito "aliasing". Isto é feito por um filtro especial, chamado de filtro anti- "aliasing". Este filtro, que genericamente é um FPB, com frequência de corte $\omega_c = \omega_0/2$, é usado no início de todo sistema de conversão A/D, sendo localizado sempre antes do circuito responsável pela amostragem.

EXERCÍCIOS – Sequência P

P-2.1-Sabemos que se o sinal analógico $x(t)$ for amostrado segundo o modelo teórico da Figura 2-40, a sequência de amostras consiste de uma sequência de impulsos, cada qual com uma área que é proporcional ao valor da amostra $x(nT)$, porém a amplitude de cada impulso é infinita. Este é um modelo teórico, não pode ser fisicamente realizado [entretanto, podemos realizá-lo em nossa imaginação]. Por isso, vamos chamar a sequência de impulsos, na saída de amostrador da Figura 2-40, de $x_{is}(t)$ (O subíndice i referindo-se a uma entidade irreal).

Por outro lado, a forma em escada, saída do circuito Hold conforme a Figura 2-46, é um sinal que com certeza tem existência física real. O valor de cada amostra está representado pela amplitude de cada pulso de largura T , sendo T o intervalo de amostragem. Este sinal será chamado $x_s(t)$.

Demonstre que, com o auxílio da teoria de sistemas lineares, é possível estabelecer um modelo matemático e assim obter o espectro de densidade de frequências de $x_s(t)$. Explique o resultado obtido e comente todas as considerações teóricas que julgar necessário.

R:

$$X_s(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_0)$$

T é o intervalo de amostragem.

P-2.2-Com base no resultado obtido no Exercício P-2.1, explique porque o filtro $Q(\omega)$ da Figura 2-46, que teoricamente é um FPB, não deve ter sua característica de transferência plana, mas sim com algum reforço nas frequências mais agudas (isto é, próximas de ω_{\max}).

P-2.3-Explique porque o uso de um interpolador de Nyquist que diminua o intervalo de amostragem para $T/5$ iria simplificar o projeto do FPB $Q(\omega)$. Baseie sua explicação num diagrama em blocos do sistema onde o interpolador de Nyquist seja um dos componentes do diagrama em blocos. Pode detalhar suficientemente os sinais no pontos do diagrama (mostrando sua forma no tempo e na frequência),

mas não precisa entrar em detalhes reais construtivos dos blocos, os quais não são objeto de estudos neste livro.

P-2.4-Explique, com detalhes, como ocorre a deformação no aspecto do sinal recuperado na Figura 2-50.

P-2.5-Considere um sistema que utiliza a amostragem conforme o modelo de reconstituição da Figura 2-43, onde o FPB utilizado na recepção para recuperar o sinal de entrada a partir das suas amostras não é um filtro de Nyquist, isto é, sua frequência de corte $\omega_c < \omega_0/2$. Nestas condições, analise o comportamento do sistema perante o efeito "aliasing".

P-2.6-Dê uma explicação para o fato de que, na prática, se o sinal de entrada for limitado em frequência a $\omega_{\text{máx}}$, a frequência de amostragem ω_0 tem um valor mínimo sempre um pouco maior que $2\omega_{\text{máx}}$, ou seja, sempre existe uma certa folga na designação desse valor.

P-2.7-O que acontece com o efeito "aliasing" se a curva de corte do FPB de reconstituição não é vertical, como no caso de um FPB ideal?

P-2.8-Um sistema de transmissão emprega amostragem como uma das etapas na digitalização de sinais analógicos. Os parâmetros do sistema são:

- Frequência máxima do sinal analógico de entrada: 4 KHz.
- Frequência de amostragem: 9 KHz.
- Potência média do sinal analógico: -10dBm.

Calcule a relação S/N para um sinal interferente de frequência 5 KHz e potência +10dBm, se o filtro anti-"aliasing" apresenta uma característica de corte com uma inclinação de 80dB por oitava acima de 4 KHz. Calcule também a frequência do sinal interferente na saída do sistema. Considere o filtro de reconstrução ideal e de Nyquist.

Refaça os cálculos sem a presença do filtro anti-"aliasing". Interprete os resultados.

R: Com o filtro anti-"aliasing": Relação S/N: 9dB. Frequência interferente: 4 KHz.

Sem o filtro anti- "aliasing": Relação S/N: -11dB.

Densidade Espectral de Energia e de Potência

O estudo de sinais de natureza aleatória é parte fundamental para a compreensão de muitos fenômenos físicos que ocorrem no mundo real, também na área de comunicações. A densidade espectral de potência é peça fundamental neste estudo, pois fornece uma descrição de sinais e sistemas aleatórios no domínio da frequência.

A função básica de um sistema de comunicações é o transporte de informação. A informação, seja lá de que forma se apresente, é de natureza essencialmente aleatória. Qual o valor em se transmitir uma informação já conhecida? Apenas a necessidade de complementação, ou de repetição. Se uma partida de futebol é transmitida ao vivo, sua reprise em vídeo-tape já não será tão emocionante.

Em sistemas de comunicações, lidamos essencialmente com sinais elétricos, oriundos de diversas fontes, como a fonte de informação, fontes de interferências e ruidos, fontes de sinais de controle, de sinais de medições, etc. A maioria se encaixa na classificação de aleatórios, mesmo aqueles que teoricamente seriam bem determinados, como os sinais de controle. Muitas vezes, por exemplo, não conseguimos saber, ou determinar, a fase exata de um sinal senoidal ou retangular utilizado em uma medição de sistema. Assim, não temos como determinar com precisão uma equação matemática que o represente.

O ferramental matemático, necessário à elaboração de modelos preditivos, que são usados tanto para a análise quanto para o desenvolvimento e projeto de novos sistemas, baseia-se em estudos voltados aos processos que geram sinais aleatórios.

Neste item, introduzimos a noção de densidade espectral de potência baseados, ainda, na descrição determinística de sinais. Entretanto, mesmo esta descrição é importante ao início do estudo, pois fornece definições e conclusões que são válidas e indica compreensões conceituais importantes.

A função densidade espectral, como o nome indica, é uma função que fornece a concentração de energia ou de potência do sinal no domínio da frequência.

Os sinais de energia possuem uma densidade espectral de energia, enquanto os sinais de potência, incluindo-se aí os sinais aleatórios, possuem uma densidade espectral de potência.

Nesta parte do livro, estudaremos a função densidade espectral de energia ou de

potência do ponto de vista de sinais determinísticos, isto é sinais definidos por uma fórmula $g(t)$ conhecida. Isso não significa que os resultados obtidos não valem para sinais aleatórios. Apenas têm que ser corretamente interpretados.

Um sinal aleatório, por exemplo um sinal de ruído, pode ser caracterizado de várias formas. Ele pode ser representado pelos seus parâmetros estatísticos, como também pode ser representado por amostras registradas em um aparelho qualquer que guarde uma memória de seus valores, como um registrador gráfico, por exemplo.

Neste último caso obtém-se uma forma de $g(t)$ para o sinal aleatório, observando-se que o $g(t)$ assim foi obtido em instantes de tempo passados, e portanto representa apenas amostras que já ocorreram, do sinal aleatório em questão. Portanto, toda função derivada destes valores registrados representará amostras de funções deste processo aleatório. Quando, porém, este tempo de registro for suficientemente longo em relação aos parâmetros estatísticos que caracterizam o processo, essas amostras de funções podem, na média, se aproximar o suficiente dos resultados do processo.

Densidade espectral de energia, ou espectro de densidade de energia

A energia total de um sinal $g(t)$ é dada pela Equação (2-7); genericamente, t_i pode ser qualquer valor pertencente ao campo dos reais, assim:

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt$$

Mas, pela Equação (2-24)

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Assim,

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega$$

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt$$

Portanto

$$E_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) G(-\omega) d\omega$$

Mas se $g(t)$ é uma função real de t , então

$$E_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\omega)|^2 d\omega$$

A função $|G(\omega)|^2$ é chamada de espectro de densidade de energia de $g(t)$, $\Psi_g(\omega)$, ou densidade espectral de energia de $g(t)$.

Autocorrelação de $g(t)$

A função de autocorrelação pode ser definida para um sinal $g(t)$, quando for possível determinar seus valores, pela integral:

$$\varphi_g(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) g(t-\tau) dt \quad (2-54)$$

Se fizermos, na fórmula acima, uma mudança de variável, $x=t-\tau$, logo $t=x+\tau$, vemos imediatamente que $\varphi_g(-\tau) = \varphi_g(+\tau)$, ou seja, a autocorrelação é sempre uma função par.

Além disso, se olharmos para a definição de convolução (Equação 2-31), vemos que há bastante semelhanças entre as duas definições, ao ponto de podermos escrever:

$$\varphi_g(\tau) = g(\tau) * g(-\tau) \quad (2-55)$$

A autocorrelação é uma convolução da função com ela mesma, sem o rebatimento que caracteriza a convolução.

Agora, se fizermos $\tau=0$ em (2-54), vemos imediatamente que $\varphi_g(0)$ = energia total de $g(t)$ [veja a definição de energia total em (2-7), considerando que t_i pode ter

qualquer valor real, inclusive $-\infty$]. Quando $g(t)$ é um sinal de energia (um pulso finito, por exemplo), a autocorrelação tem seu valor máximo na origem, decrescendo com $|\tau|$. Esse valor máximo é igual a energia total do pulso.

Função de autocorrelação e a densidade espectral

Pode ser demonstrado, conforme feito a seguir, que a função de autocorrelação e a função densidade espectral de energia formam um par de transformadas de Fourier. Ou seja:

$$\psi_g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\varphi_g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_g(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

As equações acima podem ser demonstradas a partir da equação (2-55) e do fato que, se

$$\begin{aligned} g(\tau) &\longleftrightarrow G(\omega) \\ \text{então} \\ g(-\tau) &\longleftrightarrow G^*(\omega) \end{aligned}$$

Portanto,

$$g(\tau)*g(-\tau) \longleftrightarrow |G(\omega)|^2$$

Logo,

$$\varphi_g(\tau) \longleftrightarrow \Psi_g(\omega) \quad (2-56)$$

Portanto, a função de autocorrelação e o espectro de densidade de energia formam um par de transformadas de Fourier.

Autocorrelação e espectro de densidade de potência

Para sinais de potência, a autocorrelação tal como definida na equação (2-54), tem valor infinito na origem. Para esses sinais, a função de autocorrelação tem que

ser redefinida, usando uma passagem ao limite.

As condições de existência da transformada de Fourier impõe limitações à $\phi_g(\tau)$, de modo que (2-56) é válida para sinais de energia.

Porém, conforme visto no Exercício A-2.7, nós calculamos a potência de um sinal de energia, dividindo sua energia pela sua duração T.

Assim, se considerarmos um sinal de potência $g(t)$ e o multiplicarmos por um pulso retangular de duração T e amplitude 1 (representado uma *janela* no tempo de abertura T), então podemos escrever que:

$$g(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} [g(t) \times \Pi\left(\frac{t}{T}\right)] = \lim_{T \rightarrow \infty} g_T(t) \quad (2-57)$$

$g_T(t)$ é a forma truncada de $g(t)$, e portanto é um sinal de energia e possui uma função de autocorrelação, $\phi_{gT}(\tau)$, cuja transformada de Fourier, $\psi_{gT}(\omega) = |G_T(\omega)|^2$ representa o espectro de densidade de energia de $g_T(t)$.

Assim como

$$g(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} g_T(t)$$

Podemos imaginar que existam os limites:

$$\begin{aligned} S_g(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \psi_{gT}(\omega) \\ &\text{e} \\ R_g(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \varphi_{gT}(\tau) \end{aligned}$$

Sendo:

$S_g(\omega)$: Espectro de densidade de potência de $g(t)$

$R_g(\tau)$: Função de autocorrelação de $g(t)$

Ainda considerando que

$$\varphi_{gT}(\tau) \longleftrightarrow \psi_{gT}(\omega) \quad (2-58)$$

Então, podemos supor que

$$R_g(\tau) \longleftrightarrow S_g(\omega) \quad (2-59)$$

Portanto, para um sinal de potência $g(t)$, a função de autocorrelação e o espectro de densidade de potência formam um par de transformadas de Fourier.

A equação (2-59) é a conclusão de um teorema, denominado teorema de *Wiener-Kinchine*, que estabelece que a função de autocorrelação e o espectro de densidade de potência formam um par de transformadas de Fourier. Na verdade, o teorema de Wiener-Kinchine provê uma forma geral para a definição do espectro de densidade de potência, válida para sinais determinísticos e aleatórios. Sua demonstração completa está fora do escopo deste livro. O espectro de densidade de potência é reconhecido como uma forma matematicamente válida de representação de um sinal aleatório no domínio da frequência.

A partir de parâmetros estatísticos do sinal aleatório, ele pode ser calculado e definições, tais como largura de banda podem serem usadas para esses sinais, em cálculos ou medições.

Potência e espectro de densidade de potência

Podemos escrever a potência total de um sinal de potência $g(t)$ como:

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E_{g_T}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g_T^2(t) dt$$

sendo $g_T(t) = \begin{cases} g(t) & \text{para } |t| < T/2 \\ 0 & \text{para } |t| > T/2 \end{cases}$

$g_T(t)$ é a versão truncada de $g(t)$, logo é um sinal de energia. Assim sendo

$$E_{g_T} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_T^2(\omega)| d\omega$$

Logo

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_T(\omega)|^2 d\omega \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(\omega)|^2}{T} d\omega$$

Já sabemos que o limite no interior da última integral acima, se existir, é o espectro de densidade de potência de $g(t)$, $S_g(\omega)$. Logo

$$P_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_g(\omega) d\omega$$

Fazendo uma mudança de variáveis, $\omega=2\pi f$, temos:

$$P_g = \int_{-\infty}^{+\infty} S_g(f) df$$

Ruido

O ruido, como o próprio nome indica, é uma perturbação ao sinal transportado por um sistema de comunicações, que a ele se adiciona, provocando erros e distorções. O ruido pode ter causas naturais assim como pode ser provocado pelo próprio homem. O sinal elétrico que o representa é classificado como aleatório.

O ruido de causas naturais geralmente não pode ser evitado. É o caso, por exemplo, de ruido gerado por indução elétrica provocada por descargas atmosféricas (raios), ou pelo ruido térmico gerado pela agitação aleatória de eletrons no interior de um condutor a certa temperatura, ou do ruido intergalático captado por uma antena parabólica voltada para o céu, em um enlace de comunicação via satélite.

Já o ruido provocado pelo próprio homem algumas vezes pode ser evitado ou bastante atenuado em sua geração, como por exemplo a limitação de banda e de geração de frequências espúrias imposta por orgãos regulatórios ao sinal gerado por diversos sistemas de comunicação, ou à radiação eletromagnética gerada por vários aparelhos eletrônicos.

Alguém já escutou o ruido causado pela indução de 120Hz em um amplificador alimentado diretamente por um destes chamados “eliminadores de pilhas” (também conhecido como “hummm”)? Este é um exemplo de ruido, na verdade uma interferência, provocado pela indução da CA, utilizada normalmente em nossas residências, e provocado pelo homem. Seu efeito pode ser minimizado por uma filtragem adequada na saída do “eliminador de pilhas”, diminuindo assim a potência do sinal interferente.

Geralmente, podemos dizer que o ruido não é proposital, mesmo que seja provocado por causas não naturais, como por exemplo, o funcionamento de outras máquinas ou sistemas construídos pelo homem.

Algumas vezes, entretanto, a interferência é gerada propositalmente, tentando provocar a ocorrência de ruidos e sinais que possam prejudicar ou impedir uma comunicação. As medidas ou técnicas empregadas para evitar interferências propositais são diferentes das empregadas para diminuir os efeitos causados pelo ruido ou interferências não propositais.

Todo sistema de comunicações precisa ser projetado e construído de forma a

minimizar o efeito causado pelo ruído, seja controlando sua intensidade em pontos específicos do sistema ou diminuindo suas consequências, porém nem todo sistema de comunicações precisa ser projetado visando diminuir os efeitos de uma interferência proposital. Por exemplo, um receptor comercial de rádio FM não é construído para ser imune a interferências propositais. Uma estação “pirata” é capaz de sobrepor o seu sinal ao de uma estação comercial registrada e em dia com a legislação vigente, em uma certa área geográfica.

Entretanto, um sistema militar, principalmente se for utilizado em situações extremas, precisa ser construído de modo a suportar a presença de sinais interferentes capazes de prejudicar ou mesmo impedir a sua operação.

Por essas e outras razões, é muito importante o estudo dos sinais de ruído. Uma das facetas desses estudos está voltada para a caracterização do ruído, com o objetivo de construir modelos matemáticos que possam ser utilizados na simulação de sistemas e na predição de seus efeitos na comunicação.

Já foi mencionado neste livro o parâmetro “relação S/N”, que é a relação entre a potência do sinal útil (S) e a potência do sinal de ruído (N), em um determinado ponto de um sistema. O conhecimento deste valor no “front-end” de receptores é fundamental ao projeto e dimensionamento desses subsistemas, cuja função básica é justamente captar e reforçar o sinal útil em um ponto extremo de um enlace de comunicações, quando ele está mais enfraquecido pelas atenuações e distorções provocadas pelo meio de transmissão utilizado.

O valor de N (potência do ruído) geralmente adotado é um valor médio, derivado das causas mais prováveis. Um modelo muito usado, pela sua simplicidade, é o do ruído AWGN (“additive white gaussian noise”)⁸. O modelo AWGN é baseado em que o ruído, sendo um sinal aleatório, e sendo várias as fontes de ruído, em se somando dão como resultado uma distribuição gaussiana para suas amplitudes.

A caracterização de um sinal aleatório, como o ruído AWGN, exige a definição de termos cujo significado é principalmente estatístico, e está fora do escopo deste livro que lida essencialmente com definições válidas para sinais determinísticos.

⁸ A sigla AWGN (“additive white gaussian noise”) decorre de certas características desse sinal de ruído. Assim, o ruído é aditivo (isto é, ele se adiciona algebraicamente ao sinal útil).

A denominação “white”, que significa branco, refere-se ao espectro de densidade de potência, que possui contribuições de todas as frequências do espectro, por analogia com a luz branca, que se decompõe em uma combinação de todas as frequências do espectro visível.

“Gaussian” significa gaussiano, e diz respeito à um dos parâmetros estatísticos do sinal, a distribuição das amplitudes. Isto confere à forma de onda um aspecto característico, bem representado na Figura 2-3.

“Noise, como já foi dito, significa ruído.

Entretanto, considerando que um registro de um sinal já ocorrido, durante um período de tempo T, é uma forma de se obter uma representação determinística de um sinal aleatório, e esta representação é tanto mais precisa quanto maior o tempo de observação T, comparado aos parâmetros temporais do sinal estatístico sendo observado, podemos usar o que já foi estudado em uma caracterização muito empregada para o ruido AWGN, em termos de espectro de densidade de potência e potência de ruido.

Espectro de densidade de potência do ruido AWGN

O ruido AWGN possui um espectro de densidade de potência constante para toda a faixa de frequências, de 0 a $\pm\infty$. Assim podemos dizer que:

$$S_g(f) = \frac{N_0}{2} \quad \text{W/Hz}$$

para o ruido AWGN.

O fator 2 aparece na fórmula acima por mera conveniência. Quando nos referimos à banda BHz de um sinal, geralmente B refere-se ao lado positivo do espectro desse sinal.

Para obter sua potência, no entanto, temos que considerar a contribuição também do lado negativo. Como, em se tratando de ruido AWGN, para uma banda B a contribuição do lado positivo do espectro, de largura B, é igual à contribuição do lado negativo, de largura também igual a B, e por simetria aparece o fator 2.

Por exemplo, a potência de ruido em uma banda BHz é $2BN_0/2=BN_0$ Watts.

O fato do espectro ser constante implica em que a função de autocorrelação do ruido, que é a transformada inversa do espectro, é um impulso de Dirac localizado em $\tau=0$, de área $N_0/2$.

EXERCÍCIOS – Sequência Q

Q-2.1-Determine o espectro de densidade de energia de um pulso retangular $g(t)=\Pi(t/T)$, e calcule sua energia E_g . Se o sinal $g(t)$ for processado por um FPB ideal de largura de banda f_c Hz, determine a energia E_y de saída. Considere $T=10$ ms e f_c com 3 valores: 10Hz, 100Hz e 1000Hz. Interprete os resultados obtidos, comparando a largura do pulso de entrada com as larguras de banda propostas e as respectivas respostas impulsivas do filtro, observando a deformação do pulso ao passar pelo filtro. Além das energias, obtenha também as formas de onda de entrada e saída em cada caso.

R:

$$E_g=0,01 \text{ J}$$

$$1: T=10 \text{ ms e } f_c=10\text{Hz: } E_y=0,002 \text{ J}$$

$$2: T=10 \text{ ms e } f_c=100\text{Hz: } E_y=0,009 \text{ J}$$

$$3: T=10 \text{ ms e } f_c=1000\text{Hz: } E_y=0,0099 \text{ J}$$

Q-2.2-Obtenha a função de autocorrelação de um sinal senoidal $g(t)=\text{Acos}(\omega_0 t+\Theta)$.

Sugestão: Faça

$$\varphi_{gT}(\tau) = \int_{-T/2}^{+T/2} g(t)g(t-\tau)dt$$

Q-2.3-Obtenha o espectro de densidade de potência do sinal senoidal $g(t)=\text{Acos}(\omega_0 t+\theta)$. Interprete e apresente um gráfico do resultado.

R:

$$S_g(\omega) = \frac{A^2}{2}\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

Q-2.4-A partir da função densidade espectral de potência de um sinal senoidal, calcule sua potência total.

$$R: A^2/2$$

Q-2.5-Obtenha a expressão geral do espectro de densidade de potência de um sinal periódico de período T_0 em termos do coeficiente G_n da série complexa de Fourier.

Sugestão: Observe os seguintes passos:

1-Obtenha a expressão para $G(\omega)$, transformada de Fourier de $g(t)$, um sinal periódico.

2-Obtenha a expressão para $G_T(\omega)$, que é a transformada de Fourier da versão truncada de $g(t)$, usando o fato de que $g_T(t)$ pode ser considerado o produto de $g(t)$ por um pulso retangular de largura T e amplitude 1, centrado na origem, logo $G_T(\omega)$ pode ser obtido pelo teorema da convolução na frequência. Observe o passo 1.

3-Escreva a expressão para o espectro de densidade de energia de $g_T(t)$.

4-Aplique a definição e obtenha uma expressão inicial para $S_g(\omega)$, que é igual a $1/T$ do espectro de densidade de energia de $g_T(t)$ quando T tende a infinito.

5-Resolva o limite para T tendendo a infinito da expressão obtida no passo 3, considerando que uma função $(\text{sinc})^2$, quando concentrada na origem, tende a uma função impulso. Calcule a área desta função impulso.

R:

$$S_g(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |G_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0)$$

onde G_n é o coeficiente da série de Fourier do sinal periódico $g(t)$.

Q-2.6-A partir da expressão acima calcule a potência de um sinal senoidal $g(t)=A\text{sen}\omega_0 t$. Apresente os passos intermediários.

Q-2.7-Considere um sinal $g(t)$ sendo processado por um sistema linear com função de transferência $H(\omega)$. Obtenha uma relação entre as densidades de potência da entrada e da saída, $S_g(\omega)$ e $S_y(\omega)$. Justifique seus resultados.

R:

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_g(\omega)$$

Q-2.8-Um espectro de densidade de potência $S_g(f)=3$ para $f=\mp 10\text{Hz}$, e 0 para $|f| > 10$. Calcule a potência de $g(t)$ em Watts.

Q-2.9-Se ao invés da variável f , em Q-2.8, houvesse sido especificada a variável ω , fazendo-se $S_g(\omega)=3$, quais seriam os valores limites da janela em ω para a potência do sinal $g(t)$ não varie.

Q-2.10-Uma bateria de 12V CC é ligada a um resistor de 1Ω , dissipando uma potência de 144W. A representação do espectro de densidade de potência deste sinal pode ser $144\delta(f)$ W/Hz. Como seria essa representação se a variável livre fosse ω ?

Distorções

Um fato do qual não se pode ignorar é que, por mais perfeito que seja um sistema de comunicações, ele sempre introduzirá distorção ao sinal sendo transmitido.

De acordo com a nossa definição de distorção, diversas formas podem serem consideradas. Se a linearidade de amplificação não é a mesma, em função da amplitude do sinal, se frequências espúrias forem geradas pelo sistema, se a amplificação não for a mesma, em toda a banda de transmissão, se interferências de outros sistemas afetam a transmissão, etc, tudo isso pode ser considerado distorção. Entretanto, no momento, estudaremos 3 tipos de distorção, que são bastante comuns, em se tratando de sistemas analógicos:

Distorção de atenuação ou de amplitude

A distorção em amplitude é facilmente descrita no domínio da frequência, significando simplesmente que as componentes de frequência na saída não se encontram na proporção correta.

A distorção de amplitude é geralmente especificada em termos de uma resposta em frequência (vide Exercício L-2.7), isto é, a faixa de frequências para a qual $|H(\omega)|$ deve ser constante com uma certa tolerância (p. ex., ± 1 dB) de modo que distorção de amplitude seja suficientemente pequena.

Observemos que as condições acima são requeridas apenas na faixa de frequências onde o sinal $x(t)$ possui energia no espectro.

Assim, se $x(t)$ for limitado em frequência à $B\text{hz}$, as condições de transmissão sem distorção só precisam ser satisfeitas em $|\omega| < 2\pi B$.

Distorção de fase ou retardo de grupo

Segundo as condições de transmissão sem distorção, Equação (2-51), o desvio de fase deve ser proporcional à frequência:

$$\theta(\omega) = -\omega t_0$$

Daí, conclui-se que t_0 deve ser constante para todas as frequências da banda do sinal. Quando $\theta(\omega)$ é não-linear, ocorrerá distorção.

Como avaliar, porém, a linearidade de fase de um sistema? Isto pode ser obtido verificando-se, por exemplo, se $d\theta(\omega)/d\omega$ é constante, ao longo da banda de interesse.

Veremos agora como pode ser evidenciado o fator $d\theta(\omega)/d\omega$.

Consideremos osinal $y(t)$.

$$y(t) = x(t)e^{j\omega_p t} \quad (2-60)$$

$x(t)$ é um sinal real, de baixa frequência, limitado em banda $B=W$, sendo W a largura da banda de interesse.

A Equação (2-60) define um mapeamento de valores reais, que são os valores de $x(t)$, em valores complexos, os quais podem ser interpretados como pontos no plano complexo, que correspondem à extremidade dos fasores gerados conforme a Equação (2-60).

Sabendo que $e^{j\omega_p t} = \cos(\omega_p t) + j\sin(\omega_p t)$, a projeção de $y(t)$ no eixo real fornece:

$$\varphi = x(t)\cos(\omega_p t) \quad (2-61)$$

A Figura 2-51 apresenta, apenas como exemplo, para melhor visualização, uma forma hipotética da função definida pela Equação (2-61).

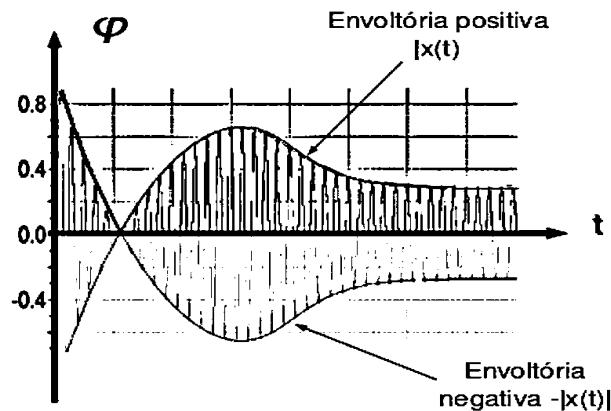


Figura 2-51

Observe da Figura 2-51 que a linha hipotética que une os picos do sinal φ é chamada “envoltória”, e que a envoltória positiva é igual a $|x(t)|$, e a envoltória negativa é $-|x(t)|$.

O sinal $y(t)$ definido pela Equação (2-60) ocupa uma banda ao redor de ω_p . Isto pode ser demonstrado pela aplicação da propriedade do desvio na frequência à

Equação (2-60), obtendo-se que:

$$Y(\omega) = X(\omega - \omega_p) \quad (2-62)$$

Supondo $y(t)$ aplicado à um sistema linear, considera-se que a transmissão é sem distorção se na saída tivermos:

$$y_0(t) = kx(t - t_g)e^{(j\omega_p + \theta_p)} \quad (2-63)$$

A Equação (2-63) nos diz que o retardo t_g , sofrido pela envoltória, deve ser constante para todas as frequências da banda de $y(t)$, porém o fasor pode sofrer um retardo diferente, dado por $t_p = -\theta_p/\omega_p$, para transmissão sem distorção na banda de $y(t)$. Em outras palavras, o retardo sofrido pela envoltória, ao passar pelo sistema, deve ser constante ao longo da banda, para que sua forma não se altere.

O retardo da envoltória também é chamado de retardo de grupo. Através do retardo de grupo, pode-se avaliar a linearidade de fase do sistema.

Vamos mostrar que isso é possível.

Supondo que $y(t)$ foi transmitido através de um sistema LTI cuja característica de transferência na banda seja dada por:

$$H(\omega) = K e^{j\theta(\omega)} \quad (2-64)$$

Considerando a característica de fase uma função de ω , a transmissão será sem distorção se $\theta(\omega) = -\omega t_0$. Vamos supor que a característica de fase tenha alguma não linearidade ao longo da banda, como seria o caso de um sistema prático, como por exemplo a característica de fase do FPB dado na Figura 2-52. A rigor, portanto, temos uma transmissão com distorção.

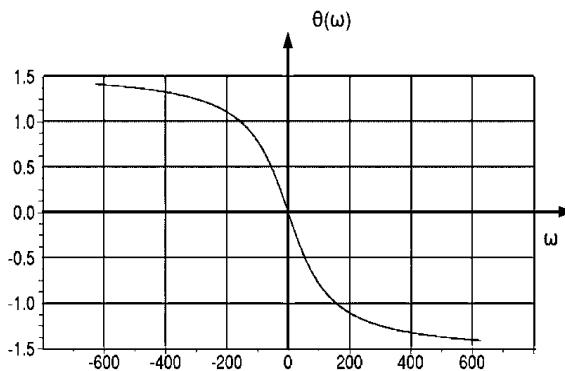


Figura 2-52

Entretanto, supondo que a banda de passagem B do sinal $y(t)$, dado pela Equação (2-60), seja << W, a banda de passagem do sistema LTI considerado, podemos aproximar $\theta(\omega)$ pelos dois primeiros termos da expansão de $\theta(\omega)$ em uma série de Taylor em torno do ponto ω_p :

$$\theta(\omega) = \theta_p + (\omega - \omega_p)\theta'_p + \frac{(\omega - \omega_p)^2}{2}\theta''_p + \dots \quad (2-65)$$

onde

$$\theta_p = \theta(\omega_p), \quad \theta'_p = \left. \frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_p} \quad (2-66)$$

Estaríamos assim fazendo uma linearização da curva de fase, para um sinal $y(t)$ de banda estreita.

Uma vez que o sinal $y(t)$ é aplicado em sua entrada, o espectro do sinal $y_p(t)$ na saída do sistema é dado por $Y_p(\omega)$:

$$\begin{aligned}
 Y_p(\omega) &= H(\omega)Y(\omega) \\
 &= KX(\omega - \omega_p)e^{j\theta(\omega)} \\
 &= KX(\omega - \omega_p)e^{j\theta_p}e^{j(\omega - \omega_p)\theta_p} \\
 &= KX(\omega - \omega_p)e^{-j(\omega - \omega_p)t_g}e^{j\theta_p}
 \end{aligned} \tag{2-67}$$

onde

$$t_g = -\theta_p'$$

Portanto, $y_p(t)$ pode ser obtido calculando-se a transformada inversa de $Y_p(\omega)$, ou seja, a transformada inversa da Equação (2-67).

Sabemos que:

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0} \tag{2-68}$$

(propriedade do desvio no tempo) e que:

$$z(t)e^{j\omega_p t} \leftrightarrow Z(\omega - \omega_p) \tag{2-69}$$

(propriedade do desvio na frequência)

Logo, pela combinação das Equações (2-68) e (2-69), concluímos que:

$$y_p(t) = Kx(t - t_g)e^{j(\omega_p t + \theta_p)} \tag{2-70}$$

A projeção sobre o eixo real fornece:

$$\varphi_p(t) = Kx(t - t_g)\cos(\omega_p t + \theta_p) \tag{2-71}$$

Portanto, o sinal $y(t)$ foi defasado de $\theta_p = \theta(\omega_p)$ na frequência ω_p , correspondendo a um retardo $t_p = -\theta_p/\omega_p$. Entretanto, a envoltória de $y(t)$ sofreu um retardo de $t_g = -\theta_p'$. t_p é chamado o retardo da portadora, e t_g o retardo de grupo ou retardo da envoltória. Portanto, o retardo de grupo, cuja constância ao longo da faixa de interesse define a linearidade de fase do sistema, pode ser avaliado através do

retardo que a envoltória de um sinal como $y(t)$ definido pela Equação (2-60) sofre ao ser processado pelo sistema.

Distorção não linear

Um sistema contendo elementos não lineares não pode ser descrito por funções de transferência $H(\omega)$, que são derivadas de funções íntegro diferenciais lineares.

Ao invés da função de transferência $H(\omega)$, pode-se utilizar a relação entre valores instantâneos da entrada e da saída que define uma “característica de transferência”, ou “curva característica do sistema”.

Sob condições de pequenas variações do sinal de entrada em torno de um ponto de operação, pode ser possível a linearização da curva característica, conforme exemplificado na Figura 2-53.

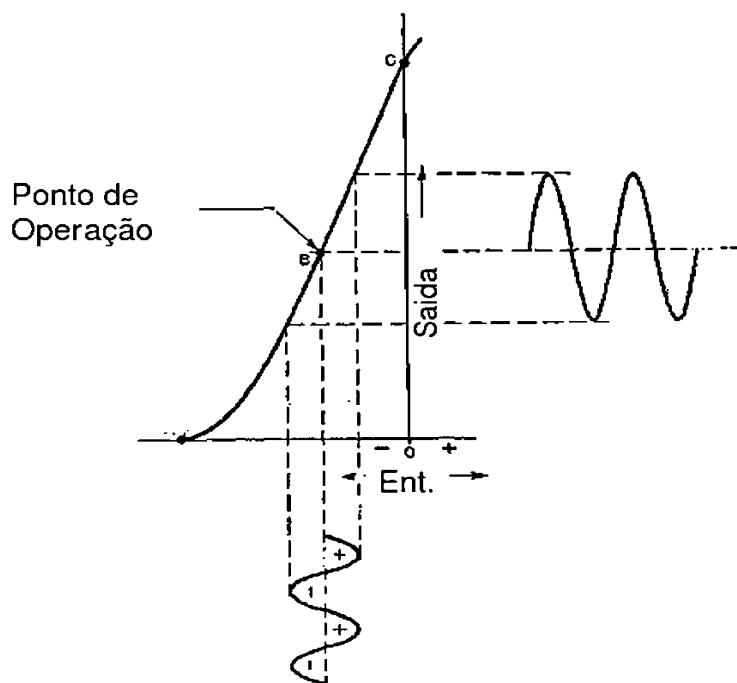


Figura 2-53

Um modelo mais geral é a aproximação da curva de transferência por:

$$y(t) = a_0 + a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t) + \dots \quad (2-72)$$

onde $x(t)$ é a entrada e $y(t)$ é a saída.

Linearização em torno do ponto de operação

Neste caso, supondo que

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$$

sendo $X(\omega)$ limitado em frequência a BHz.

Portanto

$$\begin{aligned} Y(\omega) = & 2\pi a_0 \delta(\omega) + a_1 X(\omega) + \frac{a_2}{2\pi} X(\omega) * X(\omega) + \\ & + \frac{a_3}{(2\pi)^2} X(\omega) * X(\omega) * X(\omega) + \dots \end{aligned}$$

Sendo $X(\omega)$ limitado em frequência à Bhz, temos que:

$$X(\omega) * X(\omega)$$

é limitado em frequência a 2BHz e

$$X(\omega) * X(\omega) * X(\omega)$$

é limitado à 3BHz e assim sucessivamente.

A não linearidade provocou, portanto, o aparecimento de componentes de frequências na saída que não existiam na entrada, e que se sobrepõem às frequências que estavam originalmente na banda. Utilizando filtragem, as componentes adicionadas para $|\omega| > 2\pi B$ podem ser removidas, mas permanecem as componentes para $|\omega| < 2\pi B$.

Para obter uma avaliação quantitativa, é necessário especificar o sinal $x(t)$.

Fazendo-se $x(t) = \cos \omega_0 t$, têm-se:

$$\begin{aligned} y(t) = & (a_0 + \frac{a_2}{2} + \frac{3a_4}{8} + \dots) + (a_1 + \frac{3a_3}{4} + \dots) \cos \omega_0 t + \\ & + (\frac{a_2}{2} + \frac{a_4}{4} + \dots) \cos 2\omega_0 t + \dots \end{aligned}$$

Vê-se que, em virtude da distorção não linear, aparecem na saída harmônicas da frequência de entrada. Os valores numéricos de a_0 , a_1 , a_2 , a_3 etc, dependem do

sistema.

Este tipo de distorção não linear é também chamada distorção harmônica. Ela pode ser quantizada relacionando-se a amplitude de cada harmônico com a amplitude da fundamental. Assim, por exemplo, a distorção harmônica de 2^a ordem é:

$$\text{Dist. harm. de 2ª ordem (\%)} = \frac{\frac{a_2}{2} + \frac{a_4}{4} + \dots}{a_1 + \frac{3a_3}{4} + \dots} \cdot 100\%$$

Harmônicas de ordem mais alta são tratadas de forma similar.

Se a entrada $x(t)$ é uma soma de senoides, $\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t$, a saída inclui todos os harmônicos de ω_1 e ω_2 , mais os termos resultantes de produto cruzado que levarão à frequências $\omega_2 + \omega_1$, $\omega_2 - \omega_1$, $\omega_2 - 2\omega_1$, etc. Essas frequências, somas e diferenças das frequências de entrada e seus harmônicos, são chamadas de produtos de intermodulação.

EXERCÍCIOS – Sequência R

R-2.1-Estabeleça um método para medição em laboratório da distorção de atenuação de um sistema de uma entrada e uma saída.

Você dispõe dos seguintes equipamentos:

Um gerador de sinais, capaz de gerar sinais senoidais em freqüências ajustáveis na banda W do sistema em teste, com amplitude pico a pico ajustável de 0 à 3 V e impedância de saída baixa, em torno de $5\ \Omega$.

Um medidor de valores rms, capaz de medir na banda do sistema, com alta impedância de entrada (da ordem de $10\ K\Omega$), com escala calibrada em V.

Sabemos que a precisão dos valores de amplitude gerados e medidores, por limitações do instrumental, é de $\pm 20\%$ do valor nominal, mas desejamos uma precisão nas medições pelo menos igual ao dobro da especificada para a estabilidade dos aparelhos, que é de $\pm 1\%$ do valor nominal.

O sistema sob teste possui impedância de entrada e saída nominais de 600Ω e atenuação de 3 dB no centro da banda, e o sinal de teste de entrada deve gerar uma potência de -10dbm0 nominais em toda a banda a ser medida.

Pelo menos 10 valores de frequência devem ser avaliados, igualmente espaçados na banda do sistema. Espera-se que a distorção de atenuação seja inferior a $\pm 1\ dB$ na banda medida.

Especifique o valor nominal de tensão de saída (valores pico a pico) do gerador de sinais a ser utilizado, o método de teste e a faixa de valores esperados como resultado da medição caso o sistema esteja corretamente ajustado.

R-2.2-A Figura 2/G.713, especificada pelo ITU-T é relativa à distorção com a frequência do retardo de grupo esperado entre interfaces a 2 fios de canais PCM em freqüências de voz (Recomendação G.713 do ITU-T). A referência é o retardo de grupo mínimo medido na banda, o qual não deve exceder $750\mu s$. Foram obtidos os seguintes valores em uma medição: Valor mínimo (em 1000Hz): $650,0\mu s$. Em 1100Hz: $650,2\mu s$. Em 1200Hz: $650,5\mu s$; Em 2020Hz: $656,0\mu s$. Você aceitaria esse sistema como atendendo à Recomendação? Porquê?

R-2.3-Um sinal de “banda de passagem” pode ser representado pela

Equação (2-73):

$$g(t) = g_1(t) \cos \omega_p t - g_2(t) \sin \omega_p t \quad (2-73)$$

$g_1(t)$ e $g_2(t)$ são sinais passa baixa limitados em frequência à $[(\omega_2 - \omega_1)/4\pi]$ Hz.

Sugestão-Mostre que para um sinal com uma banda de passagem, a condição para transmissão sem distorção através de um sistema com função de transferência H como na Figura 2-54 se reduz a:

$$|H(\omega)| = k \quad \text{e} \quad -\frac{d\theta_h}{d\omega} = t_g \quad (\text{constante})$$

t_g é constante ao longo da banda.

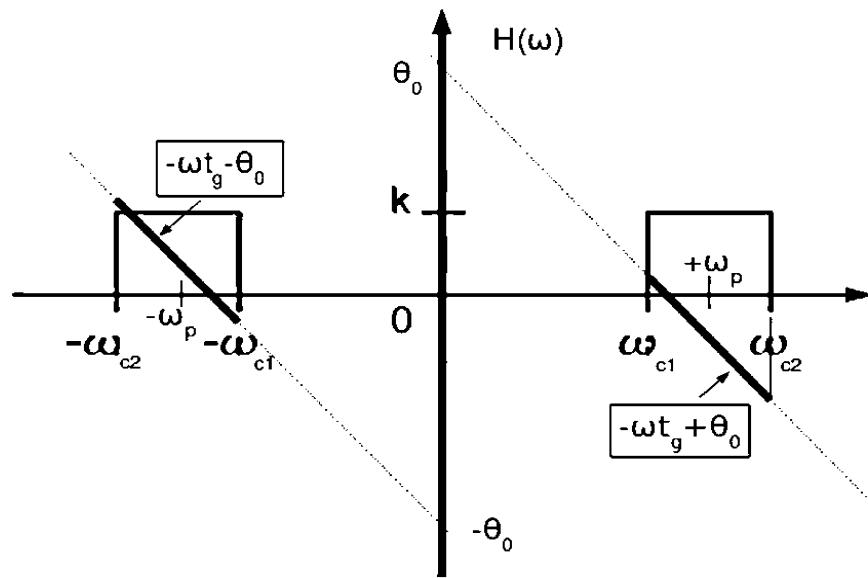


Figura 2-54

R-2.4- Justifique adequadamente que o valor t_g do Exercício R-2.3 representa efetivamente o retardo da envoltória de $g_0(t)$.

R-2.5-Mostre que o retardo de grupo t_g do Exercício R-2.3- é diferente do retardo existente na frequência ω_p .

R-2.6-Considere un FPB RC como na Figura 2-24. Este filtro pode ser considerado sem distorção para sinais passa baixa com banda $B << 1/(2\pi RC)$. Faça uma pesquisa em artigos e sites da Internet e na bibliografia relacionada e mostre que mesmo em frequências $f > 1/(2\pi RC)$, este filtro pode transmitir sinais de banda de passagem praticamente sem distorção, desde que o sinal tenha uma largura de banda estreita.

R-2.7-Um dispositivo não linear possui $y(t) = a_0 + a_1 x(t) + a_2 x^2(t)$. Se $x(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$, relate as componentes de frequência presentes em $y(t)$. Supondo agora que $\omega_2 = 3\omega_1/2$, e que $y(t)$ é processado por um FPB ideal com frequência de corte = ω_2 , relate agora as componentes de frequência na saída do filtro.

Bibliografia

1-Autor: A.B. CARLSON

Título: Communication Systems: An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication

Editoria: McGraw-Hill, 1968

2-Autor: S. HAYKIN

Título: An Introduction to Analog and Digital Communications

Editoria: John Wiley and Sons, 1989

3-Autor: S. HAYKIN

Título: Communication Systems Third Edition

Editoria: John Wiley & Sons, 1994

Outros livros de interesse:

Proakis & Salhe (Ing. de sist. de com. em geral);

B. P. Lathi (Telecommunication Systems);

Clark Hess (circuitos eletrônicos para realizar modulação).