

A. E. Fitzgerald  
Charles Kingsley, Jr.  
Stephen D. Umans

# MÁQUINAS ELÉTRICAS

6ª Edição

Com introdução à eletrônica de potência



Materiał chroniony prawem autorskim

# SUMÁRIO RESUMIDO

---

<b><u>CAPÍTULO 1</u></b>	<b><u>Circuitos Magnéticos e Materiais Magnéticos</u></b>	<b><u>19</u></b>
<b><u>CAPÍTULO 2</u></b>	<b><u>Transformadores</u></b>	<b><u>69</u></b>
<b><u>CAPÍTULO 3</u></b>	<b><u>Princípios de Conversão Eletromecânica de Energia</u></b>	<b><u>119</u></b>
<b><u>CAPÍTULO 4</u></b>	<b><u>Introdução às Máquinas Rotativas</u></b>	<b><u>174</u></b>
<b><u>CAPÍTULO 5</u></b>	<b><u>Máquinas Síncronas</u></b>	<b><u>239</u></b>
<b><u>CAPÍTULO 6</u></b>	<b><u>Máquinas Polifásicas de Indução</u></b>	<b><u>295</u></b>
<b><u>CAPÍTULO 7</u></b>	<b><u>Máquinas CC</u></b>	<b><u>343</u></b>
<b><u>CAPÍTULO 8</u></b>	<b><u>Máquinas de Relutância Variável e Motores de Passo</u></b>	<b><u>390</u></b>
<b><u>CAPÍTULO 9</u></b>	<b><u>Motores Mono e Bifásicos</u></b>	<b><u>432</u></b>
<b><u>CAPÍTULO 10</u></b>	<b><u>Introdução à Eletrônica de Potência</u></b>	<b><u>470</u></b>
<b><u>CAPÍTULO 11</u></b>	<b><u>Controle de Velocidade e de Conjugado</u></b>	<b><u>529</u></b>
	<b><u>Apêndice A Circuitos Trifásicos</u></b>	<b><u>593</u></b>
	<b><u>Apêndice B Tensões, Campos Magnéticos e Indutâncias de Enrolamentos CA Distribuídos</u></b>	<b><u>608</u></b>
	<b><u>Apêndice C A Transformação dq0</u></b>	<b><u>620</u></b>
	<b><u>Apêndice D Aspectos Práticos de Engenharia sobre Desempenho e a Operação de Máquinas Elétricas</u></b>	<b><u>630</u></b>
	<b><u>Apêndice E Tabela de Constantes e Fatores de Conversão para Unidades do SI</u></b>	<b><u>642</u></b>
	<b><u>Índice</u></b>	<b><u>643</u></b>

## CAPÍTULO 1

### **Circuitos Magnéticos e Materiais Magnéticos 19**

- 1.1 Introdução aos Circuitos Magnéticos 20
- 1.2 Fluxo Concatenado, Indutância e Energia 28
- 1.3 Propriedades dos Materiais Magnéticos 35
- 1.4 Excitação CA 39
- 1.5 Imãs Permanentes 45
- 1.6 Aplicações de Imãs Permanentes 50
- 1.7 Resumo 56
- 1.8 Problemas 56

## CAPÍTULO 2

### **Transformadores 69**

- 2.1 Introdução aos Transformadores 69
- 2.2 Condições sem Carga 71
- 2.3 Efeito da Corrente do Secundário; Transformador Ideal 75
- 2.4 Reatâncias no Transformador e Circuitos Equivalentes 79
- 2.5 Aspectos de Engenharia da Análise de Transformadores 84
- 2.6 Autotransformadores, Transformadores de Múltiplos Enrolamentos 91
- 2.7 Transformadores em Circuitos Trifásicos 95
- 2.8 Transformadores de Tensão e Corrente 99
- 2.9 O Sistema por Unidade 104
- 2.10 Resumo 111
- 2.11 Problemas 113

## CAPÍTULO 3

### **Princípios de Conversão Eletromecânica de Energia 119**

- 3.1 Forças e Conjugados em Sistemas de Campo Magnético 120
- 3.2 Balanço Energético 123
- 3.3 Energia em Sistemas de Campo Magnético de Excitação Única 125
- 3.4 Determinação da Força e do Conjugado Magnéticos a partir da Energia 128
- 3.5 Determinação da Força e do Conjugado Magnéticos a partir da Co-energia 134

- 3.6 Sistemas de Campo Magnético Multi-excitado 140
- 3.7 Forças e Conjugados em Sistemas com Imãs Permanentes 146
- 3.8 Equações Dinâmicas 154
- 3.9 Técnicas Analíticas 158
- 3.10 Resumo 160
- 3.11 Problemas 161

## CAPÍTULO 4

### **Introdução às Máquinas Rotativas 174**

- 4.1 Conceitos Elementares 174
- 4.2 Introdução às Máquinas CA e CC 177
- 4.3 FMM de Enrolamentos Distribuídos 187
- 4.4 Campos Magnéticos em Máquinas Rotativas 196
- 4.5 Ondas Girantes de FMM em Máquinas CA 199
- 4.6 Tensão Gerada 206
- 4.7 Conjugado em Máquinas de Pólos Não Salientes 212
- 4.8 Máquinas Lineares 223
- 4.9 Saturação Magnética 225
- 4.10 Fluxos Dispersivos 228
- 4.11 Resumo 230
- 4.12 Problemas 232

## CAPÍTULO 5

### **Máquinas Síncronas 239**

- 5.1 Introdução às Máquinas Síncronas Polifásicas 239
- 5.2 Indutâncias das Máquinas Síncronas; Circuitos Equivalentes 242
- 5.3 Características a Vazio e de Curto-Circuito 249
- 5.4 Características de Ângulo de Carga em Regime Permanente 258
- 5.5 Características de Operação em Regime Permanente 266
- 5.6 Efeitos dos Pólos Salientes; Introdução à Teoria dos Eixos Direto e em Quadratura 272

- 5.7 Características de Ângulo de Carga das Máquinas de Pólos Salientes 279
- 5.8 Motores CA de Ímã Permanente 283
- 5.9 Resumo 285
- 5.10 Problemas 287

#### CAPÍTULO 6

### **Máquinas Polifásicas de Indução 295**

- 6.1 Introdução às Máquinas de Indução Polifásicas 295
- 6.2 Correntes e Fluxos em Máquinas de Indução Polifásicas 300
- 6.3 Circuito Equivalente do Motor de Indução 302
- 6.4 Análise do Circuito Equivalente 305
- 6.5 Conjugado e Potência Usando o Teorema de Thévenin 310
- 6.6 Determinação de Parâmetros a partir de Ensaio a Vazio e com Rotor Bloqueado 318
- 6.7 Efeitos da Resistência do Rotor; Rotores Bobinados e de Dupla Gaiola de Esquilo 327
- 6.8 Resumo 334
- 6.9 Problemas 335

#### CAPÍTULO 7

### **Máquinas CC 343**

- 7.1 Introdução 343
- 7.2 Ação do Comutador 350
- 7.3 Efeito da FMM da Armadura 352
- 7.4 Fundamentos Analíticos: Aspectos do Circuito Elétrico 355
- 7.5 Fundamentos Analíticos: Aspectos do Circuito Magnético 359
- 7.6 Análise de Desempenho em Estado Permanente 363
- 7.7 Máquinas CC de Ímã Permanente 369
- 7.8 Comutação e Interpolos 374
- 7.9 Enrolamentos de Compensação 377
- 7.10 Motores Série Universais 379
- 7.11 Resumo 380
- 7.12 Problemas 381

#### CAPÍTULO 8

### **Máquinas de Relutância Variável e Motores de Passo 390**

- 8.1 Fundamentos da Análise MRV 390
- 8.2 Configurações MRV Práticas 398
- 8.3 Formas de Onda na Produção de Conjugado 403
- 8.4 Análise Não-linear 412
- 8.5 Motores de Passo 418
- 8.6 Resumo 426
- 8.7 Problemas 428

#### CAPÍTULO 9

### **Motores Mono e Bifásicos 432**

- 9.1 Motores de Indução Monofásicos: um Exame Qualitativo 432
- 9.2 Desempenhos de Partida e de Funcionamento dos Motores Monofásicos de Indução e Síncronos 435
- 9.3 Teoria do Campo Girante de Motores de Indução Monofásicos 443
- 9.4 Motores de Indução Bifásicos 449
- 9.5 Resumo 466
- 9.6 Problemas 467

#### CAPÍTULO 10

### **Introdução à Eletrônica de Potência 470**

- 10.1 Chaves de Potência 470
- 10.2 Retificação: Conversão CA-CC 482
- 10.3 Inversão: Conversão CC-CA 510
- 10.4 Resumo 521
- 10.5 Bibliografia 523
- 10.6 Problemas 523

#### CAPÍTULO 11

### **Controle de Velocidade e Conjugado 529**

- 11.1 Controle de Motores CC 529
- 11.2 Controle de Motores Síncronos 547
- 11.3 Controle de Motores de Indução 563

- 11.4 Controle de Motores de Relutância Variável 579
- 11.5 Resumo 582
- 11.6 Bibliografia 583
- 11.7 Problemas 584

APÊNDICE A

**Circuitos Trifásicos 593**

- A.1 Geração de Tensões Trifásicas 593
- A.2 Tensões, Correntes e Potências Trifásicas 595
- A.3 Circuitos com Ligações em Y e  $\Delta$  599
- A.4 Análise de Circuitos Trifásicos Equilibrados; Diagramas Unifilares 604
- A.5 Outros Sistemas Polifásicos 606

APÊNDICE B

**Tensões, Campos Magnéticos e Indutâncias de Enrolamentos CA Distribuídos 608**

- B.1 Tensões Geradas 608
- B.2 Ondas de FMM de Armadura 614
- B.3 Indutâncias de Entreferro de Enrolamentos Distribuídos 616

APÊNDICE C

**A Transformação dq0 620**

- C.1 Transformação para Variáveis de Eixo Direto e em Quadratura 620
- C.2 Relações Básicas das Máquinas Síncronas com Variáveis dq0 622
- C.3 Relações Básicas das Máquinas de Indução em Variáveis dq0 626

APÊNDICE D

**Aspectos de Engenharia sobre o Desempenho e a Operação Prática de Máquinas Elétricas 630**

- D.1 Perdas 630
- D.2 Características Nominais e Aquecimento 632
- D.3 Métodos de Refrigeração das Máquinas Elétricas 636
- D.4 Excitação 637
- D.5 Eficiência Energética das Máquinas Elétricas 640

APÊNDICE E

**Tabela de Constantes e Fatores de Conversão para Unidades SI 642**

ÍNDICE 643

# Circuitos Magnéticos e Materiais Magnéticos

O objetivo deste livro é o estudo dos dispositivos usados na interconversão eletromecânica de energia. É dada ênfase às máquinas rotativas eletromagnéticas, pois é através delas que ocorre a maior parte dessa conversão. No entanto, as técnicas desenvolvidas aplicam-se genericamente a uma larga faixa de outros dispositivos, incluindo-se máquinas lineares, atuadores e sensores.

Mesmo não sendo um dispositivo de conversão eletromecânica de energia, o transformador é um importante componente do processo global de conversão energética e será discutido no Capítulo 2. As técnicas desenvolvidas na análise dos transformadores formam a base da discussão sobre máquinas elétricas que se seguirá após.

Praticamente todos os transformadores e máquinas elétricas usam material ferromagnético para direcionar e dar forma a campos magnéticos, os quais atuam como meio de transferência e conversão de energia. Materiais magnéticos permanentes, ou ímãs, também são largamente usados. Sem esses materiais, não seriam possíveis as implementações práticas da maioria dos dispositivos eletromecânicos de conversão de energia. A capacidade de analisar e descrever sistemas que contenham esses materiais é essencial ao projeto e entendimento desses dispositivos.

Este capítulo desenvolverá algumas ferramentas básicas para a análise de sistemas que usam campos magnéticos. Dará também uma breve introdução às propriedades dos materiais magnéticos usados na prática. Então, no Capítulo 2, esses resultados serão aplicados à análise de transformadores e, nos capítulos seguintes, serão usados na análise de máquinas rotativas.

Neste livro, assume-se que o leitor tenha um conhecimento básico da teoria de campos magnéticos e elétricos, tal como é dada em disciplinas básicas de física para estudantes de engenharia. É possível que alguns leitores já tenham tido uma disciplina sobre a teoria do campo eletromagnético com base nas equações de Maxwell. Entretanto, uma compreensão profunda das equações de Maxwell não é um pré-requisito para o estudo deste livro. As técnicas de análise de circuitos magnéticos representam aproximações algébricas das soluções exatas da teoria de campo. São largamente usadas no estudo dos dispositivos eletromecânicos de conversão de energia, e formam a base da maioria das análises apresentadas aqui.

## 1.1 INTRODUÇÃO AOS CIRCUITOS MAGNÉTICOS

Em engenharia, a solução completa e detalhada dos campos magnéticos da maioria das aplicações de interesse prático envolve a solução das equações de Maxwell, juntamente com várias relações constitutivas que descrevem as propriedades dos materiais. Embora, na prática, soluções exatas não sejam freqüentemente alcançáveis, diversas suposições simplificadoras permitem obter soluções úteis em engenharia.<sup>1</sup>

Começamos supondo que, para os sistemas considerados neste livro, as freqüências e os tamanhos envolvidos são tais que o termo da corrente de deslocamento das equações de Maxwell pode ser desconsiderado. Esse termo, associado à radiação eletromagnética, é responsável pelos campos magnéticos que ocorrem no espaço e são produzidos por campos elétricos variáveis no tempo. Desprezando esse termo, obtém-se a forma magnética quase-estática das equações de Maxwell, relacionando os campos magnéticos às correntes que os produzem.

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (1.1)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (1.2)$$

A Equação 1.1 afirma que a integral de linha da componente tangencial da *intensidade de campo magnético*  $\mathbf{H}$  ao longo de um contorno fechado  $C$  é igual à corrente total que passa através de qualquer superfície  $S$  delimitada por esse contorno. Na Equação 1.1, vemos que a origem de  $\mathbf{H}$  é a *densidade de corrente*  $\mathbf{J}$ . A Equação 1.2 afirma que a *densidade de fluxo magnético*  $\mathbf{B}$  é conservada, isto é, em uma superfície fechada, não há entrada nem saída líquida de fluxo (isso equivale a afirmar que cargas magnéticas monopolares de campos magnéticos não existem). Dessas equações, vemos que as grandezas de um campo magnético podem ser determinadas usando apenas os valores instantâneos das correntes que lhe dão origem, e que as variações no tempo dos campos magnéticos resultam diretamente das variações no tempo das fontes.

Uma segunda suposição que produz simplificações envolve o conceito de *circuito magnético*. A solução geral da intensidade de campo magnético  $\mathbf{H}$ , e da densidade de fluxo magnético  $\mathbf{B}$ , em uma estrutura de geometria complexa, é extremamente difícil. No entanto, um problema de campo tridimensional pode freqüentemente ser reduzido ao que é essencialmente um circuito equivalente unidimensional, dando soluções de exatidão aceitável em engenharia.

Um circuito magnético consiste em uma estrutura que, em sua maior parte, é composta por material magnético de permeabilidade elevada. A presença de um material de alta permeabilidade tende a fazer com que o fluxo magnético seja confinado aos caminhos delimitados pela estrutura, do mesmo modo que, em um circuito elétrico, as correntes são confinadas aos condutores. O uso desse conceito de circuito magnético será ilustrado nesta seção e, ao longo do livro, veremos como ele se aplica muito bem a diversas situações.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Embora soluções analíticas exatas não sejam possíveis de se obter, as soluções numéricas baseadas em computador (como as dos métodos dos elementos finitos ou dos elementos de contorno, que embasam uma série de programas comerciais) são bem comuns e tornaram-se ferramentas indispensáveis de análise e projeto. No entanto, essas técnicas são melhor utilizadas para refinar as análises baseadas em métodos analíticos tais como as encontradas neste livro. O seu uso pouco contribui para uma compreensão dos princípios fundamentais e do desempenho básico das máquinas elétricas e, por essa razão, não serão discutidas neste livro.

<sup>2</sup> Para um tratamento mais amplo dos circuitos magnéticos, veja A.E. Fitzgerald, D.E. Higgenbotham, e A. Grabel, *Basic Electrical Engineering*, 5ª ed., McGraw-Hill, 1981, Capítulo 13; também E.E. Staff, M.I.T., *Magnetic Circuits and Transformers*, M.I.T. Press, 1965, Capítulos 1 a 3.

Um exemplo simples de um circuito magnético está mostrado na Fig. 1.1. Assume-se que o núcleo seja composto de material magnético cuja permeabilidade é muito maior que a do ar ( $\mu \gg \mu_0$ ). O núcleo tem seção reta uniforme e é excitado por um enrolamento de  $N$  espiras conduzindo uma corrente de  $i$  ampères. Esse enrolamento produz um campo magnético no núcleo, como mostrado na figura.

Devido à alta permeabilidade do núcleo magnético, uma solução exata mostraria que o fluxo magnético está confinado quase que inteiramente ao núcleo. Mostraria também que as linhas de campo seguem o caminho definido pelo núcleo, e que basicamente a densidade de fluxo é uniforme em uma seção reta qualquer, porque a área desta é uniforme. O campo magnético pode ser visualizado em termos de linhas de fluxo formando laços fechados interligados com o enrolamento.

No caso do circuito magnético da Fig. 1.1, a fonte do campo magnético do núcleo é o produto  $Ni$ , em ampères-espiras (A.e). Na terminologia dos circuitos magnéticos,  $Ni$  é a *força magnetomotriz* (FMM)  $\mathcal{F}$  que atua no circuito magnético. Embora a Fig. 1.1 mostre apenas uma única bobina, os transformadores e a maioria das máquinas rotativas têm no mínimo dois enrolamentos, e  $Ni$  deve ser substituído pela soma algébrica dos ampères-espiras de todos os enrolamentos.

O *fluxo magnético*  $\phi$  que atravessa uma superfície  $S$  é a integral de superfície da componente normal de  $\mathbf{B}$ ; assim

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (1.3)$$

Em unidades SI, a unidade de  $\phi$  é o *weber* (Wb).

A Equação 1.2 afirma que o fluxo magnético líquido que entra ou sai de uma superfície fechada (igual à integral de superfície de  $\mathbf{B}$  sobre a superfície fechada) é zero. Isso equivale a dizer que qualquer fluxo que entrar em uma superfície que delimita um volume deverá deixar esse volume passando por uma outra região dessa superfície porque as linhas de fluxo magnético formam laços fechados.

Esses fatos podem ser usados para justificar a suposição de que a densidade de fluxo magnético é uniforme em uma seção reta de um circuito magnético, como no núcleo da Fig. 1.1. Nesse caso, a Equação 1.3 reduz-se à equação escalar simples\*

$$\phi_c = B_c A_c \quad (1.4)$$

onde  $\phi_c$  = fluxo no núcleo

$B_c$  = densidade de fluxo no núcleo

$A_c$  = área da seção reta do núcleo

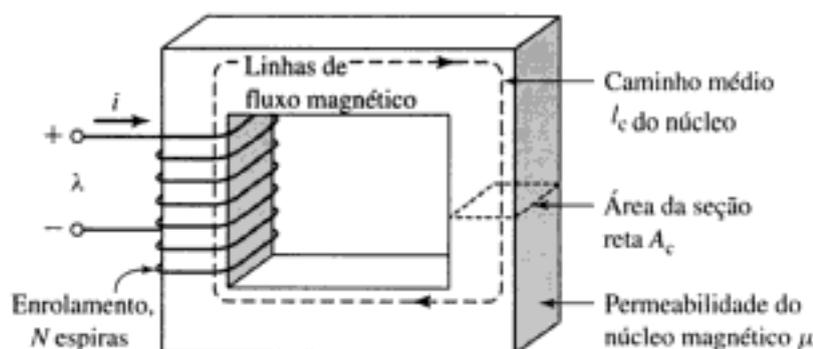


FIGURA 1.1 Circuito magnético simples.

\* N. de T.: O subscrito c refere-se a núcleo (*core* em inglês)

Da Equação 1.1, a relação entre a FMM que atua em um circuito magnético e a intensidade de campo magnético naquele circuito é<sup>3</sup>

$$\mathcal{F} = Ni = \oint \mathbf{H}d\mathbf{l} \quad (1.5)$$

As dimensões do núcleo são tais que o comprimento do caminho de qualquer linha de fluxo é aproximadamente igual ao comprimento médio do núcleo  $l_c$ . Como resultado, a integral de linha da Equação 1.5 torna-se simplesmente o produto escalar  $H_c l_c$  do módulo de  $\mathbf{H}$  vezes o comprimento médio  $l_c$  do caminho de fluxo. Assim, a relação entre a FMM e a intensidade de campo magnético pode ser escrita, na terminologia dos circuitos magnéticos, como

$$\mathcal{F} = Ni = H_c l_c \quad (1.6)$$

onde  $H_c$  é o módulo médio de  $\mathbf{H}$  no núcleo.

O sentido de  $H_c$  no núcleo pode ser encontrado a partir da *regra da mão direita*, que pode ser enunciada de dois modos equivalentes. (1) Imagine uma corrente sendo transportada em um condutor segurada por uma mão, com o polegar apontando no sentido da corrente. Então, os demais dedos apontarão no sentido do campo magnético criado por essa corrente. (2) De forma equivalente, se a bobina da Fig. 1.1 for segura na mão direita (falando figurativamente), com os dedos apontando no sentido da corrente, então o polegar apontará no sentido do campo magnético.

A relação entre a intensidade de campo magnético  $\mathbf{H}$  e a densidade de fluxo magnético  $\mathbf{B}$  é uma propriedade do material em que se encontra o campo magnético. Costuma-se supor uma relação linear; assim

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.7)$$

onde  $\mu$  é conhecida como *permeabilidade magnética*. Em unidades do SI,  $\mathbf{H}$  é medida em *ampères por metro*,  $\mathbf{B}$  em *webers por metro quadrado* ou, como também é conhecida, em *teslas* (T), e  $\mu$  em *webers por ampère-espira-metro* ou, de forma equivalente, em *henrys por metro*. Em unidades do SI, a permeabilidade do vácuo é  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  henrys por metro. A permeabilidade dos materiais magnéticos lineares pode ser expressa em termos de  $\mu_r$ , seu valor relativo ao do vácuo, ou  $\mu = \mu_r \mu_0$ . Valores típicos de  $\mu_r$  variam de 2.000 a 80.000 para os materiais usados em transformadores e máquinas rotativas. As características dos materiais ferromagnéticos estão descritas nas Seções 1.3 e 1.4. Por enquanto, vamos assumir que  $\mu_r$  seja uma constante conhecida, embora na realidade varie apreciavelmente em função do valor da densidade de fluxo magnético.

Os transformadores são enrolados em núcleos fechados como o da Fig. 1.1. No entanto, os dispositivos de conversão de energia que contêm um elemento móvel devem incluir entreferros de ar em seus circuitos magnéticos. Um circuito magnético com um entreferro de ar está mostrado na Fig. 1.2. Quando o comprimento do entreferro  $g^*$  for muito menor do que as dimensões das faces adjacentes do núcleo, o fluxo magnético  $\phi$  seguirá o caminho definido pelo núcleo e pelo entreferro. Nesse caso, as técnicas de análise de circuitos magnéticos poderão ser usadas. Quando o comprimento do entreferro torna-se excessivamente grande, observa-se que o fluxo “dispersa-se” pelos lados do entreferro, e as técnicas de análise de circuitos magnéticos não são mais estritamente aplicáveis.

<sup>3</sup> Em geral, a queda de FMM ao longo de qualquer segmento de um circuito magnético pode ser calculada como sendo  $\int \mathbf{H}d\mathbf{l}$  naquele trecho do circuito magnético.

\* N. de T.:  $g$  do inglês *gap*, entreferro.

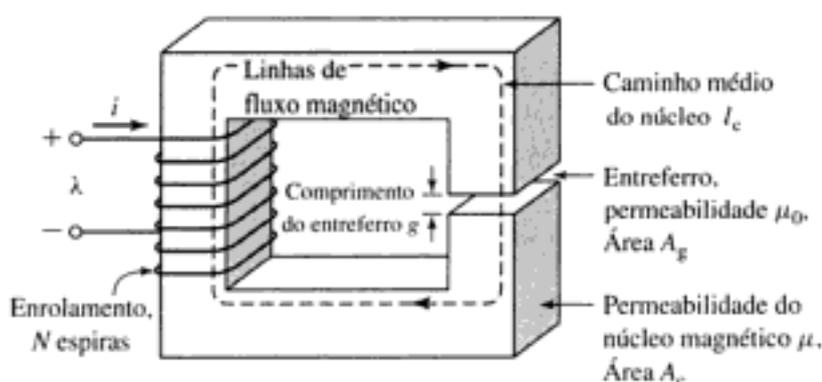


FIGURA 1.2 Circuito magnético com entreferro de ar.

Assim, desde que o comprimento do entreferro  $g$  seja suficientemente pequeno, a configuração da Fig. 1.2 pode ser analisada com dois componentes em série: um núcleo magnético de permeabilidade  $\mu$ , área de seção reta  $A_c$  e comprimento médio  $l_c$ , e um entreferro de permeabilidade  $\mu_0$ , área de seção reta  $A_g$  e comprimento  $g$ . No núcleo, a densidade de fluxo pode ser suposta uniforme; assim

$$B_c = \frac{\phi}{A_c} \quad (1.8)$$

e, no entreferro,

$$B_g = \frac{\phi}{A_g} \quad (1.9)$$

onde  $\phi$  = fluxo no circuito magnético.

A aplicação da Equação 1.5 a esse circuito magnético produz

$$\mathcal{F} = H_c l_c + H_g g \quad (1.10)$$

e, usando a relação linear  $B$ - $H$  da Equação 1.7, obtém-se

$$\mathcal{F} = \frac{B_c}{\mu} l_c + \frac{B_g}{\mu_0} g \quad (1.11)$$

Aqui a  $\mathcal{F} = Ni$  é a FMM aplicada ao circuito magnético. Da Equação 1.10, vemos que uma parte da FMM,  $\mathcal{F}_c = H_c l_c$ , é necessária para produzir campo magnético no núcleo, ao passo que o restante,  $\mathcal{F}_g = H_g g$ , produz campo magnético no entreferro.

Com os materiais magnéticos da prática (como foi discutido nas Seções 1.3 e 1.4),  $B_c$  e  $H_c$  nem sempre se relacionam entre si de maneira simples através de uma permeabilidade constante conhecida  $\mu$ , como descrito pela Equação 1.7. De fato,  $B_c$  é freqüentemente um mapeamento não-linear plurívoco\* de  $H_c$ . Assim, embora a Equação 1.10 continue sendo verdadeira, ela não conduz diretamente a uma expressão simples que relacione a FMM com as densidades de fluxo, como na Equação 1.11. Ao invés disso, deve-se usar, gráfica ou analiticamente, os detalhes específicos da relação não-linear  $B_c$ - $H_c$ . No entanto, em muitos casos, o conceito de permeabilidade constante aplicada a um material dá resultados de exatidão aceitável em engenharia, sendo usado freqüentemente.

\* N. de T.: No sentido de um para muitos.

Das Equações 1.8 e 1.9, a Equação 1.11 pode ser reescrita em termos do fluxo total  $\phi$  como

$$\mathcal{F} = \phi \left( \frac{l_c}{\mu A_c} + \frac{g}{\mu_0 A_g} \right) \quad (1.12)$$

Os termos que multiplicam o fluxo nessa equação são conhecidos como sendo as *relutâncias*  $\mathcal{R}$  do núcleo e do entreferro, respectivamente,

$$\mathcal{R}_c = \frac{l_c}{\mu A_c} \quad (1.13)$$

$$\mathcal{R}_g = \frac{g}{\mu_0 A_g} \quad (1.14)$$

e, assim,

$$\mathcal{F} = \phi(\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_g) \quad (1.15)$$

Finalmente, pode-se isolar o fluxo da Equação 1.15

$$\phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_g} \quad (1.16)$$

ou

$$\phi = \frac{\mathcal{F}}{\frac{l_c}{\mu A_c} + \frac{g}{\mu_0 A_g}} \quad (1.17)$$

Em geral, para qualquer circuito magnético de relutância total  $\mathcal{R}_{\text{tot}}$ , o fluxo pode ser encontrado por

$$\phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_{\text{tot}}} \quad (1.18)$$

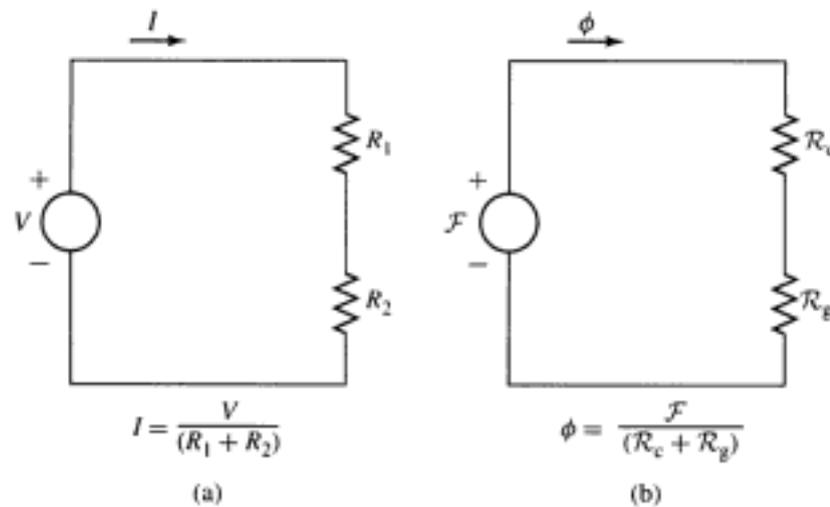
O termo que multiplica a FMM é conhecido como *permeância*  $\mathcal{P}$  e é o inverso da relutância; assim, por exemplo, a permeância total de um circuito magnético é

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = \frac{1}{\mathcal{R}_{\text{tot}}} \quad (1.19)$$

Observe que as Equações 1.15 e 1.16 são análogas às relações entre corrente e tensão, em um circuito elétrico. Essa analogia está ilustrada na Fig. 1.3. A Fig. 1.3a mostra um circuito elétrico em que uma tensão  $V$  impulsiona uma corrente  $I$  através dos resistores  $R_1$  e  $R_2$ . A Fig. 1.3b mostra a representação esquemática equivalente do circuito magnético da Fig. 1.2. Vemos aqui que a FMM  $\mathcal{F}$  (análoga à tensão no circuito elétrico) estabelece um fluxo  $\phi$  (análogo à corrente no circuito elétrico) através da combinação das relutâncias do núcleo  $\mathcal{R}_c$  e do entreferro  $\mathcal{R}_g$ . Frequentemente essa analogia entre as soluções de circuitos magnéticos e elétricos pode ser explorada para se obter as soluções dos fluxos em circuitos magnéticos de grande complexidade.

A fração de FMM necessária para impulsionar o fluxo através de cada parte do circuito magnético, comumente referida como *queda de FMM* naquela parte do circuito magnético, varia proporcionalmente à sua relutância (em analogia direta com a queda de tensão em um elemento resistivo de um circuito elétrico). Da Equação 1.13, vemos que uma alta permeabilidade no material pode resultar em uma baixa relutância de núcleo, esta pode ser tornada muito inferior à do entreferro: isto é, para  $(\mu A/l_c) \gg (\mu_0 A_g/g)$ ,  $\mathcal{R}_c \ll \mathcal{R}_g$  e assim  $\mathcal{R}_{\text{tot}} \approx \mathcal{R}_g$ . Nesse caso, a relutância do núcleo pode ser desprezada e o fluxo, e portanto  $B$ , podem ser obtidos da Equação 1.16 em termos de apenas  $\mathcal{F}$  e das propriedades do entreferro:

$$\phi \approx \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_g} = \frac{\mathcal{F} \mu_0 A_g}{g} = Ni \frac{\mu_0 A_g}{g} \quad (1.20)$$



**FIGURA 1.3** Analogia entre circuitos elétrico e magnético. (a) Circuito elétrico, (b) circuito magnético.

Como será visto na Seção 1.3, na prática, os materiais magnéticos têm permeabilidades que não são constantes mas que variam de acordo com o nível do fluxo. Das Equações 1.13 a 1.16, vemos que, enquanto essa permeabilidade permanecer suficientemente elevada, a sua variação não afetará de forma significativa o desempenho do circuito magnético.

Nos sistemas reais, as linhas de campo magnético “espraiam-se” um pouco para fora quando cruzam o entreferro, como ilustrado na Fig. 1.4. Se esse efeito de espraiamento não for excessivo, o conceito de circuito magnético continua aplicável. O efeito desses *campos de espraiamento* é aumentar a área efetiva  $A_g$  da seção reta do entreferro. Diversos métodos empíricos foram desenvolvidos para levar em conta esse efeito. Em entreferros delgados, uma correção para esses campos de espraiamento pode ser feita acrescentando-se o comprimento do entreferro a cada uma de suas duas dimensões, alterando-se assim a área de sua seção reta. Neste livro, o efeito dos campos de espraiamento é usualmente ignorado e, nesse caso, então  $A_g = A_c$ .

Geralmente, os circuitos magnéticos podem consistir em múltiplos elementos em série e em paralelo. Para completar a analogia entre circuitos elétricos e magnéticos, podemos generalizar a Equação 1.5 para

$$\mathcal{F} = \oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum_k \mathcal{F}_k = \sum_k H_k l_k \quad (1.21)$$

onde  $\mathcal{F}$  é a FMM (total em ampères-espiras) que atua impulsionando o fluxo em um laço fechado de um circuito magnético,

$$\mathcal{F} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (1.22)$$

e  $\mathcal{F}_k = H_k l_k$  é a *queda de FMM* no  $k$ -ésimo elemento daquele laço. Isso está em analogia direta com a lei das tensões de Kirchhoff aplicada a circuitos elétricos constituídos por fontes de tensão e resistores

$$V = \sum_k R_k i_k \quad (1.23)$$

onde  $V$  é a fonte de tensão que impulsiona a corrente em uma malha e  $R_k i_k$  é a queda de tensão no  $k$ -ésimo elemento resistivo daquele laço.

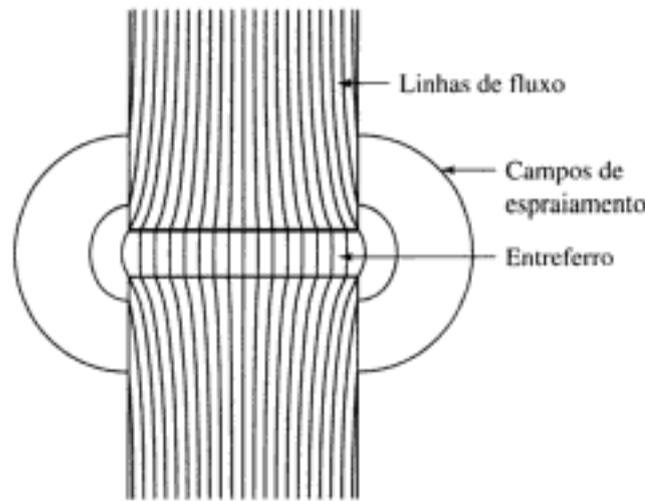


FIGURA 1.4 Campos de espraçamento no entreferro.

De modo semelhante, a equação da lei das correntes de Kirchhoff

$$\sum_n i_n = 0 \quad (1.24)$$

a qual afirma que a soma das correntes em um nó de um circuito elétrico é zero, tem como análogo a equação

$$\sum_n \phi_n = 0 \quad (1.25)$$

a qual afirma que a soma dos fluxos em um nó de um circuito magnético é zero.

Assim, descrevemos os princípios básicos para se reduzir um problema de campo magnético quase-estático de geometria simples a um *modelo de circuito magnético*. O objetivo limitado desta seção é introduzir a terminologia e alguns dos conceitos usados pelos engenheiros para resolver problemas práticos de projeto. Devemos enfatizar que esse tipo de pensamento depende fortemente do raciocínio e da intuição próprios de engenharia. Por exemplo, deixamos implícito a suposição de que a permeabilidade das partes de “ferro” do circuito magnético seja uma quantidade conhecida constante, embora geralmente isso não seja verdadeiro (veja a Seção 1.3), e que o campo magnético esteja confinado unicamente ao núcleo e a seus entreferros. Embora trate-se de uma boa suposição para muitas situações, também é verdadeiro que as correntes do enrolamento produzem campos magnéticos fora do núcleo. Como veremos, quando dois ou mais enrolamentos são colocados em um campo magnético, como ocorre no caso de transformadores e máquinas rotativas, esses campos externos ao núcleo, conhecidos como *campos de dispersão*, não podem ser ignorados e afetam de forma significativa o desempenho do dispositivo.

#### EXEMPLO 1.1

O circuito magnético mostrado na Fig. 1.2 tem as dimensões  $A_c = A_g = 9 \text{ cm}^2$ ,  $g = 0,050 \text{ cm}$ ,  $l_c = 30 \text{ cm}$  e  $N = 500$  espiras. Suponha o valor  $\mu_r = 70.000$  para o material do núcleo. (a) Encontre as relutâncias  $\mathcal{R}_c$  e  $\mathcal{R}_g$ . Dada a condição de que o circuito magnético esteja operando com  $B_c = 1,0 \text{ T}$ , encontre (b) o fluxo  $\phi$  e (c) a corrente  $i$ .

#### ■ Solução

a. A relutância pode ser obtida das Equações 1.13 e 1.14:

$$\mathcal{R}_c = \frac{l_c}{\mu_r \mu_0 A_c} = \frac{0,3}{70.000 (4\pi \times 10^{-7})(9 \times 10^{-4})} = 3,79 \times 10^3 \frac{\text{A} \cdot \text{e}}{\text{Wb}}$$

$$\mathcal{R}_g = \frac{g}{\mu_0 A_g} = \frac{5 \times 10^{-4}}{(4\pi \times 10^{-7})(9 \times 10^{-4})} = 4,42 \times 10^5 \frac{\text{A} \cdot \text{e}}{\text{Wb}}$$

b. Da Equação 1.4,

$$\phi = B_c A_c = 1,0(9 \times 10^{-4}) = 9 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

c. Das Equações 1.6 e 1.15,

$$i = \frac{\mathcal{F}}{N} = \frac{\phi(\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_g)}{N} = \frac{9 \times 10^{-4}(4,46 \times 10^5)}{500} = 0,80 \text{ A}$$

### PROBLEMA PRÁTICO 1.1

Encontre o fluxo  $\phi$  e a corrente para o Exemplo 1.1 se (a) o número de espiras for duplicado para  $N = 1000$  espiras, mantendo-se as mesmas dimensões, e (b) se o número de espiras for  $N = 500$  e o entreferro for reduzido a 0,040 cm.

#### ■ Solução

- a.  $\phi = 9 \times 10^{-4} \text{ Wb}$  e  $i = 0,40 \text{ A}$   
 b.  $\phi = 9 \times 10^{-4} \text{ Wb}$  e  $i = 0,64 \text{ A}$

### EXEMPLO 1.2

A estrutura magnética de uma máquina síncrona está mostrada esquematicamente na Fig. 1.5. Supondo que o ferro do rotor e do estator tenham permeabilidade infinita ( $\mu \rightarrow \infty$ ), encontre o fluxo  $\phi$  do entreferro e a densidade de fluxo  $B_g$ . Neste exemplo,  $I = 10 \text{ A}$ ,  $N = 1000$  espiras,  $g = 1 \text{ cm}$  e  $A_g = 2000 \text{ cm}^2$ .

#### ■ Solução

Observe que há dois entreferros em série, com comprimento total de  $2g$ , e por simetria a densidade de fluxo é igual em ambos. Como se supõe que a permeabilidade do ferro seja infini-

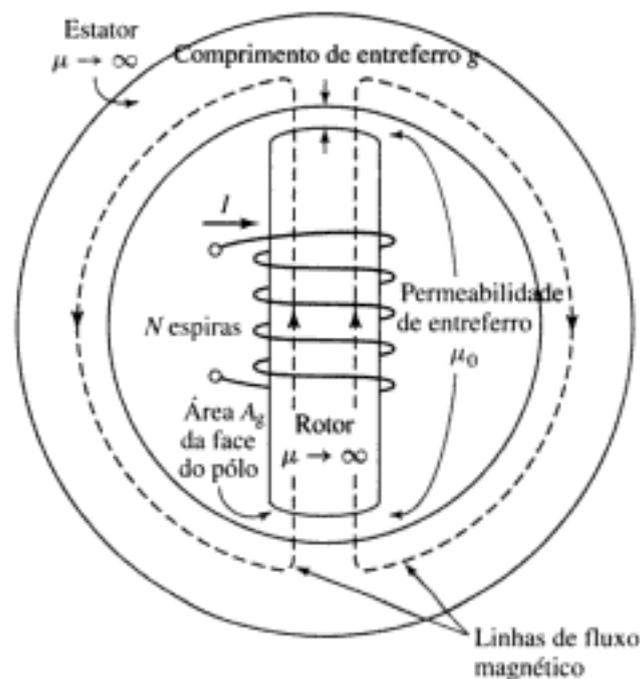


FIGURA 1.5 Máquina síncrona simples.

ta, sua relutância é desprezível e pode-se usar a Equação 1.20 (com  $g$  substituído pelo comprimento total de entreferro  $2g$ ) para obter o fluxo

$$\phi = \frac{NI\mu_0 A_g}{2g} = \frac{1000(10)(4\pi \times 10^{-7})(0,2)}{0,02} = 0,13 \text{ Wb}$$

e

$$B_g = \frac{\phi}{A_g} = \frac{0,13}{0,2} = 0,65 \text{ T}$$

### PROBLEMA PRÁTICO 1.2

Para a estrutura magnética da Fig. 1.5, com as dimensões dadas no Exemplo 1.2, observa-se que a densidade de fluxo do entreferro é  $B_g = 0,9 \text{ T}$ . Encontre o fluxo de entreferro  $\phi$  e, para uma bobina de  $N = 500$  espiras, a corrente necessária para produzir esse valor de fluxo no entreferro.

#### ■ Solução

$\phi = 0,18 \text{ Wb}$  e  $i = 28,6 \text{ A}$

## 1.2 FLUXO CONCATENADO, INDUTÂNCIA E ENERGIA

Quando um campo magnético varia no tempo, produz-se um campo elétrico no espaço de acordo com a *lei de Faraday*:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (1.26)$$

A Equação 1.26 afirma que a integral de linha da *intensidade de campo elétrico*  $\mathbf{E}$  ao longo de um contorno fechado  $C$  é igual à razão, no tempo, da variação de fluxo magnético que concatena (isto é, passa através) aquele contorno. Em estruturas magnéticas, com enrolamentos de alta condutividade elétrica, como na Fig. 1.2, pode-se mostrar que o campo  $\mathbf{E}$  no fio é extremamente pequeno podendo ser desprezado, de modo que o primeiro membro da Equação 1.26 reduz-se ao negativo da *tensão induzida*<sup>4</sup> e nos terminais do enrolamento. Além disso, no segundo membro da Equação 1.26 predomina o fluxo do núcleo  $\phi$ . Como o enrolamento (e portanto o contorno  $C$ ) concatena o fluxo do núcleo  $N$  vezes, a Equação 1.26 reduz-se a

$$e = N \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \quad (1.27)$$

onde  $\lambda$  é o *fluxo concatenado* do enrolamento definido como

$$\lambda = N\phi \quad (1.28)$$

O fluxo concatenado é medido em webers (ou de forma equivalente em webers-espiras). O símbolo  $\phi$  é usado para indicar o valor instantâneo de um fluxo variável no tempo.

Em geral, o fluxo concatenado de uma bobina é igual à integral de superfície da componente normal de densidade do fluxo magnético. A integração é realizada sobre qualquer super-

<sup>4</sup> O termo *força eletromotriz* (FEM) é usado freqüentemente ao invés de *tensão induzida* para representar aquele componente de tensão devido à variação, no tempo, do fluxo concatenado.

fície delimitada pelas espiras daquela bobina. Observe que o sentido da tensão induzida,  $e$ , é definido pela Equação 1.26 de modo que, se os terminais do enrolamento fossem curto-circuitados, uma corrente iria fluir em um sentido tal que se oporia à variação do fluxo concatenado.

Em um circuito magnético, composto de material magnético de permeabilidade constante ou que inclua um entreferro dominante, a relação entre  $\phi$  e  $i$  será linear e poderemos definir a *indutância*  $L$  como

$$L = \frac{\lambda}{i} \quad (1.29)$$

A substituição das Equações 1.5, 1.18 e 1.28 na Equação 1.29 dá

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}_{\text{tot}}} \quad (1.30)$$

Dessa equação, podemos ver que a indutância de um enrolamento em um circuito magnético é proporcional ao quadrado das espiras e inversamente proporcional à relutância do circuito magnético associado a esse enrolamento.

Por exemplo, a partir da Equação 1.20, supondo que a relutância do núcleo seja desprezível em comparação com a do entreferro, a indutância do enrolamento da Fig. 1.2 será igual a

$$L = \frac{N^2}{(g/\mu_0 A_g)} = \frac{N^2 \mu_0 A_g}{g} \quad (1.31)$$

A indutância é medida em *henrys* (H) ou *webers-espiras por ampère*. A Equação 1.31 mostra a estrutura dimensional das expressões de indutância. Ela é proporcional ao quadrado do número de espiras, a uma permeabilidade magnética, a uma área de seção reta, e inversamente proporcional a um comprimento. Deve-se enfatizar que, estritamente falando, o conceito de indutância requer uma relação linear entre fluxo e FMM. Assim, ela não pode ser aplicada rigorosamente a situações em que as características não-lineares dos materiais magnéticos, como discutido nas Seções 1.3 e 1.4, predominem no desempenho do sistema magnético. No entanto, em muitas situações de interesse prático, a relutância do sistema é dominada pela do entreferro (que naturalmente é linear), e os efeitos não-lineares dos materiais magnéticos podem ser ignorados. Em outros casos, pode ser perfeitamente aceitável assumir um valor médio para a permeabilidade magnética do material do núcleo. Para tanto, calcula-se uma indutância média correspondente, que pode ser usada com exatidão razoável em cálculos de engenharia. O Exemplo 1.3 ilustra o primeiro caso e o Exemplo 1.4, o último.

### EXEMPLO 1.3

O circuito magnético da Fig. 1.6a é constituído por uma bobina de  $N$  espiras enroladas em um núcleo magnético, de permeabilidade infinita, com dois entreferros paralelos de comprimentos  $g_1$  e  $g_2$ , e áreas  $A_1$  e  $A_2$ , respectivamente.

Encontre (a) a indutância do enrolamento e (b) a densidade de fluxo  $B_1$  no entreferro 1 quando o enrolamento está conduzindo uma corrente  $i$ . Despreze os efeitos de espriamento no entreferro.

#### ■ Solução

a. O circuito equivalente da Fig. 1.6b mostra que a relutância total é igual à combinação em paralelo das relutâncias dos dois entreferros. Assim,

$$\phi = \frac{Ni}{\frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2}}$$

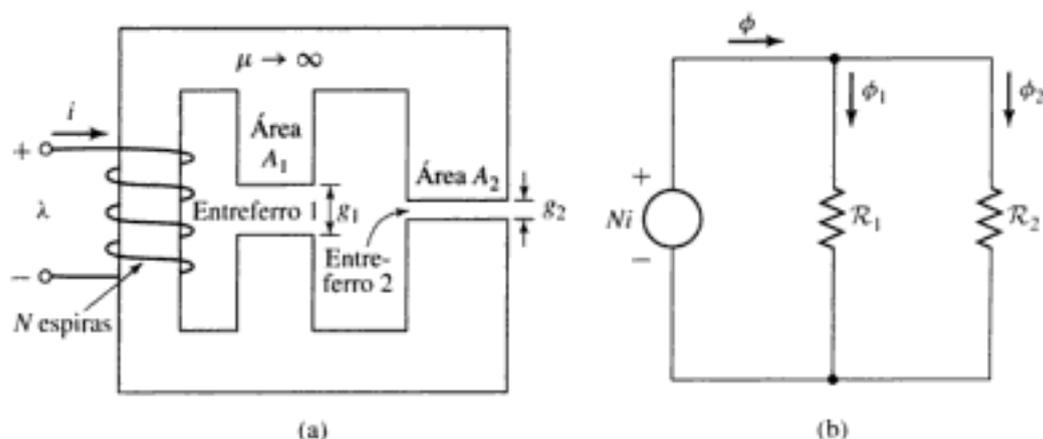


FIGURA 1.6 (a) Circuito magnético e (b) circuito equivalente para o Exemplo 1.3.

onde

$$\mathcal{R}_1 = \frac{g_1}{\mu_0 A_1} \quad \mathcal{R}_2 = \frac{g_2}{\mu_0 A_2}$$

Da Equação 1.29,

$$\begin{aligned} L &= \frac{\lambda}{i} = \frac{N\phi}{i} = \frac{N^2(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2} \\ &= \mu_0 N^2 \left( \frac{A_1}{g_1} + \frac{A_2}{g_2} \right) \end{aligned}$$

b. Do circuito equivalente, pode-se ver que

$$\phi_1 = \frac{Ni}{\mathcal{R}_1} = \frac{\mu_0 A_1 Ni}{g_1}$$

e, assim,

$$B_1 = \frac{\phi_1}{A_1} = \frac{\mu_0 Ni}{g_1}$$

#### EXEMPLO 1.4

No Exemplo 1.1, assume-se que a permeabilidade relativa do material do núcleo do circuito magnético da Fig. 1.2 seja  $\mu_r = 70.000$ , para uma densidade de fluxo de 1,0 T.

- Para esse valor de  $\mu_r$ , calcule a indutância do enrolamento.
- Em um dispositivo real, o núcleo poderia ser construído de aço elétrico, como o de tipo M-5 discutido na Seção 1.3. Esse material é altamente não-linear e sua permeabilidade relativa (definida como sendo a razão  $B/H$ , para os objetivos deste exemplo) varia entre um valor de aproximadamente  $\mu_r = 72.300$  para uma densidade de fluxo de  $B = 1,0$  T, e um valor da ordem de  $\mu_r = 2.900$ , à medida que a densidade de fluxo eleva-se até 1,8 T. (a) Calcule a indutância supondo que a permeabilidade relativa do aço do núcleo seja 72.300. (b) Calcule a indutância supondo que a permeabilidade relativa seja 2.900.

#### ■ Solução

a. Das Equações 1.13 e 1.14 e baseando-se nas dimensões dadas no Exemplo 1.1, obtém-se

$$\mathcal{R}_c = \frac{l_c}{\mu_r \mu_0 A_c} = \frac{0,3}{72.300 (4\pi \times 10^{-7})(9 \times 10^{-4})} = 3,67 \times 10^3 \frac{\text{A} \cdot \text{e}}{\text{Wb}}$$

ao passo que  $\mathcal{R}_g$  permanece inalterada, mantendo-se o valor calculado no Exemplo 1.1 de

$$\mathcal{R}_g = 4,42 \times 10^5 \frac{\text{A} \cdot \text{e}}{\text{Wb}}$$

Assim, a relutância total do núcleo e do entreferro é

$$\mathcal{R}_{\text{tot}} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_g = 4,46 \times 10^5 \frac{\text{A} \cdot \text{e}}{\text{Wb}}$$

e, portanto, da Equação 1.30

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}_{\text{tot}}} = \frac{500^2}{4,46 \times 10^5} = 0,561 \text{ H}$$

b. Para  $\mu_r = 2.900$ , a relutância do núcleo aumenta de um valor de  $3,79 \times 10^3 \frac{\text{A} \cdot \text{e}}{\text{Wb}}$  para

$$\mathcal{R}_c = \frac{l_c}{\mu_r \mu_0 A_c} = \frac{0,3}{2.900 (4\pi \times 10^{-7})(9 \times 10^{-4})} = 9,15 \times 10^4 \frac{\text{A} \cdot \text{e}}{\text{Wb}}$$

e, portanto, a relutância total aumenta de  $4,46 \times 10^5 \frac{\text{A} \cdot \text{e}}{\text{Wb}}$  para  $5,34 \times 10^5 \frac{\text{A} \cdot \text{e}}{\text{Wb}}$ . Assim, da Equação 1.30, a indutância diminui de 0,561 H para

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}_{\text{tot}}} = \frac{500^2}{5,34 \times 10^5} = 0,468 \text{ H}$$

Esse exemplo ilustra o efeito da linearização de um entreferro dominante em um circuito magnético. Apesar da redução de permeabilidade do ferro por um fator de  $72.300/2.900 = 25$ , a indutância diminui apenas de  $0,468/0,561 = 0,83$ , simplesmente porque a relutância do entreferro é significativamente maior que a do núcleo. Em muitas situações, é comum supor que a indutância seja constante, o que corresponde a uma permeabilidade de núcleo de valor finito e constante (ou, como em muitos casos, supor simplesmente que  $\mu_r \rightarrow \infty$ ). Análises baseadas nessa forma de representar um indutor levam freqüentemente a resultados que estão bem dentro da faixa de exatidão aceitável em engenharia. Isso evita a enorme complicação decorrente da modelagem da não-linearidade do material do núcleo.

### PROBLEMA PRÁTICO 1.3

Repita o cálculo de indutância do Exemplo 1.4 para uma permeabilidade relativa de  $\mu_r = 30.000$ .

#### ■ Solução

$$L = 0,554 \text{ H}$$

### EXEMPLO 1.5



Usando MATLAB<sup>†</sup>, faça um gráfico da indutância do circuito magnético do Exemplo 1.1 e da Fig. 1.2, em função da permeabilidade do núcleo no intervalo  $100 \leq \mu_r \leq 100.000$ .

#### ■ Solução

Aqui está o *script* para MATLAB:

```
clc
clear
% Permeabilidade do vácuo
mu0=pi*4.e-7;
```

<sup>†</sup> MATLAB é uma marca registrada da The MathWorks, Inc.

```

%Todas as dimensões expressas em metros
Ac=9e-4; Ag=9e-4; g=5e-4; lc=0,3;
N=500;

%Relutância do entreferro
Rg=g/(mu0*Ag);

for n=1:101
mur(n) = 100 + (100000 - 100)*(n-1)/100;
%Relutância do núcleo
Rc(n)=lc/(mur(n)*mu0*Ac);
Rtot=Rg+Rc(n);
%Indutância
L(n)=N^2/Rtot;
end

plot(mur,L)
xlabel('Permeabilidade relativa do núcleo')
ylabel('Indutância [H]')

```

O gráfico resultante está mostrado na Fig. 1.7. Observe que a figura confirma claramente que, no circuito magnético deste exemplo, a indutância é bastante insensível à permeabilidade relativa enquanto esta não baixar até a ordem de 1.000. Assim, enquanto a permeabilidade relativa efetiva do núcleo for “elevada” (neste caso, superior a 1.000), qualquer não-linearidade nas propriedades do núcleo terá um efeito pequeno nas propriedades finais do indutor.

#### PROBLEMA PRÁTICO 1.4



Escreva um *script* de MATLAB para plotar a indutância do circuito magnético do Exemplo 1.1, no qual  $\mu_r = 70.000$ , em função do comprimento do entreferro, quando este varia de 0,01 cm até 0,10 cm.

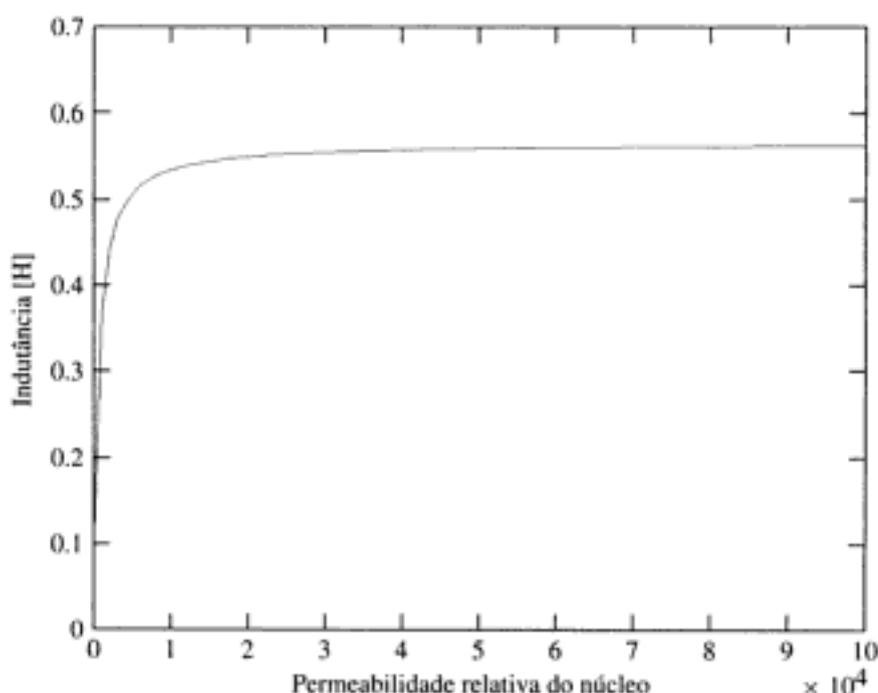


FIGURA 1.7 Gráfico de MATLAB da indutância versus a permeabilidade relativa do Exemplo 1.5.

A Fig. 1.8 mostra um circuito magnético com um entreferro e dois enrolamentos. Nesse caso, observe que a FMM do circuito magnético é dada pelo *total de ampères-espiras* que atua no circuito magnético (isto é, o total líquido de ampères-espiras de ambos os enrolamentos) e que os sentidos de referência das correntes foram escolhidos de modo a produzirem fluxos no mesmo sentido. A FMM total é, portanto,

$$\mathcal{F} = N_1 i_1 + N_2 i_2 \quad (1.32)$$

e, da Equação 1.20, desprezando a relutância do núcleo e assumindo que  $A_c = A_g$ , o fluxo do núcleo  $\phi$  é

$$\phi = (N_1 i_1 + N_2 i_2) \frac{\mu_0 A_c}{g} \quad (1.33)$$

Na Equação 1.33,  $\phi$  é o *fluxo resultante no núcleo*, produzido pela FMM total dos dois enrolamentos. É esse  $\phi$  resultante que determina o ponto de operação do material do núcleo.

Se a Equação 1.33 for decomposta em termos relacionados individualmente com cada corrente, o fluxo concatenado resultante da bobina 1 pode ser expresso como

$$\lambda_1 = N_1 \phi = N_1^2 \left( \frac{\mu_0 A_c}{g} \right) i_1 + N_1 N_2 \left( \frac{\mu_0 A_c}{g} \right) i_2 \quad (1.34)$$

que pode ser escrita como

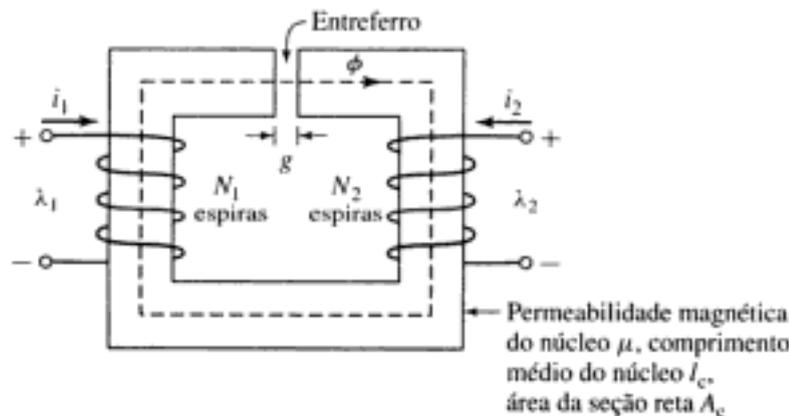
$$\lambda_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 \quad (1.35)$$

onde

$$L_{11} = N_1^2 \frac{\mu_0 A_c}{g} \quad (1.36)$$

é a *indutância própria\** da bobina 1 e  $L_{11} i_1$  é o fluxo concatenado da bobina 1 devido à sua própria corrente  $i_1$ . A *indutância mútua* entre as bobinas 1 e 2 é

$$L_{12} = N_1 N_2 \frac{\mu_0 A_c}{g} \quad (1.37)$$



**FIGURA 1.8** Circuito magnético com dois enrolamentos.

\* N. de T.: Também conhecida como auto-indutância.

e  $L_{12}i_2$  é o fluxo concatenado da bobina 1 devido à corrente  $i_2$  na outra bobina. Do mesmo modo, o fluxo concatenado da bobina 2 é

$$\lambda_2 = N_2\phi = N_1N_2 \left( \frac{\mu_0 A_c}{g} \right) i_1 + N_2^2 \left( \frac{\mu_0 A_c}{g} \right) i_2 \quad (1.38)$$

ou

$$\lambda_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 \quad (1.39)$$

onde  $L_{21} = L_{12}$  é a indutância mútua e

$$L_{22} = N_2^2 \frac{\mu_0 A_c}{g} \quad (1.40)$$

é a indutância própria da bobina 2.

É importante observar que a decomposição dos fluxos concatenados resultantes em duas componentes produzidas por  $i_1$  e  $i_2$  baseia-se na superposição dos efeitos individuais e, portanto, implica uma relação linear fluxo-FMM (característica de materiais de permeabilidade constante).

A substituição da Equação 1.29 na Equação 1.27 resulta em

$$e = \frac{d}{dt}(Li) \quad (1.41)$$

para o caso de um circuito magnético com um único enrolamento. Em um circuito magnético estático, a indutância é fixa (supondo que as não-linearidades do material não causem variações na indutância). Então, essa equação reduz-se à forma familiar da teoria de circuitos

$$e = L \frac{di}{dt} \quad (1.42)$$

Freqüentemente, no entanto, em dispositivos de conversão eletromecânica de energia, as indutâncias variam no tempo e a Equação 1.41 deve ser escrita como

$$e = L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt} \quad (1.43)$$

Observe que, nos casos de enrolamentos múltiplos, o fluxo concatenado total de cada enrolamento deve ser usado na Equação 1.27, para se encontrar a tensão nos terminais do enrolamento.

Em um circuito magnético, a potência nos terminais de um enrolamento é uma medida da taxa com que o fluxo de energia flui para dentro do circuito naquele enrolamento em particular. A *potência*,  $p$ , é determinada pelo produto da tensão pela corrente

$$p = ie = i \frac{d\lambda}{dt} \quad (1.44)$$

e sua unidade é *watts* (W), ou *joules por segundo*. Assim, a variação da *energia magnética armazenada*  $\Delta W$  no circuito magnético, durante o intervalo de tempo de  $t_1$  a  $t_2$ , é

$$\Delta W = \int_{t_1}^{t_2} p dt = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} i d\lambda \quad (1.45)$$

Em unidades SI, a energia magnética armazenada  $W$  é medida em *joules* (J).

No caso de um sistema com um único enrolamento de indutância constante, a variação da energia magnética armazenada, quando o nível do fluxo varia de  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$ , pode ser escrita como

$$\Delta W = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} i d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda}{L} d\lambda = \frac{1}{2L} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \quad (1.46)$$

A energia magnética total armazenada, para qualquer valor de  $\lambda$ , pode ser obtida fazendo-se  $\lambda_1$  igual a zero:

$$W = \frac{1}{2L}\lambda^2 = \frac{L}{2}i^2 \quad (1.47)$$

**EXEMPLO 1.6**

No circuito magnético do Exemplo 1.1 (Fig. 1.2), encontre (a) a indutância  $L$ , (b) a energia magnética armazenada  $W$  quando  $B_c = 1,0$  T, e (c) a tensão induzida  $e$  para um fluxo de núcleo, que varia no tempo a 60 Hz, dado por  $B_c = 1,0 \sin \omega t$  T em que  $\omega = (2\pi)(60) = 377$ .

**■ Solução**

a. Das Equações 1.16 e 1.29 e do Exemplo 1.1,

$$\begin{aligned} L &= \frac{\lambda}{i} = \frac{N\phi}{i} = \frac{N^2}{\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_g} \\ &= \frac{500^2}{4,46 \times 10^5} = 0,56 \text{ H} \end{aligned}$$

Observe que a relutância do núcleo é muito menor que a do entreferro ( $\mathcal{R}_c \ll \mathcal{R}_g$ ). Assim, dentro de uma boa aproximação, a indutância é dominada pela relutância do entreferro, isto é,

$$L \approx \frac{N^2}{\mathcal{R}_g} = 0,57 \text{ H}$$

b. No Exemplo 1.1, encontramos que, quando  $B_c = 1,0$  T, então  $i = 0,80$  A. Portanto, da Equação 1.47,

$$W = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}(0,56)(0,80)^2 = 0,18 \text{ J}$$

c. Da Equação 1.27 e do Exemplo 1.1,

$$\begin{aligned} e &= \frac{d\lambda}{dt} = N \frac{d\phi}{dt} = NA_c \frac{dB_c}{dt} \\ &= 500 \times (9 \times 10^{-4}) \times (377 \times 1,0 \cos(377t)) \\ &= 170 \cos(377t) \text{ V} \end{aligned}$$

**PROBLEMA PRÁTICO 1.5**

Repita o Exemplo 1.6 para  $B_c = 0,8$  T, supondo que o fluxo do núcleo varie a 50 Hz, ao invés de 60 Hz.

**■ Solução**

- A indutância  $L$  permanece inalterada.
- $W = 0,115$  J
- $e = 113 \cos(314t)$  V

**1.3 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS MAGNÉTICOS**

No contexto dos dispositivos de conversão eletromecânica de energia, a importância dos materiais magnéticos é dupla. Com seu uso, é possível obter densidades elevadas de fluxo mag-

nético com níveis relativamente baixos de força magnetizante. Como as forças magnéticas e a densidade de energia elevam-se com o aumento da densidade de fluxo, esse efeito exerce um papel enorme no desempenho dos dispositivos de conversão de energia.

Além disso, os materiais magnéticos podem ser usados para delimitar e direcionar os campos magnéticos, dentro de caminhos bem definidos. Em transformadores, são usados para maximizar o acoplamento entre os enrolamentos, assim como para diminuir a corrente de excitação requerida para operar o transformador. Em máquinas elétricas, os materiais magnéticos são usados para dar forma aos campos de modo que o conjugado desejado seja produzido e as características elétricas específicas nos terminais sejam obtidas.

Os *materiais ferromagnéticos*, tipicamente compostos de ferro e de ligas de ferro com cobalto, tungstênio, níquel, alumínio e outros metais, são de longe os materiais magnéticos mais comuns. Ainda que esses materiais sejam caracterizados por uma ampla faixa de propriedades, os fenômenos básicos responsáveis por suas propriedades são comuns a todos eles.

Observa-se que os materiais ferromagnéticos são compostos por um grande número de domínios, isto é, regiões nas quais os momentos magnéticos de todos os átomos estão em paralelo, dando origem a um momento magnético resultante naquele domínio. Em uma amostra não magnetizada do material, os momentos magnéticos estão orientados aleatoriamente e o fluxo magnético líquido resultante no material é zero.

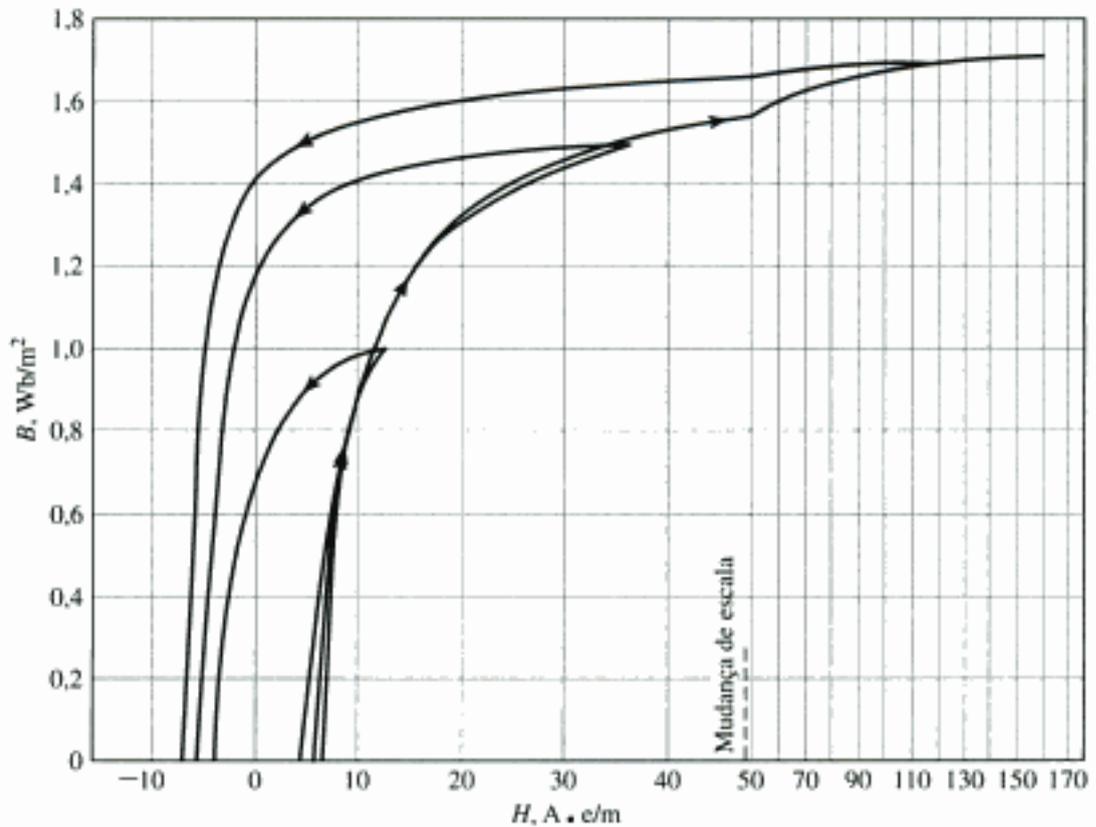
Quando uma força magnetizante externa é aplicada a esse material, os momentos dos domínios magnéticos tendem a se alinhar com o campo magnético aplicado. Como resultado, os momentos magnéticos dos domínios somam-se ao campo aplicado, produzindo um valor muito mais elevado de densidade de fluxo do que aquele que existiria devido apenas à força magnetizante. Assim, a *permeabilidade efetiva*  $\mu$ , igual à razão entre a densidade de fluxo magnético total e a intensidade do campo magnético aplicado, é elevada em comparação com a permeabilidade do vácuo  $\mu_0$ . À medida que a força magnetizante aumenta, esse comportamento continua até que todos os momentos magnéticos estejam alinhados com o campo aplicado. Nesse ponto, eles não podem mais contribuir para o aumento da densidade do fluxo magnético, e diz-se que o material está completamente *saturado*.

Na ausência de uma força magnetizante externamente aplicada, os momentos magnéticos tendem a se alinhar naturalmente de acordo com certas direções associadas à estrutura cristalina dos domínios, conhecidas como *eixos de mais fácil magnetização*. Assim, se a força magnetizante for reduzida, os momentos dos domínios magnéticos relaxam-se indo para as direções de mais fácil magnetização próximas da direção do campo aplicado. Entretanto, no final, quando o campo aplicado é reduzido até zero, os momentos dos dipolos magnéticos, embora tendendo a relaxar e a assumir suas orientações iniciais, não são mais totalmente aleatórios em suas orientações. Eles agora retêm uma componente de magnetização líquida na direção do campo aplicado. Esse efeito é responsável pelo fenômeno conhecido como *histerese magnética*.

Devido a esse efeito de histerese, a relação entre B e H em um material ferromagnético é não-linear e plurívoca. Em geral, as características do material não podem ser descritas de forma analítica. Comumente, são apresentadas em forma de gráficos constituídos por conjuntos de curvas determinadas empiricamente, a partir de amostras de ensaios com os materiais, seguindo os métodos prescritos pela American Society for Testing and Materials (ASTM).<sup>5</sup>

A curva mais comum usada para descrever um material magnético é a *curva B-H* ou *laço de histerese*. O primeiro e segundo quadrantes (correspondendo a  $B \geq 0$ ) de um conjunto

<sup>5</sup> Dados numéricos de uma ampla variedade de materiais magnéticos estão disponibilizados pelos fabricantes de materiais magnéticos. Um problema com o uso de tais dados vem da diversidade dos sistemas de unidades usados. Por exemplo, a magnetização pode ser dada em oersteds ou em ampères-espiras por metro, e a densidade de fluxo magnético em gauss, quilogauss ou teslas. Alguns fatores úteis de conversão são dados no Apêndice E. O leitor deve lembrar-se de que as equações desse livro baseiam-se em unidades SI.



**FIGURA 1.9** Laços  $B$ - $H$  para aço elétrico de grão orientado, tipo M-5, de 0,012 polegadas de espessura. Apenas as metades superiores dos laços são mostrados aqui. (Armco Inc.)

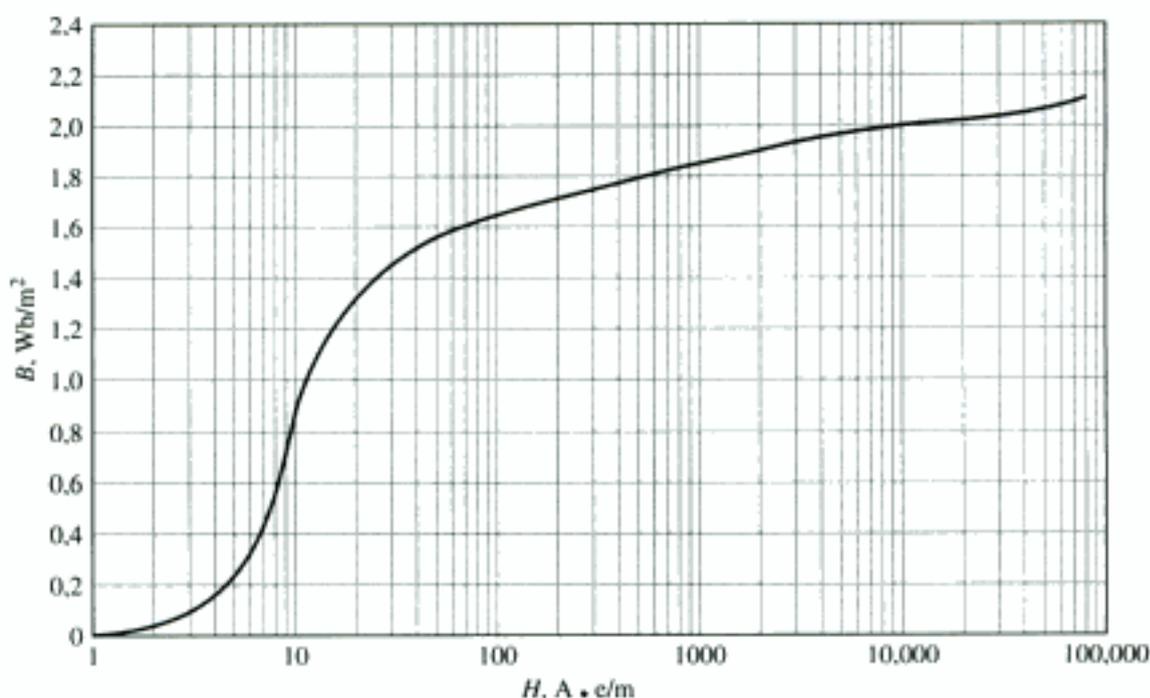
de laços de histerese estão mostrados na Fig. 1.5 para o aço M-5, um típico aço elétrico de grão orientado, usado em equipamentos elétricos. Esses laços mostram a relação entre a densidade de fluxo magnético  $B$  e a força magnetizante  $H$ . Cada curva é obtida variando-se ciclicamente a força magnetizante aplicada entre valores iguais positivos e negativos de magnitude constante. A histerese faz com que essas curvas sejam plurívocas. Depois de diversos ciclos, as curvas  $B$ - $H$  formam laços fechados como se mostra na figura. As setas indicam as trajetórias seguidas por  $B$  quando  $H$  cresce e decresce. Observe que, com um valor crescente de  $H$ , as curvas começam a ficar horizontais à medida que o material tende à saturação. Para uma densidade de fluxo em torno de 1,7 T, pode-se ver que o material está fortemente saturado.

Observe que, quando  $H$  decresce desde seu valor máximo até zero, a densidade de fluxo decresce mas não até zero. Isso resulta do relaxamento das orientações dos momentos magnéticos dos domínios, como recém descrito. O resultado é que, quando  $H$  é zero, uma magnetização remanescente está presente.

Felizmente, para muitas aplicações em engenharia, é suficiente descrever o material por uma curva unívoca, obtida pela plotagem dos lugares de valores máximos de  $B$  e  $H$  nas extremidades dos laços de histerese. Essa curva é conhecida como *curva de magnetização CC ou normal*. Uma curva de magnetização CC para o aço elétrico de grão orientado do tipo M-5 está mostrada na Fig. 1.10. A curva de magnetização CC despreza a natureza histerética do material mas exhibe claramente as suas características não-lineares.

#### EXEMPLO 1.7

Suponha que o material do núcleo do Exemplo 1.1 seja aço elétrico de grão orientado do tipo M-5, o qual tem a curva de magnetização CC da Fig. 1.10. Encontre a corrente  $i$  necessária para produzir  $B_c = 1$  T.



**FIGURA 1.10** Curva de magnetização CC para o aço elétrico de grão orientado M-5 de 0,012 polegadas de espessura. (Armco Inc.)

### ■ Solução

O valor de  $H_c$  para  $B_c = 1$  T pode ser lido da Fig. 1.10 como

$$H_c = 11 \text{ A} \cdot \text{e/m}$$

A queda de FMM no caminho do núcleo é

$$\mathcal{F}_c = H_c l_c = 11(0,3) = 3,3 \text{ A} \cdot \text{e}$$

A queda de FMM no entreferro é

$$\mathcal{F}_g = H_g g = \frac{B_g g}{\mu_0} = \frac{5 \times 10^{-4}}{4\pi \times 10^{-7}} = 396 \text{ A} \cdot \text{e}$$

A corrente necessária é

$$i = \frac{\mathcal{F}_c + \mathcal{F}_g}{N} = \frac{399}{500} = 0,80 \text{ A}$$

### PROBLEMA PRÁTICO 1.6

Repita o Exemplo 1.7 encontrando a corrente  $i$  para que  $B_c = 1,6$  T. De quanto a corrente deve ser aumentada para resultar nesse aumento de 1,6 vezes na densidade de fluxo?

### ■ Solução

Pode-se mostrar que a corrente  $i$  deve ser 1,302 A. Assim, a corrente deve ser aumentada de  $1,302/0,8 = 1,63$ . Devido ao predomínio da relutância do entreferro, esse valor é ligeiramente maior do que o aumento fracionário na densidade de fluxo, apesar de que o núcleo comece a saturar de forma significativa quando a densidade de fluxo atinge 1,6 T.

## 1.4 EXCITAÇÃO CA

Em sistemas de potência CA, as formas de onda de tensão e de fluxo são bastante próximos de funções senoidais de tempo. Para tais condições, esta seção descreverá as características da excitação e das perdas associadas à operação CA, em regime permanente, dos materiais magnéticos. Como modelo, usaremos um circuito magnético de núcleo fechado, isto é, sem entreferro, tal como o mostrado na Fig. 1.1 ou o transformador da Fig. 2.4. O comprimento do caminho magnético é  $l_c$ , e a área da seção reta é  $A_c$ , ao longo do comprimento do núcleo. Além disso, supomos uma variação senoidal para o fluxo  $\varphi(t)$  do núcleo, assim

$$\varphi(t) = \phi_{\max} \text{ sen } \omega t = A_c B_{\max} \text{ sen } \omega t \quad (1.48)$$

onde

- $\phi_{\max}$  = amplitude do fluxo do núcleo  $\varphi$  em webers
- $B_{\max}$  = amplitude da densidade de fluxo  $B_c$  em teslas
- $\omega$  = frequência angular =  $2\pi f$
- $f$  = frequência em Hz

Da Equação 1.27, a tensão induzida no enrolamento de  $N$  espiras é

$$e(t) = \omega N \phi_{\max} \cos(\omega t) = E_{\max} \cos \omega t \quad (1.49)$$

onde

$$E_{\max} = \omega N \phi_{\max} = 2\pi f N A_c B_{\max} \quad (1.50)$$

Na operação CA, em regime permanente, usualmente estamos mais interessados nos valores eficazes\* das tensões e correntes do que nos valores instantâneos ou máximos. Em geral, o valor eficaz de uma função periódica de tempo,  $f(t)$ , de período  $T$  é definido como

$$F_{\text{ef}} = \sqrt{\left(\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt\right)} \quad (1.51)$$

A partir da Equação 1.51, pode-se mostrar que o valor eficaz de uma onda senoidal é  $1/\sqrt{2}$  vezes o seu valor de pico. Assim, o valor eficaz da tensão induzida é

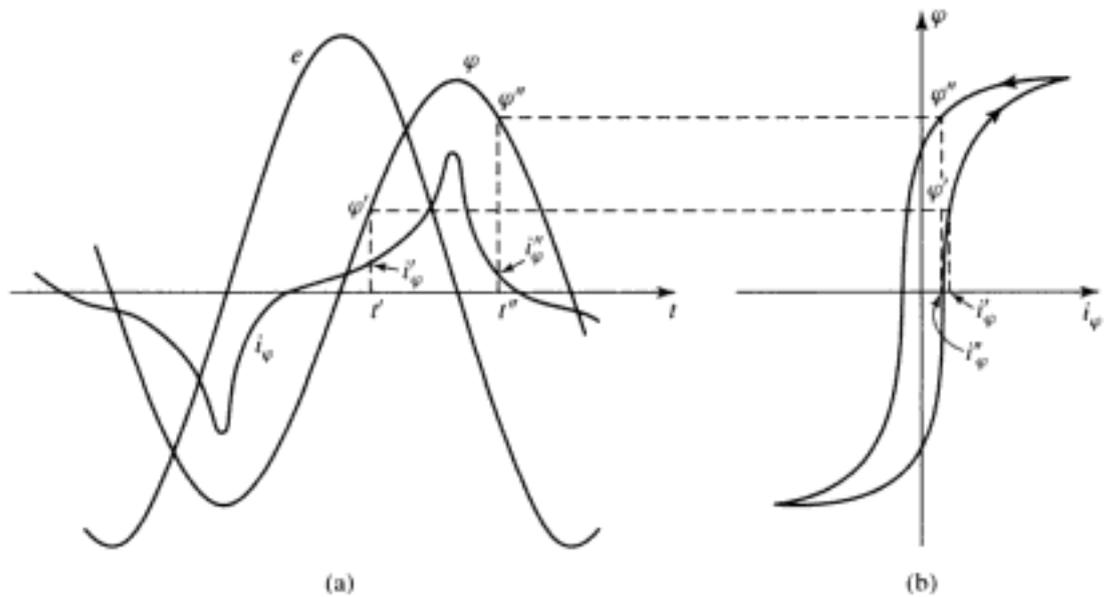
$$E_{\text{ef}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N A_c B_{\max} = \sqrt{2}\pi f N A_c B_{\max} \quad (1.52)$$

Para se produzir fluxo magnético no núcleo, é necessário que uma corrente, conhecida como *corrente de excitação*,  $i_\varphi$ , esteja presente no enrolamento de excitação.<sup>6</sup> As propriedades magnéticas não-lineares do núcleo requerem que a forma de onda da corrente de excitação seja diferente da forma de onda senoidal do fluxo. A curva da corrente de excitação em função do tempo pode ser obtida graficamente a partir das características magnéticas do material do núcleo, como se ilustra na Fig. 1.11a. Como  $B_c$  e  $H_c$  se relacionam com  $\varphi$  e  $i_\varphi$  por constantes geométricas conhecidas, o laço de histerese CA da Fig. 1.11b foi desenhado em termos de  $\varphi = B_c A_c$  e  $i_\varphi = H_c l_c / N$ . As ondas senoidais da tensão induzida,  $e$ , e do fluxo,  $\varphi$ , de acordo com as Equações 1.48 e 1.49, estão mostradas na Fig. 1.11a.

Em um instante dado qualquer, o valor de  $i_\varphi$  correspondente a um valor dado de fluxo pode ser obtido diretamente do laço de histerese. Por exemplo, no tempo  $t'$ , o fluxo é  $\varphi'$  e a corrente é  $i'_\varphi$ ; no tempo  $t''$ , os valores correspondentes são  $\varphi''$  e  $i''_\varphi$ . Observe que, como o laço

\* N. de T.: Do inglês *root-mean-square* (raiz do valor médio quadrático ou, simplesmente, valor médio quadrático).

<sup>6</sup> Mais genericamente, em um sistema com múltiplos enrolamentos, a FMM de excitação é o total líquido de ampères-espiras que atua para produzir fluxo no circuito magnético.



**FIGURA 1.11** Fenômenos de excitação. (a) Tensão, fluxo e corrente de excitação; (b) laço de histerese correspondente.

de histerese é plurívoco, deve-se ter cuidado buscando os valores de fluxo crescente ( $\varphi'$  na figura) na parte de fluxo crescente do laço de histerese, e, do mesmo modo, a parte do fluxo decrescente do laço de histerese deve ser escolhida quando se buscam os valores de fluxo decrescente ( $\varphi''$  na figura).

Como o laço de histerese “achata-se” devido aos efeitos da saturação, observe que a forma de onda da corrente de excitação apresenta picos acentuados. Seu valor eficaz  $I_{\varphi,ef}$  é definido pela Equação 1.51, onde  $T$  é o período de um ciclo. Está relacionado com o valor eficaz (ef) correspondente  $H_{c,ef}$  de  $H_c$  pela equação

$$I_{\varphi,ef} = \frac{l_c H_{c,ef}}{N} \quad (1.53)$$

As características de excitação CA dos materiais usados em núcleos são descritas frequentemente em termos de volts-ampères eficazes, ao invés de uma curva de magnetização que relacione  $B$  com  $H$ . A teoria que fundamenta essa representação pode ser explicada combinando as Equações 1.52 e 1.53. Assim, das Equações 1.52 e 1.53, os volts-ampères eficazes necessários para excitar o núcleo da Fig. 1.1, com uma densidade de fluxo especificada, é igual a

$$\begin{aligned} E_{ef} I_{\varphi,ef} &= \sqrt{2} \pi f N A_c B_{\max} \frac{l_c H_{ef}}{N} \\ &= \sqrt{2} \pi f B_{\max} H_{ef} (A_c l_c) \end{aligned} \quad (1.54)$$

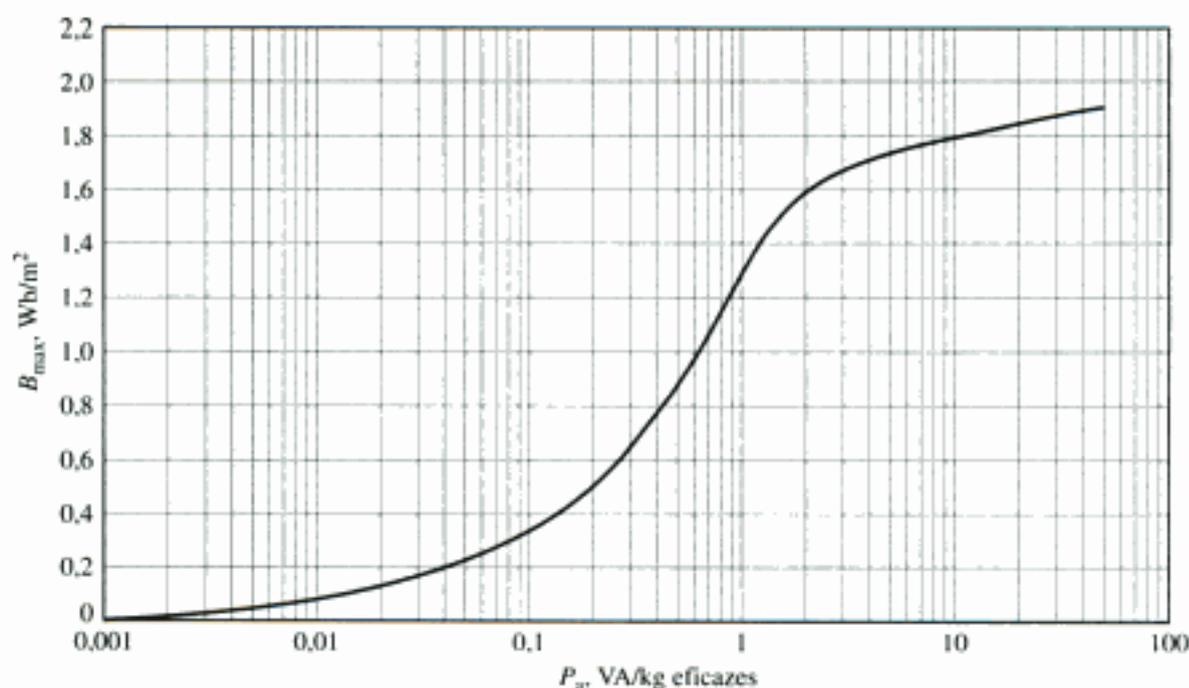
Na Equação 1.54, pode-se ver que o produto  $A_c l_c$  é igual ao volume do núcleo e, assim, o valor necessário de excitação, em volts-ampères eficazes, para excitar o núcleo com uma onda senoidal é proporcional à frequência de excitação, ao volume do núcleo e ao produto da densidade do fluxo de pico vezes a intensidade eficaz do campo magnético. Para um material magnético com densidade de massa  $\rho_c$ , a massa do núcleo é  $A_c l_c \rho_c$  e o valor dos *volts-ampères eficazes de excitação por unidade de massa*,  $P_\sigma$ , pode ser expresso como

$$P_\sigma = \frac{E_{ef} I_{\varphi,ef}}{\text{massa}} = \frac{\sqrt{2} \pi f}{\rho_c} B_{\max} H_{ef} \quad (1.55)$$

Observe que, com essa forma de normalização, o valor dos volts-ampères é uma propriedade apenas do material. Além disso, observe que esse valor depende apenas de  $B_{\max}$  porque  $H_{ef}$  é uma função única de  $B_{\max}$  determinada pela forma do laço de histerese do material em uma frequência dada  $f$  qualquer. Como resultado, as condições de excitação CA de um material magnético são fornecidas frequentemente pelos fabricantes em termos de volts-ampères eficazes por unidade de peso. Esses valores são determinados por meio de ensaios de laboratório realizados com amostras de núcleo fechado do material. Esses resultados estão ilustrados na Fig. 1.12 para o aço elétrico de grão orientado do tipo M-5.

A corrente de excitação fornece a FMM necessária para produzir o fluxo no núcleo e o ingresso da potência associada com a energia do campo magnético do núcleo. Parte dessa energia é dissipada como perdas das quais resulta o aquecimento do núcleo. O restante aparece como potência reativa associada ao armazenamento de energia no campo magnético. Essa potência reativa não é dissipada no núcleo; ciclicamente ela é fornecida e absorvida pela fonte de excitação.

Em materiais magnéticos, dois são os mecanismos de perdas associados a fluxos variáveis no tempo. O primeiro é o aquecimento ôhmico  $I^2R$  devido às correntes induzidas no material do núcleo. Pela lei de Faraday (Equação 1.26), vemos que os campos magnéticos variáveis no tempo dão origem a campos elétricos. Em materiais magnéticos, esses campos elétricos resultam em correntes induzidas, comumente referidas como *correntes parasitas*, que circulam no material do núcleo e opõem-se às mudanças de densidade de fluxo do material. Para contrabalançar o efeito de desmagnetização correspondente, a corrente do enrolamento de excitação deve aumentar. Assim, o laço  $B$ - $H$  "dinâmico", resultante da operação em CA, é um pouco mais "cheio" do que o laço de histerese, para condições que variem lentamente. Esse efeito se intensifica à medida que a frequência de excitação aumenta. Por essa razão, as características dos aços elétricos variam com a frequência, e usualmente são fornecidas pelos fabricantes para o valor de frequência esperada de operação de cada aço elétrico em particular. Observe, por exemplo, que o valor eficaz dos volts-ampères de excitação da Fig. 1.12 está especificado para a frequência de 60 Hz.



**FIGURA 1.12** Volts-ampères eficazes de excitação por quilograma a 60 Hz para o aço elétrico de grão orientado do tipo M-5 de 0,012 polegadas de espessura. (Armco Inc.)

Para reduzir os efeitos das correntes parasitas, as estruturas magnéticas são construídas usualmente com chapas delgadas de material magnético. Essas chapas, alinhadas na direção das linhas de campo, estão isoladas entre si por uma camada de óxido em suas superfícies, ou por uma fina cobertura de esmalte ou verniz de isolamento. Isso reduz grandemente a magnitude das correntes parasitas porque as camadas de isolamento interrompem os caminhos de corrente; quanto mais delgadas as chapas, menores as perdas. Em geral, as perdas por correntes parasitas tendem a aumentar com o quadrado da frequência de excitação, e também com o quadrado da densidade de fluxo de pico.

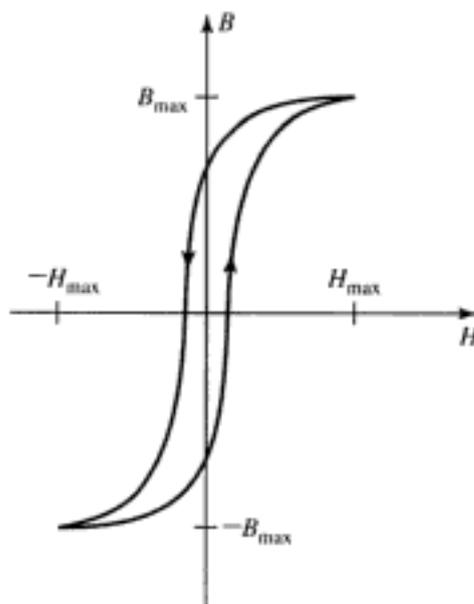
O segundo mecanismo de perdas é devido à natureza histerética do material magnético. Em um circuito magnético como o da Fig. 1.1 ou o transformador da Fig. 2.4, uma excitação variável no tempo fará com que o material magnético seja submetido a uma variação cíclica descrita por um laço de histerese como o mostrado na Fig. 1.13.

A Equação 1.45 pode ser usada para calcular o ingresso de energia  $W$  no núcleo magnético da Fig. 1.1, quando o material é submetido a um único ciclo. Obtém-se

$$W = \oint i_{\varphi} d\lambda = \oint \left( \frac{H_c l_c}{N} \right) (A_c N dB_c) = A_c l_c \oint H_c dB_c \quad (1.56)$$

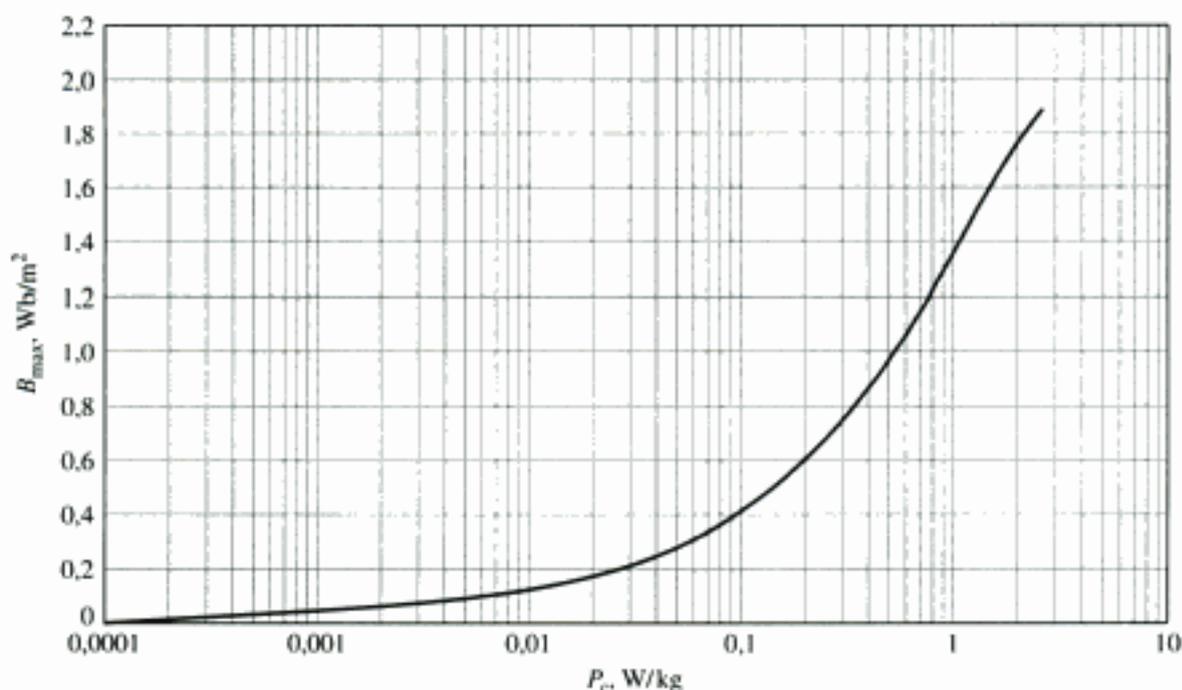
Verificando que  $A_c l_c$  é o volume do núcleo e que a integral é a área do laço de histerese  $CA$ , vemos que há um fornecimento líquido de energia para dentro do material, a cada vez que o material é submetido a um ciclo. Essa energia é requerida para girar os dipolos do material e é dissipada como calor no material. Assim, para um dado ciclo, as *perdas por histerese* correspondentes são proporcionais à área do ciclo de histerese e ao volume total de material. Como há uma perda de energia a cada ciclo, a potência das perdas por histerese é proporcional à frequência da excitação aplicada.

Em geral, essas perdas dependem do aspecto metalúrgico do material, assim como da densidade de fluxo e da frequência. Os dados sobre perdas no núcleo\* são apresentados tipicamente em forma de gráficos. São plotados em termos de watts por unidade de massa em



**FIGURA 1.13** Laço de histerese; a perda por histerese é proporcional à área do laço (sombreado).

\* N. de T.: Conhecidas também como "perdas no ferro".



**FIGURA 1.14** Perdas no núcleo a 60 Hz em watts por quilograma para o aço elétrico de grão orientado do tipo M-5 de 0,012 polegadas de espessura. (Armco Inc.)

função da densidade de fluxo. Muitas vezes, é fornecida uma família de curvas para diferentes frequências. A Fig. 1.14 mostra as perdas  $P_c$  no núcleo para o aço elétrico de grão orientado do tipo M-5 a 60 Hz.

Quase todos os transformadores e certas partes de máquinas elétricas usam material à base de chapas de aço. Essas apresentam direções altamente favoráveis de magnetização, ao longo das quais as perdas no núcleo são baixas, e a permeabilidade é alta. Esse material é chamado *aço de grão orientado*. A razão dessa propriedade está na estrutura atômica cúbica de corpo centrado dos cristais da liga de silício e ferro. Cada cubo tem um átomo em cada vértice, assim como um outro no seu centro. No cubo, a aresta é o eixo mais fácil de ser magnetizado; a diagonal da face é um eixo mais difícil, e a diagonal do cubo é o mais difícil de todos. Usando técnicas adequadas de fabricação, a maioria das arestas dos cubos dos cristais é alinhada na direção de laminação. Desse modo, essa torna-se a direção favorável de magnetização. Em relação às perdas no núcleo e à permeabilidade, o comportamento nessa direção é superior ao dos aços não orientados, nos quais os cristais estão orientados aleatoriamente, produzindo um material de características uniformes em todas as direções. Como resultado, os aços orientados podem operar, em relação aos não orientados, com densidades de fluxo mais elevadas.

Os aços elétricos não orientados são usados em aplicações onde o fluxo não segue um caminho que pode ser orientado na direção de laminação, ou em que o baixo custo é importante. Nesses aços, as perdas são maiores e a permeabilidade é muito menor do que nos aços de grão orientado.

#### EXEMPLO 1.8

O núcleo magnético da Fig. 1.15 é feito de chapas de aço elétrico de grão orientado M-5. O enrolamento é excitado com uma tensão de 60 Hz produzindo no aço uma densidade de fluxo de  $B = 1,5 \sin \omega t$  T, onde  $\omega = 2\pi 60 = 377$  rad/s. O aço ocupa 0,94 da área da seção reta. A densidade de massa do aço é  $7,65 \text{ g/cm}^3$ . Encontre (a) a tensão aplicada, (b) a corrente de pico, (c) a corrente eficaz de excitação e (d) as perdas no núcleo.

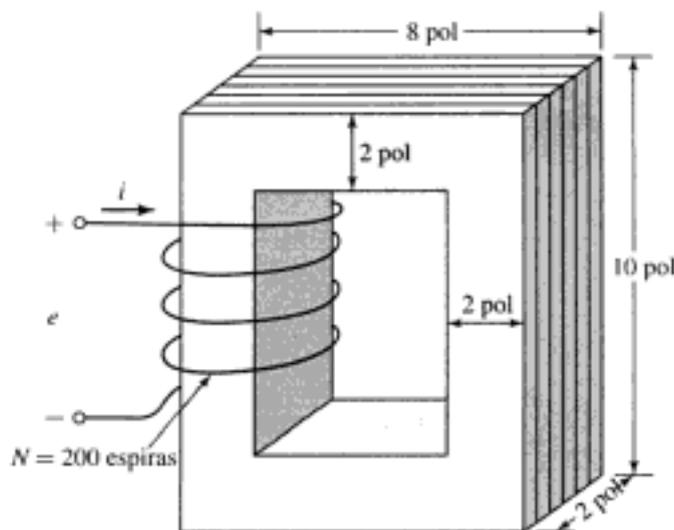


FIGURA 1.15 Núcleo de chapas de aço com um enrolamento para o Exemplo 1.8.

### ■ Solução

a. Da Equação 1.27, a tensão é

$$\begin{aligned} e &= N \frac{d\varphi}{dt} = N A_c \frac{dB}{dt} \\ &= 200 \times 4 \text{ pol}^2 \times 0,94 \times \left( \frac{1,0 \text{ m}^2}{39,4^2 \text{ pol}^2} \right) \times 1,5 \times (377 \cos(377t)) \\ &= 274 \cos(377t) \text{ V} \end{aligned}$$

b. A intensidade de campo magnético correspondente a  $B_{\max} = 1,5 \text{ T}$  está dada na Fig. 1.10 valendo  $H_{\max} = 36 \text{ A.e/m}$ . Observe que, como esperado, a permeabilidade relativa  $\mu_r = B_{\max}/(\mu_0 H_{\max}) = 33.000$  para um fluxo de 1,5 T é inferior ao valor de  $\mu_r = 72.300$ , encontrado no Exemplo 1.4 e correspondente ao valor de 1,0 T, significativamente maior mesmo assim do que o valor de 2.900 correspondente a um fluxo de 1,8 T.

$$l_c = (6 + 6 + 8 + 8) \text{ pol} \left( \frac{1,0 \text{ m}}{39,4 \text{ pol}} \right) = 0,71 \text{ m}$$

A corrente de pico é

$$I = \frac{H_{\max} l_c}{N} = \frac{36(0,71)}{200} = 0,13 \text{ A}$$

c. A corrente eficaz é obtida do valor de  $P_a$  da Fig. 1.12 para  $B_{\max} = 1,5 \text{ T}$ .

$$P_a = 1,5 \text{ VA/kg}$$

O volume do núcleo e a massa são

$$V_c = (4 \text{ pol}^2)(0,94)(28 \text{ pol}) = 105,5 \text{ pol}^3$$

$$W_c = (105,5 \text{ pol}^3) \left( \frac{2,54 \text{ cm}}{1,0 \text{ pol}} \right)^3 \left( \frac{7,65 \text{ g}}{1,0 \text{ cm}^3} \right) = 13,2 \text{ kg}$$

Os volts-ampères e a corrente totais eficazes são

$$P_a = (1,5 \text{ VA/kg})(13,2 \text{ kg}) = 20 \text{ VA}$$

$$I_{e,ef} = \frac{P_a}{E_{ef}} = \frac{20}{275(0,707)} = 0,10 \text{ A}$$

- d. A densidade das perdas no núcleo é obtida da Fig. 1.14 como  $P_c = 1,2 \text{ W/kg}$ . As perdas totais no núcleo são

$$P_c = (1,2 \text{ W/kg})(13,2 \text{ kg}) = 16 \text{ W}$$

### PROBLEMA PRÁTICO 1.7

Repita o Exemplo 1.8 para um tensão de 60 Hz dada por  $B = 1,0 \text{ sen } \omega t \text{ T}$ .

#### ■ Solução

- $V = 185 \cos 377t \text{ V}$
- $I = 0,04 \text{ A}$
- $I_\varphi = 0,061 \text{ A}$
- $P_c = 6,7 \text{ W}$

## 1.5 IMÃS PERMANENTES

A Fig. 1.16a mostra o segundo quadrante de um laço de histerese do Alnico 5, um material magnético permanente (imã) típico, ao passo que a Fig. 1.16b mostra o segundo quadrante de um laço de histerese para o aço do tipo M-5.<sup>7</sup> Observe que as curvas têm naturezas semelhantes. No entanto, o laço de histerese do Alnico 5 é caracterizado por um alto valor de *densidade de fluxo residual* ou *magnetização remanescente*,  $B_r$ , (aproximadamente 1,22 T) assim como um alto valor de *coercitividade*,  $H_c$ , (aproximadamente  $-49 \text{ kA/m}$ ).

A magnetização remanescente,  $B_r$ , corresponde à densidade de fluxo que permanece atuando em uma estrutura magnética fechada desse material, como na Fig. 1.1, quando a FMM aplicada (e portanto a intensidade de campo magnético  $H$ ) é reduzida a zero. No entanto, embora o aço elétrico de grão orientado M-5 tenha também um alto valor de magnetização remanescente (aproximadamente 1,4 T), ele tem um valor muito menor de coercitividade (aproximadamente  $-6 \text{ A/m}$ , menor por um fator superior a 7.500). A coercitividade  $H_c$  corresponde à intensidade de campo magnético (proporcional à FMM) requerida para reduzir a densidade de fluxo do material a zero.

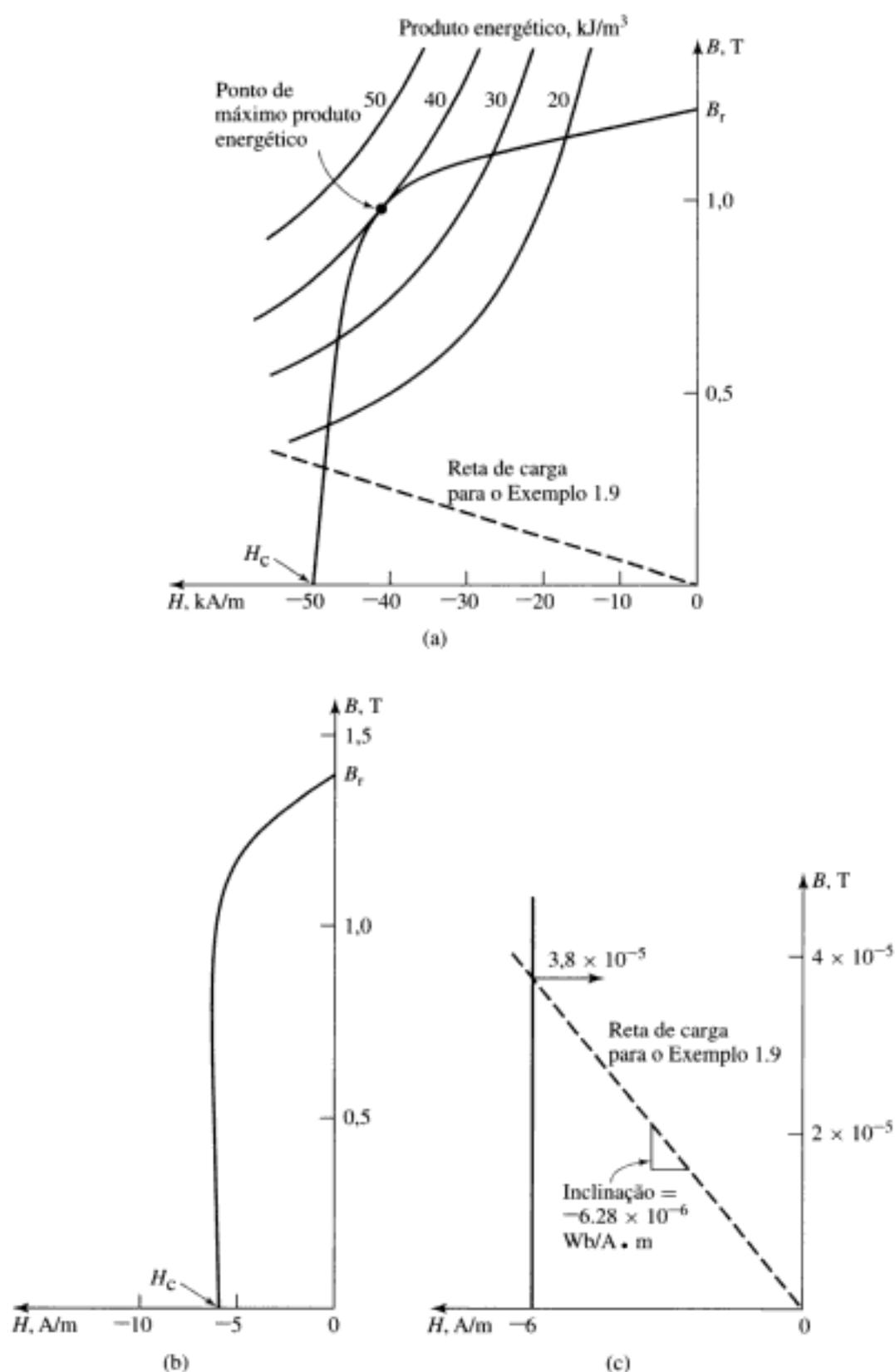
O significado da magnetização remanescente é que ela pode produzir fluxo magnético em um circuito magnético na ausência de uma excitação externa (como correntes nos enrolamentos). Esse é um fenômeno conhecido de qualquer um que já afixou bilhetes em um refrigerador usando imãs. Esses são usados largamente em dispositivos como alto-falantes e motores de imãs permanentes.

A partir da Fig. 1.16, poderia parecer que o Alnico 5 e o aço elétrico de grão orientado M-5 seriam úteis na produção de fluxo em circuitos magnéticos desprovidos de excitação, já que ambos têm valores altos de magnetização remanescente. Esse não é o caso, como se pode ilustrar melhor por meio de um exemplo.

### EXEMPLO 1.9

Como mostrado na Fig. 1.17, um circuito magnético é constituído por um núcleo de alta permeabilidade ( $\mu \rightarrow \infty$ ), um entreferro de comprimento  $g = 0,2 \text{ cm}$  e uma seção de material mag-

<sup>7</sup> Para se obter o valor mais elevado de magnetização remanescente, os laços de histerese da Fig. 1.16 são os obtidos quando os materiais são excitados por uma FMM suficiente para assegurar que sejam colocados fortemente em saturação. Isso é discutido com mais detalhes na Seção 1.6.



**FIGURA 1.16** (a) Segundo quadrante de um laço de histerese do Alnico 5; (b) segundo quadrante de um laço de histerese do aço elétrico de grão orientado M-5; (c) laço de histerese do aço elétrico M-5 para valores pequenos de  $B$ . (Armco Inc.)

nético de comprimento  $l_m = 1,0$  cm. A área da seção reta do núcleo e do entreferro é igual a  $A_m = A_g = 4$  cm<sup>2</sup>. Calcule a densidade de fluxo  $B_g$  no entreferro, quando o material magnético é (a) Alnico 5 e (b) aço elétrico M-5.

### ■ Solução

- a. Como se supõe que a permeabilidade do núcleo seja infinita, então a intensidade  $H$  no núcleo é desprezível. Verificando que a FMM que atua no circuito magnético da Fig. 1.17 é zero, podemos escrever

$$\mathcal{F} = 0 = H_g g + H_m l_m$$

ou

$$H_g = - \left( \frac{l_m}{g} \right) H_m$$

onde  $H_g$  e  $H_m$  são as intensidades de campo magnético no entreferro e no material magnético, respectivamente.

Como o fluxo deve ser contínuo ao longo do circuito magnético, então

$$\phi = A_g B_g = A_m B_m$$

ou

$$B_g = \left( \frac{A_m}{A_g} \right) B_m$$

onde  $B_g$  e  $B_m$  são as densidades de fluxo magnético no entreferro e no material magnético, respectivamente.

Essas equações podem ser resolvidas fornecendo uma relação linear para  $B_m$  em termos de  $H_m$

$$B_m = -\mu_0 \left( \frac{A_g}{A_m} \right) \left( \frac{l_m}{g} \right) H_m = -5 \mu_0 H_m = -6,28 \times 10^{-6} H_m$$

Para resolver em relação a  $B_m$ , verificamos que, para o Alnico 5,  $B_m$  e  $H_m$  estão relacionados também pela curva da Fig. 1.16a. Assim, essa relação linear, também conhecida como *reta de carga*, pode ser plotada como na Fig. 1.16a e a solução obtida por meios gráficos. Obtém-se

$$B_g = B_m = 0,30 \text{ T}$$

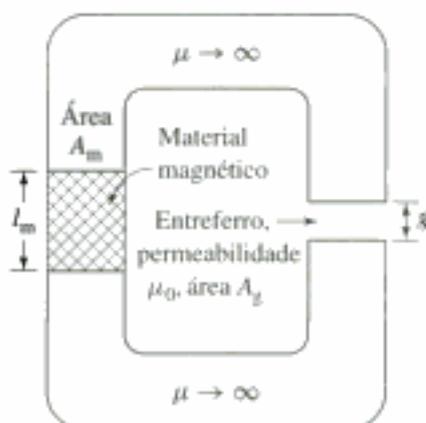


FIGURA 1.17 Circuito magnético do Exemplo 1.9.

- b. A solução para o aço elétrico M-5 é feita exatamente como na parte (a). A reta de carga é a mesma da parte (a) porque ela é determinada apenas pela permeabilidade do entreferro e pelas geometrias do imã e do entreferro. Assim, da Equação 1.16c,

$$B_g = 3,8 \times 10^{-5} \text{ T} = 0,38 \text{ gauss}$$

que é muito inferior ao valor obtido com o Alnico 5.

O Exemplo 1.9 mostra que há uma imensa diferença entre materiais magnéticos permanentes, ou imãs, (freqüentemente referidos como *materiais magnéticos duros*), tais como o Alnico 5, e *materiais magnéticos moles*, como o aço elétrico de grão orientado M-5. Essa distinção é caracterizada em grande parte pela imensa diferença entre as suas coercitividades  $H_c$ . A coercitividade pode ser entendida como uma medida da magnitude da FMM requerida para desmagnetizar o material. Como visto no Exemplo 1.9, ela também é uma medida da capacidade do material para produzir fluxo em um circuito magnético que apresenta um entreferro. Vemos assim que os materiais capazes de produzir bons imãs permanentes são caracterizados por valores elevados de coercitividade  $H_c$  (bem acima de 1 kA/m).

Uma medida útil da capacidade de desempenho de um imã permanente é o chamado *produto energético máximo*. Corresponde ao maior produto  $B \cdot H$  ( $B - H$ )<sub>max</sub>, e está localizado em um ponto do segundo quadrante do laço de histerese. Como se pode ver na Equação 1.56, o produto de  $B$  vezes  $H$  tem as dimensões de densidade de energia (joules por metro cúbico). Mostraremos agora que a operação de um dado imã permanente neste ponto resulta no menor volume de material necessário para se produzir uma dada densidade de fluxo no entreferro. Como resultado, a escolha de um material, com o maior produto energético disponível, pode resultar no menor volume magnético requerido.

No Exemplo 1.9, encontramos uma expressão para a densidade de fluxo no entreferro do circuito magnético da Fig. 1.17:

$$B_g = \frac{A_m}{A_g} B_m \quad (1.57)$$

Encontramos também que a razão entre as quedas de FMM no imã e no entreferro é igual a  $-1$ :

$$\frac{H_m l_m}{H_g g} = -1 \quad (1.58)$$

A Equação 1.58 pode ser resolvida em relação a  $H_g$  e o resultado pode ser multiplicado por  $\mu_0$  para se obter  $B_g = \mu_0 H_g$ . Multiplicando pela Equação 1.57 obtém-se

$$\begin{aligned} B_g^2 &= \mu_0 \left( \frac{l_m A_m}{g A_g} \right) (-H_m B_m) \\ &= \mu_0 \left( \frac{\text{Vol}_{\text{mag}}}{\text{Vol}_{\text{entreferro}}} \right) (-H_m B_m) \end{aligned} \quad (1.59)$$

ou

$$\text{Vol}_{\text{mag}} = \frac{\text{Vol}_{\text{entreferro}} B_g^2}{\mu_0 (-H_m B_m)} \quad (1.60)$$

onde  $\text{Vol}_{\text{mag}}$  é o volume do imã,  $\text{Vol}_{\text{entreferro}}$  é o volume do entreferro e o sinal negativo surge porque, no ponto de operação do circuito magnético, o valor de  $H$  do imã ( $H_m$ ) é negativo.

A Equação 1.60 é o resultado desejado. Ela indica que, para se obter uma densidade desejada de fluxo, o volume necessário do imã pode ser minimizado, operando o imã no ponto do maior valor possível do produto  $B \cdot H$ ,  $H_m B_m$ , isto é, no ponto de máximo produto energético. Além disso, quanto maior for o valor desse produto, menor será o tamanho do imã neces-

sário para produzir a densidade de fluxo desejada. Assim, o produto energético máximo é uma medida útil do desempenho de um material magnético, e frequentemente é encontrado tabulado como “figura de mérito” em folhas de dados de especificações de ímãs permanentes.

Observe que a Equação 1.59 pode sugerir que seja possível obter uma densidade de fluxo no entreferro arbitrariamente elevada simplesmente reduzindo o seu volume. Isso não é verdadeiro na prática porque, à medida que a densidade de fluxo do circuito magnético aumenta, um ponto será atingido a partir do qual o material magnético do núcleo começará a saturar e a suposição de permeabilidade infinita não será mais verdadeira, invalidando assim a dedução que leva à Equação 1.59.

Observe também que uma curva de produto  $B$ - $H$  constante é uma hipérbole. Um conjunto de tais hipérbolas para valores diferentes do produto  $B$ - $H$  está plotada na Fig. 1.16a. A partir dessas curvas, vemos que o produto energético máximo para o Alnico 5 é  $40 \text{ kJ/m}^3$ , e que isso ocorre no ponto  $B = 1,0 \text{ T}$  e  $H = -40 \text{ kA/m}$ .

### EXEMPLO 1.10

O circuito magnético da Fig. 1.17 é modificado de modo que a área do entreferro seja reduzida a  $A_g = 2,0 \text{ cm}^2$ , como mostrado na Fig. 1.18. Encontre o volume mínimo de ímã necessário para produzir uma densidade de fluxo de  $0,8 \text{ T}$  no entreferro.

#### ■ Solução

O volume mínimo de ímã será obtido com o ímã operando em seu ponto de máximo produto energético, como mostrado na Fig. 1.16a. Nesse ponto de operação,  $B_m = 1,0 \text{ T}$  e  $H_m = -40 \text{ kA/m}$ .

Assim, da Equação 1.57,

$$\begin{aligned} A_m &= A_g \left( \frac{B_g}{B_m} \right) \\ &= 2 \text{ cm}^2 \left( \frac{0,8}{1,0} \right) = 1,6 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

e, da Equação 1.58,

$$\begin{aligned} l_m &= -g \left( \frac{H_g}{H_m} \right) = -g \left( \frac{B_g}{\mu_0 H_m} \right) \\ &= -0,2 \text{ cm} \left( \frac{0,8}{(4\pi \times 10^{-7})(-40 \times 10^3)} \right) \\ &= 3,18 \text{ cm} \end{aligned}$$

Portanto, o volume mínimo de ímã é igual a  $1,6 \text{ cm}^2 \times 3,18 \text{ cm} = 5,09 \text{ cm}^3$ .

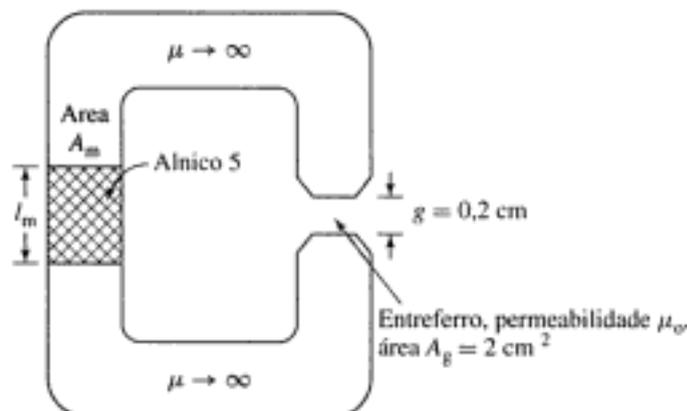


FIGURA 1.18 Circuito magnético do Exemplo 1.10.

## PROBLEMA PRÁTICO 1.8

Repita o Exemplo 1.10 supondo que a área do entreferro seja novamente reduzida até  $A_g = 1,8 \text{ cm}^2$ , e que a densidade de fluxo desejada no entreferro seja  $0,6 \text{ T}$ .

## ■ Solução

Volume mínimo de imã =  $2,58 \text{ cm}^3$ .

## 1.6 APLICAÇÕES DE IMÃS PERMANENTES

Os Exemplos 1.9 e 1.10 examinaram a operação de imãs permanentes supondo que o ponto de operação possa ser determinado simplesmente a partir do conhecimento da geometria do circuito magnético e das propriedades dos vários materiais magnéticos envolvidos. Na realidade, a situação é mais complexa.<sup>8</sup> Esta seção irá ampliar essas questões.

A Fig. 1.19 mostra as características de magnetização de alguns imãs permanentes comuns. O Alnico 5 é uma liga amplamente utilizada de ferro, níquel, alumínio e cobalto, originalmente descoberta em 1931. Apresenta uma densidade de fluxo residual relativamente elevada. O Alnico 8 tem uma densidade de fluxo residual menor e uma coercitividade maior do que a do Alnico 5. Como consequência, é menos sujeito à desmagnetização do que o Alnico 5. As desvantagens dos materiais do tipo Alnico são a coercitividade relativamente baixa e a fragilidade mecânica.

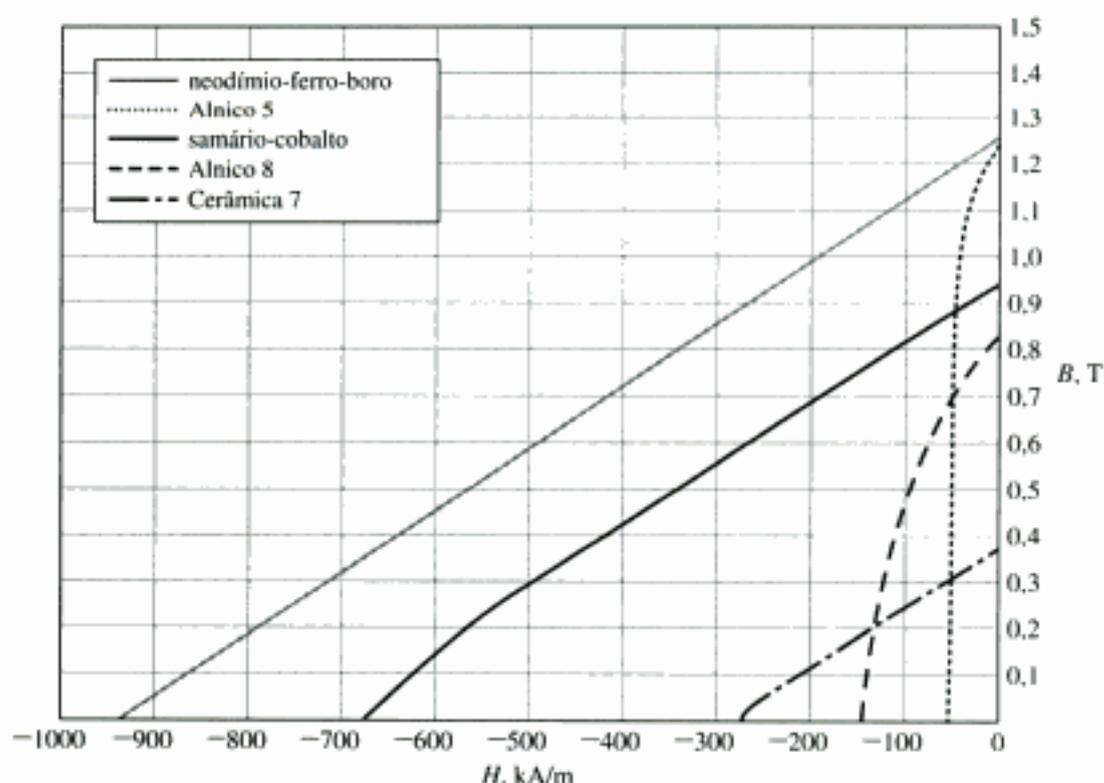


FIGURA 1.19 Curvas de magnetização para imãs permanentes comuns.

<sup>8</sup> Para uma discussão adicional sobre os imãs permanentes e suas aplicações, veja P. Campbell, *Permanent Magnet Materials and Their Application*, Cambridge University Press, 1994; R. J. Parker, *Advances in Permanent Magnetism*, John Wiley & Sons, 1990; A. Bosak, *Permanent-Magnet DC Linear Motors*, Clarendon Press-Oxford, 1996; G. R. Slemon e A. Straughen, *Electric Machines*, Addison-Wesley, 1980, Seções 1.20-1.25; e T. J. E. Miller, *Brushless Permanent-Magnet and Reluctance Motor Drives*, Clarendon Press-Oxford, 1989, Capítulo 3.

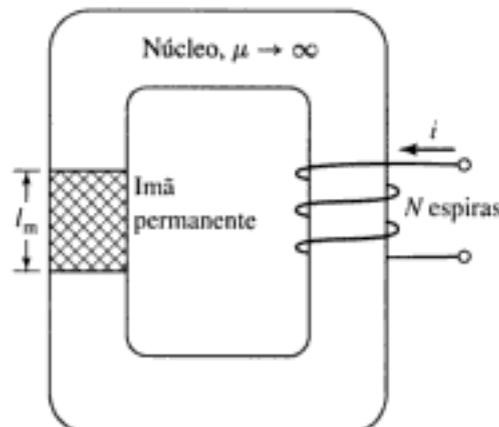
Os ímãs permanentes de cerâmica (também conhecidos como *ímãs de ferrite*) são feitos de pós de óxido de ferro e carbonato de bário ou estrôncio e têm densidades de fluxo residual inferiores às dos materiais do tipo Alnico, mas suas coercitividades são significativamente maiores. Como resultado, são menos propensos à desmagnetização. Um desses materiais, a Cerâmica tipo 7, está mostrado na Fig. 1.19, onde sua característica de magnetização é quase uma linha reta. Os ímãs de cerâmica têm boas características mecânicas e sua fabricação é de baixo custo. Como resultado, são largamente usados em muitas aplicações de ímãs permanentes.

O samário-cobalto representa um avanço significativo da tecnologia de ímãs permanentes, que começou na década de 1960 com a descoberta de ímãs permanentes de terras raras. Na Fig. 1.19, pode-se ver que ele tem uma elevada densidade de fluxo residual, tal como ocorre com os materiais de Alnico, e ao mesmo tempo apresenta coercitividade e produto energético máximo muito maiores. O mais novo dos materiais magnéticos de terras raras é o neodímio-ferro-boro. Caracteriza-se por valores de densidade de fluxo residual, coercitividade e produto energético máximo maiores ainda que os do samário-cobalto.

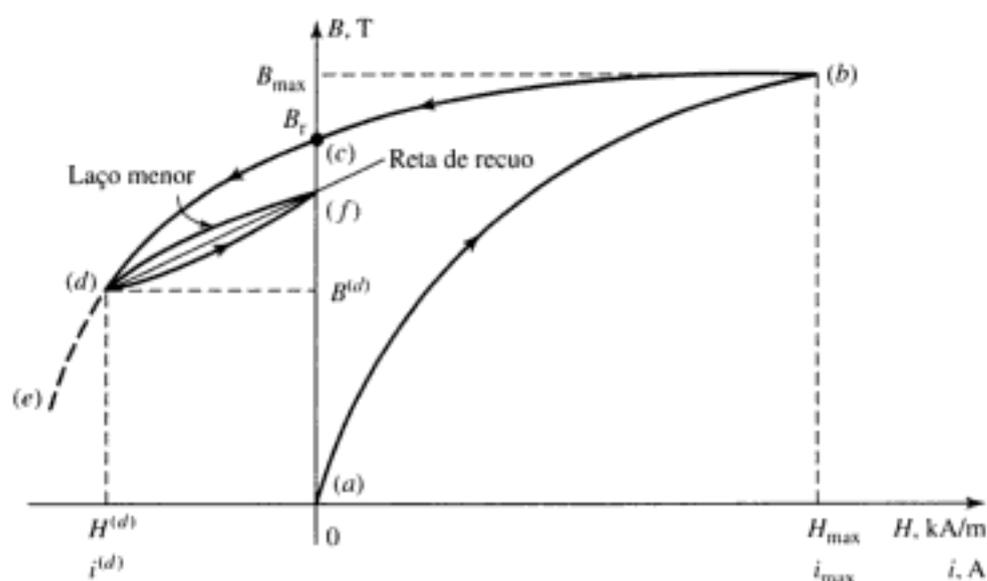
Considere o circuito magnético da Fig. 1.20. Compreende uma seção de material magnético duro (ímã permanente) em série com um núcleo de material magnético mole altamente permeável, no qual também há um enrolamento de excitação com  $N$  espiras. Em relação à Fig. 1.21, supondo que inicialmente o material magnético esteja desmagnetizado (correspondendo ao ponto  $a$  da figura), considere o que acontece quando a corrente é aplicada ao enrolamento de excitação. Como se supõe que o núcleo tenha permeabilidade infinita, o eixo horizontal da Fig. 1.21 pode ser considerado como sendo tanto uma medida da corrente aplicada  $i = HI_m/N$ , como uma medida da intensidade  $H$  no material magnético.

À medida que a corrente  $i$  cresce em direção a seu valor máximo, a trajetória sobre a curva  $B$ - $H$  sobe do ponto  $a$  da Fig. 1.21 até seu valor máximo no ponto  $b$ . Para magnetizar completamente o material, supomos que a corrente é aumentada até um valor  $i_{\max}$  suficientemente elevado para que o material esteja fortemente saturado no ponto  $b$ . Em seguida, quando a corrente é diminuída em direção a zero, a curva  $B$ - $H$  começa a formar um laço de histerese atingindo o ponto  $c$ , onde a corrente é zero. No ponto  $c$ , observe que  $H$  no material é zero mas  $B$  está no seu valor remanescente  $B_r$ .

A seguir, quando a corrente torna-se negativa, a curva  $B$ - $H$  continua a seguir o traçado de um laço de histerese. Na Fig. 1.21, isso é visto como a trajetória entre os pontos  $c$  e  $d$ . Se a corrente for mantida no valor  $-i^{(d)}$ , o ponto de operação do ímã será o ponto  $d$ . Observe que, como no Exemplo 1.9, esse mesmo ponto de operação poderia ser alcançado se, mantendo nula a excitação e estando o material no ponto  $c$ , fosse então inserido um entreferro de comprimento  $g = l_m(A_g/A_m) (-\mu_0 H^{(d)} / B^{(d)})$  no núcleo.



**FIGURA 1.20** Circuito magnético constituído por um ímã permanente e um enrolamento de excitação.



**FIGURA 1.21** Parte de uma curva  $B$ - $H$  mostrando um laço menor e uma reta de recuo.

Tomando a corrente ainda mais negativa, a trajetória continuará a seguir o traçado do laço de histerese em direção ao ponto  $e$ . Se, entretanto, pelo contrário, a corrente voltar a zero, em geral a trajetória não seguirá a trajetória de volta ao ponto  $c$ . Ao invés, ela seguirá o traçado de um *laço menor de histerese*, e atingirá o ponto  $f$  quando a corrente chegar a zero. Se agora a corrente for variada entre zero e  $-i^{(d)}$ , a curva  $B$ - $H$  seguirá o traçado do laço menor como mostrado na figura.

Como pode-se ver da Fig. 1.21, a trajetória da curva  $B$ - $H$  entre os pontos  $d$  e  $f$  pode ser representada por uma linha reta, conhecida como *reta de recuo*\*. A inclinação dessa linha é chamada *permeabilidade de recuo*  $\mu_r$ . Uma vez desmagnetizado o material até o ponto  $d$ , vemos que a magnetização remanescente efetiva do material magnético será a do ponto  $f$ . Essa magnetização é inferior à remanescente  $B_r$  que seria esperada de acordo com o laço de histerese. Observe que, se a desmagnetização tivesse sido levada para além do ponto  $d$ , como, por exemplo, até o ponto  $e$  da Fig. 1.21, então seria criado um novo laço menor, com novas linha e permeabilidade de recuo.

Os efeitos de desmagnetização devidos a uma excitação negativa, como acabaram de ser discutidos, são equivalentes aos de um entreferro no circuito magnético. É claro, por exemplo, que o circuito magnético da Fig. 1.20 poderia ter sido usado para magnetizar materiais duros. O processo seria simplesmente aplicar uma excitação elevada ao enrolamento, seguida de uma redução a zero. Isso deixaria o material com uma magnetização remanescente  $B_r$  (ponto  $c$  na Fig. 1.21).

Seguindo esse processo de magnetização, a remoção de material do núcleo equivale a abrir um grande entreferro no circuito magnético, desmagnetizando o material de modo similar ao visto no Exemplo 1.9. Nesse ponto, o ímã foi efetivamente enfraquecido, porque se fosse colocado de volta no núcleo magnético, ele seguiria uma reta de recuo e apresentaria uma magnetização remanescente menor que  $B_r$ . Como resultado, os materiais magnéticos duros, como o Alnico da Fig. 1.19, freqüentemente não operam de maneira estável em situações de FMM e geometria variáveis e, também freqüentemente, há risco de que uma operação imprópria possa desmagnetizá-los significativamente. Uma vantagem importante de materiais como a Cerâmica 7, o samário-cobalto e o neodímio-ferro-boro é que, devido à característica de “linha reta” no segundo quadrante (com inclinação próxima de  $\mu_0$ ), suas retas de recuo igualam-se de perto às suas curvas características de magnetização. Como resultado, nesses mate-

\* N. de T.: *Recoil line*, em inglês.

riais, os efeitos de desmagnetização são significativamente reduzidos e freqüentemente podem ser ignorados.

Às custas de uma redução no valor da magnetização remanescente, os materiais magnéticos duros podem ser estabilizados para operarem dentro de uma região especificada. Esse procedimento, baseado na reta de recuo mostrada na Fig. 1.21, pode ser melhor ilustrado por meio de um exemplo.

### EXEMPLO 1.11

A Fig. 1.22 mostra um circuito magnético que contém um ímã, um núcleo e um êmbolo de permeabilidade elevada (supostamente infinita). Um único enrolamento será usado para magnetizar o ímã. Depois da magnetização do sistema, o enrolamento será retirado. Como mostrado, o êmbolo move-se na direção  $x$ , com o resultado de que a área do entreferro varia ( $2 \text{ cm}^2 \leq A_g \leq 4 \text{ cm}^2$ ). Supondo que o material magnético do ímã seja o Alnico 5 e que o sistema seja inicialmente magnetizado com  $A_g = 2 \text{ cm}^2$ , (a) encontre o comprimento do ímã  $l_m$  tal que o sistema opere na reta de recuo que intercepta o ponto de produto  $B$ - $H$  máximo da curva de magnetização do Alnico 5, (b) conceba um procedimento para magnetizar o ímã, e (c) calcule a densidade de fluxo  $B_g$  no entreferro, quando o êmbolo move-se para frente e para trás, e o entreferro varia entre esses dois limites.

#### ■ Solução

a. A Fig. 1.23a mostra a curva de magnetização do Alnico 5 e as duas retas de carga correspondentes aos dois extremos do entreferro,  $A_g = 2 \text{ cm}^2$  e  $A_g = 4 \text{ cm}^2$ . Vemos que o sistema irá operar na reta de recuo desejada se a reta de carga para  $A_g = 2 \text{ cm}^2$  interceptar a curva  $B$ - $H$  no ponto de produto energético máximo (marcado como ponto  $a$  na Fig. 1.23a),  $B_m^{(a)} = 1,0 \text{ T}$  e  $H_m^{(a)} = -40 \text{ kA/m}$ .

Das Equações 1.57 e 1.58, vemos que a inclinação da reta de carga requerida é dada por

$$\frac{B_m^{(a)}}{-H_m^{(a)}} = \frac{B_g}{H_g} \frac{A_g}{A_m} \frac{l_m}{g}$$

e, assim,

$$\begin{aligned} l_m &= g \left( \frac{A_m}{A_g} \right) \left( \frac{B_m^{(a)}}{-\mu_0 H_m^{(a)}} \right) \\ &= 0,2 \text{ cm} \left( \frac{2}{2} \right) \left( \frac{1,0}{4\pi \times 10^{-7} \times 4 \times 10^4} \right) = 3,98 \text{ cm} \end{aligned}$$

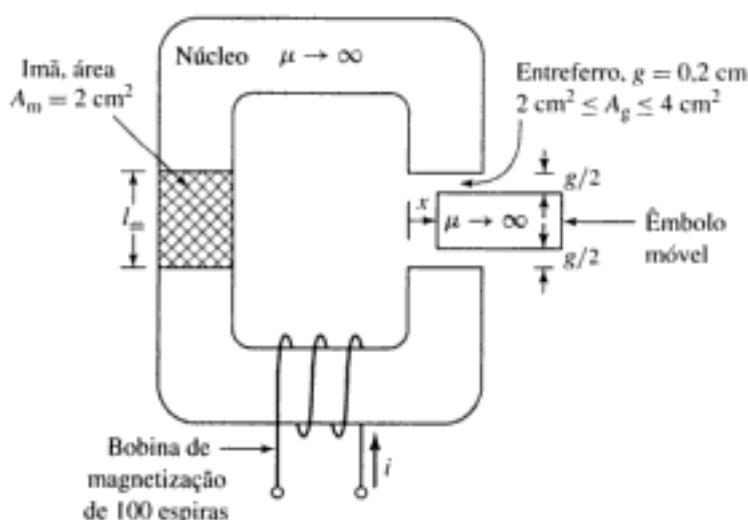
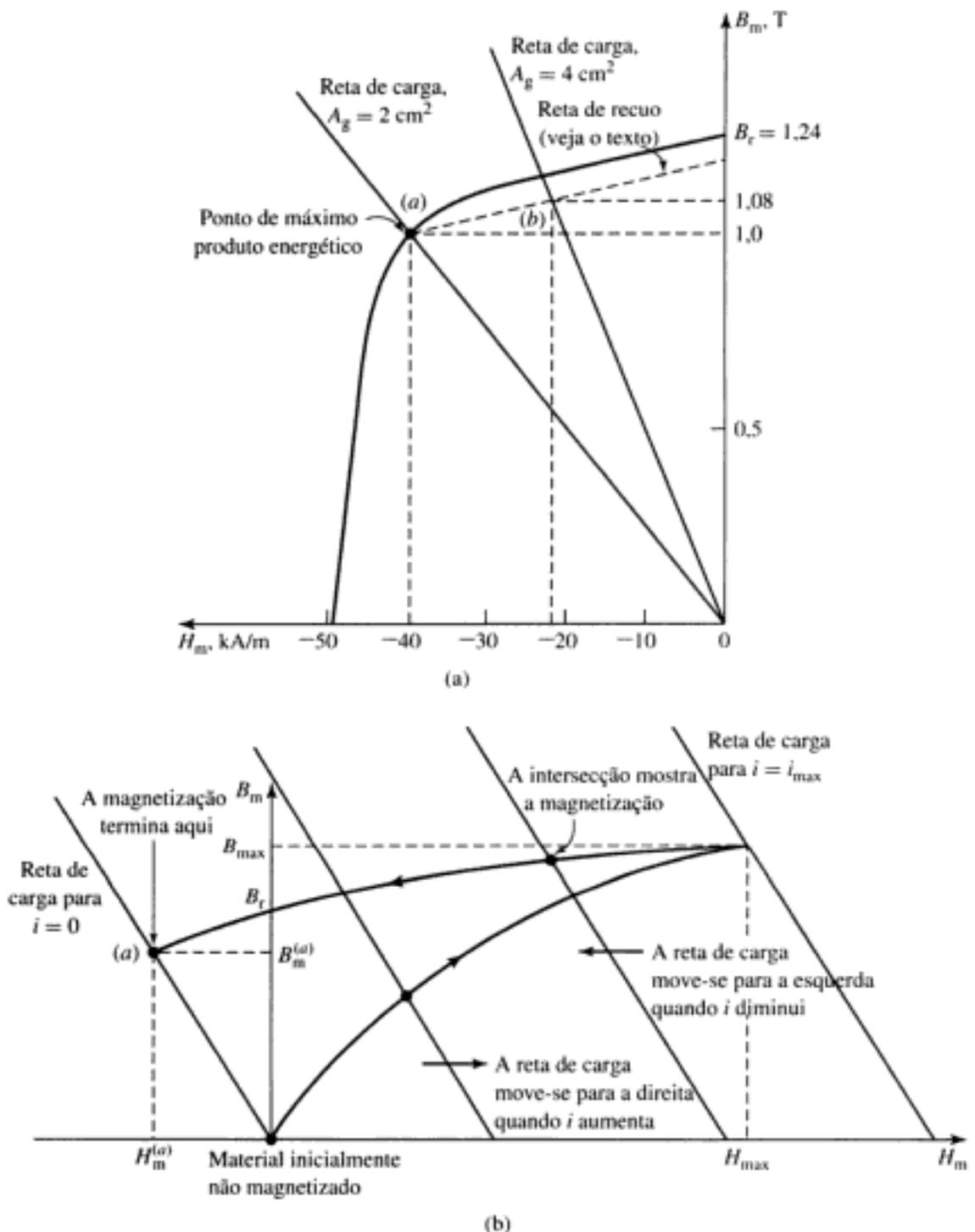


FIGURA 1.22 Circuito magnético do Exemplo 1.11.



**FIGURA 1.23** (a) Curva de magnetização do Alnico 5 para o Exemplo 1.11; (b) família de retas de carga para  $A_g = 2 \text{ cm}^2$  e valores variáveis de  $i$  mostrando o procedimento de magnetização do Exemplo 1.11.

- b. A Fig. 1.23b mostra uma família de retas de carga do sistema para  $A_g = 2 \text{ cm}^2$  com a corrente  $i$  aplicada no enrolamento de excitação. A equação geral dessas retas de carga pode ser deduzida facilmente da Equação 1.5

$$Ni = H_m l_m + H_g g$$

e das Equações 1.3 e 1.7

$$B_m A_m = B_g A_g = \mu_0 H_g A_g$$

Assim,

$$\begin{aligned} B_m &= -\mu_0 \left( \frac{A_g}{A_m} \right) \left( \frac{l_m}{g} \right) H_m + \frac{\mu_0 N}{g} \left( \frac{A_g}{A_m} \right) i \\ &= \mu_0 \left[ - \left( \frac{2}{2} \right) \left( \frac{3,98}{0,2} \right) H_m + \frac{100}{2 \times 10^{-3}} \left( \frac{2}{2} \right) i \right] \\ &= -2,50 \times 10^{-5} H_m + 6,28 \times 10^{-2} i \end{aligned}$$

Dessa equação e da Fig. 1.23b, vemos que, para levar o material magnético até a saturação no ponto  $B_{\max} - H_{\max}$ , a corrente de magnetização do enrolamento deve ser aumentada até o valor  $i_{\max}$  em que

$$i_{\max} = \frac{B_{\max} + 2,50 \times 10^{-5} H_{\max}}{6,28 \times 10^{-2}} \text{ A}$$

Nesse caso, não dispomos de um laço completo de histerese para o Alnico 5 e, portanto, teremos que estimar  $B_{\max}$  e  $H_{\max}$ . Extrapolando linearmente a curva  $B-H$  em  $H = 0$  de 4 vezes o valor da coercitividade, isto é,  $H_{\max} = 4 \times 50 = 200 \text{ kA/m}$ , obteremos  $B_{\max} = 2,1 \text{ T}$ . Sem dúvidas, esse valor será extremo e dará uma estimativa um tanto excessiva da corrente necessária. Entretanto, usando  $B_{\max} = 2,1 \text{ T}$  e  $H_{\max} = 200 \text{ kA/m}$ , obtemos  $i_{\max} = 45,2 \text{ A}$ .

Assim, com uma área de entreferro de  $2 \text{ cm}^2$ , a magnetização desejada será obtida aumentando a corrente até  $45,2 \text{ A}$  e em seguida reduzindo-a a zero.

- c. Como não dispomos de informações específicas sobre a inclinação da reta de recuo, vamos supor que seja igual à da curva  $B-H$ , no ponto  $H = 0$  e  $B = B_r$ . Na Fig. 1.23a, a reta de recuo foi desenhada com essa inclinação. Quando a área do entreferro varia entre  $2$  e  $4 \text{ cm}^2$ , vemos que a densidade de fluxo magnético  $B_m$  varia entre  $1,00$  e  $1,08 \text{ T}$ . Como a densidade de fluxo no entreferro é igual a  $A_m/A_g$  vezes esse valor, a densidade de fluxo no entreferro será igual a  $(2/2)1,00 = 1,0 \text{ T}$  quando  $A_g = 2,0 \text{ cm}^2$ , e  $(2/4)1,08 = 0,54 \text{ T}$  quando  $A_g = 4,0 \text{ cm}^2$ . Na Fig. 1.23a, observe que, quando operado dentro dessas variações de entreferro, o ímã parece ter uma densidade de fluxo residual efetivo de  $1,17 \text{ T}$  ao invés do valor inicial de  $1,24 \text{ T}$ . Observe também que, se as variações no entreferro estiverem limitadas ao intervalo considerado aqui, o sistema continuará a operar na linha indicada por "Reta de recuo" na Fig. 1.23a e dizemos que o ímã está *estabilizado*.

Como já foi discutido, os materiais magnéticos duros, como o Alnico 5, estarão sujeitos à desmagnetização se os seus pontos de operação forem variados excessivamente. Como mostrado no Exemplo 1.11, esses materiais podem ser estabilizados, com alguma perda na magnetização remanescente efetiva. No entanto, esse procedimento não garante a estabilidade absoluta de operação. Por exemplo, se o material do Exemplo 1.11 fosse submetido a uma área de entreferro inferior a  $2 \text{ cm}^2$ , ou a uma corrente excessiva de desmagnetização, o efeito de estabilização seria apagado e o material passaria a operar em uma nova reta de recuo, com uma redução adicional de magnetização.

No entanto, muitos materiais, como o samário-cobalto, a Cerâmica 7 e o neodímio-ferro-boro (veja Fig. 1.19), cujos valores de coercitividade são elevados, tendem a apresentar valores muito baixos de permeabilidade de recuo, e a reta de recuo é essencialmente tangente à curva  $B-H$ , dentro de uma grande parte da região útil de operação. Um exemplo pode ser visto na Fig. 1.19, que mostra a curva de magnetização CC do neodímio-ferro-boro, e na qual vemos que esse material tem uma magnetização remanescente de  $1,25 \text{ T}$  e uma coercitividade de  $-940 \text{ kA/m}$ . A porção da curva que está entre esses pontos é uma linha reta com uma inclinação igual a  $1,06\mu_0$ . Esse valor é igual ao da inclinação de sua reta de recuo. Se esses materiais operarem nessa região de baixa permeabilidade incremental em suas curvas  $B-H$ , não haverá necessidade de estabilização desde que não sejam excessivamente desmagnetizados.

Freqüentemente, é conveniente supor que a curva de magnetização CC desses materiais é linear, dentro do seu intervalo útil de operação, com uma inclinação igual à permeabilidade de recuo  $\mu_R$ . Dada essa suposição, a curva de magnetização CC desses materiais pode ser escrita na forma

$$B = \mu_R(H - H'_c) = B_r + \mu_R H \quad (1.61)$$

Aqui,  $H'_c$  é a *coercitividade aparente* associada a essa representação linear. Como pode ser visto na Fig. 1.19, em geral, a coercitividade aparente é um tanto maior (isto é, um valor negativo mais elevado) do que a coercitividade  $H_c$  do material porque a curva característica de magnetização CC tende a se dobrar para baixo nos valores baixos de densidade de fluxo.

## 1.7 RESUMO

Os dispositivos eletromecânicos que operam com campos magnéticos usam freqüentemente materiais ferromagnéticos para guiar e concentrar esses campos. Como a permeabilidade magnética dos materiais ferromagnéticos pode ser elevada (até dezenas de milhares de vezes a do meio ambiente), a maior parte do fluxo magnético está confinada a caminhos muito bem definidos e determinados pela geometria do material magnético. Além disso, freqüentemente as freqüências de interesse são baixas o bastante para permitir que os campos magnéticos sejam considerados quase-estáticos, e assim possam ser determinados simplesmente a partir do valor conhecido da FMM líquida que atua na estrutura magnética.

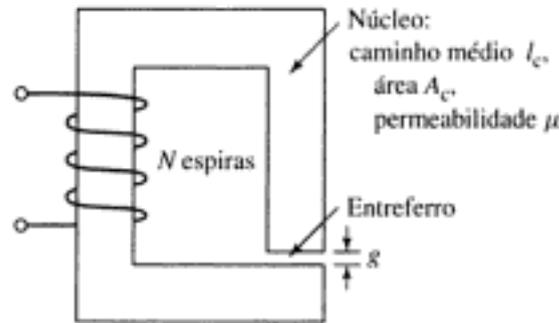
Nessas estruturas, como resultado, a solução dos campos magnéticos pode ser obtida de forma imediata usando-se as técnicas de análise dos circuitos magnéticos. Essas técnicas podem ser usadas para se reduzir a solução complexa de um campo magnético tridimensional ao que é essencialmente um problema unidimensional. Como em todas as soluções de engenharia, uma certa experiência e bom senso são necessários, mas a técnica fornece resultados úteis em diversas situações de interesse prático da engenharia.

Os materiais ferromagnéticos podem ser encontrados com uma ampla variedade de características. Em geral, o seu comportamento é não-linear e suas curvas características  $B-H$  são freqüentemente representadas por famílias de laços  $B-H$  de histerese. As perdas por histerese e por correntes parasitas são funções do nível de fluxo, da freqüência de operação e também da composição dos materiais e dos processos de fabricação usados. Um entendimento básico da natureza desses fenômenos é extremamente útil na aplicação desses materiais em dispositivos práticos. Tipicamente, as propriedades importantes estão disponíveis na forma de curvas características fornecidas pelos fabricantes de materiais.

Certos materiais magnéticos, comumente conhecidos como duros ou permanentes, os ímãs, são caracterizados por valores elevados de coercitividade e de magnetização remanescente. Esses materiais produzem um fluxo magnético significativo, mesmo em circuitos magnéticos com entreferros de ar. Por meio de um projeto adequado, podem ser feitos para operar de forma estável em situações que os sujeitam a uma faixa ampla de forças desestabilizadoras e de valores de FMM. Os ímãs permanentes encontram aplicação em diversos dispositivos de pequeno porte como alto-falantes, motores CA e CC, microfones e instrumentos analógicos de medida.

## 1.8 PROBLEMAS

- 1.1 Um circuito magnético com um único entreferro está mostrado na Fig. 1.24. As dimensões do núcleo são:


**FIGURA 1.24** Circuito magnético do Problema 1.1.

Área da seção reta  $A_c = 1,8 \times 10^{-3} \text{ m}^2$   
 Comprimento médio do núcleo  $l_c = 0,6 \text{ m}$   
 Comprimento do entreferro  $g = 2,3 \times 10^{-3} \text{ m}$   
 $N = 83$  espiras

Suponha que o núcleo tenha permeabilidade infinita ( $\mu \rightarrow \infty$ ) e despreze os efeitos dos campos de fluxo disperso e os de espraçamento no entreferro. (a) Calcule a relutância do núcleo  $\mathcal{R}_c$  e a do entreferro  $\mathcal{R}_g$ . Para uma corrente de  $i = 1,5 \text{ A}$ , calcule (b) o fluxo total  $\phi$ , (c) o fluxo concatenado da bobina e (d) a indutância  $L$  da bobina.

- 1.2 Repita o Problema 1.1 para uma permeabilidade finita no núcleo de  $\mu = 2500\mu_0$ .
- 1.3 Considere o circuito magnético da Fig. 1.24 com as mesmas dimensões do Problema 1.1. Supondo uma permeabilidade de núcleo infinita, calcule (a) o número necessário de espiras para obter uma indutância de 12 mH e (b) a corrente no indutor que resultará em uma densidade de fluxo de 1,0 T.
- 1.4 Repita o Problema 1.3 para uma permeabilidade de núcleo de  $\mu = 1300\mu_0$ .
- 1.5 O circuito magnético do Problema 1.1 tem um núcleo constituído de material não-linear cuja permeabilidade, em função de  $B_m$ , é dada por

$$\mu = \mu_0 \left( 1 + \frac{3499}{\sqrt{1 + 0,047(B_m)^{7,8}}} \right)$$

onde  $B_m$  é a densidade de fluxo do material.

- a. Usando o MATLAB, faça o gráfico de uma curva de magnetização CC para esse material ( $B_m$  versus  $H_m$ ), no intervalo  $0 \leq B_m \leq 2,2 \text{ T}$ .
- b. Encontre a corrente necessária para se obter uma densidade de fluxo de 2,2 T no núcleo.
- c. Novamente, usando o MATLAB, faça o gráfico do fluxo concatenado da bobina em função da corrente de bobina, quando essa é variada de 0 até o valor encontrado na parte (b).
- 1.6 O circuito magnético da Fig. 1.25 consiste em um núcleo e um êmbolo móvel de largura  $l_c$ , ambos de permeabilidade  $\mu$ . O núcleo tem uma área de seção reta  $A_c$  e um comprimento médio  $l_c$ . A área da sobreposição entre os dois entreferros é uma função da posição  $x$  do êmbolo, e pode-se assumir que varie de acordo com

$$A_g = A_c \left( 1 - \frac{x}{X_0} \right)$$

Você pode desconsiderar os campos de espraçamento no entreferro e usar aproximações consistentes com a análise de circuitos magnéticos.

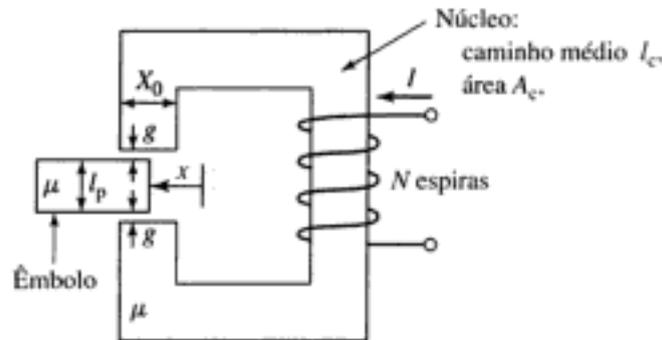


FIGURA 1.25 Circuito magnético do Problema 1.6.

- Supondo que  $\mu \rightarrow \infty$ , deduza uma expressão que forneça a densidade de fluxo magnético  $B_g$  no entreferro, em função da corrente de enrolamento  $I$  e da posição variável do êmbolo ( $0 \leq x \leq 0,8X_0$ ). Qual é a densidade de fluxo correspondente no núcleo?
- Repita a parte (a) para uma permeabilidade finita  $\mu$ .



1.7 O circuito magnético da Fig. 1.25 e do Problema 1.6 tem as seguintes dimensões:

$$\begin{aligned} A_c &= 8,2 \text{ cm}^2 & l_c &= 23 \text{ cm} \\ l_p &= 2,8 \text{ cm} & g &= 0,8 \text{ mm} \\ X_0 &= 2,5 \text{ cm} & N &= 430 \text{ espiras} \end{aligned}$$

- Supondo uma permeabilidade constante de  $\mu = 2800\mu_0$ , calcule a corrente requerida para se obter uma densidade de fluxo de 1,3 T no entreferro quando o êmbolo está completamente retraído ( $x = 0$ ).
- Repita os cálculos da parte (a) para o caso em que o núcleo e o êmbolo são constituídos de um material não-linear cuja permeabilidade é dada por

$$\mu = \mu_0 \left( 1 + \frac{1199}{\sqrt{1 + 0,05 B_m^8}} \right)$$

onde  $B_m$  é a densidade de fluxo do material.

- Para o material não-linear da parte (b), use o MATLAB para plotar a densidade de fluxo do entreferro em função da corrente de enrolamento para  $x = 0$  e  $0,5X_0$ .

1.8 Um indutor com a forma da Fig. 1.24 tem as dimensões:

$$\begin{aligned} \text{Área da seção reta } A_c &= 3,6 \text{ cm}^2 \\ \text{Comprimento médio do núcleo } l_c &= 15 \text{ cm} \\ N &= 75 \text{ espiras} \end{aligned}$$

Supondo uma permeabilidade de núcleo de  $\mu = 2100\mu_0$  e desprezando os efeitos do fluxo disperso e dos campos de espraiamento, calcule o comprimento de entreferro necessário para se obter uma indutância de 6,0 mH.

1.9 O circuito magnético da Fig. 1.26 consiste em anéis de material magnético dispostos em uma pilha de altura  $h$ . Os anéis têm raios interno  $R_i$  e externo  $R_e$ . Suponha que o ferro tenha permeabilidade infinita ( $\mu \rightarrow \infty$ ), e despreze os efeitos de dispersão e de espraiamento magnéticos. Para:

$$\begin{aligned} R_i &= 3,4 \text{ cm} \\ R_e &= 4,0 \text{ cm} \\ h &= 2 \text{ cm} \\ g &= 0,2 \text{ cm} \end{aligned}$$

calcule:

- o comprimento médio do núcleo  $l_c$  e a área da seção reta  $A_c$ .
- a relutância do núcleo  $\mathcal{R}_c$  e a do entreferro  $\mathcal{R}_g$ .

Para  $N = 65$  espiras, calcule:

- a indutância  $L$ .
- a corrente  $i$  requerida para que se opere com uma densidade de fluxo no entreferro de  $B_g = 1,35$  T.
- o fluxo concatenado correspondente  $\lambda$  da bobina.



- Repita o Problema 1.9 para uma permeabilidade de núcleo de  $\mu = 750\mu_0$ .
- Usando o MATLAB, faça o gráfico da indutância do indutor do Problema 1.9 em função da permeabilidade relativa do núcleo quando essa varia de  $\mu_r = 100$  até  $\mu_r = 10.000$ . (Sugestão: Plote a indutância *versus* o logaritmo da permeabilidade relativa.) Qual é a permeabilidade relativa mínima do núcleo para assegurar que a indutância esteja a menos de 5 por cento do valor calculado, supondo que a permeabilidade do núcleo seja infinita?
- O indutor da Fig. 1.27 tem um núcleo de seção reta circular uniforme de área  $A_c$ , comprimento médio  $l_c$ , permeabilidade relativa  $\mu_r$ , e um enrolamento de  $N$  espiras. Escreva uma expressão para a indutância  $L$ .
- O indutor da Fig. 1.27 tem as seguintes dimensões:

$$\begin{aligned} A_c &= 1,0 \text{ cm}^2 \\ l_c &= 15 \text{ cm} \\ g &= 0,8 \text{ mm} \\ N &= 480 \text{ espiras} \end{aligned}$$

Desprezando os campos de espriamento e de dispersão e supondo  $\mu_r = 1.000$ , calcule a indutância.

- O indutor do Problema 1.13 deve operar com uma fonte de tensão de 60 Hz.
  - Supondo uma resistência de bobina desprezível, calcule a tensão eficaz no indutor que corresponde a uma densidade de fluxo de pico no núcleo de 1,5 T. (b) Sob essa condição de operação, calcule a corrente eficaz e a energia armazenada de pico.

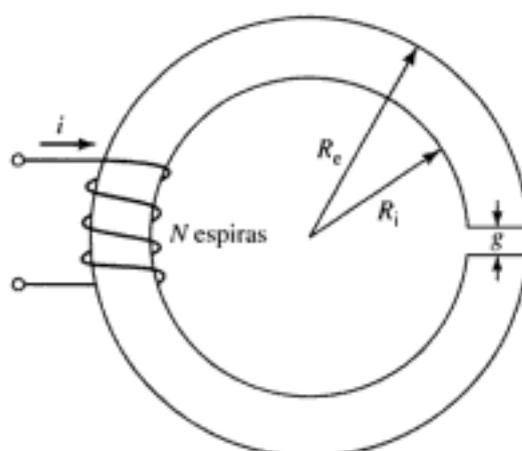


FIGURA 1.26 Circuito magnético do Problema 1.9.

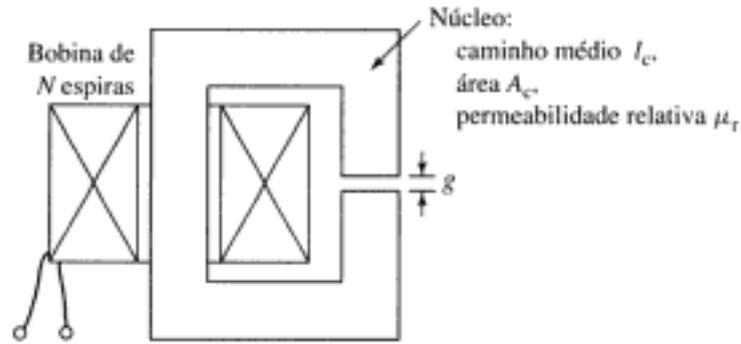


FIGURA 1.27 Indutor do Problema 1.12.

1.15 Considere o circuito magnético da Fig. 1.28. Essa estrutura, conhecida como *pot-core*, é constituída tipicamente de duas metades cilíndricas. A bobina de  $N$  espiras é enrolada em um carretel e, quando as duas metades são montadas, ela pode ser facilmente inserida na coluna disposta no eixo central do núcleo. Como o entreferro está no interior do núcleo e se este não entrar em saturação excessiva, um fluxo magnético relativamente baixo se “dispersará” do núcleo. Isso faz com que essa estrutura tenha uma configuração particularmente atraente para uma ampla variedade de aplicações em indutores, como o da Fig. 1.27, e também em transformadores.

Suponha que a permeabilidade do núcleo seja  $\mu = 2500\mu_0$  e que  $N = 200$  espiras. As seguintes dimensões são especificadas:

$$R_1 = 1,5 \text{ cm} \quad R_2 = 4 \text{ cm} \quad l = 2,5 \text{ cm}$$

$$h = 0,75 \text{ cm} \quad g = 0,5 \text{ mm}$$

- Encontre o valor de  $R_3$  para o qual a densidade de fluxo na parede externa do núcleo é igual àquela no interior do cilindro central.
- Na realidade, a densidade de fluxo diminui com o raio nas seções radiais do núcleo (as seções de espessura  $h$ ). Mesmo assim, suponha que essa densidade de fluxo permaneça constante. (i) Escreva uma expressão para a indutância da bobina e (ii) calcule-a para as dimensões dadas.

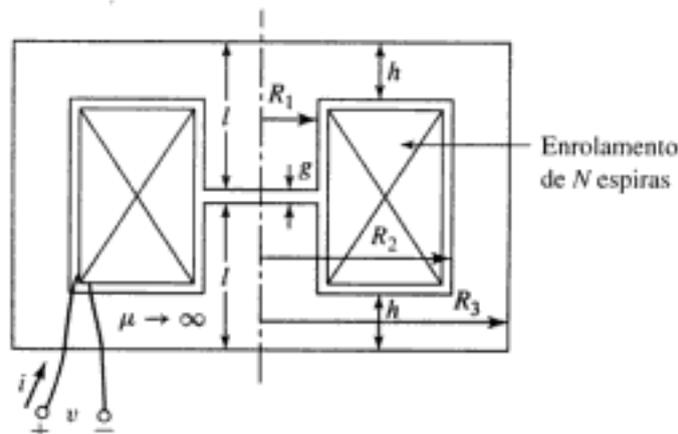


FIGURA 1.28 Indutor *pot-core* do Problema 1.15.

- c. O núcleo deve operar com uma densidade de fluxo de pico de 0,8 T, em uma frequência de 60 Hz. Encontre (i) o valor eficaz da tensão induzida no enrolamento, (ii) a corrente eficaz na bobina, e (iii) a energia armazenada de pico.
- d. Repita a parte (c) para uma frequência de 50 Hz.
- 1.16** Uma forma de onda quadrada de tensão, com frequência fundamental de 60 Hz e semiciclos positivos e negativos iguais de amplitude  $E$ , é aplicada a um enrolamento de 1000 espiras em um núcleo fechado de ferro de seção reta igual a  $1,25 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ . Despreze a resistência do enrolamento e todos os efeitos de fluxo disperso.
- Faça um esboço da tensão, do fluxo concatenado no enrolamento e do fluxo no núcleo, em função do tempo.
  - Encontre o valor máximo admissível para  $E$  se a densidade máxima de fluxo não puder ser superior a 1,15 T.
- 1.17** Um indutor deve ser projetado usando um núcleo magnético com a forma dada na Fig. 1.29. O núcleo tem seção reta uniforme de área  $A_c = 5,0 \text{ cm}^2$  e comprimento médio  $l_c = 25 \text{ cm}$ .
- Calcule o comprimento do entreferro  $g$  e o número de espiras  $N$  tais que a indutância seja 1,4 mH e de modo que o indutor possa operar com correntes de pico de 6 A sem saturação. Suponha que a saturação ocorra quando a densidade de fluxo de pico do núcleo exceda a 1,7 T e que, abaixo da saturação, o núcleo tenha permeabilidade  $\mu = 3200\mu_0$ .
  - Para uma corrente de indutor de 6 A, use a Equação 3.21 para calcular (i) a energia magnética armazenada no entreferro e (ii) a energia magnética armazenada no núcleo. Mostre que a energia magnética armazenada total é dada pela Equação 1.47.
- 1.18** Considere o indutor do Problema 1.17. Escreva um programa simples para projeto por computador, na forma de um *script* de MATLAB, que calcule o número de espiras e o comprimento do entreferro em função da indutância desejada. O *script* deve ser escrito de modo que um valor de indutância (em mH) seja solicitado do usuário e que a saída seja o comprimento do entreferro (em milímetros) e o número de espiras.
- O indutor deve operar com uma corrente senoidal de 60 Hz e deve ser projetado de modo que a densidade do fluxo de pico do núcleo seja 1,7 T, quando a corrente eficaz do indutor for igual a 4,5 A. Escreva o seu *script* de modo que rejeite os projetos nos quais o comprimento do entreferro esteja fora do intervalo de 0,05 mm a 5,0 mm, ou para os quais o número de espiras seja menor do que 5.

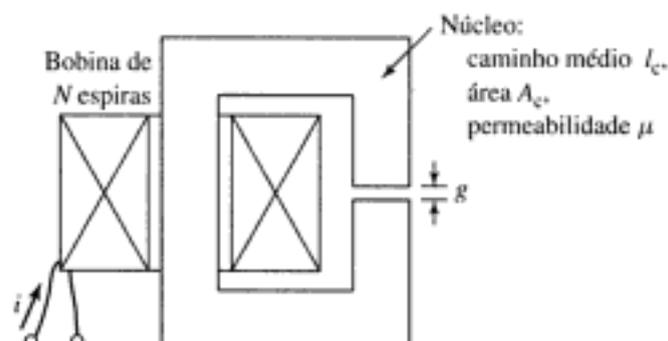


FIGURA 1.29 Indutor do Problema 1.17.

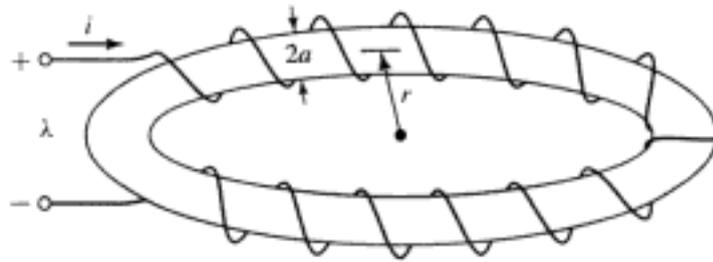


FIGURA 1.30 Enrolamento toroidal do Problema 1.19.

Usando o seu programa, obtenha as indutâncias (a) mínima e (b) máxima (com o valor mais próximo em mH) que satisfaça às especificações dadas. Para cada um desses valores, determine o comprimento de entreferro necessário, o número de espiras e a tensão eficaz correspondente ao fluxo de pico do núcleo.

- 1.19 Um mecanismo proposto para armazenar energia consiste em uma bobina de  $N$  espiras, enrolada em torno de um grande núcleo toroidal de material não magnético ( $\mu = \mu_0$ ), como mostrado na Fig. 1.30. Como se pode ver na figura, o núcleo tem uma seção reta circular de raio  $a$  e um raio toroidal  $r$ , medido até o centro da seção reta. A geometria desse dispositivo é tal que o campo magnético pode ser considerado nulo em qualquer ponto fora do toro. Supondo que  $a \ll r$ , então pode-se considerar que o campo  $H$  no interior do toro esteja orientado acompanhando o toro e que tenha magnitude uniforme dada por

$$H = \frac{Ni}{2\pi r}$$

Para um bobina com  $N = 1000$  espiras,  $r = 10$  m, e  $a = 0,45$  m:

- Calcule a indutância  $L$  da bobina.
  - A bobina deve ser carregada com uma densidade de fluxo magnético de 1,75 T. Para essa densidade de fluxo, calcule a energia magnética total armazenada no toro.
  - Se a bobina tiver de ser carregada a uma taxa constante (isto é,  $di/dt = \text{constante}$ ), calcule a tensão necessária nos terminais para que a densidade de fluxo requerida seja atingida em 30 s. Suponha que a resistência da bobina seja desprezível.
- 1.20 A Fig. 1.31 mostra um indutor enrolado em um núcleo de seção reta retangular feito de chapas de ferro. Suponha que a permeabilidade do ferro seja infinita. Despreze o espalhamento e a dispersão magnética dos dois entreferros (comprimento total de entreferro =  $g$ ). O enrolamento de  $N$  espiras é de fio de cobre isolado cuja resistividade é  $\rho$   $\Omega \cdot \text{m}$ . Suponha que uma fração  $f_{\text{cov}}$  do espaço de enrolamento esteja disponível para o cobre e que o restante do espaço seja usado na isolamento.

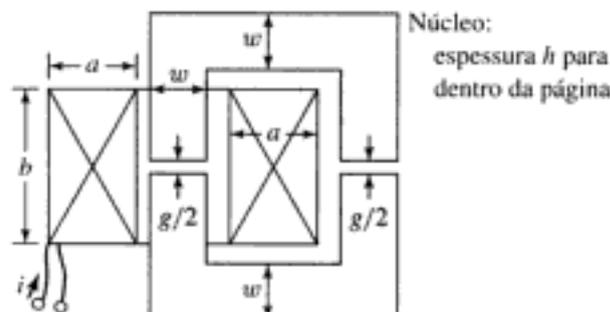


FIGURA 1.31 Indutor com núcleo de ferro do Problema 1.20.

- Calcule a área da seção reta e o volume do cobre no espaço de enrolamento.
- Escreva uma expressão para a densidade de fluxo  $B$  no indutor, em termos da densidade de corrente  $J_{\text{cobre}}$  no enrolamento de cobre.
- Escreva uma expressão para a densidade de corrente  $J_{\text{cobre}}$  no cobre, em termos da corrente  $I$  do enrolamento, do número de espiras  $N$  e da geometria da bobina.
- Deduza uma expressão para a potência elétrica da dissipação na bobina, em termos da densidade de corrente  $J_{\text{cobre}}$ .
- Deduza uma expressão para a energia magnética armazenada no indutor, em termos da densidade de corrente aplicada  $J_{\text{cobre}}$ .
- A partir das partes (d) e (e), deduz uma expressão para a constante de tempo  $L/R$  do indutor. Observe que essa expressão é independente do número de espiras da bobina e não se altera quando a indutância e a resistência da bobina são alteradas ao se variar o número de espiras.

1.21 O indutor da Fig. 1.31 tem as seguintes dimensões:

$$a = h = w = 1,5 \text{ cm} \quad b = 2 \text{ cm} \quad g = 0,2 \text{ cm}$$

O fator de enrolamento (isto é, a fração do espaço de enrolamento ocupado pelo condutor) é  $f_{\text{enr}} = 0,55$ . A resistividade do cobre é  $1,73 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ . Quando a bobina opera com uma tensão aplicada CC constante de 35 V, a densidade de fluxo no entreferro é medida como sendo 1,4 T. Encontre a potência dissipada na bobina, a corrente da bobina, o número de espiras, a resistência da bobina, a indutância, a constante de tempo e o diâmetro do fio, expresso pela bitola de fio mais próxima. (Sugestão: A bitola do fio pode ser obtida com a expressão

$$\text{AWG} = 36 - 4,312 \ln \left( \frac{A_{\text{fio}}}{1,267 \times 10^{-8}} \right)$$

onde AWG é o diâmetro do fio, expresso em termos da norma American Wire Gauge, e  $A_{\text{fio}}$  é a área da seção reta do condutor em  $\text{m}^2$ .)

1.22 O circuito magnético da Fig. 1.32 tem dois enrolamentos e dois entreferros. Pode-se supor que o núcleo tenha permeabilidade infinita. As dimensões do núcleo são indicadas na figura.

- Supondo que a bobina 1 esteja conduzindo uma corrente  $I_1$  e a corrente na bobina 2 seja zero, calcule (i) a densidade de fluxo magnético em cada um dos entreferros, (ii) o fluxo concatenado do enrolamento 1 e (iii) o fluxo concatenado do enrolamento 2.

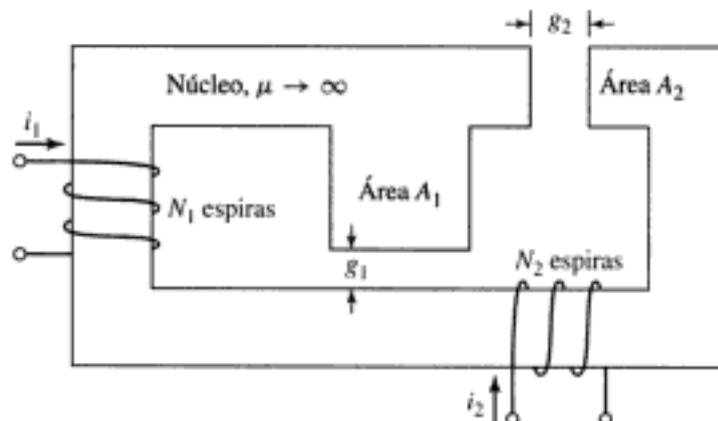


FIGURA 1.32 Circuito magnético do Problema 1.22.

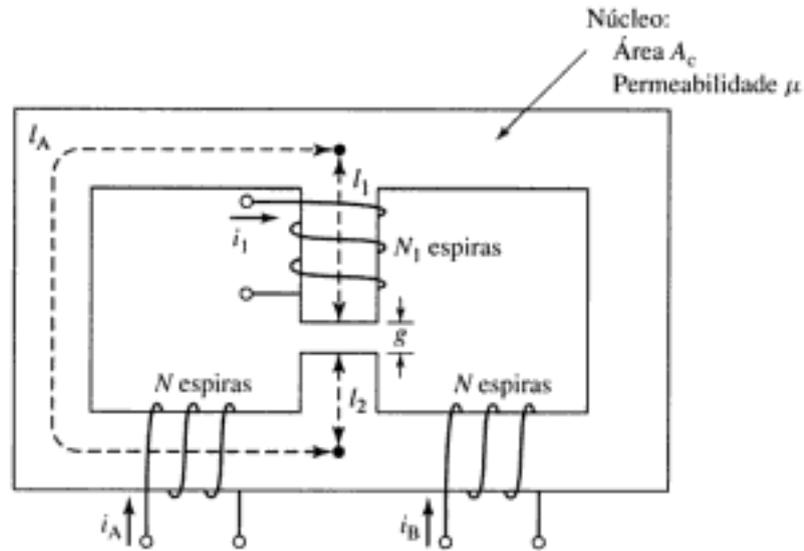


FIGURA 1.33 Circuito magnético simétrico do Problema 1.23.

- b. Repita a parte (a), supondo uma corrente zero no enrolamento 1 e uma corrente  $I_2$  no enrolamento 2.
  - c. Repita a parte (a), supondo que a corrente do enrolamento 1 seja  $I_1$  e a corrente do enrolamento 2 seja  $I_2$ .
  - d. Encontre as indutâncias próprias dos enrolamentos 1 e 2, e a indutância mútua entre os enrolamentos.
- 1.23** O circuito magnético simétrico da Fig. 1.33 tem três enrolamentos. Os enrolamentos A e B têm  $N$  espiras cada um e são enrolados nas duas pernas inferiores do núcleo. As dimensões do núcleo estão indicadas na figura.
- a. Encontre a indutância própria de cada um dos enrolamentos.
  - b. Encontre as indutâncias mútuas entre os três pares de enrolamentos.
  - c. Encontre a tensão induzida no enrolamento 1 quando as correntes  $i_A(t)$  e  $i_B(t)$  dos enrolamentos A e B estão variando no tempo. Mostre que essa tensão pode ser usada para medir o desequilíbrio (diferença) entre duas correntes senoidais de mesma frequência.
- 1.24** O gerador alternador da Fig. 1.34 tem um êmbolo móvel (de posição  $x$ ) montado de tal modo que desliza para dentro e para fora de uma estrutura magnética, conhecida como

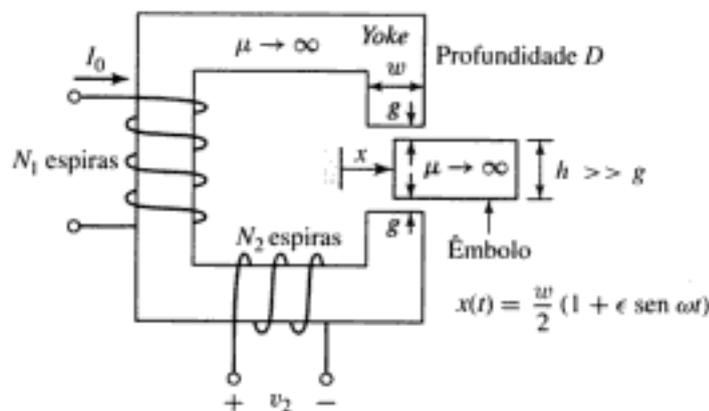


FIGURA 1.34 Gerador alternador do Problema 1.24.

*yoke\**, mantendo o espaçamento  $g$  constante nos dois lados entre o êmbolo e o *yoke*. Esses dois podem ser considerados como tendo permeabilidade infinita. O movimento do êmbolo está restringido de tal modo que sua posição limita-se a  $0 \leq x \leq w$ .

Há dois enrolamentos nesse circuito magnético. O primeiro enrolamento tem  $N_1$  espiras e conduz uma corrente CC constante  $I_0$ . O segundo de  $N_2$  espiras está em circuito aberto e pode ser conectado a uma carga.

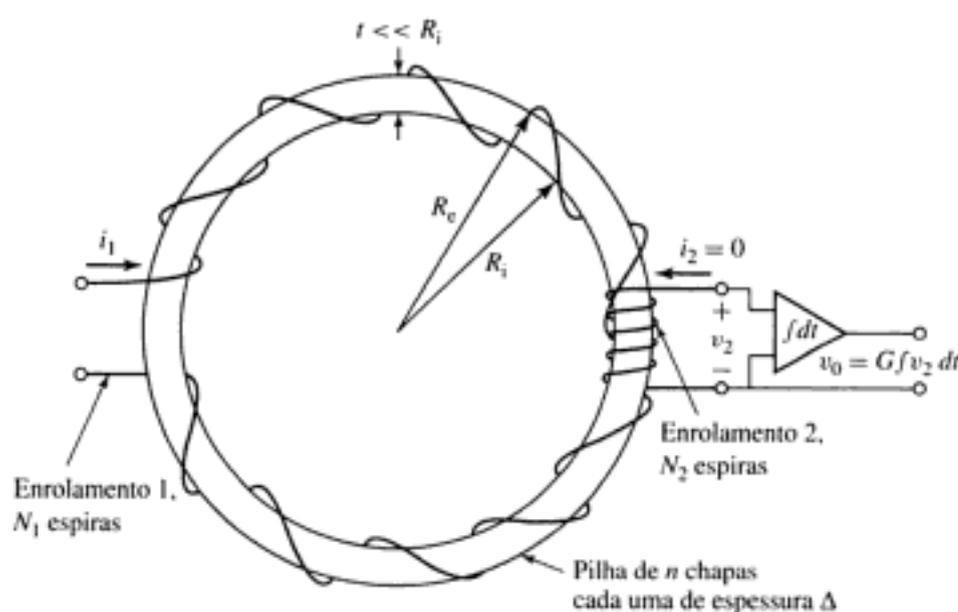
- Desprezando os efeitos de espriamento, encontre a indutância mútua entre os enrolamentos 1 e 2 em função da posição  $x$  do êmbolo.
- O êmbolo é acionado por uma fonte externa de tal modo que o seu movimento é descrito por

$$x(t) = \frac{w(1 + \epsilon \sin \omega t)}{2}$$

onde  $\epsilon \leq 1$ . Encontre uma expressão para a tensão senoidal gerada como resultado desse movimento.

- 1.25** A Fig. 1.35 mostra uma configuração que pode ser usada para medir as características magnéticas do aço elétrico. O material a ser testado é cortado ou perfurado, produzindo chapas em formato de anéis circulares que então são empilhadas (intercalando camadas isolantes para evitar a formação de correntes parasitas). Dois enrolamentos envolvem essa pilha de chapas: o primeiro, com  $N_1$  espiras, é usado para produzir um campo magnético na pilha de chapas; o segundo, com  $N_2$  espiras, é usado para captar o fluxo magnético resultante.

A exatidão dos resultados requer que a densidade de fluxo magnético seja uniforme dentro das chapas. Isso é conseguido se a largura dos anéis  $t = R_c - R_i$  for muito menor que o raio das chapas e se o enrolamento de excitação envolver uniformemente a pilha de chapas. Para os propósitos desta análise, suponha que haja  $n$  chapas, cada uma de espessura  $\Delta$ . Suponha também que o enrolamento 1 seja excitado com uma corrente  $i_1 = I_0 \sin \omega t$ .



**FIGURA 1.35** Configuração para medição das propriedades do aço elétrico.

\* N. de T.: Alusão a canga, ou jugo, devido à sua forma.

- Encontre a relação entre a intensidade de campo magnético  $H$  nas chapas e a corrente  $i_1$  no enrolamento 1.
- Encontre a relação entre a tensão  $v_2$  e a razão, no tempo, da variação de fluxo magnético  $B$  nas chapas.
- Encontre a relação entre a tensão  $v_0 = G \int v_2 dt$  e a densidade de fluxo.

Nesse problema, mostramos que a intensidade do campo magnético  $H$  e a densidade do fluxo magnético  $B$  nas chapas são proporcionais à corrente  $i_1$  e à tensão  $v_2$ , por meio de constantes conhecidas. Assim, no aço elétrico,  $B$  e  $H$  podem ser medidas diretamente e as curvas características  $B$ - $H$ , como discutidas nas Seções 1.3 e 1.4, podem ser determinadas.

- Da curva de magnetização  $CC$  da Fig. 1.10, é possível calcular a permeabilidade relativa  $\mu_r = B_c / (\mu_0 H_c)$  do aço elétrico M-5 em função do valor de fluxo  $B_0$ . Supondo que o núcleo da Fig. 1.2 seja feito de aço elétrico M-5 com as dimensões dadas no Exemplo 1.1, calcule a densidade máxima de fluxo tal que a relutância do núcleo nunca exceda em 5 por cento a relutância do circuito magnético total.
- Para testar as propriedades de uma amostra de aço elétrico, chapas com a forma dada na Fig. 1.35 foram estampadas a partir de uma chapa de aço elétrico de espessura igual a 3,0 mm. Os raios das chapas são  $R_i = 75$  mm e  $R_e = 82$  mm. Elas foram montadas em uma pilha de 10 chapas (separadas por isolamento apropriado para evitar as correntes parasitas) com o propósito de testar as propriedades magnéticas, na frequência de 100 Hz.
  - O fluxo na pilha de chapas será gerado com uma fonte de tensão de 100 Hz de amplitude variável e 30 V de valor de pico (pico-a-pico). Calcule o número necessário de espiras  $N_1$  do enrolamento de excitação para assegurar que se possa excitar a pilha de chapas até atingir uma densidade de fluxo de pico de 2,0 T.
  - Com um enrolamento secundário de  $N_2 = 20$  espiras e um ganho de integração  $G = 1000$ , observa-se que a saída do integrador é de 7,0 V pico-a-pico. Calcule (i) o fluxo de pico correspondente da pilha de chapas e (ii) a amplitude correspondente da tensão aplicada ao enrolamento de excitação.
- As bobinas do circuito magnético mostrado na Fig. 1.36 são conectadas em série de modo que os valores de FMM dos caminhos A e B tendam ambos a estabelecer fluxos na perna central C com o mesmo sentido. As bobinas são enroladas com o mesmo número de espiras,  $N_1 = N_2 = 100$ .

As dimensões são:

Área das seções retas das pernas A e B = 7 cm<sup>2</sup>

Área da seção reta da perna C = 14 cm<sup>2</sup>

Comprimento do caminho A = 17 cm

Comprimento do caminho B = 17 cm

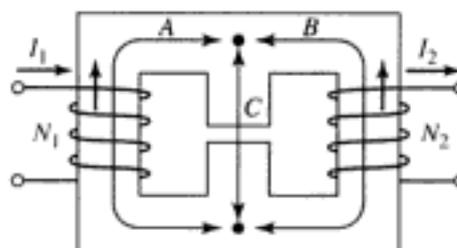


FIGURA 1.36 Circuito magnético do Problema 1.28.

Comprimento do caminho  $C = 5,5$  cm  
 Entreferro = 0,4 cm

O material é do tipo aço elétrico M-5 de 0,012 polegadas, com um fator de empilhamento de 0,94. Desconsidere o espalhamento e a dispersão.

- Quantos ampères são necessários para produzir uma densidade de fluxo de 1,2 T no entreferro?
- Dada a condição da parte (a), quantos joules de energia são armazenados no campo magnético do entreferro?
- Calcule a indutância.

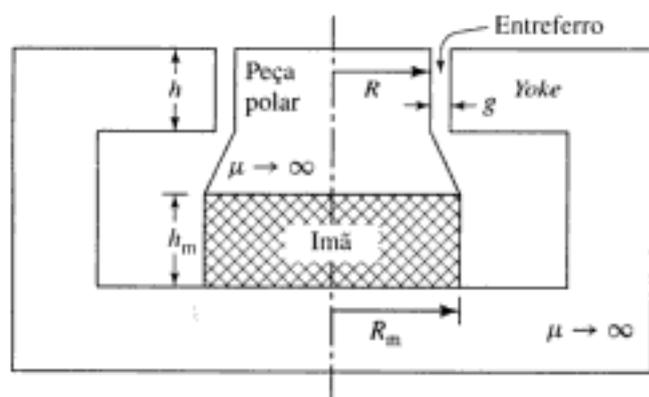


- 1.29** A seguinte tabela mostra dados da metade superior de um laço de histerese simétrico de 60 Hz para uma amostra de aço magnético:

$B, T$	0	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6	0,4	0,2	0
$H, A. \text{ espiras/m}$	48	52	58	73	85	103	135	193	80	42	2	-18	-29	-40	-45	-48

Usando o MATLAB, (a) plote esses dados, (b) calcule a área do laço de histerese em joules e (c) calcule as perdas no núcleo a 60 Hz em watts/kg. A densidade do aço M-5 é  $7,65 \text{ g/cm}^3$ .

- Suponha que o circuito magnético do Problema 1.1 e da Fig. 1.24 seja construído de aço elétrico M-5 com as propriedades descritas nas Figs. 1.10, 1.12 e 1.14. Suponha que o núcleo esteja operando com uma densidade de fluxo senoidal de 60 Hz e valor eficaz de 1,1 T. Desconsidere a resistência do enrolamento e a indutância de dispersão. Obtenha a tensão do enrolamento, a sua corrente eficaz e as perdas no núcleo, nessas condições de operação. A densidade do aço M-5 é  $7,65 \text{ g/cm}^3$ .
- Repita o Exemplo 1.8 supondo que todas as dimensões do núcleo sejam duplicadas.
- Usando as curvas de magnetização do samário-cobalto dadas na Fig. 1.19, encontre o ponto de produto energético máximo e os valores correspondentes de densidade de fluxo e intensidade de campo magnético. Usando esses valores, repita o Exemplo 1.10 substituindo o ímã de Alnico 5 por um de samário-cobalto. De quanto isso reduz o volume de ímã necessário para se obter a densidade de fluxo desejada no entreferro?
- Usando as características de magnetização do neodímio-ferro-boro dadas na Fig. 1.19, encontre o ponto de produto energético máximo e os valores correspondentes de densidade de fluxo e intensidade de campo magnético. Usando esses valores, repita o



**FIGURA 1.37** Circuito magnético do alto-falante do Problema 1.34 (bobina móvel não mostrada).

Exemplo 1.10 substituindo o imã de Alnico 5 por um de neodímio-ferro-boro. De quanto isso reduz o volume de imã necessário para se obter a densidade de fluxo desejada no entreferro?

- 1.34** A Fig. 1.37 mostra o circuito magnético de um alto-falante de imã permanente. A bobina móvel (não mostrada), produtora de som, tem a forma cilíndrica e se ajusta ao entreferro. Um imã de samário-cobalto é usado para criar um campo magnético CC no entreferro. Esse campo interage com as correntes da bobina móvel produzindo o movimento. O projetista determinou que o entreferro deve ter raio  $R = 1,8$  cm, comprimento  $g = 0,1$  cm e altura  $h = 0,9$  cm.

Supondo que a estrutura em *yoke* e a peça polar tenham permeabilidade magnética infinita ( $\mu \rightarrow \infty$ ), encontre a altura  $h_m$  e o raio  $R_m$  do imã de modo que seja fornecida uma densidade de fluxo magnético de 1,2 T no entreferro, e seja requerido um volume mínimo de imã.

(Sugestão: Refira-se ao Exemplo 1.10 e à Fig. 1.19 para determinar o ponto de produto energético máximo para o samário-cobalto.)

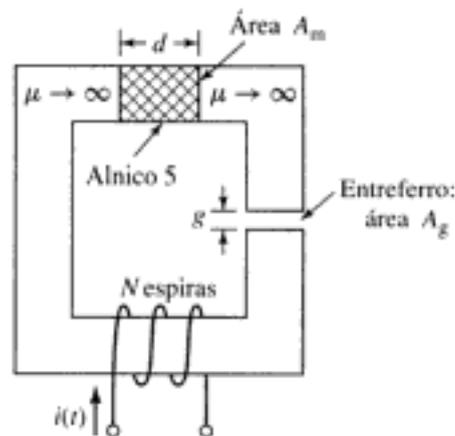
- 1.35** No entreferro do circuito magnético da Fig. 1.38, deseja-se obter uma densidade de fluxo magnético variável no tempo de acordo com

$$B_g = B_0 + B_1 \sin \omega t$$

onde  $B_1 = 0,5$  T e  $B_0 = 0,25$  T. O campo CC  $B_0$  deve ser criado por um imã de neodímio-ferro-boro, ao passo que o campo variável no tempo deve ser criado por um corrente variável no tempo.

Para  $A_g = 6$  cm<sup>2</sup>,  $g = 0,4$  cm e  $N = 200$  espiras, encontre:

- O comprimento de imã  $d$  e a área  $A_m$  que permitirão obter a densidade de fluxo desejada no entreferro e minimizar o volume de imã.
- Os valores mínimo e máximo da corrente variável necessários para se obter a densidade de fluxo variável no entreferro. Essa corrente irá variar de forma senoidal no tempo?



**FIGURA 1.38** Circuito magnético do Problema 1.35.

# Transformadores

Antes de prosseguir com este estudo de máquinas elétricas, é desejável discutir certos aspectos da teoria dos circuitos acoplados magneticamente, com ênfase no funcionamento do transformador. Embora o transformador estático não seja um dispositivo de conversão de energia, é um componente indispensável de muitos sistemas de conversão de energia. Como componente significativo de um sistema CA de potência, possibilita a geração elétrica e a transferência da energia nas tensões mais econômicas, além de permitir a utilização da energia na tensão mais adequada para um dado dispositivo em particular. O transformador também é largamente utilizado em circuitos de baixa potência, em circuitos eletrônicos de baixas correntes e nos de controle. Executam funções como para casar as impedâncias entre uma fonte e sua carga, obter a máxima transferência de potência, isolar um circuito de outro, ou isolar a corrente contínua mantendo a continuidade CA entre dois circuitos.

Um transformador é um dos dispositivos mais simples e é constituído por dois ou mais circuitos elétricos acoplados por um circuito magnético comum. Sua análise envolve muitos dos princípios essenciais ao estudo de máquinas elétricas. Assim, o nosso estudo do transformador servirá como ponte entre a introdução à análise de circuitos magnéticos do Capítulo 1 e o estudo mais detalhado de máquinas elétricas que se seguirá mais adiante.

## 2.1 INTRODUÇÃO AOS TRANSFORMADORES

Essencialmente, um transformador consiste em dois ou mais enrolamentos acoplados por meio de um fluxo magnético comum. Se um desses enrolamentos, o *primário*, for conectado a uma fonte de tensão alternada, então será produzido um fluxo alternado cuja amplitude dependerá da tensão do primário, da frequência da tensão aplicada e do número de espiras. O fluxo comum estabelece um enlace com o outro enrolamento, o *secundário*,<sup>1</sup> induzindo neste uma tensão cujo valor depende do número de espiras do secundário, assim como da magnitude do fluxo comum e da frequência. Ao se estabelecer uma proporção adequada entre os números de espiras do primário e do secundário, praticamente qualquer *relação de tensões*, ou *relação de transformação*, pode ser obtida.

A essência do funcionamento de um transformador requer apenas que haja um fluxo comum, variável no tempo, enlaçando dois enrolamentos. Tal ação pode ocorrer entre enrolamentos acoplados pelo ar, no entanto, o acoplamento entre enrolamentos pode ser tor-

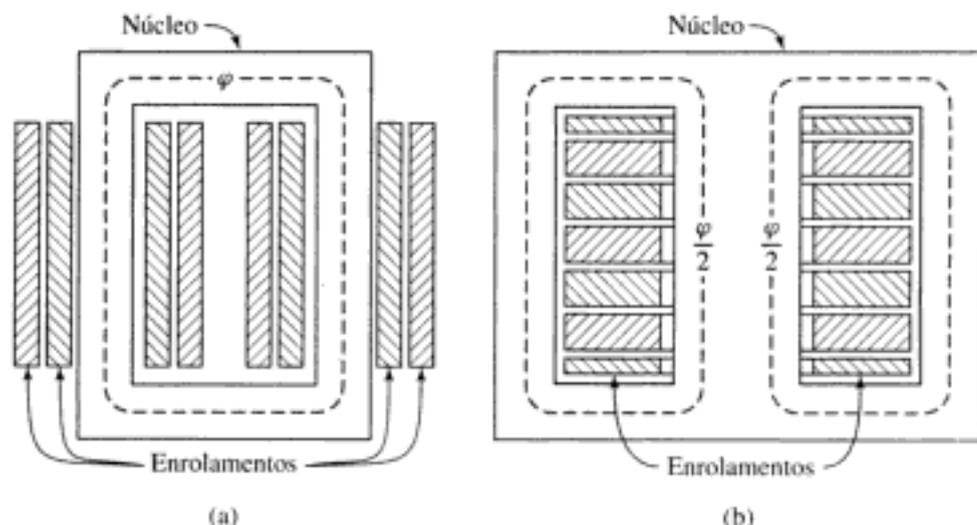
<sup>1</sup> Por convenção, o primário é visto como sendo a "entrada" do transformador e o secundário, como a "saída". Entretanto, em muitas aplicações, a energia pode fluir em ambos os sentidos e o conceito de enrolamentos primário e secundário pode se tornar confuso. Uma terminologia alternativa, que se refere aos enrolamentos como sendo de "alta tensão" e "baixa tensão", é usada comumente eliminando essa confusão.

nado muito mais eficiente usando-se um núcleo de ferro ou de algum outro material ferromagnético. Nesse caso, o fluxo em sua maior parte fica confinado a um caminho delimitado, de alta permeabilidade, enlaçando os enrolamentos. Tal transformador é comumente chamado *transformador de núcleo de ferro*. A maioria dos transformadores é desse tipo. A discussão seguinte ocupa-se quase que totalmente com transformadores de núcleo de ferro.

Como discutido na Seção 1.4, para se reduzir as perdas causadas por correntes parasitas no núcleo, o circuito magnético consiste geralmente em uma pilha de chapas delgadas. Dois tipos comuns de construção estão mostrados esquematicamente na Fig. 2.1. No tipo de *núcleo envolvido* (Fig. 2.1a), os enrolamentos envolvem duas pernas de um núcleo magnético retangular e, no tipo de *núcleo envolvente* (Fig. 2.1b), os enrolamentos envolvem a perna central de um núcleo de três pernas. Chapas de aço-silício de 0,014 pol (polegadas) são usadas geralmente em transformadores que operam com frequências inferiores a algumas poucas centenas de hertz. O aço-silício tem as propriedades desejáveis de baixo custo e baixas perdas no núcleo, apresentando alta permeabilidade em densidades de fluxo elevadas (1,0 a 1,5 T). Os núcleos de pequenos transformadores, usados em circuitos de comunicação em altas frequências e baixos níveis de energia, são constituídos, algumas vezes, de ligas ferromagnéticas pulverizadas e comprimidas conhecidas como *ferrites*.

Em cada uma dessas configurações, a maioria do fluxo está confinada ao núcleo e, portanto, enlaça ambos os enrolamentos. Os enrolamentos também produzem fluxo adicional, conhecido como *fluxo disperso*, enlaçando um dos enrolamentos sem enlaçar o outro. Embora o fluxo disperso represente uma fração pequena do fluxo total, desempenha um papel importante na determinação do comportamento do transformador. Na prática, a dispersão dos transformadores é reduzida subdividindo-se os enrolamentos em seções colocadas o mais próximo possível entre si. Nos transformadores de núcleo envolvido, cada enrolamento consiste em duas seções, uma em cada perna do núcleo, e os enrolamentos do primário e do secundário são bobinas concêntricas. Nos transformadores de núcleo envolvente, variações da configuração de enrolamentos concêntricos podem ser usadas ou, então, os enrolamentos podem consistir em diversas bobinas delgadas em forma de "panquecas" que são montadas em uma pilha, intercalando-se as bobinas do primário e do secundário.

A Fig. 2.2 ilustra a construção interna de um *transformador de distribuição* tal como é usado em sistemas de utilidade pública para fornecer tensões adequadas de uso por consumidores residenciais. Um transformador de potência de grande porte está mostrado na Fig. 2.3.

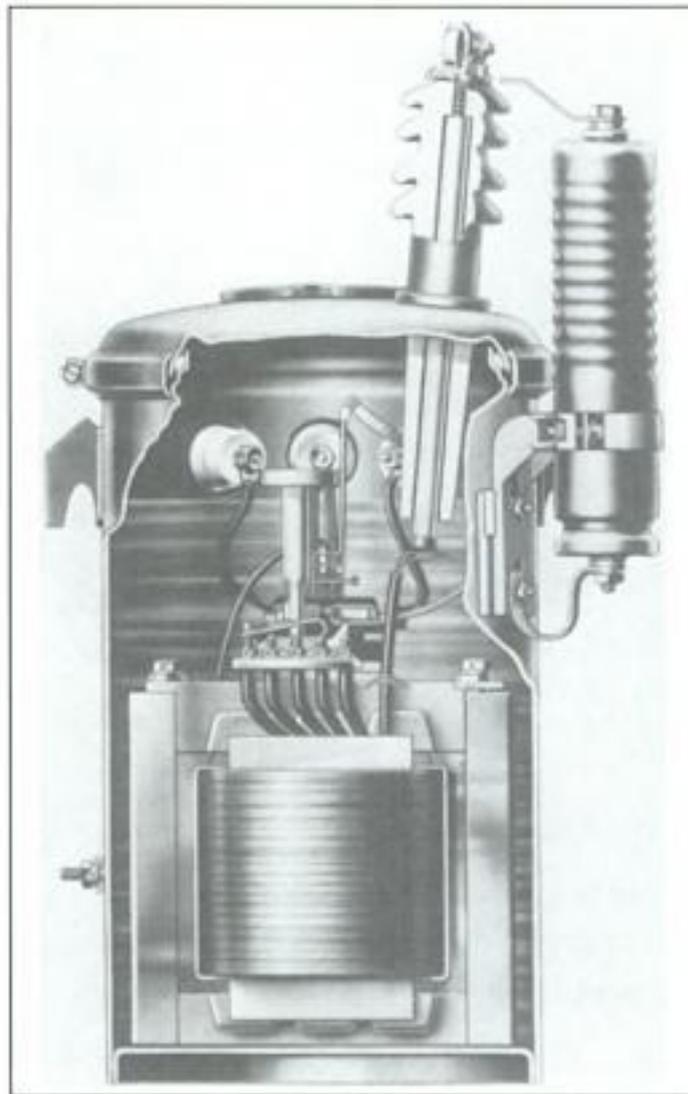


**FIGURA 2.1** Vistas esquemáticas de transformadores de (a) núcleo envolvido e (b) núcleo envolvente.

## 2.2 CONDIÇÕES SEM CARGA

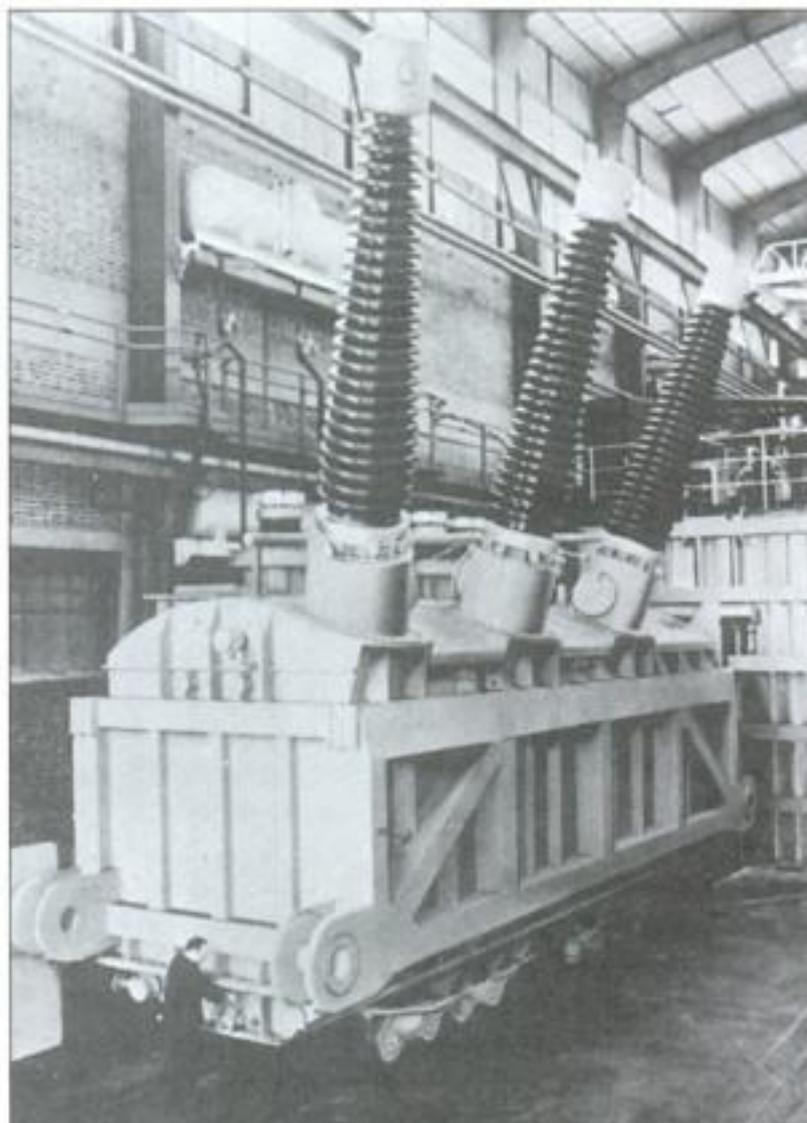
A Fig. 2.4 mostra esquematicamente um transformador com o seu circuito secundário aberto, e uma tensão alternada  $v_1$  aplicada aos terminais do primário. Para simplificar os desenhos, é prática comum, em diagramas esquemáticos de transformadores, mostrar os enrolamentos do primário e do secundário como se estivessem em pernas separadas do núcleo, como na Fig. 2.4, embora praticamente, na realidade, estejam intercalados. Como discutido na Seção 1.4, uma pequena corrente, em regime estacionário  $i_\phi$ , chamada *corrente de excitação*, flui no primário e estabelece um fluxo alternado no circuito magnético.<sup>2</sup> Esse fluxo induz uma FEM no primário igual a

$$e_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = N_1 \frac{d\phi}{dt} \quad (2.1)$$



**FIGURA 2.2** Vista em corte de um transformador típico de distribuição autoprotetido dimensionado para 2 a 25kVA, 7.200:240/120 V. Apenas um isolador de alta tensão e um pára-raios são necessários porque um dos lados da linha de 7.200 V e um lado do primário estão aterrados. (General Electric Company)

<sup>2</sup> Em geral, a corrente de excitação corresponde ao valor líquido de ampères-espiras (FMM) que atua no circuito magnético não sendo possível distinguir se flui no enrolamento primário, no secundário ou parcialmente em cada um deles.



**FIGURA 2.3** Um transformador trifásico de 600 MVA e 50 Hz usado para elevar a tensão de geração de 20 kV para 405 kV de transmissão. (CEM Le Havre, Associado Francês da Brown Boveri Corporation)

onde

$\lambda_1$  = fluxo concatenado do enrolamento primário

$\varphi$  = fluxo no núcleo enlaçando ambos os enrolamentos

$N_1$  = número de espiras do enrolamento primário

A tensão  $e_1$  é em volts quando  $\varphi$  é em webers. Essa FEM, juntamente com a queda de tensão na *resistência de primário*  $R_1$ , deve igualar-se à tensão aplicada  $v_1$ . Assim,

$$v_1 = R_1 i_\varphi + e_1 \quad (2.2)$$

Observe que, para os propósitos desta discussão, estamos desprezando os efeitos do fluxo disperso do primário, o que corresponde a acrescentar um termo de FEM induzida à Equação 2.2. Em transformadores típicos, esse fluxo é uma porcentagem pequena do fluxo do núcleo, e justifica-se desprezá-lo aqui para os presentes propósitos. Entretanto, representa um papel bem importante no comportamento dos transformadores, sendo discutido com algum detalhe na Seção 2.4.

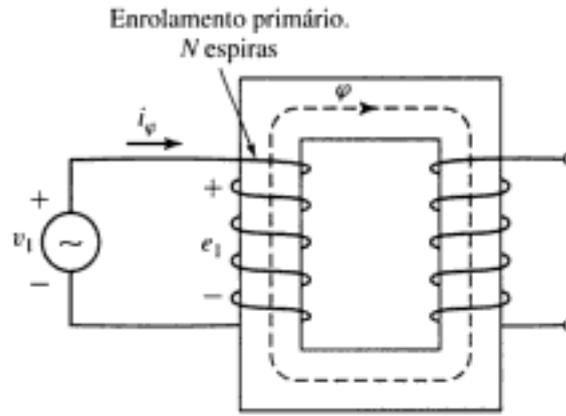


FIGURA 2.4 Transformador com secundário aberto.

Na maioria dos transformadores de grande porte, a queda de tensão em aberto na resistência de primário é de fato bem pequena, e a FEM induzida  $e_1$  iguala-se bem de perto à tensão aplicada  $v_1$ . Além disso, as formas de onda de tensão e fluxo são senoidais muito aproximadamente. A análise pode então ser bastante simplificada, como já vimos na Seção 1.4. Assim, se o fluxo instantâneo for

$$\varphi = \phi_{\max} \text{ sen } \omega t \quad (2.3)$$

a tensão induzida será

$$e_1 = N_1 \frac{d\varphi}{dt} = \omega N_1 \phi_{\max} \cos \omega t \quad (2.4)$$

onde  $\phi_{\max}$  é o valor máximo do fluxo e  $\omega = 2\pi f$ , em que a frequência é  $f$  Hz. Em relação aos sentidos de referência da corrente e da tensão mostrados na Fig. 2.4, a FEM induzida está adiantada  $90^\circ$  em relação ao fluxo. O valor eficaz da FEM induzida  $e_1$  é

$$E_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N_1 \phi_{\max} = \sqrt{2} \pi f N_1 \phi_{\max} \quad (2.5)$$

Se a queda de tensão na resistência for desprezível, a força contra-eletromotriz (FCEM) será igual à tensão aplicada. Sob essas condições, quando uma tensão senoidal é aplicada a um enrolamento, um fluxo senoidal deve se estabelecer no núcleo com um valor máximo de  $\phi_{\max}$ , satisfazendo a condição de que  $E_1$  na Equação 2.5 seja igual ao valor eficaz  $V_1$  da tensão aplicada. Assim,

$$\phi_{\max} = \frac{V_1}{\sqrt{2} \pi f N_1} \quad (2.6)$$

Nessas condições, o fluxo do núcleo é determinado unicamente pela tensão aplicada, a sua frequência e o número de espiras do enrolamento. Essa importante relação aplica-se não somente aos transformadores, mas também a qualquer dispositivo que opere com uma tensão aplicada senoidal, desde que as quedas de tensão devidas à resistência e à indutância do fluxo disperso sejam desprezíveis. O fluxo do núcleo é estabelecido pela tensão aplicada e a corrente de excitação necessária é determinada pelas propriedades magnéticas do núcleo. A corrente de excitação ajusta-se de tal forma que a FMM necessária é produzida de modo que o fluxo definido pela Equação 2.6 seja criado.

Devido às propriedades magnéticas não-lineares do ferro, a forma de onda da corrente de excitação difere da forma de onda do fluxo. A curva da corrente de excitação, em função

do tempo, pode ser obtida graficamente a partir do laço de histerese CA, como foi discutido na Seção 1.4 e mostrado na Fig. 1.11.

Se a corrente de excitação for analisada por métodos baseados em série de Fourier, constata-se que ela consiste em uma componente fundamental e uma série de harmônicas ímpares. A componente fundamental pode, por sua vez, ser decomposta em duas componentes, uma em fase com a FCEM e a outra atrasada  $90^\circ$  em relação à FCEM. A componente em fase fornece a potência absorvida no núcleo pelas perdas por histerese e correntes parasitas. É referida como sendo a *componente de perdas no núcleo* da corrente de excitação. Quando a componente de perdas no núcleo é subtraída da corrente de excitação, o resultado é a chamada *corrente de magnetização*. Compreende uma componente fundamental atrasada  $90^\circ$  em relação à FCEM, junto com todas as harmônicas. A harmônica principal é a terceira. No caso de transformadores de potência típicos, a terceira harmônica é cerca de 40% da corrente de excitação.

Exceto em problemas que tratam diretamente dos efeitos das correntes harmônicas, geralmente as peculiaridades da forma de onda da corrente de excitação não precisam ser levadas em consideração, porque a corrente de excitação em si é pequena, especialmente em transformadores de grande porte. Por exemplo, no caso de um transformador de potência típico, a corrente de excitação constitui cerca de 1 a 2% da corrente a plena carga. Conseqüentemente, os efeitos das harmônicas são geralmente encobertos pelas correntes senoidais fornecidas aos outros elementos lineares do circuito. A corrente de excitação pode então ser representada por uma corrente senoidal equivalente, de mesmo valor eficaz e frequência, capaz de produzir a mesma potência média que a corrente de excitação real. Tal representação é essencial à construção de um *diagrama fasorial*, que representa em forma vetorial as relações de fase entre as várias tensões e correntes de um sistema. Cada sinal é representado por um fasor cujo módulo é proporcional à amplitude do sinal, e cujo ângulo é igual ao ângulo de fase do sinal, medido em relação a um sinal de referência escolhido.

Na Fig. 2.5, os fasores  $\hat{E}_1$  e  $\hat{\Phi}$ , respectivamente, representam os valores eficazes da FEM induzida e do fluxo. O fasor  $\hat{I}_\varphi$  representa o valor eficaz da corrente de excitação senoidal equivalente. Ela está atrasada de um ângulo  $\theta_c$  em relação a  $\hat{E}_1$ .

O valor das perdas no núcleo  $P_c$ , igual ao produto das componentes em fase de  $\hat{E}_1$  e  $\hat{I}_\varphi$ , é dado por

$$P_c = E_1 I_\varphi \cos \theta_c \quad (2.7)$$

A componente  $\hat{I}_c$ , em fase com  $\hat{E}_1$ , é a corrente das perdas no núcleo. A componente  $\hat{I}_m$ , em fase com o fluxo, representa uma corrente senoidal equivalente que tem o mesmo valor eficaz

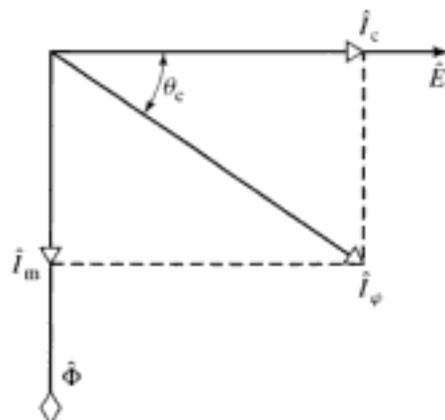


FIGURA 2.5 Diagrama fasorial sem carga.

que a corrente de magnetização. As Figs. 1.12 e 1.14 mostram, em volts-ampères, algumas curvas características da excitação e das perdas no núcleo para o aço-silício de alta qualidade, usado em transformadores de potência e distribuição.

### EXEMPLO 2.1

No Exemplo 1.8, as perdas no núcleo e os volts-ampères de excitação do núcleo da Fig. 1.15, para  $B_{\max} = 1,5 \text{ T}$  e  $60 \text{ Hz}$ , foram calculados obtendo-se

$$P_c = 16 \text{ W} \quad (VI)_{ef} = 20 \text{ VA}$$

e a tensão induzida foi de  $274/\sqrt{2} = 194 \text{ V}$  eficazes, quando o enrolamento tinha 200 espiras.

Encontre o fator de potência, a corrente  $I_c$  das perdas no núcleo e a corrente de magnetização  $I_m$ .

#### ■ Solução

$$\text{Fator de potência } \cos \theta_c = \frac{16}{20} = 0,80 \text{ (atrasado) assim } \theta_c = -36,9^\circ$$

Observe que, como sabemos, o fator de potência está atrasado porque o sistema é indutivo.

$$\text{Corrente de excitação } I_\varphi = \frac{20}{194} = 0,10 \text{ A eficazes}$$

$$\text{Componente de perdas no núcleo } I_c = \frac{16}{194} = 0,082 \text{ A eficazes}$$

$$\text{Componente de magnetização } I_m = I_\varphi |\sin \theta_c| = 0,060 \text{ A eficazes}$$

## 2.3 EFEITO DA CORRENTE DO SECUNDÁRIO; TRANSFORMADOR IDEAL

Como uma primeira aproximação para uma teoria quantitativa, considere um transformador com um enrolamento primário de  $N_1$  espiras e um secundário de  $N_2$  espiras, como mostrado esquematicamente na Fig. 2.6. Observe que a corrente do secundário é definida como positiva quando sai do enrolamento. Assim, uma corrente positiva no secundário produz uma FMM de sentido oposto ao criado por uma corrente positiva no primário. Vamos idealizar as propriedades desse transformador supondo que as resistências dos enrolamentos são desprezíveis, que todo o fluxo está confinado ao núcleo enlaçando ambos os enrolamentos (isto é, o fluxo disperso é considerado desprezível), que não há perdas no núcleo, e que a permeabilidade do núcleo é tão alta que apenas uma FMM de excitação insignificante é requerida para criar o fluxo. Na prática com transformadores reais, aproximações muito boas dessas propriedades são conseguidas, mas nunca inteiramente. Um transformador hipotético que apresente essas propriedades é freqüentemente chamado de *transformador ideal*.

Dadas essas suposições, quando uma tensão  $v_1$  variável no tempo for aplicada aos terminais do primário, então um fluxo  $\varphi$  deve ser estabelecido no núcleo de modo que a FCEM  $e_1$  seja igual à tensão aplicada. Assim,

$$v_1 = e_1 = N_1 \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.8)$$

O fluxo do núcleo também concatena o secundário produzindo uma FEM induzida  $e_2$  e uma outra tensão igual  $v_2$  nos terminais do secundário, dadas por

$$v_2 = e_2 = N_2 \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.9)$$

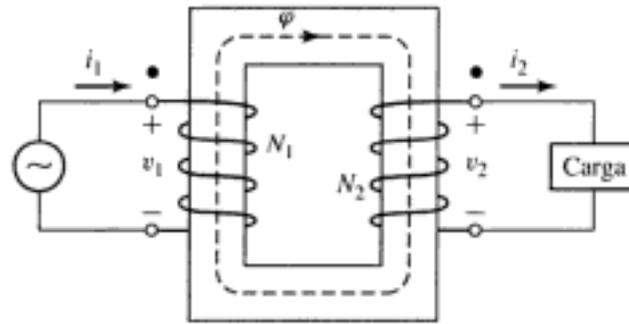


FIGURA 2.6 Transformador ideal com carga.

Da razão entre as Equações 2.8 e 2.9, vem

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (2.10)$$

Assim, um transformador ideal transforma tensões na razão direta das espiras de seus enrolamentos.

Agora, vamos conectar uma carga ao secundário e, conseqüentemente, uma corrente  $i_2$  e uma FMM  $N_2 i_2$  estarão presentes no secundário. Como supõe-se que a permeabilidade do núcleo seja muito elevada e que o fluxo do núcleo seja estabelecido pela tensão aplicada ao primário, como especificado pela Equação 2.8, então o fluxo do núcleo não irá se alterar com a presença de uma carga no secundário, e assim a FMM líquida de excitação, que atua no núcleo (igual a  $N_1 i_1 - N_2 i_2$ ), também não irá se alterar permanecendo, portanto, desprezível. Assim,

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = 0 \quad (2.11)$$

Da Equação 2.11, vemos que uma FMM de compensação deve surgir no primário para cancelar a do secundário. Portanto,

$$N_1 i_1 = N_2 i_2 \quad (2.12)$$

Assim, vemos que a condição de manter inalterada a FMM líquida é o meio pelo qual o primário “toma conhecimento” da presença de uma corrente de carga no secundário. Qualquer mudança na FMM que flui no secundário, resultante de uma carga, deve se fazer acompanhada de uma mudança correspondente na FMM do primário. Observe que, para os sentidos de referência mostrados na Fig. 2.6, os valores de FMM de  $i_1$  e  $i_2$  estão em sentidos opostos e, portanto, compensam-se. Assim, a FMM líquida que atua no núcleo é zero, em concordância com a suposição de que a corrente de excitação de um transformador ideal seja zero.

Da Equação 2.12,

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} \quad (2.13)$$

Portanto, um transformador ideal transforma correntes na razão inversa das espiras de seus enrolamentos.

Observe também, das Equações 2.10 e 2.13, que

$$v_1 i_1 = v_2 i_2 \quad (2.14)$$

ou seja, a potência instantânea de entrada do primário é igual à potência instantânea de saída do secundário, uma condição necessária porque todos os mecanismos dissipativos e de armazenamento de energia foram desconsiderados.

Uma propriedade adicional do transformador ideal pode ser vista examinando-se o caso em que se aplica uma tensão senoidal e usa-se uma impedância como carga. Pode-se usar o simbolismo fasorial. O circuito está mostrado de forma simplificada na Fig. 2.7a, na qual os terminais do transformador, assinalados com marcas circulares, correspondem aos terminais marcados de forma semelhante na Fig. 2.6. As marcas circulares indicam terminais de polaridades correspondentes; isto é, se formos seguindo ao longo dos enrolamentos primário e secundário da Fig. 2.6, começando nos terminais com marcas, verificaremos que ambos os enrolamentos circundam o núcleo no mesmo sentido em relação ao fluxo. Portanto, se compararmos as tensões dos dois enrolamentos, as tensões de um terminal com marca até o outro sem marca terão as mesmas polaridades instantâneas no primário e no secundário. Em outras palavras, as tensões  $\hat{V}_1$  e  $\hat{V}_2$  da Fig. 2.7a estão em fase. As correntes  $\hat{I}_1$  e  $\hat{I}_2$  também estão em fase, como se vê a partir da Equação 2.12. Observe novamente que a polaridade de  $\hat{I}_1$  é definida como entrando no terminal marcado e a polaridade de  $\hat{I}_2$ , como saindo do terminal marcado.

A seguir, investigaremos as propriedades do transformador ideal em relação à transformação de impedâncias. Em forma fasorial, as Equação 2.10 e 2.13 podem ser expressas como

$$\hat{V}_1 = \frac{N_1}{N_2} \hat{V}_2 \quad \text{e} \quad \hat{V}_2 = \frac{N_2}{N_1} \hat{V}_1 \quad (2.15)$$

$$\hat{I}_1 = \frac{N_2}{N_1} \hat{I}_2 \quad \text{e} \quad \hat{I}_2 = \frac{N_1}{N_2} \hat{I}_1 \quad (2.16)$$

Dessas equações, vem

$$\frac{\hat{V}_1}{\hat{I}_1} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \frac{\hat{V}_2}{\hat{I}_2} \quad (2.17)$$

Observando que a impedância de carga  $Z_2$  relaciona-se com a tensão e a corrente do secundário por

$$Z_2 = \frac{\hat{V}_2}{\hat{I}_2} \quad (2.18)$$

onde  $Z_2$  é a impedância complexa da carga. Conseqüentemente, até onde os seus efeitos precisam ser considerados, uma impedância  $Z_2$  no circuito do secundário pode ser substituída por uma impedância equivalente  $Z_1$  no circuito do primário, desde que

$$Z_1 = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 Z_2 \quad (2.19)$$

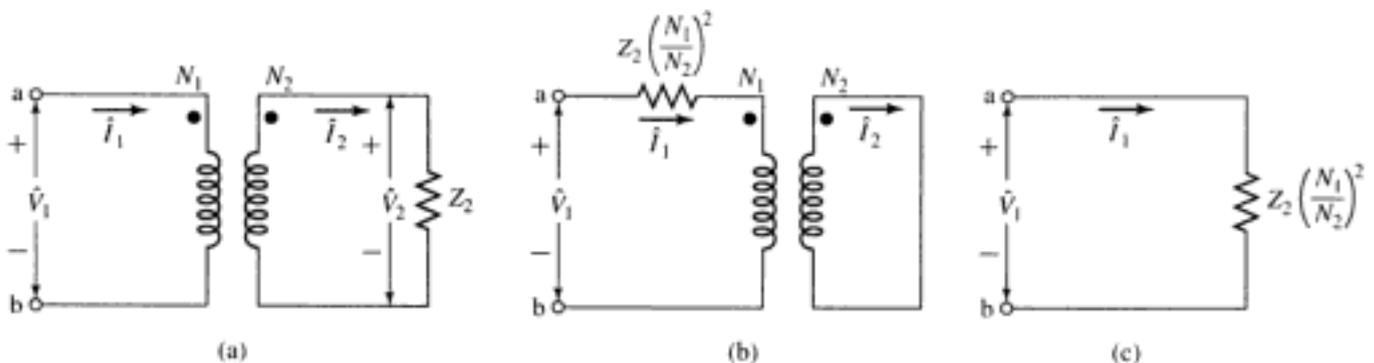


FIGURA 2.7 Três circuitos que são idênticos nos terminais ab quando o transformador é ideal.

Assim, os três circuitos da Fig. 2.7 serão indistinguíveis quando os seus desempenhos forem observados a partir dos terminais ab. Esse modo de transferir a impedância de um lado a outro de um transformador é conhecido por *referir ou refletir a impedância* para o outro lado. As impedâncias são transformadas proporcionalmente ao quadrado da relação de espiras. Do mesmo modo, as tensões e correntes podem ser *referidas* a um lado ou outro, usando-se as Equações 2.15 e 2.16 para calcular a tensão e a corrente equivalentes no lado escolhido.

Para resumir, *em um transformador ideal, as tensões são transformadas na razão direta das espiras; as correntes, na razão inversa, e as impedâncias, na razão direta ao quadrado. A potência e os volts-ampères não se alteram.*

### EXEMPLO 2.2

O circuito equivalente da Fig. 2.8a mostra um transformador ideal em que a impedância  $R_2 + jX_2 = 1 + j4 \Omega$  está conectada em série com o secundário. A relação de espiras é  $N_1/N_2 = 5:1$ . (a) Desenhe um circuito equivalente cuja impedância em série esteja referida ao primário. (b) Para uma tensão eficaz de primário de 120 V e um curto circuito conectado entre os terminais A-B, calcule a corrente do primário e a corrente que flui no curto circuito.

#### ■ Solução

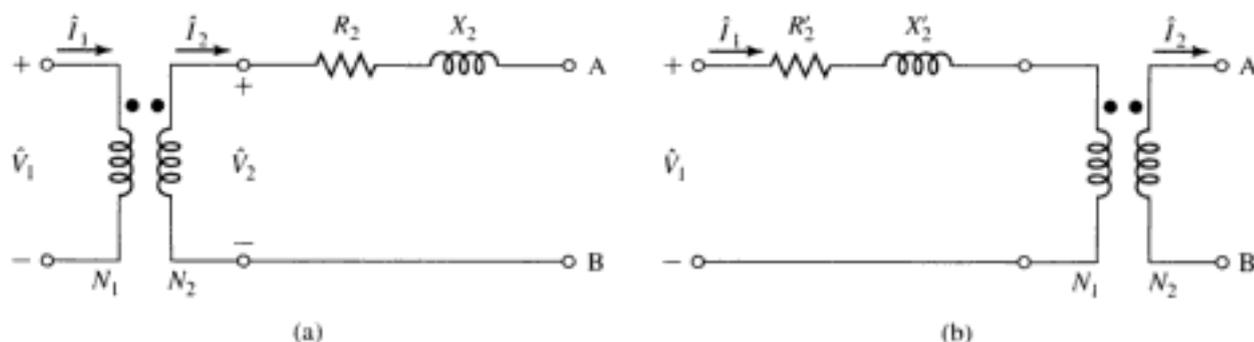
a. O novo circuito equivalente está mostrado na Fig. 2.8b. A impedância do secundário é referida ao primário na razão do quadrado das espiras. Assim,

$$\begin{aligned} R'_2 + jX'_2 &= \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 (R_2 + jX_2) \\ &= 25 + j100 \Omega \end{aligned}$$

b. Da Equação 2.19, um curto nos terminais A-B aparecerá como um curto no primário do transformador ideal da Fig. 2.8b porque a tensão zero do curto será refletida na razão  $N_1/N_2$  de espiras para o primário. Assim, a corrente do primário será dada por

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{V}_1}{R'_2 + jX'_2} = \frac{120}{25 + j100} = 0,28 - j1,13 \text{ A eficazes}$$

correspondendo a um valor eficaz de 1,16 A. Da Equação 2.13, a corrente do secundário será igual a  $N_1/N_2 = 5$  vezes a corrente do primário. Portanto, a corrente no curto terá um valor eficaz de  $5(1,16) = 5,8 \text{ A}$ .



**FIGURA 2.8** Circuitos equivalentes para o Exemplo 2.2. (a) Impedância em série com o secundário. (b) Impedância referida ao primário.

## PROBLEMA PRÁTICO 2.1

Repita a parte (b) do Exemplo 2.2 com uma impedância em série de  $R_2 + jX_2 = 0,05 + j0,97 \Omega$  e uma relação de espiras de 14:1.

■ **Solução**

A corrente do primário é  $0,03 - j0,63$  A eficazes, correspondendo a um valor eficaz de 0,63 A. A corrente no curto será 14 vezes maior e assim terá um valor eficaz de 8,82 A.

## 2.4 REATÂNCIAS NO TRANSFORMADOR E CIRCUITOS EQUIVALENTES

As diferenças de um transformador real em relação a um ideal devem ser incluídas em grau maior ou menor na maioria das análises de desempenho dos transformadores. Um modelo mais completo deve levar em consideração os efeitos das resistências dos enrolamentos, os fluxos dispersos e as correntes finitas de excitação devidas à permeabilidade finita (não-linear, na realidade) do núcleo. Em alguns casos, as capacitâncias dos enrolamentos também têm efeitos importantes, notavelmente em problemas que envolvem o comportamento do transformador em frequências acima da faixa de áudio, ou durante condições transitórias com variações muito rápidas, como as encontradas em transformadores de sistemas de potência, resultantes de surtos de tensão causados por raios ou transitórios de chaveamento. Entretanto, a análise desses problemas de alta frequência está além do escopo do presente tratamento e, por essa razão, as capacitâncias dos enrolamentos serão desprezadas.

Dois métodos de análise, pelos quais as características reais que se afastam do ideal podem ser levadas em consideração, são (1) uma técnica de circuito equivalente baseada em raciocínio físico e (2) uma abordagem matemática baseada na teoria clássica dos circuitos magneticamente acoplados. Ambos os métodos são de uso corrente e ambos encontram paralelos quase iguais nas teorias de máquinas rotativas. Como oferece um excelente exemplo do processo de raciocínio usado na conversão de conceitos físicos em uma teoria quantitativa, a técnica de circuito equivalente será apresentada aqui.

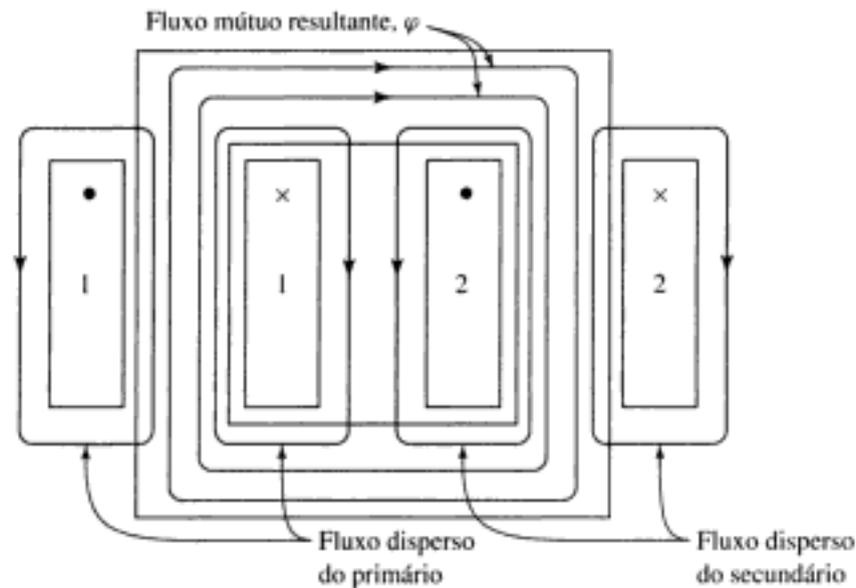
Para iniciar o desenvolvimento de um circuito equivalente de transformador, examinaremos primeiro o enrolamento primário. O fluxo total que concatena o enrolamento primário pode ser dividido em duas componentes: o fluxo mútuo resultante, confinado essencialmente ao núcleo de ferro e produzido pelo efeito combinado das correntes de primário e de secundário, e o fluxo disperso de primário, que concatena apenas o primário. Essas componentes estão identificadas no transformador esquemático mostrado na Fig. 2.9 onde, por simplicidade, os enrolamentos do primário e do secundário estão mostrados em pernas opostas do núcleo. Em um transformador real, com enrolamentos entrelaçados, os detalhes da distribuição de fluxo são mais complicados, mas as características essenciais permanecem as mesmas.

No enrolamento primário, o fluxo disperso induz uma tensão que se soma àquela produzida pelo fluxo mútuo. Como a maior parte do caminho do fluxo disperso está no ar, esse fluxo e a tensão induzida por ele variam linearmente com a corrente  $\hat{I}_1$  de primário. Portanto, pode ser representado por uma *indutância de dispersão do primário*  $L_{11}$  (igual ao fluxo de dispersão, concatenado com o primário, por unidade de corrente de primário). A correspondente *reatância de dispersão de primário*  $X_{11}$  é dada por\*

$$X_{11} = 2\pi f L_{11} \quad (2.20)$$

Além disto, haverá uma queda de tensão na resistência  $R_1$  do primário.

\* N. de T.: O subscrito 1 refere-se à dispersão (*leakage* em inglês).



**FIGURA 2.9** Vista esquemática dos fluxos mútuo e disperso de um transformador.

Vemos agora que a tensão nos terminais do primário  $\hat{V}_1$  consiste em três componentes: a queda  $\hat{I}_1 R_1$  na resistência do primário, a queda  $\hat{I}_1 X_1$ , oriunda do fluxo disperso do primário e a FEM  $\hat{E}_1$  induzida no primário pelo fluxo mútuo resultante. A Fig. 2.10a mostra um circuito equivalente do enrolamento primário que inclui todas essas tensões.

O fluxo mútuo resultante concatena ambos os enrolamentos, primário e secundário, e é criado por suas FMMs combinadas. É conveniente tratar essas FMMs considerando que a corrente do primário deve atender a duas condições do circuito magnético: deve não só produzir a FMM requerida para produzir o fluxo mútuo resultante, mas deve também contrabalançar o efeito da FMM do secundário que atua no sentido de desmagnetizar o núcleo. Um ponto de vista alternativo é que a corrente do primário deve não só magnetizar o núcleo, como também fornecer corrente para a carga conectada ao secundário. De acordo com esse quadro, é conveniente decompor a corrente do primário em duas componentes: uma componente de excitação e uma componente de carga. A *componente de excitação*  $\hat{I}_\varphi$  é definida como sendo uma corrente de primário adicional, necessária para produzir o fluxo mútuo resultante. É uma corrente não senoidal cuja natureza foi descrita na Seção 2.2.<sup>3</sup> A *componente de carga*  $\hat{I}'_2$  é definida como sendo uma componente da corrente de primário que contrabalança exatamente a FMM da corrente de secundário  $\hat{I}_2$ .

Como a componente de excitação é a que produz o fluxo do núcleo, a FMM líquida deve ser igual a  $N_1 \hat{I}_\varphi$  e vemos assim que

$$\begin{aligned} N_1 \hat{I}_\varphi &= N_1 \hat{I}_1 - N_2 \hat{I}_2 \\ &= N_1 (\hat{I}_\varphi + \hat{I}'_2) - N_2 \hat{I}_2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

e, da Equação 2.21, temos que

$$\hat{I}'_2 = \frac{N_2}{N_1} \hat{I}_2 \quad (2.22)$$

<sup>3</sup> De fato, a corrente de excitação corresponde à FMM líquida que atua no núcleo do transformador e não pode, em geral, ser considerada como fluindo apenas no primário. Entretanto, para os propósitos desta discussão, essa distinção não é significativa.

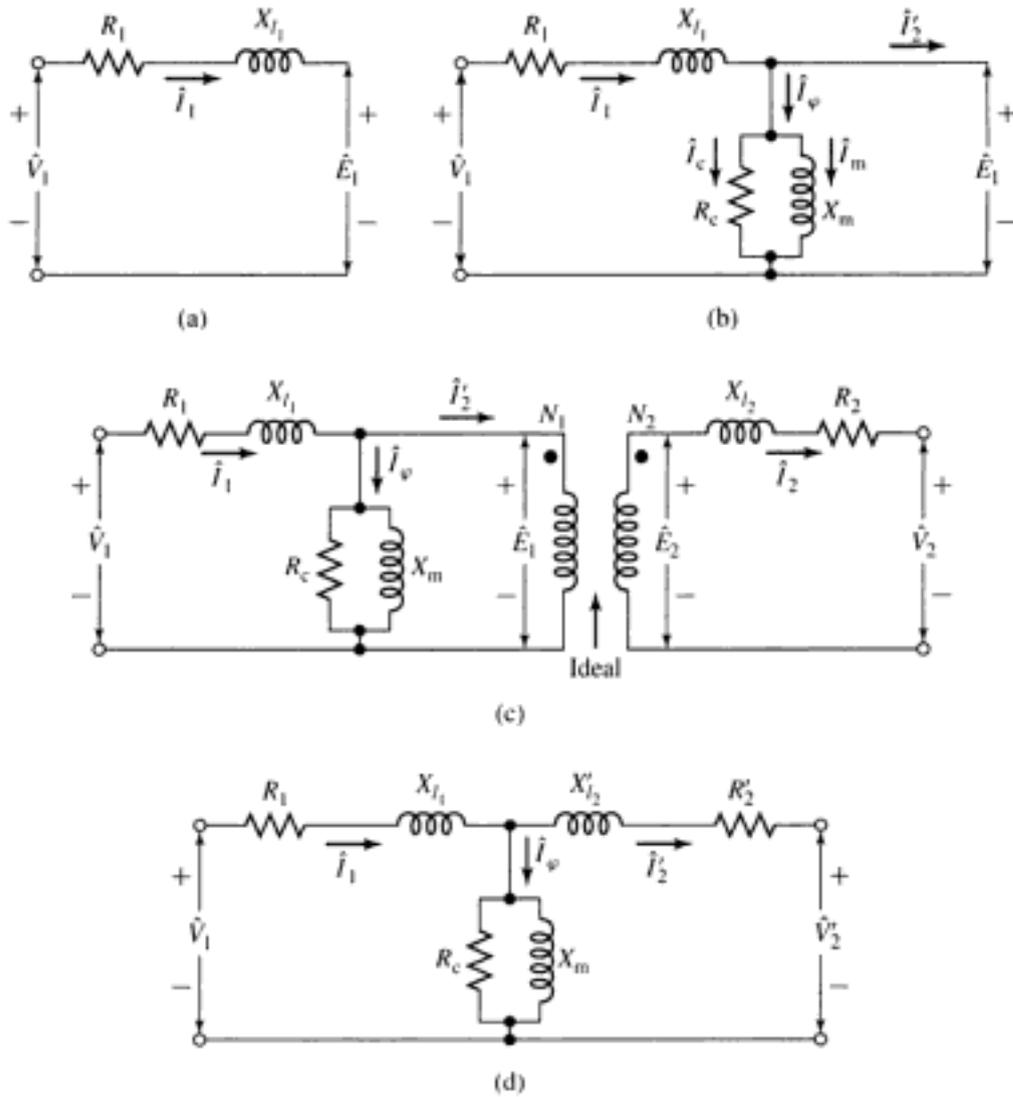


FIGURA 2.10 Passos do desenvolvimento do circuito equivalente do transformador.

Da Equação 2.22, vemos que a componente de carga da corrente de primário é igual à corrente de secundário referida ao primário, como no transformador ideal.

A corrente de excitação pode ser tratada como sendo uma corrente senoidal equivalente  $\hat{I}_\psi$ , no modo descrito na Seção 2.2, podendo ser decomposta em uma componente de perdas no núcleo  $\hat{I}_c$ , em fase com a FEM  $\hat{E}_1$ , e em uma componente de magnetização  $\hat{I}_m$ , atrasada de  $90^\circ$  em relação a  $\hat{E}_1$ . No circuito equivalente (Fig. 2.10b), a corrente de excitação senoidal equivalente foi levada em conta por meio de um ramo em derivação conectado a  $\hat{E}_1$ . Compreende uma *resistência de perdas no núcleo*  $R_c$  e, em paralelo, uma *indutância de magnetização*  $L_m$  cuja reatância, conhecida como *reatância de magnetização*, é dada por

$$X_m = 2\pi f L_m \quad (2.23)$$

No circuito equivalente da Fig. 2.10b, as perdas no núcleo, devidas ao fluxo mútuo resultante, são dadas pela potência  $E_1^2/R_c$ .  $R_c$  é referida como sendo a *resistência de magnetização* ou *resistência de perdas no núcleo* e, juntamente com  $X_m$ , formam o *ramo de excitação* do circuito equivalente. A combinação em paralelo de  $R_c$  e  $X_m$  será referida como sendo a *impedância de magnetização*  $Z_\psi$ . Quando se assume que  $R_c$  é constante, supõe-se também, como conseqüência, que as perdas no núcleo variem proporcionalmente a  $E_1^2$  ou (para ondas senoidais) a  $\phi_{\max}^2 f^2$ , onde  $\phi_{\max}$  é o valor máximo do fluxo mútuo resultante. Estritamente falando, a reatância de magnetização  $X_m$  varia com a saturação do ferro. Quando se assu-

me que  $X_m$  é constante, assume-se também, como conseqüência, que a corrente de magnetização é independente da freqüência e diretamente proporcional ao fluxo mútuo resultante. Geralmente, ambos  $R_c$  e  $X_m$  são especificados para os valores nominais dados de tensão e freqüência e, então, supõe-se que permanecerão constantes quando, em operação normal, ocorrerem pequenos desvios em torno desses valores nominais.

A seguir, acrescentaremos uma representação do enrolamento secundário ao nosso circuito equivalente. Começamos constatando que o fluxo mútuo resultante  $\hat{\Phi}$  induz uma FEM  $\hat{E}_2$  no secundário. Como esse fluxo concatena ambos os enrolamentos, a razão entre as FEMs induzidas deve ser igual à relação de espiras dos enrolamentos, isto é,

$$\frac{\hat{E}_1}{\hat{E}_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

exatamente como em um transformador ideal. Essa transformação de tensão e mais a de corrente da Equação 2.22 podem ser incluídas introduzindo-se um transformador ideal no circuito equivalente, como se mostra na Fig. 2.10c. Entretanto, como visto no caso do enrolamento primário, a FEM  $\hat{E}_2$  não é a tensão presente nos terminais do secundário por causa da *resistência  $R_2$  do secundário* e porque a corrente  $\hat{I}_2$  do secundário cria um fluxo disperso no secundário (veja a Fig. 2.9). Entre a tensão nos terminais do secundário  $\hat{V}_2$  e a tensão induzida  $\hat{E}_2$ , há uma diferença dada pela queda de tensão devida à resistência de secundário  $R_2$  e à *reatância de dispersão do secundário  $X_{l_2}$*  (correspondente à *indutância de dispersão do secundário  $X_{l_2}$* ), como se mostra à direita de  $\hat{E}_2$  no circuito equivalente do transformador (Fig. 2.10c).

A partir do circuito equivalente da Fig. 2.10, pode-se ver que um transformador real é equivalente a um transformador ideal mais impedâncias externas. Referindo todas as grandezas ao primário, ou ao secundário, o transformador ideal da Fig. 2.10c pode ser deslocado, respectivamente, à direita ou à esquerda do circuito equivalente. Isso é feito quase sempre e o circuito equivalente é desenhado usualmente como na Fig. 2.10d, onde o transformador ideal não é mostrado e todas as tensões e correntes são referidas ao enrolamento do primário, ou do secundário. No caso específico da Fig. 2.10d,

$$X'_{l_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 X_{l_2} \quad (2.25)$$

$$R'_2 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_2 \quad (2.26)$$

e

$$V'_2 = \frac{N_1}{N_2} V_2 \quad (2.26)$$

O circuito da Fig. 2.10d é chamado *circuito equivalente T* de um transformador.

Na Fig. 2.10d, na qual as grandezas do secundário foram referidas ao primário, os valores referidos estão indicados com sinais de plica ('), por exemplo,  $X'_{l_2}$  e  $R'_2$ , para distingui-los dos valores reais da Fig. 2.10c. Na discussão seguinte, iremos lidar quase sempre com valores referidos, e as plicas serão omitidas. Deve-se simplesmente ter em mente o lado do transformador ao qual todas as grandezas foram referidas.

## EXEMPLO 2.3

Um transformador de distribuição de 50 kVA, 2400:240 V e 60 Hz tem uma impedância de dispersão de  $0,72 + j0,92 \Omega$  no enrolamento de alta tensão e  $0,0070 + j0,0090 \Omega$ , no de baixa tensão. Na tensão e frequência nominais, a impedância  $Z_\varphi$  do ramo em derivação (igual à impedância de  $R_c$  e  $jX_m$  em paralelo), responsável pela corrente de excitação, é  $6,32 + j43,7 \Omega$ , quando vista do lado de baixa tensão. Desenhe o circuito equivalente referido a (a) o lado de alta tensão e (b) o lado de baixa tensão, indicando numericamente as impedâncias no desenho.

## ■ Solução

Os circuitos estão dados na Fig. 2.11 a e b, respectivamente, com o lado de alta tensão indicado pelo número 1 e o de baixa tensão, pelo número 2. As tensões de placa de um transformador, usado em sistemas de potência, baseiam-se na relação de espiras e, quando em carga, as pequenas quedas de tensão devidas à impedância de dispersão são desprezadas. Como esse é um transformador de 10 para 1, as impedâncias são referidas multiplicando-se ou dividindo-se por 100. Por exemplo, o valor de uma impedância referida ao lado de alta tensão é maior (por um fator de 100) do que seu valor referido ao lado de baixa tensão.

O transformador ideal pode ser desenhado explicitamente, como aparece tracejado na Fig. 2.11, ou pode ser omitido do diagrama. Neste caso, ele deve ser lembrado mentalmente fazendo-se com que as letras sem as plicas sejam os terminais. Se isso for feito, deve-se lembrar de referir todas as conexões de impedâncias e fontes de modo tal que sejam consistentes com a ausência do transformador ideal.

## PROBLEMA PRÁTICO 2.2

Se 2400 V eficazes forem aplicados ao lado de alta tensão do transformador do Exemplo 2.3, calcule o valor da corrente que flui na impedância de magnetização  $Z_\varphi$  das Figs. 2.11 a e b respectivamente.

## ■ Solução

A corrente em  $Z_\varphi$  é 0,543 A eficazes quando referida ao lado de alta tensão, como na Fig. 2.11 a, e 5,43 A eficazes quando referida ao de baixa tensão.

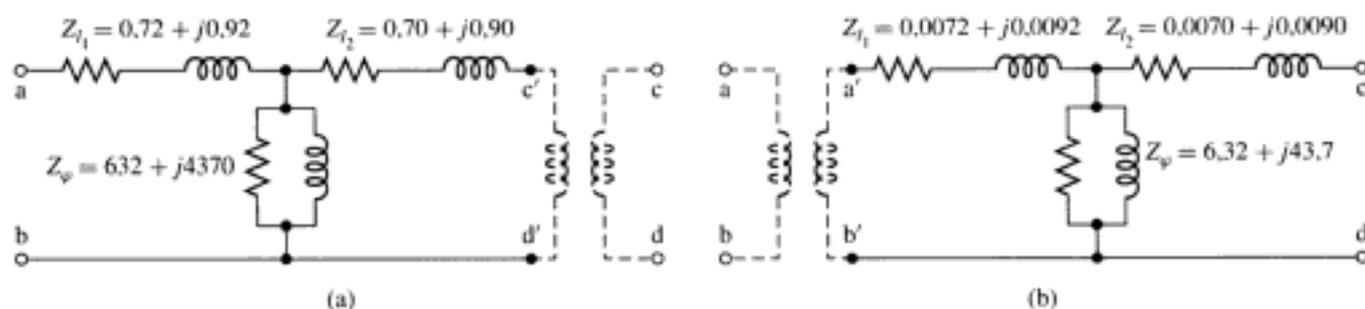


FIGURA 2.11 Circuitos equivalentes para o transformador do Exemplo 2.3 referido (a) ao lado de alta tensão e (b) ao lado de baixa tensão.

## 2.5 ASPECTOS DE ENGENHARIA DA ANÁLISE DE TRANSFORMADORES

Em análises de engenharia que envolvem o transformador como elemento de circuito, costuma-se adotar, ao invés do circuito completo, uma entre diversas formas de aproximação para o circuito equivalente da Fig. 2.10. Em geral, a aproximação escolhida para um dado caso em particular depende grandemente do raciocínio físico, tomando-se como base as ordens de grandeza das quantidades desconsideradas. As aproximações mais comuns são apresentadas nesta seção. Além disso, são fornecidos métodos de ensaio para se determinar as constantes do transformador.

Os circuitos equivalentes comumente usados nas análises de transformadores de potência, em frequência constante, estão resumidos para comparação na Fig. 2.12. Todas as quantidades nesses circuitos são referidas ou ao primário, ou ao secundário, e o transformador ideal não está mostrado.

Freqüentemente os cálculos podem ser grandemente simplificados deslocando-se o ramo em derivação, que representa a corrente de excitação, do meio do circuito T para os terminais do primário, ou do secundário, como na Fig. 2.12a e b. Essas formas de circuito equivalente são referidas como *circuitos L*.<sup>\*</sup> O ramo em série é a combinação das resistências e das reatâncias de dispersão do primário e do secundário, referidas ao mesmo lado. Essa impedância é chamada algumas vezes *impedância equivalente em série*, e seus componentes são a *resistência equivalente em série*  $R_{eq}$  e a *reatância equivalente em série*  $X_{eq}$ , como mostrado nas Fig. 2.12a e b.

Quando comparado com o circuito equivalente T da Fig. 2.10d, os erros presentes no circuito L vem da ausência da queda de tensão causada pela corrente de excitação na impedância de dispersão do primário, ou secundário. Como a impedância do ramo de excitação é normalmente bem elevada em transformadores de potência de grande porte, a corrente de excitação correspondente é bem pequena. Esse erro é insignificante na maioria das situações que envolvem transformadores de grande porte.

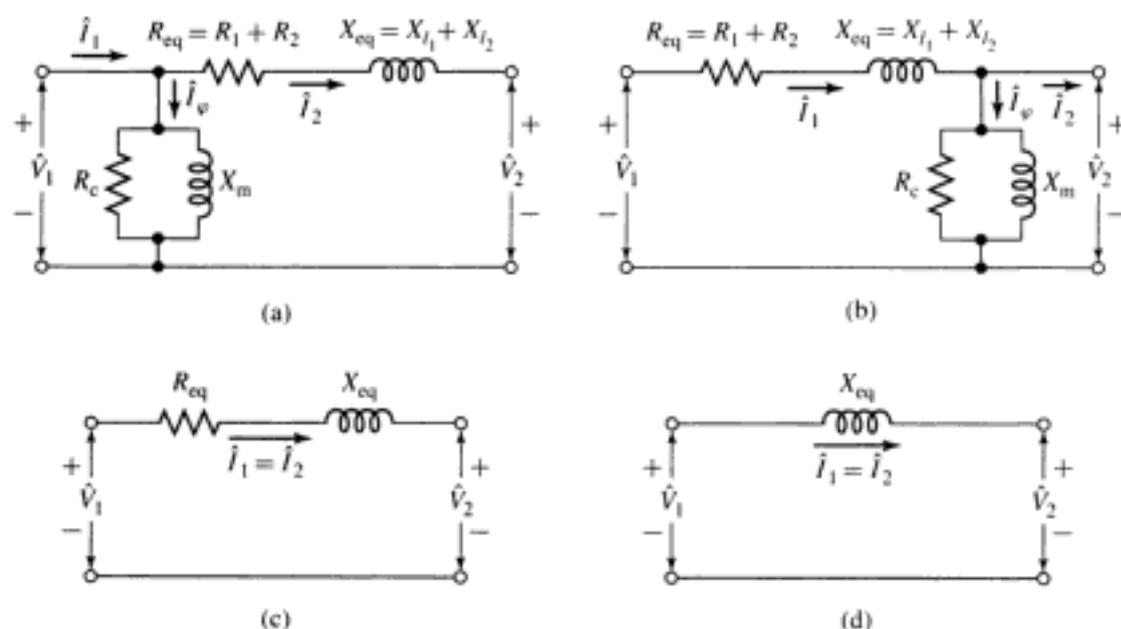


FIGURA 2.12 Circuitos equivalentes aproximados de transformadores.

\* N. de T.: *Cantilever circuits*, em inglês.

## EXEMPLO 2.4

Considere o circuito equivalente T da Fig. 2.11a do transformador de distribuição, com 50 kVA e 2400:240 V, do Exemplo 2.3, no qual as impedâncias estão referidas ao lado de alta tensão. (a) Desenhe o circuito equivalente L com o ramo em derivação nos terminais de alta tensão. Calcule e indique numericamente no desenho os valores de  $R_{eq}$  e  $X_{eq}$ . (b) Com os terminais de baixa tensão em aberto, e 2400 V aplicados aos terminais de alta tensão, calcule a tensão nos terminais de baixa tensão para cada tipo de circuito equivalente.

## ■ Solução

- a. O circuito equivalente L está mostrado na Fig. 2.13. Os valores de  $R_{eq}$  e  $X_{eq}$  são calculados como sendo simplesmente a soma das impedâncias em série dos enrolamentos de alta e baixa tensão da Fig. 2.11a, ou seja,

$$R_{eq} = 0,72 + 0,70 = 1,42 \Omega$$

$$X_{eq} = 0,92 + 0,90 = 1,82 \Omega$$

- b. Para o circuito equivalente T da Fig. 2.11a, a tensão nos terminais c'-d' será dada por

$$\hat{V}_{c'-d'} = 2400 \left( \frac{Z_p}{Z_p + Z_{l1}} \right) = 2399,4 + j0,315 \text{ V}$$

Isso corresponde a uma tensão eficaz de 2399,4 V. Quando refletida aos terminais de baixa tensão, pela relação de espiras de baixa para alta tensão, essa tensão corresponde a 239,94 V.

Como a impedância de excitação, no circuito equivalente L da Fig. 2.13, é ligada diretamente aos terminais de alta tensão, então não haverá queda de tensão em nenhuma das impedâncias de dispersão em série, e a tensão de secundário será 240 V. Essas duas soluções diferem em 0,025% o que está bem dentro de uma exatidão razoável em termos de engenharia, justificando claramente o uso do circuito equivalente L na análise desse transformador.

Uma simplificação analítica adicional resulta, se desconsiderarmos a corrente de excitação por completo, como na Fig. 2.12c, em que o transformador é representado por uma impedância equivalente em série. Se o transformador for de grande porte (diversas centenas de quilovolts-ampères ou mais), a resistência equivalente  $R_{eq}$  é pequena, quando comparada com a reatância equivalente  $X_{eq}$ , e freqüentemente pode ser desconsiderada, resultando o circuito equivalente da Fig. 2.12d. Os circuitos da Fig. 2.12c e d são suficientemente exatos para a maioria dos problemas ordinários de sistemas de potência, e são usados em todas as análises, com exceção das mais detalhadas. Finalmente, em situações onde as correntes e as tensões são determinadas quase que inteiramente por circuitos externos ao transformador, ou quando um alto grau de exatidão não é exigido, pode-se desprezar completamente a impedância do transformador e considerá-lo ideal, como na Seção 2.3.

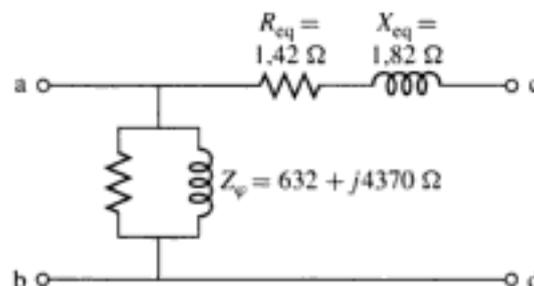


FIGURA 2.13 Circuito equivalente L do Exemplo 2.4.

Os circuitos da Fig. 2.12 têm a vantagem adicional de que a resistência equivalente total  $R_{eq}$  e a reatância equivalente total  $X_{eq}$  podem ser determinadas por meio de um ensaio muito simples, no qual um dos terminais é curto-circuitado. Por outro lado, o processo para se determinar as reatâncias de dispersão  $X_{11}$  e  $X_{12}$ , e também um conjunto completo de parâmetros, é mais difícil no caso do circuito equivalente T da Fig. 2.10c. O Exemplo 2.4 ilustra que, devido à queda de tensão nas impedâncias de dispersão, a relação das tensões medidas de um transformador não será identicamente igual à relação idealizada de tensões que seria medida se o transformador fosse ideal. De fato, sem algum conhecimento *a priori* da relação de espiras (baseado, por exemplo, no conhecimento da construção interna do transformador), não é possível fazer um conjunto de medidas que determine de forma única a relação de espiras, a indutância de magnetização e as impedâncias individuais de dispersão.

Pode-se mostrar, simplesmente a partir de medidas feitas nos terminais, que a relação de espiras, a reatância de magnetização e as reatâncias de dispersão de um circuito equivalente de um transformador não são características únicas. Por exemplo, a relação de espiras pode ser escolhida arbitrariamente e, para cada escolha, haverá um conjunto correspondente de valores de reatâncias de dispersão e de magnetização que se ajustam às características medidas. Cada um dos circuitos equivalentes terá as mesmas características elétricas nos terminais. Esse fato tem a feliz consequência de que qualquer conjunto autoconsistente de parâmetros determinados empiricamente pode representar adequadamente o transformador.

#### EXEMPLO 2.5

Um transformador de 50 kVA e 2400:240 V, cujos parâmetros estão dados no Exemplo 2.3, é usado para baixar a tensão no lado da carga de um sistema alimentador cuja impedância é  $0,30 + j1,60 \Omega$ . A tensão  $V_s$  no terminal de envio do alimentador é 2400 V.

Encontre a tensão nos terminais do secundário do transformador quando a carga conectada ao seu secundário recebe a corrente nominal do transformador, com um fator de potência (FP) de carga de 0,80 indutivo. Despreze as quedas de tensão, no transformador e no sistema de alimentação, causadas pela corrente de excitação.

#### ■ Solução

O circuito, com todas as quantidades referidas ao lado de alta tensão (primário) do transformador, está mostrado na Fig. 2.14a, onde o transformador foi representado por sua impedância equivalente, como na Fig. 2.12c. Da Fig. 2.11a, o valor da impedância equivalente é  $Z_{eq} = 1,42 + j1,82 \Omega$  e a impedância combinada do alimentador e do transformador em série é  $Z = 1,72 + j3,42 \Omega$ . Da especificação nominal do transformador, a corrente de carga, referida ao lado de alta tensão, é  $I = 50.000/2400 = 20,8 \text{ A}$ .

Essa solução é obtida mais facilmente com ajuda do diagrama fasorial referido ao lado de alta tensão, como mostrado na Fig. 2.14b. Observe que o fator de potência está definido no lado da carga do transformador e, portanto, determina o ângulo de fase  $\theta$ , entre a corrente de carga  $\hat{I}$  e a tensão  $\hat{V}_2$ , como

$$\theta = -\arccos(0,80) = -36,87^\circ$$

Do diagrama fasorial, vem

$$Ob = \sqrt{V_s^2 - (bc)^2} \quad \text{e} \quad V_2 = Ob - ab$$

Observe que

$$bc = IX \cos \theta - IR \sin \theta \quad ab = IR \cos \theta + IX \sin \theta$$

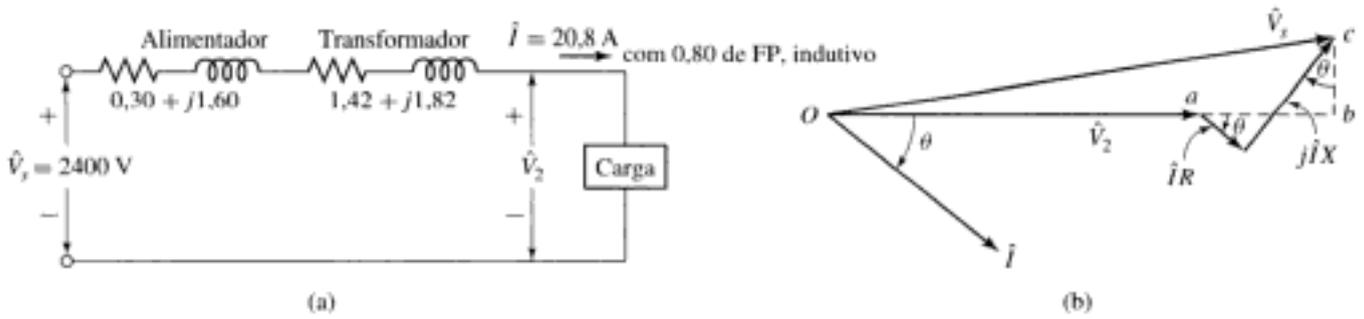


FIGURA 2.14 (a) Circuito equivalente e (b) diagrama fasorial do Exemplo 2.5.

onde  $R$  e  $X$  são, respectivamente, a resistência e a reatância combinadas. Assim,

$$bc = 20,8(3,42)(0,80) - 20,8(1,72)(0,60) = 35,5 \text{ V}$$

$$ab = 20,8(1,72)(0,80) + 20,8(3,42)(0,60) = 71,4 \text{ V}$$

A substituição dos valores numéricos mostra que  $V_2 = 2329 \text{ V}$ , referida ao lado de alta tensão. A tensão real nos terminais do secundário é  $2329/10$ , ou

$$V_2 = 233 \text{ V}$$

### PROBLEMA PRÁTICO 2.3

Repita o Exemplo 2.5 para uma carga que recebe a corrente nominal do transformador, com um fator de potência de 0,8 capacitivo.

#### ■ Solução

$$V_2 = 239 \text{ V}$$

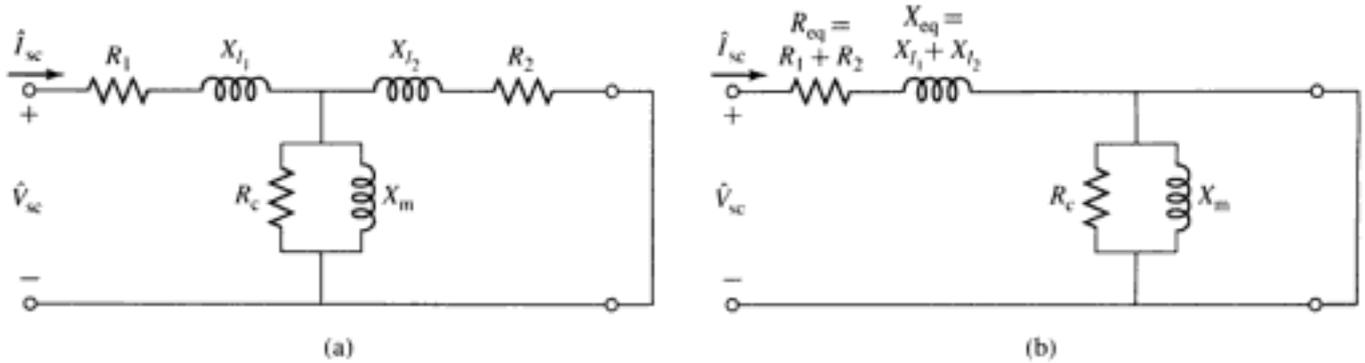
Dois ensaios muito simples servem para determinar os parâmetros dos circuitos equivalentes das Figs. 2.10 e 2.12. Consistem em medir tensão, corrente e potência de entrada do primário; primeiro, com o secundário em curto-circuito e após com o secundário em circuito aberto.

**Ensaio de Curto-Circuito** O ensaio de curto-circuito pode ser usado para encontrar a impedância equivalente em série  $R_{eq} + jX_{eq}$ . Embora seja arbitrária a escolha de qual enrolamento usar para o curto-circuito, iremos simplificar esta discussão considerando que o curto-circuito seja aplicado ao secundário do transformador e a tensão, ao primário. Neste tipo de ensaio, por conveniência, o lado de alta tensão é tomado usualmente como sendo o primário. Como a impedância equivalente em série é relativamente baixa em um transformador típico, uma tensão da ordem de 10 a 15% ou menos do valor nominal, aplicada ao primário, resultará na corrente nominal.

A Fig. 2.15a mostra o circuito equivalente, com a impedância do secundário do transformador referida ao lado do primário, e um curto-circuito aplicado ao secundário. A impedância de curto-circuito  $Z_{cc}$ , olhando para o primário sob essas condições, é

$$Z_{cc} = R_1 + jX_{1l} + \frac{Z_\phi(R_2 + jX_{2l})}{Z_\phi + R_2 + jX_{2l}} \quad (2.28)$$

Como a impedância  $Z_\phi$  do ramo de excitação é muito maior do que a impedância de dispersão do secundário (o que é verdadeiro a não ser que o núcleo esteja fortemente saturado por uma



**FIGURA 2.15** Circuito equivalente com o secundário em curto-circuito. (a) Circuito equivalente completo. (b) Circuito equivalente L com o ramo de excitação no secundário do transformador.

tensão excessiva aplicada ao primário; que certamente não é o caso aqui), a impedância de curto-circuito pode ser aproximada por

$$Z_{cc} \approx R_1 + jX_{l1} + R_2 + jX_{l2} = R_{eq} + jX_{eq} \quad (2.29)$$

Observe que a aproximação feita aqui é equivalente à aproximação feita ao se reduzir o circuito equivalente T ao equivalente L. Isso pode ser constatado a partir da Fig. 2.15b. A impedância vista na entrada desse circuito equivalente é claramente  $Z_{cc} = Z_{eq} = R_{eq} + jX_{eq}$  porque a corrente de excitação foi colocada diretamente em curto pelo curto-circuito do secundário.

Tipicamente, a instrumentação utilizada nesse ensaio mede, em módulo, os valores eficazes da tensão aplicada  $V_{cc}$ , da corrente de curto-circuito  $I_{cc}$  e da potência  $P_{cc}$ . Baseando-se nessas três medidas, a resistência e reatância equivalentes (referidas ao primário) podem ser obtidas a partir de

$$|Z_{eq}| = |Z_{cc}| = \frac{V_{cc}}{I_{cc}} \quad (2.30)$$

$$R_{eq} = R_{cc} = \frac{P_{cc}}{I_{cc}^2} \quad (2.31)$$

$$X_{eq} = X_{cc} = \sqrt{|Z_{cc}|^2 - R_{cc}^2} \quad (2.32)$$

onde o símbolo  $||$  indica o módulo da grandeza complexa abarcada.

A impedância equivalente pode naturalmente ser referida de um lado a outro do modo usual. Nas raras ocasiões em que se deve usar o circuito equivalente T da Fig. 2.10d, valores aproximados das resistências e reatâncias de dispersão individuais do primário e do secundário podem ser obtidas supondo que  $R_1 = R_2 = 0,5R_{eq}$  e  $X_{l1} = X_{l2} = 0,5X_{eq}$ , com todas as impedâncias referidas ao mesmo lado. Estritamente falando, é evidente que pode-se medir  $R_1$  e  $R_2$  diretamente, realizando uma medida CC de resistência em cada enrolamento (e então referindo uma ou outra ao outro lado do transformador ideal). Entretanto, como já foi discutido, não existe um teste simples como esse para as reatâncias de dispersão  $X_{l1}$  e  $X_{l2}$ .

**Ensaio de Circuito Aberto** O *ensaio de circuito aberto* (ou a vazio) é realizado com o secundário em aberto e a tensão nominal aplicada ao primário. Sob essas condições, uma corrente de excitação de alguns poucos por cento da corrente de carga total (menor nos grandes transformadores e maior nos pequenos) é obtida. A tensão nominal é escolhida de modo a assegurar que a reatância de magnetização opere em um nível de fluxo próximo daquele que ocorre em condições normais de operação. Se o transformador for usado em alguma outra tensão, diferente da nominal, então o ensaio deve ser feito com aquela tensão e não com a nomi-

nal. Por conveniência, o lado de baixa tensão é tomado usualmente como sendo o primário nesse ensaio. Se o primário nesse teste for escolhido como sendo o enrolamento oposto ao usado no ensaio de curto-circuito, deve-se assegurar-se de que as diversas impedâncias medidas sejam referidas a um mesmo lado do transformador, para que um conjunto de valores de parâmetros autoconsistente seja obtido.

A Fig. 2.16a mostra o circuito equivalente, com a impedância do secundário do transformador referida ao lado do primário, e o secundário em aberto. A impedância de circuito aberto  $Z_{ca}$  vista no primário sob essas condições é

$$Z_{ca} = R_1 + jX_{l_1} + Z_\varphi = R_1 + jX_{l_1} + \frac{R_c(jX_m)}{R_c + jX_m} \quad (2.33)$$

Como a impedância do ramo de excitação é bem elevada, a queda de tensão na impedância de dispersão do primário, causada pela corrente de excitação, é normalmente desprezível, e a tensão aplicada ao primário  $\hat{V}_{ca}$  é quase igual à FEM  $\hat{E}_{ca}$  induzida pelo fluxo resultante no núcleo. Do mesmo modo, a perda  $I_{ca}^2 R_1$  no primário, causada pela corrente de excitação, é desprezível, de modo que a potência de entrada  $P_{ca}$  é quase igual à perda no núcleo  $E_{ca}^2/R_c$ . Como resultado, é comum ignorar a impedância de dispersão do primário, e aproximar a impedância de circuito aberto como sendo igual à impedância de magnetização

$$Z_{ca} \approx Z_\varphi = \frac{R_c(jX_m)}{R_c + jX_m} \quad (2.34)$$

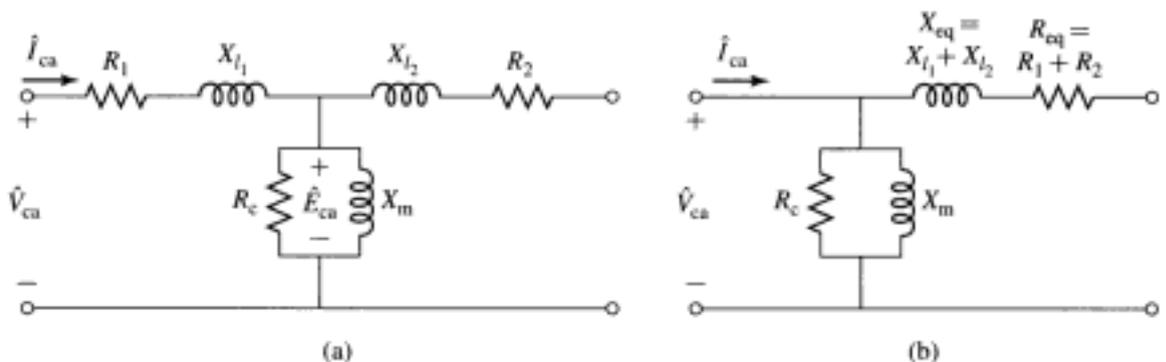
Observe que a aproximação feita aqui é equivalente à aproximação feita ao se reduzir o circuito equivalente T ao equivalente L da Fig. 2.16b. A impedância vista na entrada desse circuito equivalente é claramente  $Z_\varphi$  porque nenhuma corrente irá circular no secundário em aberto.

Como no ensaio de curto-circuito, a instrumentação tipicamente utilizada nesse ensaio mede os valores eficazes da tensão aplicada  $V_{ca}$ , da corrente de circuito aberto  $I_{ca}$  e da potência  $P_{ca}$ . Desprezando a impedância de dispersão do primário e baseando-se nessas três medidas, a resistência e a reatância de magnetização (referidas ao primário) podem ser obtidas a partir de

$$R_c = \frac{V_{ca}^2}{P_{ca}} \quad (2.35)$$

$$|Z_\varphi| = \frac{V_{ca}}{I_{ca}} \quad (2.36)$$

$$X_m = \frac{1}{\sqrt{(1/|Z_\varphi|)^2 - (1/R_c)^2}} \quad (2.37)$$



**FIGURA 2.16** Circuito equivalente, com o secundário em aberto. (a) Circuito equivalente completo. (b) Circuito equivalente L, com o ramo de excitação no primário do transformador.

Naturalmente, os valores obtidos são referidos ao lado usado como primário neste ensaio.

O ensaio de circuito aberto pode ser usado para se obter as perdas no núcleo, em cálculos de rendimento, e para se verificar o módulo da corrente de excitação. Algumas vezes, a tensão nos terminais em aberto do secundário é medida para se verificar a relação de espiras.

Observe que, se desejado, um cálculo ligeiramente mais exato de  $X_m$  e  $R_c$  é possível usando-se as medidas de  $R_1$  e  $X_{l1}$ , obtidas do ensaio de curto-circuito (referido ao lado adequado do transformador) e baseando-se a dedução na Equação 2.33. Entretanto, esse esforço adicional raramente é necessário para os propósitos de exatidão tal como se adota em engenharia.

### EXEMPLO 2.6

Com os instrumentos aplicados no lado de alta tensão e com o lado de baixa tensão em curto-circuito, as leituras do ensaio de curto-circuito com o transformador de 50 kVA e 2400:240 V do Exemplo 2.3 são 48 V, 20,8 A e 617 W. Um ensaio de circuito aberto, com o lado de baixa tensão energizado, fornece as leituras naquele lado de 240 V, 5,41 A e 186 W. Determine o rendimento e a regulação de tensão a plena carga com um fator de potência de 0,80 indutivo.

#### ■ Solução

Do ensaio de curto circuito, os valores da impedância equivalente, da resistência equivalente e da reatância equivalente do transformador (referido ao lado de alta tensão, indicado pelo subscrito A) são

$$|Z_{eq,A}| = \frac{48}{20,8} = 2,31 \, \Omega \quad R_{eq,A} = \frac{617}{20,8^2} = 1,42 \, \Omega$$

$$X_{eq,A} = \sqrt{2,31^2 - 1,42^2} = 1,82 \, \Omega$$

A operação a plena carga, com um fator de potência de 0,80 indutivo, corresponde a uma corrente de

$$I_A = \frac{50000}{2400} = 20,8 \, \text{A}$$

e uma potência de saída de

$$P_{saída} = P_{carga} = (0,8) 50000 = 40000 \, \text{W}$$

O valor das perdas totais sob essas condições de operação é igual à soma das perdas no enrolamento

$$P_{enrol} = I_A^2 R_{eq,A} = 20,8^2 (1,42) = 617 \, \text{W}$$

e das perdas no núcleo determinadas pelo ensaio de circuito aberto

$$P_{núcleo} = 186 \, \text{W}$$

Assim,

$$P_{perdas} = P_{enrol} + P_{núcleo} = 803 \, \text{W}$$

e a potência de entrada do transformador é

$$P_{entrada} = P_{saída} + P_{perdas} = 40803 \, \text{W}$$

O rendimento de um dispositivo conversor de potência é definido como sendo

$$\text{rendimento} = \frac{P_{saída}}{P_{entrada}} = \frac{P_{entrada} - P_{perdas}}{P_{entrada}} = 1 - \frac{P_{perdas}}{P_{entrada}}$$

que pode ser expresso percentualmente multiplicando-se por 100%. Assim, para essa condição de operação, vem

$$\text{rendimento} = 100\% \left( \frac{P_{\text{saída}}}{P_{\text{entrada}}} \right) = 100\% \left( \frac{40000}{40000 + 803} \right) = 98,0\%$$

A *regulação de tensão* de um transformador é definida como sendo a variação de tensão nos terminais do secundário quando se passa da condição sem carga para carga total. É expressa usualmente como uma percentagem da tensão em plena carga. Em aplicações de sistemas de potência, a regulação é uma figura de mérito de um transformador: um valor baixo indica que as variações de carga do secundário do transformador não afetam de forma significativa o valor da tensão fornecida à carga. É calculada supondo que a tensão do primário permaneça constante quando a carga é removida do secundário do transformador.

O circuito equivalente da Fig. 2.12c será usado com todas as quantidades referidas ao lado de alta tensão. Supõe-se que a tensão do primário seja ajustada de modo que a tensão dos terminais do secundário tenha o seu valor nominal a plena carga, ou  $V_{2A} = 2400$  V. Para uma carga com o valor nominal e fator de potência 0,8 indutivo (correspondendo a um ângulo de fator de potência de  $\theta = -\arccos(0,8) = -36,9^\circ$ , a corrente de carga será

$$\hat{I}_A = \left( \frac{50 \times 10^3}{2400} \right) e^{-j36,9^\circ} = 20,8(0,8 - j0,6) \text{ A}$$

O valor necessário de tensão no primário  $\hat{V}_{1A}$  pode ser calculado como

$$\begin{aligned} \hat{V}_{1A} &= \hat{V}_{2A} + \hat{I}_A(R_{\text{eq},A} + jX_{\text{eq},A}) \\ &= 2400 + 20,8(0,80 - j0,60)(1,42 + j1,82) \\ &= 2446 + j13 \end{aligned}$$

O módulo de  $\hat{V}_{1A}$  é 2446 V. Se essa tensão fosse mantida constante e a carga removida, a tensão do secundário em circuito aberto se elevaria para 2446V, referida ao lado de alta tensão. Então,

$$\text{Regulação} = \frac{2446 - 2400}{2400} (100\%) = 1,92\%$$

#### PROBLEMA PRÁTICO 2.4

Repita o cálculo da regulação de tensão do Exemplo 2.6 com uma carga de 50 kW (carga nominal, fator de potência unitário).

#### ■ Solução

$$\text{Regulação} = 1,24 \%$$

## 2.6 AUTOTRANSFORMADORES, TRANSFORMADORES DE MÚLTIPLOS ENROLAMENTOS

Os princípios discutidos nas seções anteriores foram desenvolvidos com referência específica a transformadores de dois enrolamentos. Aplicam-se também a transformadores com outras configurações de enrolamentos. Aspectos relativos a autotransformadores e transformadores de múltiplos enrolamentos são examinados nesta seção.

### 2.6.1 Autotransformadores

Na Fig. 2.17a, um transformador de dois enrolamentos é mostrado com  $N_1$  e  $N_2$  espiras nos enrolamentos primário e secundário respectivamente. Essencialmente, o mesmo efeito de transformação sobre tensões, correntes e impedâncias pode ser obtido quando esses enrolamentos são conectados como se mostra na Fig. 2.17b. No entanto, observe que nessa figura o enrolamento  $bc$  é comum a ambos os circuitos do primário e do secundário. Esse tipo de transformador é chamado *autotransformador*. É um pouco mais que um transformador normal, conectado de modo especial.

Uma diferença importante entre o transformador de dois enrolamentos e o autotransformador é que os enrolamentos do transformador de dois enrolamentos estão eletricamente isolados, ao passo que os do autotransformador estão conectados diretamente entre si. Além disso, conectado como autotransformador, o enrolamento  $ab$  deve ter uma isolação extra pois deve estar isolado contra a plena tensão máxima do autotransformador. Os autotransformadores têm reatâncias de dispersão menores, perdas mais baixas, menores correntes de excitação e custam menos que os transformadores de dois enrolamentos, desde que as relações de tensões não sejam muito diferentes de 1:1.

O exemplo seguinte ilustra os benefícios de um autotransformador em situações onde o isolamento elétrico entre os enrolamentos do primário e do secundário não é uma consideração importante.

#### EXEMPLO 2.7

O transformador de 2400:240 V e 50 kVA do Exemplo 2.6 é conectado em forma de autotransformador, como mostrado na Fig. 2.18a, onde  $ab$  é o enrolamento de 240 V e  $bc$  é o de 2400 V. (Assume-se que o enrolamento de 240 V tem isolação suficiente para suportar uma tensão de 2640 V em relação à terra.)

- Calcule as tensões nominais  $V_A$  e  $V_B$  nos lados de alta e baixa tensão respectivamente do autotransformador.
- Calcule a potência (aparente) nominal em kVA do autotransformador.
- Dados relativos às perdas são fornecidos no Exemplo 2.6. Calcule o rendimento a plena carga do autotransformador, operando com uma carga nominal cujo fator de potência é 0,80 indutivo.

#### ■ Solução

- Como o enrolamento de 2400 V  $bc$  é conectado ao circuito de baixa tensão, então  $V_B = 2400$  V. Quando  $V_{bc} = 2400$  V, uma tensão  $V_{ab} = 240$  V em fase com  $V_{bc}$  será induzida no en-

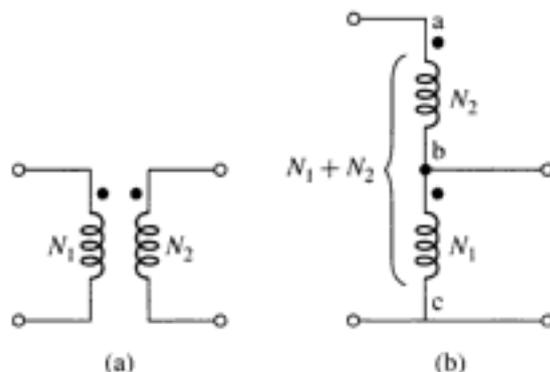
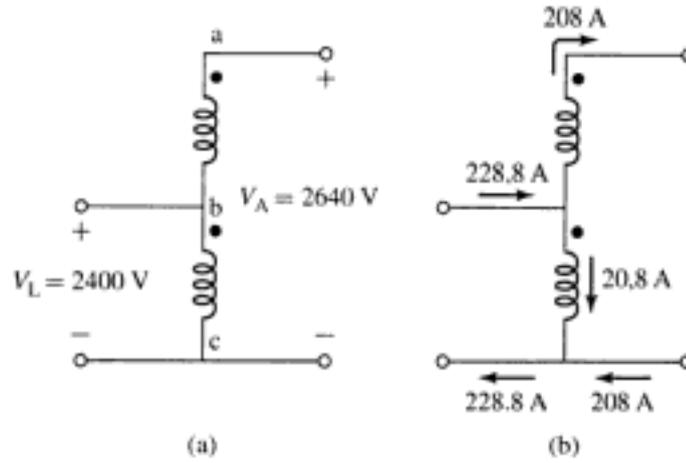


FIGURA 2.17 (a) Transformador de dois enrolamentos. (b) Conectado como autotransformador.



**FIGURA 2.18** (a) Conexão em forma de autotransformador para o Exemplo 2.7. (b) Correntes sob carga nominal.

rolamento ab (as quedas de tensão devidas à impedância de dispersão são desprezíveis). Portanto, a tensão do lado de alta tensão é

$$V_A = V_{ab} + V_{bc} = 2640 \text{ V}$$

- b. A partir do valor nominal de 50 kVA, como transformador normal de dois enrolamentos, a corrente nominal do enrolamento de 240 V será  $50.000/240 = 208$  A. Como o terminal de alta tensão do autotransformador está conectado ao enrolamento de 240 V, a corrente nominal  $I_A$  no lado de alta tensão do autotransformador é igual à corrente nominal do enrolamento de 240 V ou 208 A. Portanto, temos para o autotransformador

$$\frac{V_A I_A}{1000} = \frac{2640(208)}{1000} = 550 \text{ kVA}$$

Observe que, nesta configuração de conexão, o autotransformador tem uma relação de espiras equivalente de 2640/2400. Assim, a corrente nominal no enrolamento de baixa tensão (o enrolamento de 2400 V nessa conexão) deve ser

$$I_b = \left( \frac{2640}{2400} \right) 208 \text{ A} = 229 \text{ A}$$

A princípio, isso parece um tanto perturbador porque o enrolamento de 2400 V do transformador tem uma corrente nominal de  $50 \text{ kVA}/2400 \text{ V} = 20,8$  A. Mais intrigante é o fato de que esse transformador, cujo valor nominal como transformador normal de dois enrolamentos é 50 kVA, é capaz de lidar com 550 kVA como autotransformador.

O valor mais alto como autotransformador é consequência do fato de que nem todos os 550 kVA devem ser transformados por indução eletromagnética. De fato, tudo que o transformador precisa fazer é impulsionar uma corrente de 208 A através de uma elevação de potencial de 240 V, correspondendo a uma capacidade de transformação de 50 kVA. Esse fato é melhor ilustrado talvez pela Fig. 2.18b que mostra as correntes no autotransformador sob condições nominais. Observe que os enrolamentos conduzem apenas os seus valores nominais de corrente apesar da potência nominal mais elevada.

- c. Quando conectado como autotransformador, com as correntes e tensões mostradas na Fig. 2.18, as perdas são as mesmas do Exemplo 2.6, ou seja, 803 W. Entretanto, a saída como autotransformador a plena carga, com um fator de potência de 0,80, é  $0,80(550.000) = 440.000$  W. O rendimento, portanto, é

$$\left( 1 - \frac{803}{440.803} \right) 100\% = 99,82\%$$

O rendimento é tão elevado porque as perdas são as correspondentes a transformar apenas 50 kVA.

### PROBLEMA PRÁTICO 2.5

Um transformador de 450 kVA e 460 V:7,97 kV tem um rendimento de 97,8% quando alimenta uma carga nominal com um fator de potência unitário. Se for conectado como um autotransformador de 7,97:8,43 kV, calcule as correntes nominais nos terminais, a potência aparente em MVA e o rendimento quando alimenta uma carga com fator de potência unitário.

#### ■ Solução

A corrente nominal no terminal de 8,43 kV é 978 A, no de 7,97 kV é 1034 A e a potência aparente nominal é 8,25 MVA. O seu rendimento, quando alimenta uma carga de fator de potência unitário, é 99,88%.

Do Exemplo 2.7, vemos que, quando o transformador é conectado na forma de um autotransformador, como na Fig. 2.17, as tensões nominais do autotransformador podem ser expressas em termos das tensões de um transformador de dois enrolamentos como

Baixa tensão:

$$V_{B_{\text{nominal}}} = V_{1_{\text{nominal}}} \quad (2.38)$$

Alta tensão:

$$V_{A_{\text{nominal}}} = V_{1_{\text{nominal}}} + V_{2_{\text{nominal}}} = \left( \frac{N_1 + N_2}{N_1} \right) V_{B_{\text{nominal}}} \quad (2.39)$$

A relação de espiras efetiva do autotransformador é assim  $(N_1 + N_2)/N_1$ . Além disso, a potência nominal do autotransformador é igual a  $(N_1 + N_2)/N_2$  vezes a do transformador de dois enrolamentos, embora a potência real manipulada pelo transformador não será superior à de um transformador padrão de dois enrolamentos.

## 2.6.2 Transformadores de Múltiplos Enrolamentos

Transformadores com três ou mais enrolamentos, conhecidos como *transformadores de múltiplos enrolamentos ou de múltiplos circuitos*, são usados frequentemente para interconectar três ou mais circuitos que podem ter tensões diferentes. Para esses propósitos, um transformador de múltiplos enrolamentos custa menos e é mais eficiente do que um número equivalente de transformadores de dois enrolamentos. Transformadores com um primário e múltiplos secundários são encontrados frequentemente em fontes de alimentação CC de saídas múltiplas para aplicações em eletrônica. Os transformadores de distribuição, usados no fornecimento de energia elétrica para uso doméstico, têm normalmente dois secundários de 120 V conectados em série.\* Circuitos de iluminação e aplicações de baixa potência são conectados aos enrolamentos de 120 V, ao passo que fogões elétricos, aquecedores de água, secadores de roupa e outras cargas de potências elevadas são abastecidos com uma tensão de 240 V obtida com os secundários conectados em série.

\* N. de T.: O autor refere-se aos Estados Unidos.

Do mesmo modo, um grande sistema de distribuição pode ser alimentado através de um banco trifásico de transformadores de múltiplos enrolamentos a partir de dois ou mais sistemas de transmissão de tensões diferentes. Além disso, os bancos de transformadores trifásicos usados para interligar dois sistemas de transmissão de tensões diferentes têm frequentemente um terceiro (ou terciário) conjunto de enrolamentos para fornecer tensão para fins auxiliares em subestações ou para alimentar um sistema de distribuição local. Capacitores estáticos ou condensadores síncronos podem ser conectados aos enrolamentos terciários para corrigir o fator de potência ou regular a tensão. Algumas vezes, enrolamentos terciários conectados em  $\Delta$  são colocados em bancos trifásicos para fornecer um caminho de baixa impedância para as componentes de terceira harmônica da corrente de excitação, de modo a reduzir as componentes de terceira harmônica da tensão do neutro.

Algumas das questões que surgem no uso de transformadores de enrolamentos múltiplos estão associadas aos efeitos das impedâncias de dispersão sobre a regulação de tensão, as correntes de curto-circuito e a divisão de carga entre circuitos. Esses problemas podem ser resolvidos por uma técnica de circuito equivalente similar à usada no tratamento de transformadores de dois circuitos.

Os circuitos equivalentes de transformadores de enrolamentos múltiplos são mais complicados do que os de dois enrolamentos, porque devem levar em conta as impedâncias de dispersão associadas a cada par de enrolamentos. Tipicamente, nesses circuitos equivalentes, todas as grandezas são referidas a uma base comum, seja usando as relações de espiras adequadas para referir os enrolamentos, seja expressando todas as grandezas no chamado sistema por unidade. Usualmente a corrente de excitação é desprezada.

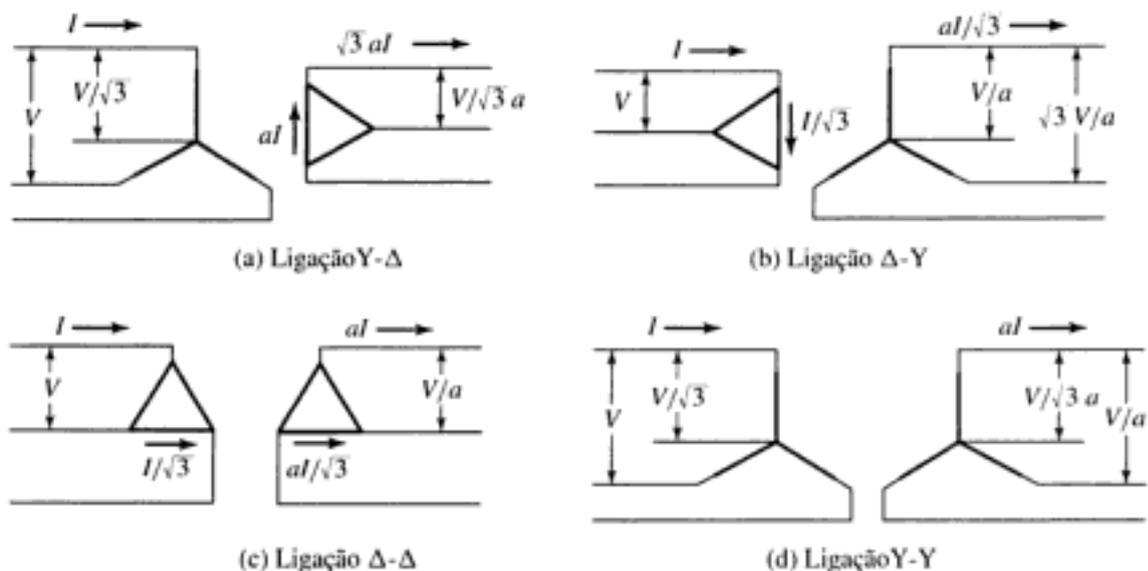
## 2.7 TRANSFORMADORES EM CIRCUITOS TRIFÁSICOS

Três transformadores monofásicos podem ser conectados para formar um *banco trifásico de transformadores*. Isso pode ser feito usando qualquer uma das quatro maneiras mostradas na Fig. 2.19. Em todas as quatro subfiguras, os enrolamentos da esquerda são os primários e os da direita, os secundários. Além disso, qualquer enrolamento primário em um transformador corresponde ao enrolamento secundário respectivo desenhado em paralelo. Também estão mostradas as tensões e correntes que resultam da aplicação equilibrada ao primário de tensões de linha  $V$  e correntes  $I$ . Supõe-se que a relação de espiras entre primário e secundário seja dada por  $N_1/N_2 = a$  e que o transformador seja ideal.<sup>4</sup> Observe que as tensões e correntes nominais do primário e do secundário do banco trifásico de transformadores depende da conexão usada, mas que a potência nominal em kVA do banco trifásico é três vezes a dos transformadores monofásicos individuais, independentemente do tipo de conexão.

A conexão ou ligação Y- $\Delta$  é usada comumente no abaixamento de uma tensão elevada para uma tensão média ou baixa. Uma razão para tal é que assim pode-se dispor de um neutro para aterramento no lado de alta tensão, um procedimento que pode se mostrar desejável em muitos casos. Ao contrário, a ligação  $\Delta$ -Y é usada comumente na elevação para uma tensão alta. A ligação  $\Delta$ - $\Delta$  tem a vantagem de que um transformador pode ser removido para conserto ou manutenção enquanto os dois restantes continuam a funcionar como um banco trifásico, com o valor nominal reduzido a 58% do valor do banco original. É conhecida como ligação *V* ou *delta aberto*. A ligação Y-Y é raramente usada devido a dificuldades oriundas de fenômenos associados à corrente de excitação.<sup>5</sup>

<sup>4</sup> As relações entre as grandezas trifásicas e monofásicas são discutidas no Apêndice A.

<sup>5</sup> Como não há conexão de neutro para conduzir as harmônicas da corrente de excitação, tensões de harmônicas são produzidas distorcendo de modo significativo as tensões do transformador.



**FIGURA 2.19** Ligações trifásicas comuns de transformadores; os enrolamentos do transformador são indicados pelas linhas espessas.

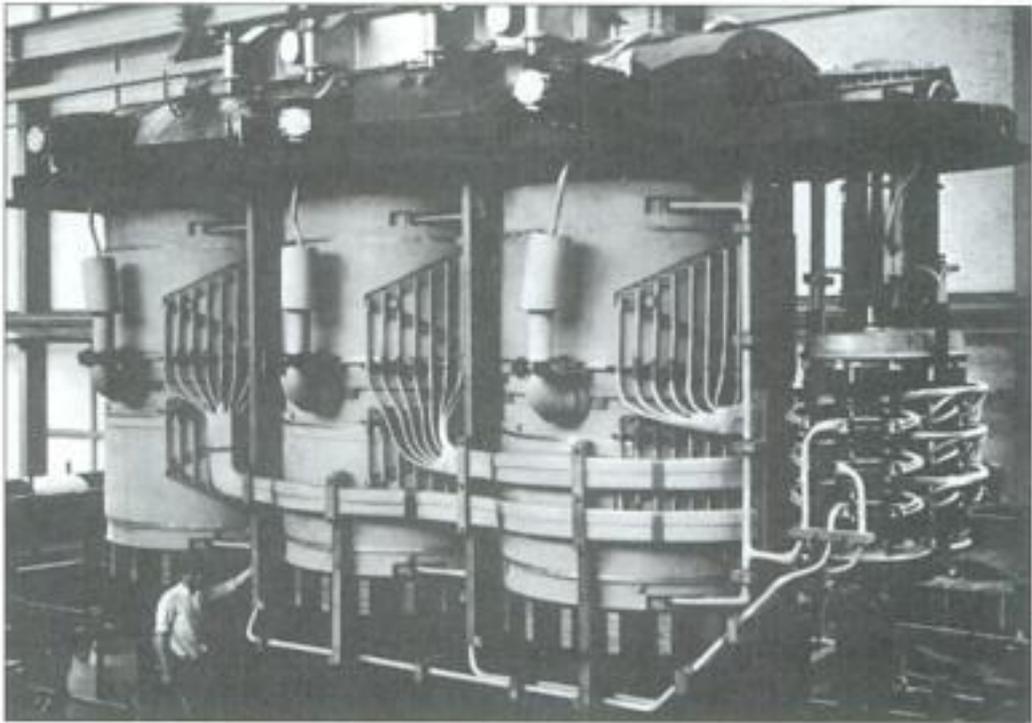
Em vez de três transformadores monofásicos, um banco trifásico pode consistir em um *transformador trifásico* tendo todos os seis enrolamentos em um núcleo comum de pernas múltiplas e contido em um único tanque. As vantagens dos transformadores trifásicos sobre as conexões com três transformadores monofásicos vem de que eles custam menos, pesam menos, requerem menos espaço e tem um rendimento um pouco maior. Uma foto das partes internas de um transformador trifásico de grande porte está mostrada na Fig. 2.20.

Os cálculos de circuitos que envolvem bancos trifásicos de transformadores em condições equilibradas podem ser feitos lidando com apenas um dos transformadores ou fases e verificando que as condições são as mesmas nas duas outras fases, exceto as defasagens presentes em um sistema trifásico. Usualmente é conveniente realizar os cálculos com base em uma única fase (Y por fase, tensão de fase), porque então as impedâncias dos transformadores podem ser somadas diretamente em série com as impedâncias da linha de transmissão. As impedâncias da linha de transmissão podem ser referidas de um lado a outro do banco de transformadores, usando o quadrado da relação ideal de tensões de linha do banco. Ao lidar com bancos Y-Δ ou Δ-Y, todas as grandezas podem ser referidas ao lado conectado em Y. Ao lidar com bancos Δ-Δ em série com linhas de transmissão, é conveniente substituir as impedâncias conectadas em Δ do transformador por impedâncias equivalentes conectadas em Y. Pode-se mostrar que um circuito equilibrado ligado em Δ com  $Z_{\Delta} \Omega/\text{fase}$  é equivalente a um circuito equilibrado ligado em Y com  $Z_Y \Omega/\text{fase}$  se

$$Z_Y = \frac{1}{3} Z_{\Delta}$$

#### EXEMPLO 2.8

Três transformadores monofásicos de 50 kVA e 2400:240 V, idênticos aos do Exemplo 2.6, são conectados em Y-Δ em um banco trifásico de 150 kVA para baixar a tensão no lado da carga de um alimentador cuja impedância é  $0,15 + j1,00 \Omega/\text{fase}$ . A tensão de linha no terminal de envio do alimentador é 4160 V. No lado dos secundários, os transformadores suprem uma carga trifásica equilibrada através de um outro alimentador cuja impedância é  $0,0005 + j0,0020 \Omega/\text{fase}$ . Encontre a tensão de linha na carga quando essa puxa a corrente nominal dos transformadores com um fator de potência de 0,80 indutivo.



**FIGURA 2.20** Um transformador de 200 MVA de três enrolamentos, 50 Hz e 210/80/10,2 kV removido de seu tanque. O enrolamento de 210 kV tem um *tap* ajustável sob carga para alteração de tensão. (Brown Boveri Corporation)

### ■ Solução

Os cálculos podem ser feitos com base em uma única fase referindo tudo ao lado de alta tensão, ligado em Y, do banco de transformadores. A tensão no terminal de envio do alimentador é equivalente a uma fonte de tensão  $V_s$  de

$$V_s = \frac{4160}{\sqrt{3}} = 2400 \text{ V, tensão de fase}$$

Da especificação do transformador, a corrente nominal no lado de alta tensão é 20,8 A/fase Y. A impedância do alimentador de baixa tensão, referida ao lado de alta tensão por meio do quadrado da relação nominal de tensões de linha do banco de transformadores, é

$$Z_{bt,A} = \left( \frac{4160}{240} \right)^2 (0,0005 + j0,0020) = 0,15 + j0,60 \Omega$$

e a impedância combinada em série dos alimentadores de alta e baixa tensões, referida ao lado de alta tensão, é assim

$$Z_{alimentador,A} = 0,30 + j1,60 \Omega/\text{fase Y}$$

Como o banco de transformadores, no seu lado de alta tensão, está ligado em Y, sua impedância equivalente em série monofásica é igual à impedância em série monofásica de cada transformador monofásico, quando referida ao seu lado de alta tensão. Essa impedância foi originalmente calculada no Exemplo 2.4 como sendo

$$Z_{eq,A} = 1,42 + j1,82 \Omega/\text{fase Y}$$

Devido à escolha dos valores selecionados para esse exemplo, o circuito equivalente monofásico para o sistema completo é idêntico ao do Exemplo 2.5, como pode ser visto de

forma específica na Fig. 2.14a. De fato, a solução com base em uma fase por vez é exatamente a mesma do Exemplo 2.5, de onde a tensão de carga referida ao lado de alta tensão é 2329 V em relação ao neutro. A tensão de fase real de carga pode ser calculada referindo esse valor ao lado de baixa tensão do banco de transformadores como

$$V_{\text{carga}} = 2329 \left( \frac{240}{4160} \right) = 134 \text{ V, tensão de fase}$$

que pode ser expresso como uma tensão de linha multiplicando por  $\sqrt{3}$

$$V_{\text{carga}} = 134\sqrt{3} = 233 \text{ V, tensão de linha}$$

Observe que essa tensão de linha é igual à tensão de fase de carga calculada no Exemplo 2.5 porque neste caso os transformadores estão ligados em delta nos seus lados de baixa tensão e, assim, a tensão de linha nos seus lados de baixa tensão é igual à tensão nos terminais de baixa tensão dos transformadores.

### PROBLEMA PRÁTICO 2.6

Repita o Exemplo 2.8 com os transformadores conectados em Y-Y e com todos os demais aspectos da proposição do problema mantendo-se os mesmos.

#### ■ Solução

405 V, tensão de linha

### EXEMPLO 2.9

Os três transformadores do Exemplo 2.8 são reconectados em configuração  $\Delta$ - $\Delta$  e recebem potência elétrica através de um alimentador trifásico de 2400 V (linha) cuja reatância é  $0,80 \Omega$  / fase. No terminal de envio, o alimentador é conectado aos terminais do secundário de um transformador trifásico conectado em Y- $\Delta$  cuja especificação é 500 kVA, 24 kV:2400 V (linha). A impedância em série equivalente do transformador de envio é  $0,17 + j0,92 \Omega$  / fase referida ao lado de 2400 V. A tensão aplicada aos terminais do primário do transformador de envio é 24,0 kV linha.

Um curto-circuito trifásico ocorre nos terminais de 240 V dos transformadores no lado de recepção do alimentador. Calcule a corrente de curto-circuito em regime permanente nas linhas de fase de 2400 V do alimentador, nos enrolamentos do primário e do secundário dos transformadores do lado de recepção, e nos terminais de 240 V.

#### ■ Solução

Os cálculos serão feitos com base em um equivalente em termos de tensão de fase com todas as grandezas referidas ao alimentador de 2400 V. A tensão da fonte é então

$$\frac{2400}{\sqrt{3}} = 1385 \text{ V, tensão de fase}$$

Da Equação 2.40, a impedância equivalente monofásica em série do transformador em  $\Delta$ - $\Delta$ , vista no seu lado de 2400 V, é

$$Z_{\text{eq}} = R_{\text{eq}} + jX_{\text{eq}} = \frac{1,42 + j1,82}{3} = 0,47 + j0,61 \Omega/\text{fase}$$

Então, a impedância em série total no curto-circuito é a soma dessa impedância mais a do transformador do lado de envio e a reatância do alimentador

$$Z_{tot} = (0,47 + j0,61) + (0,17 + j0,92) + j0,80 = 0,64 + j2,33 \Omega/\text{fase}$$

que tem um módulo de

$$|Z_{tot}| = 2,42 \Omega/\text{fase}$$

O módulo da corrente de fase no alimentador de 2400 V pode agora ser calculado simplesmente como a tensão de fase dividida pela impedância em série

$$\text{Corrente no alimentador de 2400 V} = \frac{1385}{2,42} = 572 \text{ A}$$

e, como mostrado na Fig. 2.19c, a corrente no enrolamento de 2400 V do transformador no lado de recepção é igual à corrente de fase dividida por  $\sqrt{3}$  ou

$$\text{Corrente nos enrolamentos de 2400 V} = \frac{572}{\sqrt{3}} = 330 \text{ A}$$

ao passo que a corrente nos enrolamentos de 240 V é 10 vezes esse valor

$$\text{Corrente nos enrolamentos de 240 V} = 10 \times 330 = 3300 \text{ A}$$

Finalmente, referindo-se à Fig. 2.19c, a corrente de fase nos terminais de 240 V em curto-circuito é dada por

$$\text{Corrente nos terminais de 240 V} = 3300\sqrt{3} = 5720 \text{ A}$$

Observe que naturalmente esse mesmo resultado poderia ter sido calculado verificando simplesmente que a relação de espiras do banco de transformadores em  $\Delta$ - $\Delta$  é igual a 10:1 e, portanto, em condições de equilíbrio trifásico, a corrente de fase no lado de baixa tensão será 10 vezes a do lado de alta tensão.

### PROBLEMA PRÁTICO 2.7

Repita o Exemplo 2.9 com a condição de que os três transformadores sejam conectados em  $\Delta$ -Y, em vez de  $\Delta$ - $\Delta$ , de modo que o lado de baixa tensão do transformador trifásico tenha uma tensão de linha de 416 V.

#### ■ Solução

$$\text{Corrente no alimentador de 2400 V} = 572 \text{ A}$$

$$\text{Corrente nos enrolamentos de 2400 V} = 330 \text{ A}$$

$$\text{Corrente nos enrolamentos de 416 V} = 3300 \text{ A}$$

$$\text{Corrente nos terminais de 416 V} = 3300 \text{ A}$$

## 2.8 TRANSFORMADORES DE TENSÃO E CORRENTE

Os transformadores são usados freqüentemente em aplicações de instrumentação para compatibilizar os valores das tensões e correntes com as faixas de operação de um medidor ou outro instrumento. Por exemplo, a maioria da instrumentação para sistemas de potência de 60 Hz baseia-se em tensões na faixa de 0-120 V eficazes e correntes na faixa de 0-5 A eficazes.

Como as tensões de linha dos sistemas de potência alcançam 765 kV e as correntes, dezenas de kA, é necessário algum método para fornecer aos instrumentos uma representação exata e em níveis baixos desses sinais.

Uma técnica comum usa transformadores especializados, conhecidos como *transformadores de potencial* ou *TPs* e *transformadores de correntes* ou *TCs*. Se construído com uma relação de espiras de  $N_1:N_2$ , um transformador ideal de potencial teria uma tensão de secundário igual ao valor de  $N_2/N_1$  vezes a do primário e de mesma fase. Do mesmo modo, um transformador ideal de corrente teria uma corrente de secundário de saída igual a  $N_1/N_2$  vezes a corrente de entrada do primário e novamente de mesma fase. Em outras palavras, os transformadores de potencial e de corrente (também referidos como *transformadores de instrumentação*) são projetados para, na prática, funcionarem tão próximo quanto possível dos transformadores ideais.

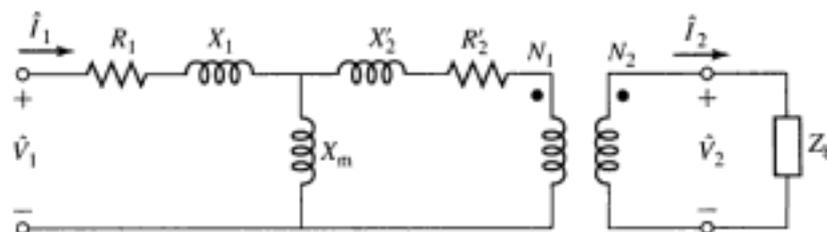
O circuito equivalente da Fig. 2.21 mostra um transformador carregado com uma impedância  $Z_b = R_b + jX_b$  em seu secundário. Para as finalidades desta discussão, a resistência de perdas no núcleo  $R_c$  foi desprezada. Se desejado, a análise apresentada aqui pode ser estendida facilmente para incluir os seus efeitos. Seguindo a terminologia convencional, a carga de um transformador de instrumentação é freqüentemente referida como *burden\** do transformador, daí vem o subscrito b na equação de impedância acima. Para simplificar a nossa discussão, optamos por referir todas as grandezas do secundário ao lado primário do transformador.

Considere primeiro um transformador de potencial. Idealmente, deve medir com exatidão a tensão ao mesmo tempo em que aparece como um circuito aberto para o sistema que está sendo medido, isto é, puxando corrente e potência desprezíveis. Assim, sua impedância de carga deve ser “elevada” no sentido em que iremos quantificar agora.

Primeiro, vamos supor que o secundário do transformador esteja em circuito aberto (isto é,  $|Z_b| = \infty$ ). Nesse caso, podemos escrever que

$$\frac{\hat{V}_2}{\hat{V}_1} = \left( \frac{N_2}{N_1} \right) \frac{jX_m}{R_1 + j(X_1 + X_m)} \quad (2.41)$$

Dessa equação, vemos que um transformador de potencial com um secundário em aberto tem um erro inerente (em valor e fase) devido à queda de tensão produzida pela corrente de magnetização na resistência de primário e na reatância de dispersão. Se for possível fazer com que a resistência de primário e a reatância de dispersão sejam baixas em comparação à reatância de magnetização, então pode-se fazer com que esse erro inerente seja muito pequeno.



**FIGURA 2.21** Circuito equivalente de um transformador de instrumentação.

\* N. de T.: Expressão pela qual essa carga em especial é comumente conhecida. Em inglês, significa fardo ou carga (especialmente pesados).

A situação é prejudicada na presença de uma carga (*burden*) finita. Incluindo o efeito da impedância dessa carga, a Equação 2.41 torna-se

$$\frac{\hat{V}_2}{\hat{V}_1} = \left( \frac{N_2}{N_1} \right) \frac{Z_{\text{eq}} Z'_b}{(R_1 + jX_1)(Z_{\text{eq}} + Z'_b + R'_2 + jX'_2)} \quad (2.42)$$

onde

$$Z_{\text{eq}} = \frac{jX_m(R_1 + jX_1)}{R_1 + j(X_m + X_1)} \quad (2.43)$$

e

$$Z'_b = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 Z_b \quad (2.44)$$

é a impedância da carga (*burden*) referida ao primário do transformador.

Dessas equações, pode-se ver que as características para se ter exatidão em um transformador de potencial incluem uma reatância de magnetização elevada (mais exatamente, uma impedância de excitação alta já que os efeitos das perdas no núcleo, embora desprezados na análise apresentada aqui, também devem ser minimizados), assim como resistências de enrolamento e reatâncias de dispersão relativamente baixas. Finalmente, como se verá no Exemplo 2.10, a impedância de carga (*burden*) deve ser mantida acima de um valor mínimo para evitar que erros excessivos sejam introduzidos no valor da tensão medida e no seu ângulo de fase.

### EXEMPLO 2.10



Um transformador de potencial com uma relação de 2400:120 V e 60 Hz tem os seguintes parâmetros (referidos ao enrolamento de 2400 V):

$$\begin{aligned} X_1 &= 143 \, \Omega & X'_2 &= 164 \, \Omega & X_m &= 163 \, \text{k}\Omega \\ R_1 &= 128 \, \Omega & R'_2 &= 141 \, \Omega \end{aligned}$$

(a) Supondo uma entrada de 2400 V, que idealmente deve produzir uma tensão de 120 V no enrolamento de baixa tensão, calcule os erros de módulo e de ângulo de fase da tensão do secundário se o enrolamento do secundário for posto em circuito aberto. (b) Supondo que a impedância de carga (*burden*) seja puramente resistiva ( $Z_b = R_b$ ), calcule a resistência mínima (*burden* máxima) que pode ser aplicada ao secundário de modo que o erro no valor do módulo da tensão seja inferior a 0,5%. (c) Repita a parte (b) mas encontre a resistência mínima tal que o erro de ângulo de fase seja inferior a 1,0 grau.

#### ■ Solução

a. Esse problema é resolvido mais facilmente usando MATLAB.\* Da Equação 2.41 sendo  $\hat{V}_1 = 2400$  V, o seguinte *script* de MATLAB fornece

$$\hat{V}_2 = 119.90 \angle 0.045^\circ \text{ V}$$

O *script* de MATLAB é:

```
clc
clear

%Parâmetros TP
R1 = 128;
X1 = 143;
Xm = 163e3;
```

\* MATLAB é uma marca registrada da The MathWorks, Inc.

```

N1 = 2400;
N2 = 120;
N = N1/N2;

%Tensão de primário
V1 = 2400;

%Tensão de secundário
V2 = V1*(N2/N1)*(j*Xm/(R1+ j*(X1+Xm)));
magV2 = abs(V2);
phaseV2 = 180*angle(V2)/pi;

fprintf('\nModulo de V2 = %g [V]',magV2)
fprintf('\n      e ângulo = %g [graus]\n\n',phaseV2)

```

- b. Aqui, novamente, é relativamente imediato escrever um *script* de MATLAB capaz de implementar a Equação 2.42 e de calcular o erro percentual do módulo da tensão  $\hat{V}_2$  quando comparada com a tensão de 120 V que deveria ser medida se o TP fosse ideal. A resistência de carga  $R_b$  pode ser inicializada com um valor elevado e então reduzida até que o erro no valor da tensão alcance 0,5%. O resultado de tal análise mostraria que a resistência mínima é 162,5  $\Omega$ , correspondendo a um erro de 0,50% no valor da tensão e de 0,22° no ângulo de fase. (Observe que isso aparece como uma resistência de 65 k $\Omega$ , quando referida ao primário.)
- c. O *script* de MATLAB da parte (b) pode ser modificado para se obter a carga resistiva mínima que tornará o erro de ângulo de fase inferior a 1,0 grau. O resultado mostraria que a resistência mínima é 41,4  $\Omega$ , correspondendo a um ângulo de fase de 1,00° e um erro no valor da tensão de 1,70%.

### PROBLEMA PRÁTICO 2.8



Usando MATLAB, repita as partes (b) e (c) do Exemplo 2.10, supondo que a impedância de *burden* seja puramente reativa ( $Z_b = jX_b$ ) e encontrando a impedância mínima correspondente  $X_b$  em cada caso.

#### ■ Solução

A reatância de *burden* mínima que resulta em uma tensão de secundário, dentro de 0,5% do valor esperado de 120 V, é  $X_b = 185,4 \Omega$  com um ângulo de fase de 0,25°. A reatância de *burden* mínima que corresponde a um ângulo de fase na tensão de secundário, dentro de 1,0° do ângulo de fase da tensão do primário, é  $X_b = 39,5 \Omega$ , e para a qual o erro no valor de tensão é 2,0%.

A seguir, considere um transformador de corrente. Um transformador de corrente ideal deve medir com exatidão a corrente, ao mesmo tempo em que se comporta como um curto-circuito para o sistema que está sendo medido, isto é, desenvolvendo uma queda de tensão desprezível e puxando uma potência também desprezível. Assim, sua impedância de carga (*burden*) deve ser “baixa” no sentido em que iremos quantificar agora.

Vamos começar supondo que o secundário do transformador esteja em curto-circuito (isto é,  $|Z_b| = 0$ ). Nesse caso, podemos escrever que

$$\frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_1} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right) \frac{jX_m}{R_2' + j(X_2' + X_m)} \quad (2.45)$$

De modo bem semelhante ao de um transformador de potencial, a Equação 2.45 mostra que um transformador de corrente com um secundário em curto-circuito tem um erro inerente (em valor e fase). Isso é devido ao fato de que uma parte da corrente de primário é desviada para a reatância de magnetização e não alcança o secundário. Se for possível fazer com que a reatância de magnetização seja elevada em relação à resistência de secundário e à reatância de dispersão, então esse erro poderá ser tornado muito pequeno.

Uma carga finita (*burden*) aparecerá em série com a impedância do secundário e aumentará o erro. Incluindo o efeito da impedância de carga, a Equação 2.45 torna-se

$$\frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_1} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right) \frac{jX_m}{Z'_b + R'_2 + j(X'_2 + X_m)} \quad (2.46)$$

Dessas equações, pode-se ver que, para se ter exatidão em um transformador de corrente, ele deve ter uma impedância de magnetização elevada, e resistências de enrolamento e reatâncias de dispersão relativamente baixas. Além disso, como visto no Exemplo 2.11, a impedância de carga de um transformador de corrente deve ser mantida abaixo de um valor máximo para evitar que erros adicionais excessivos sejam introduzidos no valor da corrente medida e no seu ângulo de fase.

### EXEMPLO 2.11



Um transformador de corrente com uma relação de 800:5 A e 60 Hz tem os seguintes parâmetros (referidos ao enrolamento de 800 A):

$$\begin{aligned} X_1 &= 44,8 \mu\Omega & X'_2 &= 54,3 \mu\Omega & X_m &= 17,7 \text{ m}\Omega \\ R_1 &= 10,3 \mu\Omega & R'_2 &= 9,6 \mu\Omega \end{aligned}$$

Supondo que o enrolamento de corrente elevada esteja conduzindo uma corrente de 800 A, calcule o valor da corrente e da fase relativa no enrolamento de corrente baixa se a impedância de carga for puramente resistiva com  $R_b = 2,5 \Omega$ .

#### ■ Solução

A corrente no secundário pode ser obtida a partir da Equação 2.46 fazendo  $\hat{I}_1 = 800 \text{ A}$  e  $R'_b = (N_1/N_2)^2 R_b = 0,097 \text{ m}\Omega$ . O seguinte *script* de MATLAB fornece

$$\hat{I}_2 = 4,98 \angle 0,346^\circ \text{ A}$$

O *script* de MATLAB é:

```
clc
clear

%Parâmetros TC
R_2p = 9.6e-6;
X_2p = 54.3e-6;
X_m = 17.7e-3;

N_1 = 5;
N_2 = 800;
N = N_1/N_2;

%Impedância de carga
R_b = 2.5;
X_b = 0;
Z_bp = N^2*(R_b + j * X_b);

%Corrente de primário
I1 = 800;
```

```

%Corrente de secundário
I2 = I1*N*j*X_m/(Z_bp + R_2p + j*(X_2p + X_m));
magI2 = abs(I2);
phaseI2 = 180*angle(I2)/pi;

fprintf('\n    Módulo da corrente de secundário = %g [A]',magI2)
fprintf('\n    e ângulo de fase = %g [graus]\n\n',phaseI2)

```

### PROBLEMA PRÁTICO 2.9



Para o transformador de corrente do Exemplo 2.11, encontre a impedância máxima de carga puramente reativa  $Z_b = jX_b$ , tal que, para 800 A fluindo no primário do transformador, a corrente de secundário seja superior a 4,95 A (isto é, haverá no máximo um erro de 1,0% no valor da corrente).

#### ■ Solução

$X_b$  deve ser inferior a 3,19  $\Omega$ .

## 2.9 O SISTEMA POR UNIDADE

Os cálculos relativos a máquinas, transformadores e sistemas de máquinas são freqüentemente executadas na forma conhecida como *por unidade*, isto é, com todas as quantidades expressas como frações decimais dos chamados *valores de base* adequadamente escolhidos. Todos os cálculos usuais são então executados com esses valores por unidade ao invés dos familiares volts, ampères, ohms e assim por diante.

Há uma série de vantagens nesse sistema. Uma é que os valores dos parâmetros das máquinas e dos transformadores ocorrem tipicamente dentro de um intervalo numérico razoavelmente estreito, quando são expressos no sistema por unidade com base em seus valores nominais. Desse modo, a exatidão de seus valores é passível de uma rápida verificação aproximada. Uma segunda vantagem é que, quando os parâmetros do circuito equivalente do transformador são convertidos para seus valores por unidade, a relação de espiras do transformador ideal torna-se 1:1 e, assim, o transformador ideal pode ser eliminado. Isso simplifica em muito a análise já que elimina a necessidade de referir as impedâncias para um lado ou outro dos transformadores. Em sistemas complexos, envolvendo muitos transformadores com diferentes relações de espiras, essa vantagem é significativa pois elimina-se uma possível causa de erros sérios.

Grandezas como tensão  $V$ , corrente  $I$ , potência  $P$ , potência reativa  $Q$ , potência aparente  $VA$ , resistência  $R$ , reatância  $X$ , impedância  $Z$ , condutância  $G$ , susceptância  $B$  e admitância  $Y$  podem ser transformadas para e da forma por unidade como segue:

$$\text{Grandeza por unidade} = \frac{\text{Grandeza real}}{\text{Valor de base da grandeza}} \quad (2.47)$$

onde "Grandeza real" refere-se ao valor em volts, ampères, ohms e assim por diante. Até certo ponto, os valores de base podem ser escolhidos arbitrariamente, mas certas relações entre eles devem ser observadas para que as leis elétricas normais sejam verdadeiras no sistema por unidade. Assim, para um sistema monofásico,

$$P_{\text{base}}, Q_{\text{base}}, VA_{\text{base}} = V_{\text{base}} I_{\text{base}} \quad (2.48)$$

$$R_{\text{base}}, X_{\text{base}}, Z_{\text{base}} = \frac{V_{\text{base}}}{I_{\text{base}}} \quad (2.49)$$

O resultado final é que *apenas duas grandezas de base independentes podem ser escolhidas arbitrariamente*; as restantes são determinadas pelas relações dadas pelas Equações 2.48 e 2.49. Em

aplicações típicas, os valores de  $VA_{base}$  e  $V_{base}$  são escolhidos primeiro e então os valores de  $I_{base}$  e de todas as demais grandezas das Equações 2.48 e 2.49 são estabelecidos de forma única.

O valor de  $VA_{base}$  deve ser o mesmo em todo o sistema que está sendo analisado. Quando um transformador é encontrado, os valores de  $V_{base}$  são diferentes em cada lado e devem ser escolhidos com a mesma razão que a relação de espiras do transformador. Usualmente, escolhem-se as tensões nominais nos respectivos lados. Então, o processo de referir as quantidades para um dos lados do transformador ocorre automaticamente. As Equações 2.48 e 2.49 são usadas para encontrar e interpretar os valores por unidade.

Isso pode ser visto no circuito equivalente da Fig. 2.10c. Se as tensões de base do primário e do secundário forem escolhidas com a mesma razão que a relação de espiras do transformador ideal, então o transformador ideal por unidade terá uma relação de espiras unitária e portanto poderá ser eliminado.

Se essas regras forem seguidas, o procedimento para realizar análises de sistema no sistema por unidade pode ser resumido como segue:

1. Escolha uma potência aparente ( $VA$ ) de base e uma tensão de base em algum ponto do sistema.
2. Converta todas as grandezas para o sistema por unidade na potência aparente ( $VA$ ) de base escolhida, e use uma base de tensão que se transforme de acordo com a relação de espiras dos transformadores que são encontrados à medida que se percorre todo o sistema.
3. Realize uma análise elétrica normal com todas as grandezas no sistema por unidade.
4. Quando a análise estiver completa, todas as grandezas podem ser convertidas de volta às unidades reais (por exemplo, volts, ampères, watts, etc.) multiplicando seus valores por unidade pelos valores de base correspondentes.

Quando apenas um dispositivo elétrico, tal como um transformador, está envolvido, o próprio valor nominal do dispositivo é usado como base em volts-ampères. Quando expressas no sistema por unidade, com base em seus valores nominais, as características dos transformadores de força e de distribuição não variam muito dentro de uma faixa ampla de valores. Por exemplo, usualmente a corrente de excitação está entre 0,02 e 0,06 por unidade, a resistência equivalente está entre 0,005 e 0,02 por unidade (os valores menores aplicam-se a grandes transformadores), e a reatância equivalente está entre 0,015 e 0,10 por unidade (os valores maiores aplicam-se aos transformadores de alta tensão de grande porte). Do mesmo modo, os valores por unidade dos parâmetros das máquinas síncronas e de indução caem dentro de um intervalo relativamente estreito. A razão disso está em que a física por detrás dos tipos de dispositivo é a mesma e, em um sentido não aprofundado, eles podem ser considerados simplesmente como versões em escalas diferentes do mesmo dispositivo básico. Como resultado, quando normalizados a suas próprias especificações nominais, o efeito de escala é eliminado e o resultado é um conjunto de valores, por unidade, que é muito semelhante em todo o intervalo de tamanhos daquele dispositivo.

Freqüentemente os fabricantes fornecem parâmetros para um dispositivo no sistema por unidade com base no próprio dispositivo. Entretanto, quando diversos dispositivos estiverem envolvidos, usualmente deve-se fazer uma escolha arbitrária de potência aparente em volts-ampères, e usar esse valor em todo o sistema. Como resultado, ao se realizar uma análise de sistema, pode ser necessário transformar os parâmetros por unidade fornecidos pelo fabricante nos valores por unidade correspondentes à base escolhida para a análise. As seguintes relações podem ser usadas para converter valores por unidade (pu) de uma base para outra:

$$(P, Q, VA)_{pu \text{ na base } 2} = (P, Q, VA)_{pu \text{ na base } 1} \left[ \frac{VA_{base 1}}{VA_{base 2}} \right] \quad (2.50)$$

$$(R, X, Z)_{\text{pu na base 2}} = (R, X, Z)_{\text{pu na base 1}} \left[ \frac{(V_{\text{base 1}})^2 VA_{\text{base 2}}}{(V_{\text{base 2}})^2 VA_{\text{base 1}}} \right] \quad (2.51)$$

$$V_{\text{pu na base 2}} = V_{\text{pu na base 1}} \left[ \frac{V_{\text{base 1}}}{V_{\text{base 2}}} \right] \quad (2.52)$$

$$I_{\text{pu na base 2}} = I_{\text{pu na base 1}} \left[ \frac{V_{\text{base 2}} VA_{\text{base 1}}}{V_{\text{base 1}} VA_{\text{base 2}}} \right] \quad (2.53)$$

**EXEMPLO 2.12**

O circuito equivalente de um transformador de 100 MVA e 7,97 kV:79,7 kV está mostrado na Fig. 2.22a. Os parâmetros do circuito equivalente são:

$$X_B = 0,040 \, \Omega \quad X_A = 3,75 \, \Omega \quad X_m = 114 \, \Omega$$

$$R_B = 0,76 \, \text{m}\Omega \quad R_A = 0,085 \, \Omega$$

Observe que a indutância de magnetização foi referida ao lado de baixa tensão do circuito equivalente. Converta os parâmetros do circuito equivalente para a forma por unidade usando as especificações nominais do transformador como base.

**■ Solução**

As grandezas de base do transformador são:

**Lado de baixa tensão:**

$$VA_{\text{base}} = 100 \, \text{MVA} \quad V_{\text{base}} = 7,97 \, \text{kV}$$

e, das Equações 2.48 e 2.49,

$$R_{\text{base}} = X_{\text{base}} = \frac{V_{\text{base}}^2}{VA_{\text{base}}} = 0,635 \, \Omega$$

**Lado de alta tensão:**

$$VA_{\text{base}} = 100 \, \text{MVA} \quad V_{\text{base}} = 79,7 \, \text{kV}$$

e, das Equações 2.48 e 2.49,

$$R_{\text{base}} = X_{\text{base}} = \frac{V_{\text{base}}^2}{VA_{\text{base}}} = 63,5 \, \Omega$$

Agora, os valores por unidade dos parâmetros do transformador podem ser calculados dividindo-se pelos valores de base correspondentes.

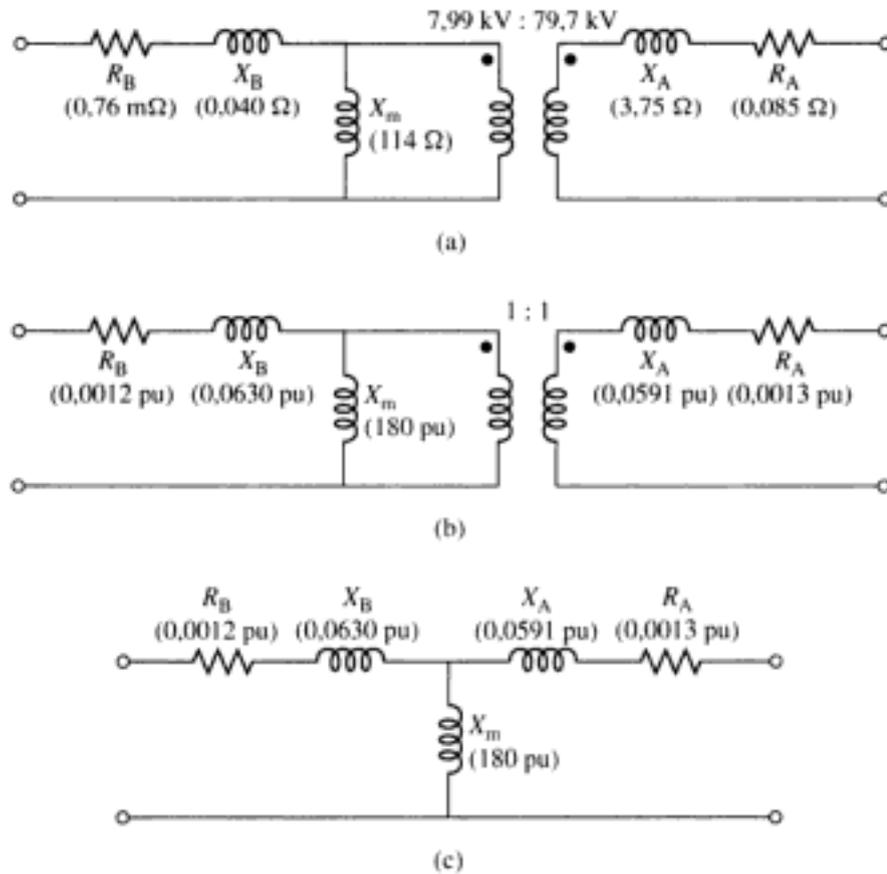
$$X_B = \frac{0,040}{0,635} = 0,0630 \text{ por unidade}$$

$$X_A = \frac{3,75}{63,5} = 0,0591 \text{ por unidade}$$

$$X_m = \frac{114}{0,635} = 180 \text{ por unidade}$$

$$R_B = \frac{7,6 \times 10^{-4}}{0,635} = 0,0012 \text{ por unidade}$$

$$R_A = \frac{0,085}{63,5} = 0,0013 \text{ por unidade}$$



**FIGURA 2.22** Circuitos equivalentes de transformador para o Exemplo 2.12. (a) Circuito equivalente em unidades reais. (b) Circuito equivalente por unidade com um transformador ideal 1:1. (c) Circuito equivalente por unidade após a eliminação do transformador ideal.

Finalmente, cada uma das tensões que representam a relação de espiras do transformador ideal deve ser dividida pela tensão de base no respectivo lado do transformador. Assim, a relação de espiras de 7,97 kV:79,7 kV torna-se, por unidade,

$$\text{Relação de espiras por unidade} = \left( \frac{7,97 \text{ kV}}{7,97 \text{ kV}} \right) : \left( \frac{79,7 \text{ kV}}{79,7 \text{ kV}} \right) = 1 : 1$$

O circuito equivalente por unidade resultante está mostrado na Fig. 2.22b. Como tem uma relação de espiras unitária, não há necessidade de manter o transformador ideal. Assim, o circuito equivalente pode ser reduzido à forma da Fig. 2.22c.

### EXEMPLO 2.13

A corrente de excitação medida no lado de baixa tensão de um transformador de 50 kVA e 2400:240 V é 5,41 A. A sua impedância equivalente referida ao lado de alta tensão é  $1,42 + j1,82 \Omega$ . Usando a especificação nominal do transformador como base, expresse no sistema por unidade e nos lados de alta e baixa tensão (a) a corrente de excitação e (b) a impedância equivalente.

#### ■ Solução

Os valores de base das tensões e correntes são

$$V_{\text{base,A}} = 2400 \text{ V} \quad V_{\text{base,B}} = 240 \text{ V} \quad I_{\text{base,A}} = 20,8 \text{ A} \quad I_{\text{base,B}} = 208 \text{ A}$$

onde os subscritos A e B indicam os lados de alta e baixa tensão, respectivamente,

Da Equação 2.49,

$$Z_{\text{base,A}} = \frac{2400}{20,8} = 115,2 \, \Omega \quad Z_{\text{base,B}} = \frac{240}{208} = 1,152 \, \Omega$$

- a. Da Equação 2.47, a corrente de excitação por unidade, referida ao lado de baixa tensão, pode ser calculada como:

$$I_{v,B} = \frac{5,41}{208} = 0,0260 \text{ por unidade}$$

A corrente de excitação, referida ao lado de alta tensão, é 0,541 A. Seu valor por unidade é

$$I_{v,A} = \frac{0,541}{20,8} = 0,0260 \text{ por unidade}$$

Observe que, como esperado, os valores por unidade são os mesmos quando referidos a ambos os lados. Isso faz com que o transformador por unidade corresponda a um transformador ideal com uma relação de espiras unitária. Trata-se de uma consequência direta da escolha das tensões de base, com uma razão igual à relação de espiras do transformador, e da mesma base de volts-ampères.

- b. Da Equação 2.47 e do valor de  $Z_{\text{base}}$ , tem-se

$$Z_{\text{eq,A}} = \frac{1,42 + j1,82}{115,2} = 0,0123 + j0,0158 \text{ por unidade}$$

A impedância equivalente referida ao lado de baixa tensão é 0,0142 +. Seu valor por unidade é

$$Z_{\text{eq,B}} = \frac{0,142 + j0,182}{1,152} = 0,0123 + j0,0158 \text{ por unidade}$$

Os valores por unidade, referidos aos lados de alta e baixa tensões, são os mesmos. A relação de espiras do transformador, no sistema por unidade, é explicada pelos valores de base. Observe novamente que isso é consistente com a relação de espiras unitária presente no transformador ideal do circuito equivalente do transformador usado no sistema por unidade.

### PROBLEMA PRÁTICO 2.10

Um transformador de 15 kVA e 120:460 V tem uma impedância em série equivalente de 0,018 + j0,042 por unidade. Calcule a impedância em série equivalente em ohms (a) referida ao lado de baixa tensão e (b) referida ao lado de alta tensão.

#### ■ Solução

$$Z_{\text{eq,B}} = 0,017 + j0,040 \, \Omega \quad \text{e} \quad Z_{\text{eq,A}} = 0,25 + j0,60 \, \Omega$$

Quando aplicados à análise de sistemas trifásicos, os valores de base do sistema por unidade são escolhidos de modo que, entre eles, as seguintes relações sejam verdadeiras em um sistema trifásico equilibrado:

$$(P_{\text{base}}, Q_{\text{base}}, VA_{\text{base}})_{\text{trifásico}} = 3VA_{\text{base, por fase}} \quad (2.54)$$

No tratamento de sistemas trifásicos, usualmente  $VA_{\text{base, trifásico}}$  a base trifásica de potência aparente em volts-ampères, e  $V_{\text{base, trifásico}} = V_{\text{base, l-l}}$ , a base de tensão de linha em volts,

são escolhidos primeiro. Então, os valores de base para a tensão de fase (linha-neutro) são obtidos fazendo\*

$$V_{\text{base, l-n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} V_{\text{base, l-l}} \quad (2.55)$$

Observe que a corrente de base em sistemas trifásicos é igual à corrente de fase, a qual é mesma que a corrente de base usada em uma análise monofásica (por fase). Assim,

$$I_{\text{base, trifásico}} = I_{\text{base, por fase}} = \frac{VA_{\text{base, trifásico}}}{\sqrt{3} V_{\text{base, trifásico}}} \quad (2.56)$$

Finalmente, a impedância trifásica de base é escolhida como sendo a impedância monofásica. Assim,

$$\begin{aligned} Z_{\text{base, trifásico}} &= Z_{\text{base, por fase}} \\ &= \frac{V_{\text{base, l-n}}}{I_{\text{base, por fase}}} \\ &= \frac{V_{\text{base, trifásico}}}{\sqrt{3} I_{\text{base, trifásico}}} \\ &= \frac{(V_{\text{base, trifásico}})^2}{VA_{\text{base, trifásico}}} \end{aligned} \quad (2.57)$$

As equações de conversão de base para base, Equações 2.50 a 2.53, aplicam-se igualmente à conversão trifásica de bases. Observe que os fatores  $\sqrt{3}$  e 3, que estabelecem as relações entre  $\Delta$  e  $Y$  para os valores de volts, ampères e ohms em um sistema trifásico equilibrado, surgem automaticamente no sistema por unidade a partir dos valores de base. Assim, os problemas trifásicos podem ser resolvidos no sistema por unidade como se fossem problemas monofásicos, e os detalhes do transformador ( $Y$  versus  $\Delta$  no primário e secundário do transformador) e as conexões de impedância ( $Y$  versus  $\Delta$ ) desaparecem, exceto na transformação dos valores de volts, ampères e ohms para dentro e fora do sistema por unidade.

#### EXEMPLO 2.14

Refaça o Exemplo 2.9 no sistema por unidade, calculando especificamente as correntes de fase de curto-circuito que fluem no alimentador e nos terminais de 240 V do banco de transformadores, no lado de recepção. Usando o sistema por unidade, faça os cálculos usando como bases a tensão nominal trifásica e os 150 kVA do transformador no lado de recepção.

#### ■ Solução

Começamos convertendo todas as impedâncias para a forma por unidade. A impedância do transformador de 500 kVA e 24 kV:2400V, que atua como fonte do alimentador, é  $0,17 + j0,92 \Omega$  /fase referida ao lado de 2400 V. Da Equação 2.57, a impedância de base correspondente à base de 2400 V e 150 kVA é

$$Z_{\text{base}} = \frac{2400^2}{150 \times 10^3} = 38,4 \Omega$$

Do Exemplo 2.9, a impedância total em série é igual a  $Z_{\text{tot}} = 0,64 + j2,33 \Omega$  /fase e assim, no sistema por unidade, torna-se

$$Z_{\text{tot}} = \frac{0,64 + j2,33}{38,4} = 0,0167 + j0,0607 \text{ por unidade}$$

\* N. de T.: Os subscritos l-l e l-n indicam linha-linha e linha-neutro, respectivamente, no caso, tensão de linha e tensão de fase. Para mais detalhes, consulte a Seção A.2 no Apêndice A.

cujos módulos são

$$|Z_{\text{out}}| = 0,0629 \text{ por unidade}$$

A tensão aplicada ao lado de alta tensão do transformador de envio é  $V_s = 24,0 \text{ kV} = 1,0$  por unidade, tomando a tensão nominal como base. Assim, a corrente de curto-circuito será igual a

$$I_{\text{cc}} = \frac{V_s}{|Z_{\text{out}}|} = \frac{1,0}{0,0629} = 15,9 \text{ por unidade}$$

Para calcular as correntes das fases em ampères, é necessário simplesmente multiplicar a corrente de curto-circuito, por unidade, pela corrente de base apropriada. Assim, no alimentador de 2400 V, a corrente de base será

$$I_{\text{base, 2400-V}} = \frac{150 \times 10^3}{\sqrt{3} \cdot 2400} = 36,1 \text{ A}$$

e, portanto, a corrente do alimentador será

$$I_{\text{alimentador}} = 15,9 \times 36,1 = 574 \text{ A}$$

A corrente de base nos secundários de 240 V dos transformadores do lado de recepção é

$$I_{\text{base, 240-V}} = \frac{150 \times 10^3}{\sqrt{3} \cdot 240} = 361 \text{ A}$$

e, assim, a corrente de curto-circuito é

$$I_{\text{secundário de 240-V}} = 15,9 \times 361 = 5,74 \text{ kA}$$

Como esperado, esses valores são equivalentes, dentro da precisão numérica, aos calculados no Exemplo 2.9.

### PROBLEMA PRÁTICO 2.11

Calcule o valor da corrente de curto-circuito do alimentador do Exemplo 2.9 se o alimentador de 2400 V for substituído por um alimentador com uma impedância de  $0,07 + j0,68 \ \Omega/\text{fase}$ . Realize esse cálculo tomando como bases a tensão nominal e os 500 kVA do transformador do lado de envio e expresse a sua solução no sistema por unidade e também em ampères por fase.

#### ■ Solução

$$\text{Corrente de curto-circuito} = 5,20 \text{ por unidade} = 636 \text{ A}$$

### EXEMPLO 2.15

Uma carga trifásica é alimentada a partir de um transformador de 2,4 kV:460 V e 250 kVA cuja impedância equivalente em série é  $0,026 + j0,12$  por unidade, em sua própria base. Observe-se que a tensão de linha da carga é 438 V e está recebendo 95 kW com um fator de potência unitário. Calcule a tensão no lado de alta tensão do transformador. Faça os cálculos tomando como bases 460 V e 100 kVA.

#### ■ Solução

A impedância, com base no lado de 460 V do transformador, é

$$Z_{\text{base, transformador}} = \frac{460^2}{250 \times 10^3} = 0,846 \ \Omega$$

ao passo que aquela com base em 100 kVA é

$$Z_{\text{base, 100-kVA}} = \frac{460^2}{100 \times 10^3} = 2,12 \, \Omega$$

Assim, da Equação 2.51, a impedância por unidade do transformador, na base de 100 kVA, é

$$Z_{\text{transformador}} = (0,026 + j0,12) \left( \frac{0,864}{2,12} \right) = 0,0106 + j 0,0489 \text{ por unidade}$$

A tensão de carga, por unidade, é

$$\hat{V}_{\text{carga}} = \frac{438}{460} = 0,952 \angle 0^\circ \text{ por unidade}$$

onde a tensão de carga foi escolhida como referência para os cálculos de ângulos de fase.

A potência da carga, por unidade, é

$$P_{\text{carga}} = \frac{95}{100} = 0,95 \text{ por unidade}$$

e, assim, a corrente de carga por unidade, em fase com a tensão de carga por tratar-se de uma carga que opera com um fator de potência unitário, é

$$\hat{I}_{\text{carga}} = \frac{P_{\text{carga}}}{V_{\text{carga}}} = \frac{0,95}{0,952} = 0,998 \angle 0^\circ \text{ por unidade}$$

Portanto, podemos agora calcular a tensão no lado de alta tensão do transformador

$$\begin{aligned} \hat{V}_A &= \hat{V}_{\text{carga}} + \hat{I}_{\text{carga}} Z_{\text{transformador}} \\ &= 0,952 + 0,998(0,0106 + j0,0489) \\ &= 0,963 + j0,0488 = 0,964 \angle 29,0^\circ \text{ por unidade} \end{aligned}$$

Assim, a tensão no lado de alta tensão é igual a  $0,964 \times 2400 \text{ V} = 2313 \text{ V}$  (tensão de linha).

### PROBLEMA PRÁTICO 2.12

Repita o Exemplo 2.15 se o transformador trifásico de 250 kVA for substituído por um transformador de 150 kVA com especificação nominal também de 2,4 kV:460V e cuja impedância equivalente em série é  $0,038 + j0,135$ , por unidade, em sua própria base. Faça os cálculos tomando como bases 460 V e 100 kVA.

#### ■ Solução

Tensão do lado de alta tensão = 0,982 por unidade = 2357 V (tensão de linha)

## 2.10 RESUMO

Mesmo não sendo um dispositivo eletromecânico, o transformador é um componente comum e indispensável de sistemas CA onde é usado para transformar tensões, correntes e impedâncias em níveis apropriados permitindo uma utilização otimizada. Para os propósitos de nosso estudo de sistemas eletromecânicos, o transformador serve de exemplo valioso das técnicas de análise que devem ser empregadas. Oferecem-nos oportunidades para investigar as propriedades dos circuitos magnéticos, incluindo os conceitos de FMM, corrente de magnetização, fluxos mútuo e dispersivo de magnetização, e suas indutâncias associadas.

Tanto em transformadores como em máquinas rotativas, um campo magnético é criado pela ação combinada das correntes nos enrolamentos. Em um transformador de núcleo de ferro, a maior parte do fluxo está confinada ao núcleo e enlaça todos os enrolamentos. O fluxo mútuo resultante induz tensões nos enrolamentos proporcionalmente a seus números de espiras e é responsável pela propriedade do transformador de converter tensões. Em máquinas rotativas, a situação é similar, embora haja um entreferro de ar que separa a parte rotativa da estacionária da máquina. De forma diretamente análoga ao modo pelo qual o fluxo do núcleo de um transformador enlaça os diversos enrolamentos, o fluxo mútuo em máquinas rotativas atravessa o entreferro, concatenando os enrolamentos do motor e do estator. Como no transformador, o fluxo mútuo induz tensões nesses enrolamentos proporcionalmente ao número de espiras e à razão, no tempo, da variação do fluxo.

Uma diferença significativa entre transformadores e máquinas rotativas está em que nessas últimas há um movimento relativo entre os enrolamentos do rotor e do estator. Esse movimento relativo produz e acrescenta uma componente adicional à taxa de variação, no tempo, dos diversos fluxos concatenados de enrolamento. Como será discutido no Capítulo 3, a componente resultante de tensão, conhecida como *tensão de velocidade*, é característica do processo de conversão eletromecânica de energia. Em um transformador estático, entretanto, a variação dos fluxos concatenados no tempo é causada simplesmente pela variação, no tempo, das correntes dos enrolamentos. Nenhum movimento mecânico está envolvido, e nenhuma conversão eletromecânica de energia ocorre.

No núcleo de um transformador, o fluxo resultante induz uma força contra-eletromotriz (FCEM) no primário que, juntamente com as quedas de tensão na resistência e na reatância dispersiva do primário, deve ser igual à tensão aplicada. Como essas quedas de tensão são usualmente pequenas, a FCEM deve ser aproximadamente igual à tensão aplicada, e o fluxo no núcleo deve se ajustar ele próprio adequadamente. Fenômenos semelhantes devem ocorrer nos enrolamentos da armadura de um motor CA; a onda de fluxo resultante no entreferro deve se ajustar ela própria para gerar uma FCEM aproximadamente igual à tensão aplicada. Tanto em transformadores, como em máquinas rotativas, a FMM líquida de todas as correntes deve se ajustar adequadamente ela própria para criar o fluxo resultante requerido por esse balanço de tensões. Em qualquer dispositivo eletromagnético CA, no qual as quedas de tensão na resistência e na reatância dispersiva são pequenas, o fluxo resultante é determinado muito aproximadamente pela tensão e frequência aplicadas, e as correntes devem se ajustar adequadamente elas próprias para produzirem a FMM necessária para criar esse fluxo.

Em um transformador, a corrente do secundário é determinada pela tensão induzida no secundário, pela impedância de dispersão do secundário e pela carga. Em um motor de indução, a corrente de secundário (rotor) é determinada pela tensão induzida no secundário, pela impedância de dispersão do secundário e pela carga mecânica em seu eixo. Essencialmente, os mesmos fenômenos ocorrem no enrolamento do primário de um transformador e nos enrolamentos da armadura (estator) dos motores síncronos e de indução. Em todos os três, a corrente de primário ou de armadura deve se ajustar ela própria de modo que a FMM combinada de todas as correntes produza o fluxo requerido pela tensão aplicada.

Além dos fluxos mútuos úteis, tanto em transformadores como em máquinas rotativas, há fluxos de dispersão que concatenam enrolamentos individuais sem concatenar outros. Mesmo que o quadro detalhado dos fluxos de dispersão de máquinas rotativas seja mais complicado do que o de transformadores, seus efeitos são essencialmente os mesmos. Em ambos, os fluxos de dispersão induzem tensões nos enrolamentos CA que se manifestam como quedas de tensão nas reatâncias de dispersão. Em ambos, as relutâncias dos caminhos dos fluxos de dispersão são dominadas pelas relutâncias dos caminhos através do ar, e portanto os fluxos

de dispersão são quase linearmente proporcionais às correntes que os produzem. Desse modo, freqüentemente assume-se que as reatâncias de dispersão são constantes, independentemente do grau de saturação do circuito magnético principal.

Outros exemplos de semelhanças básicas entre transformadores e máquinas rotativas podem ser citados. Exceto pelo atrito e pelo deslocamento de ar, as perdas nos transformadores e nas máquinas rotativas são essencialmente as mesmas. Ensaio para se determinar as perdas e os parâmetros dos circuitos equivalentes são semelhantes: um ensaio de circuito aberto, ou a vazio, dá informações em relação aos requisitos de excitação e às perdas no núcleo (juntamente com as perdas por atrito e por deslocamento de ar, nas máquinas rotativas), ao passo que um ensaio de curto-circuito juntamente com a medida CC de resistências fornece informações em relação às reatâncias de dispersão e resistências de enrolamento. O modelamento dos efeitos da saturação magnética é um outro exemplo: tanto em transformadores como em máquinas rotativas CA, as reatâncias de dispersão não são usualmente afetadas pela saturação e, além disso, supõe-se que a saturação do circuito magnético principal seja determinada pelo fluxo mútuo resultante ou de entreferro.

## 2.11 PROBLEMAS

- 2.1 Um transformador é constituído por uma bobina primária de 1200 espiras e uma bobina secundária em aberto de 75 espiras enroladas em torno de um núcleo fechado de seção reta de  $42 \text{ cm}^2$ . O material do núcleo pode ser considerado saturado quando a densidade de fluxo eficaz atinge  $1,45 \text{ T}$ . Qual é a tensão máxima eficaz de 60 Hz no primário que é possível sem que esse nível de saturação seja atingido? Qual é a tensão correspondente no secundário? De que forma esses valores modificam-se se a freqüência for reduzida para 50 Hz?
- 2.2 Um circuito magnético com uma seção reta de  $15 \text{ cm}^2$  deve operar a 60 Hz a partir de uma fonte de 120 V eficazes. Calcule o número necessário de espiras para atingir uma densidade de fluxo magnético de pico de  $1,8 \text{ T}$  no núcleo.
- 2.3 Um transformador deve ser usado para transformar a impedância de um resistor de  $8 \Omega$  em uma impedância de  $75 \Omega$ . Calcule a relação de espiras necessária, supondo que o transformador seja ideal.
- 2.4 Um resistor de  $100 \Omega$  é conectado ao secundário de um transformador ideal com uma relação de espiras de 1:4 (primário-secundário). Uma fonte de tensão de 10 V eficazes e 1 kHz é ligada ao primário. Calcule a corrente do primário e a tensão no resistor de  $100 \Omega$ .
-  2.5 Uma fonte, que pode ser representada por uma fonte de tensão de 8 V eficazes em série com uma resistência interna de  $2 \text{ k}\Omega$ , é conectada a um resistor de carga de  $50 \Omega$  por meio de um transformador ideal. Calcule o valor da relação de espiras com a qual a máxima potência é fornecida para a carga, e a potência de carga correspondente. Usando MATLAB, plote a potência fornecida à carga, em miliwatts, em função da relação de espiras do transformador, cobrindo valores de 1,0 a 10,0.
-  2.6 Repita o Problema 2.5 com a resistência de fonte substituída por uma reatância de  $2 \text{ k}\Omega$ .
- 2.7 Um transformador monofásico de 60 Hz tem uma tensão nominal de placa de 7,97 kV:266 V a qual se baseia na relação de espiras de seus enrolamentos. O fabricante calcula que a indutância de dispersão do primário (7,97 kV) seja 165 mH e a indutância de magnetização do primário seja 135 H. Para uma tensão primária de 7970 V a 60 Hz, calcule a respectiva tensão de secundário em circuito aberto.

- 2.8** O fabricante calcula que o transformador do Problema 2.7 tenha uma indutância de dispersão de secundário igual a 0,225 mH.
- Calcule a indutância de magnetização quando referida ao lado do secundário.
  - Uma tensão de 266 V e 60 Hz é aplicada ao secundário. Calcule (i) a tensão resultante de circuito aberto do primário e (ii) a corrente de secundário que resultaria se o primário fosse curto-circuitado.
- 2.9** Um transformador de 120 V:2400 V, 60 Hz e 50 kVA tem uma reatância de magnetização (quando medida nos terminais de 120 V) de 34,6  $\Omega$ . O enrolamento de 120 V tem uma reatância de dispersão de 27,4 m $\Omega$ , e o enrolamento de 2400 V tem uma reatância de dispersão de 11,2  $\Omega$ .
- Com o secundário em aberto e 120 V aplicados ao enrolamento do primário (120 V), calcule a corrente de primário e a tensão de secundário.
  - Com o secundário curto-circuitado, calcule a tensão de primário da qual resulta a corrente nominal no enrolamento do primário. Calcule a corrente correspondente no enrolamento do primário.
- 2.10** Um transformador de 460 V:2400 V tem uma reatância de dispersão em série de 37,2  $\Omega$ , referida ao lado de alta tensão. Observa-se que uma carga conectada ao lado de baixa tensão está absorvendo 25 kW com fator de potência unitário, e que a tensão mede 450 V. Calcule a tensão e o fator de potência correspondentes, medidos nos terminais de alta tensão.
-  **2.11** As resistências e reatâncias de dispersão de um transformador de distribuição com 30 kVA, 60 Hz e 2400 V:240 V são

$$R_1 = 0,68 \Omega \quad R_2 = 0,0068 \Omega$$

$$X_{1\sigma} = 7,8 \Omega \quad X_{2\sigma} = 0,0780 \Omega$$

onde o subscrito 1 denota o enrolamento de 2400 V e o subscrito 2, o de 240 V. Cada quantidade está referida a seu próprio lado do transformador.

- Desenhe o circuito equivalente referido aos lados de (i) alta e (ii) baixa tensão. Indique numericamente no desenho as impedâncias.
- Considere que o transformador esteja entregando sua potência aparente nominal (kVA) a uma carga no lado de baixa tensão com 230 V sobre a carga. (i) Encontre a tensão nos terminais de alta tensão para uma carga com fator de potência de 0,85 indutivo. (ii) Encontre a tensão nos terminais de alta tensão para uma carga com fator de potência de 0,85 capacitivo.
- Considere uma carga, com valor nominal (kVA), conectada aos terminais de baixa tensão operando a 240 V. (i) Use MATLAB para plotar a tensão nos terminais de alta tensão em função do ângulo de fator de potência, quando esse varia de 0,6 capacitivo, passa pelo valor unitário e atinge 0,6 indutivo.



- 2.12** Repita o Problema 2.11 para um transformador de distribuição com 75 kVA, 60 Hz e 4600 V:240 V cujas resistências e reatâncias de dispersão são

$$R_1 = 0,846 \Omega \quad R_2 = 0,00261 \Omega$$

$$X_{1\sigma} = 26,8 \Omega \quad X_{2\sigma} = 0,0745 \Omega$$

onde o subscrito 1 denota o enrolamento de 4600 V e o subscrito 2, o de 240 V. Cada quantidade está referida a seu próprio lado do transformador.

- 2.13** Uma carga monofásica é abastecida através de um alimentador de 35 kV cuja impedância é  $95 + j360 \Omega$  e um transformador de 35 kV:2400 V cuja impedância equiva-

lente é  $0,23 + j1,27 \Omega$ , referida a seu lado de baixa tensão. A carga é de 160 kW com um fator de potência de 0,89 capacitivo e 2340 V.

- Calcule a tensão nos terminais de alta tensão do transformador.
  - Calcule a tensão no lado de envio do alimentador.
  - Calcule os ingressos de potências real e reativa no lado de envio do alimentador.
- 2.14** Repita o Exemplo 2.6 com o transformador operando a plena carga e um fator de potência unitário.
- 2.15** A placa de um transformador monofásico de 50 MVA e 60 Hz indica que ele tem uma tensão nominal de 8,0 kV:78 kV. Um ensaio de circuito aberto é executado a partir do lado de baixa tensão, e as respectivas leituras nos instrumentos de medida são 8,0 kV, 62,1 A e 206 kW. Do mesmo modo, um ensaio de curto-circuito, no lado de baixa tensão, fornece leituras de 674 V, 6,25 kA e 187 kW.
- Calcule a impedância equivalente em série, a resistência e a reatância do transformador referidas aos terminais de baixa tensão.
  - Calcule a impedância equivalente em série do transformador referida aos terminais de alta tensão.
  - Fazendo as aproximações apropriadas, desenhe um circuito equivalente T para o transformador.
  - Determine o rendimento e a regulação de tensão se o transformador estiver operando na tensão e carga nominais (fator de potência unitário).
  - Repita a parte (d), supondo que a carga tenha um fator de potência de 0,9 capacitivo.
- 2.16** Um transformador de 550 kVA e 60 Hz, com um enrolamento primário de 13,8 kV, puxa a vazio 4,93 A e 3420 W, com tensão e frequência nominais. Um outro transformador tem um núcleo com todas as dimensões lineares  $\sqrt{2}$  vezes maiores que as dimensões correspondentes do primeiro transformador. O material do núcleo e a espessura das chapas são as mesmas em ambos os transformadores. Se os enrolamentos do primário de ambos os transformadores tiverem o mesmo número de espiras, quais serão a vazio a corrente e a potência puxadas pelo segundo transformador quando 27,6 kV e 60 Hz estiverem aplicados a seu primário?
- 2.17** Os seguintes dados foram obtidos para um transformador de distribuição de 20 kVA, 60 Hz e 2400:240 V em um ensaio a 60 Hz:

	Tensão, V	Corrente, A	Potência, W
Com o enrolamento de alta tensão em circuito aberto	240	1,038	122
Com os terminais de baixa tensão em curto-circuito	61,3	8,33	257



- Calcule o rendimento com a corrente de plena carga e a tensão nominal nos terminais, operando com um fator de potência de 0,8.
  - Suponha que o fator de potência da carga seja variada enquanto a corrente de carga e a tensão dos terminais do secundário sejam mantidas constantes. Use um diagrama fasorial para determinar o fator de potência da carga para o qual a regulação é máxima. Qual é o valor dessa regulação?
- 2.18** Um transformador monofásico de distribuição com 75 kVA, 240 V:7970 V e 60 Hz tem os seguintes parâmetros referidos ao lado de alta tensão:

$$R_1 = 5,93 \Omega \quad X_1 = 43,2 \Omega$$

$$R_2 = 3,39 \Omega \quad X_2 = 40,6 \Omega$$

$$R_c = 244 \text{ k}\Omega \quad X_m = 114 \text{ k}\Omega$$

Suponha que o transformador esteja fornecendo a sua potência aparente nominal (kVA) em seus terminais de baixa tensão. Escreva um *script* de MATLAB para determinar o rendimento e a regulação do transformador para qualquer fator de potência de carga especificado (capacitivo ou indutivo). Você pode usar aproximações razoáveis de engenharia para simplificar a sua análise. Use o seu *script* de MATLAB para determinar o rendimento e a regulação para uma carga com fator de potência 0,87 capacitivo.

- 2.19** O transformador do Problema 2.11 deve ser conectado como autotransformador. Determine (a) as tensões nominais dos enrolamentos de alta e baixa tensão para essa conexão e (b) a potência aparente nominal (em kVA) quando conectado como autotransformador.
- 2.20** Um transformador de 120:480 V e 10 kVA deve ser usado como autotransformador para fornecer 480 V a um circuito a partir de uma fonte de 600 V. Quando testado como um transformador de dois enrolamentos usando a carga nominal, com fator de potência unitário, seu rendimento é 0,979.
- Faça um diagrama das conexões do autotransformador.
  - Determine a sua potência aparente nominal (em kVA) como autotransformador.
  - Encontre o seu rendimento como autotransformador a plena carga, com um fator de potência de 0,85 indutivo.
- 2.21** Considere o transformador de 8 kV:78 kV e 50 MVA do Problema 2.15 conectado como autotransformador.
- Determine as tensões nominais dos enrolamentos de alta e baixa tensão para esse tipo de conexão e também a potência aparente nominal (em kVA).
  - Calcule o rendimento do transformador nessa conexão quando a sua carga nominal está sendo fornecida com um fator de potência unitário.
-  **2.22** Escreva um *script* de MATLAB cujas entradas são as especificações nominais (tensão e kVA) e o rendimento para um transformador simples, usando a carga nominal com fator de potência unitário. As saídas são as especificações nominais do transformador e o seu rendimento, com carga nominal e fator de potência unitário, quando conectado como autotransformador.
- 2.23** Os terminais de alta tensão de um banco trifásico de três transformadores monofásicos são abastecidos a partir de um sistema de três fios e três fases de 13,8 kV (tensão de linha). Os terminais de baixa tensão devem ser conectados a uma carga (subestação) de três fios e três fases, puxando até 4500 kVA em 2300 V (tensão de linha). Obtenha as especificações nominais necessárias de tensão, corrente e potência aparente (em kVA) de cada transformador (ambos os enrolamentos de alta e baixa tensão) para as seguintes ligações:

	Enrolamentos de alta tensão	Enrolamentos de baixa tensão
a.	Y	$\Delta$
b.	$\Delta$	Y
c.	Y	Y
d.	$\Delta$	$\Delta$

- 2.24** Três transformadores monofásicos de 100 MVA com especificações nominais de 13,8 kV:66,4 kV devem ser conectados em um banco trifásico. Cada transformador tem uma impedância em série de  $0,0045 + j0,19 \Omega$  referida a seu enrolamento de 13,8 kV.
- Se os transformadores forem conectados em Y-Y, calcule (i) a tensão e potência nominais da conexão trifásica, (ii) a impedância equivalente referida aos seus terminais de baixa tensão e (iii) a impedância equivalente referida aos seus terminais de alta tensão.
  - Repita a parte (a) se o transformador for ligado em Y no seu lado de baixa tensão e  $\Delta$  no seu lado de alta tensão.

- 2.25 Repita o Exemplo 2.8 com uma carga que puxa a corrente nominal dos transformadores com um fator de potência unitário.
- 2.26 Um transformador trifásico Y- $\Delta$  tem especificações nominais de 225 kV:24 kV e 400 MVA, e uma reatância em série de  $11,7 \Omega$  referida aos seus terminais de alta tensão. O transformador está abastecendo uma carga de 325 MVA, com um fator de potência de 0,93 indutivo e uma tensão de linha de 24 kV no lado de baixa tensão. O transformador é abastecido por um alimentador, cuja impedância é  $0,11 + j2,2 \Omega$ , conectado aos seus terminais de alta tensão. Para essas condições, calcule (a) a tensão de linha nos terminais de alta tensão do transformador e (b) a tensão de linha no lado de envio do alimentador.
-  2.27 Suponha que a carga total do sistema do Problema 2.26 mantenha-se constante em 325 MVA. Escreva um *script* de MATLAB para plotar a tensão de linha que deve ser aplicada no lado de envio do alimentador para manter a tensão de linha da carga em 24 kV com o fator de potência variando de 0,75 indutivo, passando pela unidade e chegando a 0,75 capacitivo. Plote a tensão no lado de envio em função do ângulo do fator de potência.
- 2.28 Um banco, conectado em  $\Delta$ -Y, de três transformadores idênticos de 100 kVA, 2400 V:120 V e 60 Hz é abastecido com potência a partir de um alimentador cuja impedância é  $0,065 + j0,87 \Omega$  por fase. A tensão de linha no lado de envio do alimentador é mantida constante em 2400 V. Os resultados de um ensaio monofásico de curto-circuito em um dos transformadores, com seus enrolamentos de baixa tensão curto-circuitados, são

$$V_A = 53,4 \text{ V} \quad f = 60 \text{ Hz} \quad I_A = 41,7 \text{ A} \quad P = 832 \text{ W}$$

- Determine a tensão de linha, no lado de baixa tensão do transformador, quando o banco entrega a corrente nominal a uma carga trifásica equilibrada com um fator de potência unitário.
  - Calcule as correntes nos enrolamentos de alta e baixa tensão e nos fios do alimentador se um curto-circuito trifásico contínuo ocorrer nos terminais de linha do secundário.
- 2.29 Um transformador de potencial de 7970 V:120 V e 60 Hz tem os seguintes parâmetros, vistos do enrolamento de alta tensão (primário):

$$X_1 = 1721 \Omega \quad X'_2 = 1897 \Omega \quad X_m = 782 \text{ k}\Omega$$

$$R_1 = 1378 \Omega \quad R'_2 = 1602 \Omega$$

- Supondo que o secundário esteja em aberto e que o primário esteja conectado a uma fonte de 7,97 kV, calcule o módulo e o ângulo de fase (em relação à fonte de alta tensão) da tensão nos terminais do secundário.
  - Calcule o módulo e o ângulo de fase da tensão do secundário se uma carga resistiva de  $1\text{-k}\Omega$  for conectada aos terminais do secundário.
  - Repita a parte (b) se a carga for trocada por uma reatância de  $1\text{-k}\Omega$ .
- 2.30 Para o transformador de potencial do Problema 2.29, encontre a carga reativa máxima (reatância mínima) que pode ser aplicada aos terminais do secundário, de modo tal que o erro no valor da tensão não exceda 0,5%.



- 2.31 Considere o transformador de potencial do Problema 2.29.
- Use MATLAB para plotar o erro percentual no valor da tensão em função do valor da impedância de carga (*burden*) (i) para uma carga resistiva de  $100 \Omega \leq R_b \leq 3000 \Omega$  e (ii) para uma carga reativa de  $100 \Omega \leq X_b \leq 3000 \Omega$ . Plote essas curvas no mesmo eixo.
  - A seguir, plote o erro de fase, em graus, em função do valor da impedância de carga (i) para uma carga resistiva de  $100 \Omega \leq R_b \leq 3000 \Omega$  e (ii) para uma carga reativa de  $100 \Omega \leq X_b \leq 3000 \Omega$ . Novamente, plote essas curvas no mesmo eixo.

- 2.32** Um transformador de corrente de 200 A:5 A e 60 Hz tem os seguintes parâmetros vistos do enrolamento de 200 A (primário):

$$X_1 = 745 \mu\Omega \quad X'_2 = 813 \mu\Omega \quad X_m = 307 \text{ m}\Omega$$

$$R_1 = 136 \mu\Omega \quad R'_2 = 128 \mu\Omega$$

- Supondo uma corrente de 200 A no primário e que o secundário seja curto-circuitado, encontre o módulo e o ângulo de fase da corrente do secundário.
- Repita os cálculos da parte (a) se o TC for curto-circuitado através de uma carga de  $250 \mu\Omega$ .



- 2.33** Considere o transformador de corrente do Problema 2.32.

- Use MATLAB para plotar o erro percentual no valor da tensão em função do valor da impedância de carga (*i*) para uma carga resistiva de  $100 \Omega \leq R_b \leq 1000 \Omega$  e (*ii*) para uma carga reativa de  $100 \Omega \leq X_b \leq 1000 \Omega$ . Plote essas curvas no mesmo eixo.
- A seguir, plote o erro de fase, em graus, em função do valor da impedância de carga (*i*) para uma carga resistiva de  $100 \Omega \leq R_b \leq 1000 \Omega$  e (*ii*) para uma carga reativa de  $100 \Omega \leq X_b \leq 1000 \Omega$ . Novamente, plote essas curvas no mesmo eixo.

- 2.34** Um transformador monofásico de 15 kV:175 kV, 125 MVA e 60 Hz tem impedâncias de primário e secundário de  $0,0095 + j0,063$  por unidade cada. A impedância de magnetização é  $j148$  por unidade. Todas as grandezas são por unidade na base do transformador. Calcule as resistências e as reatâncias do primário e do secundário, além da indutância de magnetização (referidas ao lado de baixa tensão) em ohms e henrys.

- 2.35** A placa de especificações de um transformador monofásico de 7,97 kV:460 V e 75 kVA indica que ele tem uma reatância em série de 12% (0,12 por unidade).

- Calcule a reatância em série, em ohms, referida aos terminais (*i*) de alta tensão e (*ii*) de baixa tensão.
- Se três desses transformadores forem ligados em uma conexão trifásica Y-Y, calcule (*i*) os valores nominais trifásicos de tensão e potência, (*ii*) a impedância por unidade do banco de transformadores, (*iii*) a reatância em série, em ohms, referida aos terminais de alta tensão, e (*iv*) a reatância em série, em ohms, referida aos terminais de baixa tensão.
- Repita a parte (b) se os três transformadores forem ligados em Y no seu lado de alta tensão e em  $\Delta$ , no de baixa tensão.

- 2.36** a. Considere a conexão Y-Y do Problema 2.35, parte (b). Se a tensão nominal for aplicada aos terminais de alta tensão e os três terminais de baixa tensão forem curto-circuitados, calcule o valor da corrente de fase por unidade, em ampères, nos lados de (*i*) alta tensão e (*ii*) baixa tensão.

- b. Repita esse cálculo para a conexão Y- $\Delta$  do Problema 2.35, parte (c).

- 2.37** Um transformador trifásico elevador, usado com um gerador, tem as especificações nominais de 26 kV:345 kV, 850 MVA e uma impedância em série de  $0,0035 + j0,087$  por unidade, nessa base. Ele é conectado a um gerador de 26 kV e 800 MVA, que pode ser representado como uma fonte de tensão em série com uma reatância de  $j1,57$  por unidade, na base do gerador.

- Converta a reatância por unidade do gerador para a base do transformador elevador.
- A unidade está fornecendo ao sistema 700 MW, com 345 kV e fator de potência de 0,95 indutivo, nos terminais de alta tensão do transformador. (*i*) Calcule a tensão no lado de baixa tensão do transformador e a tensão interna do gerador, em kV, por trás de sua reatância. (*ii*) Encontre a potência de saída do gerador, em MW, e o fator de potência.

## Princípios de Conversão Eletromecânica de Energia

Neste capítulo, trataremos do processo de conversão eletromecânica de energia que utiliza, como meio, o campo elétrico ou magnético do dispositivo de conversão. Ainda que os diversos dispositivos de conversão operem com princípios similares, as estruturas dependem de suas funções. Os dispositivos de medida e controle são referidos freqüentemente como *transdutores*. Geralmente, operam com sinais relativamente pequenos e sob condições lineares de entrada e saída. Diversos exemplos podem ser incluídos como microfones, cápsulas fonográficas, sensores e alto-falantes. Uma segunda categoria de dispositivos abrange os *dispositivos produtores de força* incluindo solenóides, relés e eletroímãs. Uma terceira categoria inclui os *equipamentos de conversão contínua de energia* como motores e geradores.

Esse capítulo está voltado aos princípios de conversão eletromecânica de energia e à análise dos dispositivos que realizam essa função. A ênfase será colocada na análise de sistemas que usam campos magnéticos como meio de conversão, tendo em vista que os capítulos restantes deste livro tratarão de tais dispositivos. No entanto, as técnicas analíticas usadas em sistemas com campos elétricos são muito semelhantes.

Três são os propósitos de tal análise: (1) auxiliar na compreensão de como ocorre a conversão de energia, (2) fornecer técnicas de projeto e otimização de dispositivos para necessidades específicas, e (3) desenvolver modelos de dispositivos de conversão eletromecânica de energia que, como componentes de sistemas de engenharia, possam ser usados na análise de seus desempenhos. Os transdutores e os dispositivos produtores de força são tratados neste capítulo, e os dispositivos de conversão contínua de energia serão tratados no restante do livro.

Os conceitos e as técnicas apresentados neste capítulo são bastante poderosos e podem ser aplicados a uma larga faixa de situações de engenharia que envolvem a conversão eletromecânica de energia. As Seções 3.1 e 3.2 apresentam uma discussão quantitativa das forças em sistemas eletromecânicos e uma visão geral do método baseado na energia, que forma a base dos desenvolvimentos apresentados aqui. Com base no método da energia, o restante do capítulo desenvolve expressões para as forças e os conjugados em sistemas eletromecânicos baseados em campos magnéticos.

### 3.1 FORÇAS E CONJUGADOS EM SISTEMAS DE CAMPO MAGNÉTICO

A Lei da Força de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.1)$$

dá a força  $\mathbf{F}$  de uma partícula de carga  $q$  na presença de campos elétrico e magnético. Em unidades SI,  $\mathbf{F}$  é dada em *newtons*,  $q$  em *coulombs*,  $E$  em *volts por metro*,  $\mathbf{B}$  em *teslas* e  $v$ , que é a velocidade da partícula relativa ao campo magnético, em *metros por segundo*.

Assim, em um sistema no qual só há campo elétrico, a força é determinada apenas pela carga da partícula e pelo campo elétrico, ou seja,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (3.2)$$

A força atua na direção do campo elétrico e independe de qualquer movimento da partícula.

Em sistemas puramente magnéticos, a situação é mais complexa. Aqui, a força

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.3)$$

é determinada pelo módulo da carga da partícula, pelo módulo do campo  $\mathbf{B}$  assim como pela velocidade da partícula. De fato, a direção da força sempre é perpendicular às direções de ambas a velocidade da partícula e o campo magnético. Matematicamente, isso é indicado pelo produto vetorial  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  na Equação 3.3. O módulo desse produto vetorial é igual ao produto dos módulos de  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{B}$  e do seno do ângulo entre eles. O seu sentido pode ser determinado pela regra da mão direita, a qual afirma que, quando o polegar da mão direita aponta no sentido de  $\mathbf{v}$  e o dedo indicador, no sentido de  $\mathbf{B}$ , então a força, perpendicular a ambas as direções de  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{v}$ , apontará no sentido normal à palma da mão, como mostrado na Fig. 3.1.

Em situações onde grandes quantidades de partículas com carga estão em movimento, é conveniente reescrever a Equação 3.1 em termos da *densidade de carga*  $\rho$  (medida em unidades de *coulombs por metro cúbico*) como

$$\mathbf{F}_v = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.4)$$

em que o subscrito  $v$  indica que  $\mathbf{F}_v$  é uma *densidade de força* (força por unidade de volume) a qual, em unidades SI, é medida em *newtons por metro cúbico*.

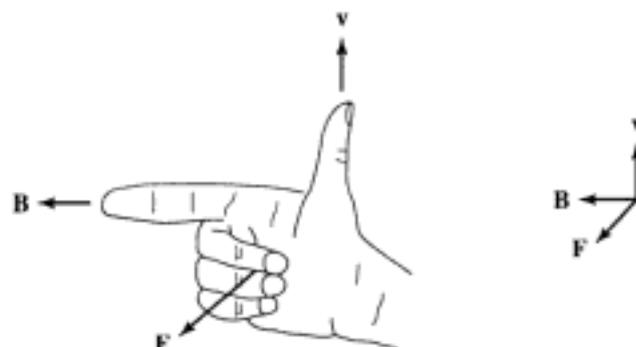
O produto  $\rho\mathbf{v}$  é conhecido como *densidade de corrente*

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{v} \quad (3.5)$$

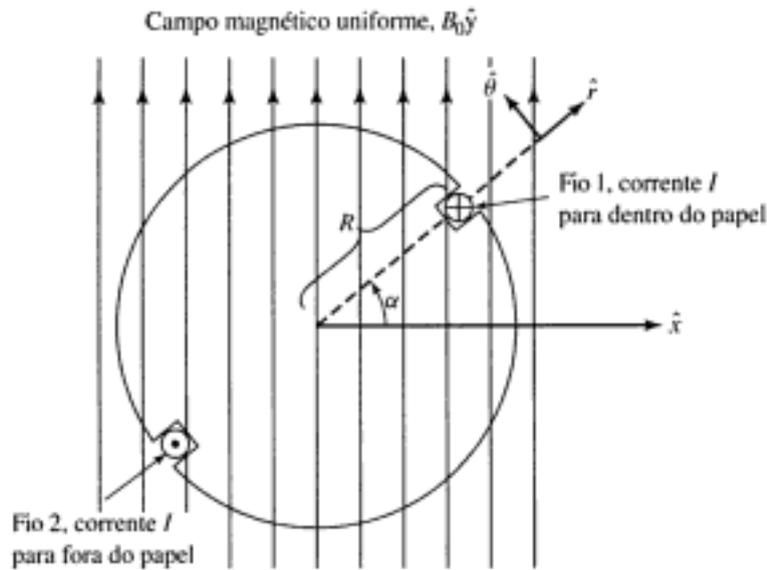
a qual é medida em *ampères por metro quadrado*. A densidade de força do sistema magnético, correspondente à Equação 3.3, pode ser escrita então como

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (3.6)$$

No caso de correntes fluindo em meios condutores, a Equação 3.6 pode ser usada para encontrar a densidade de força que atua sobre o próprio material. Observe que uma quantidade subs-



**FIGURA 3.1** Regra da mão direita para determinar o sentido da força de Lorentz  $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ , em relação ao campo magnético.



**FIGURA 3.2** Rotor de bobina única do Exemplo 3.1.

tancial de física está por detrás dessa expressão aparentemente simples, tendo em vista que o mecanismo pelo qual a força é transferida das cargas móveis para o meio condutor é complexo.

### EXEMPLO 3.1

Um rotor não magnético contendo uma bobina de espira única está colocado em um campo magnético uniforme de módulo  $B_0$ , como mostrado na Fig. 3.2. Os lados da bobina estão a uma distância do eixo igual ao raio  $R$  e o fio conduz uma corrente  $I$  como indicado. Encontre o conjugado na direção  $\theta$  em função da posição do rotor  $\alpha$  quando  $I = 10$  A,  $B_0 = 0,02$  T e  $R = 0,05$  m. Suponha que o comprimento do rotor seja  $l = 0,3$  m.

#### ■ Solução

A força por unidade de comprimento no fio condutor da corrente  $I$  pode ser encontrada multiplicando-se a Equação 3.6 pela área da seção reta do fio. Verificando que o produto da área da seção reta pela densidade de corrente é simplesmente a corrente  $\mathbf{I}$ , a força por unidade de comprimento que atua no fio é dada por

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B}$$

Assim, para o fio 1 que conduz a corrente  $I$  para dentro do papel, a força na direção  $\theta$  é dada por

$$F_{1\theta} = -I B_0 l \sin \alpha$$

e, para o fio 2 (que conduz a corrente no sentido oposto e dista  $180^\circ$  do fio 1),

$$F_{2\theta} = -I B_0 l \sin \alpha$$

onde  $l$  é o comprimento do rotor. O conjugado  $T$  que atua sobre o rotor é dado pela soma dos produtos de força e braço de alavanca de cada fio, ou seja,

$$T = -2I B_0 R l \sin \alpha = -2(10)(0,02)(0,05)(0,3) \sin \alpha = -0,006 \sin \alpha \quad \text{N} \cdot \text{m}$$

### PROBLEMA PRÁTICO 3.1

Repita o Problema 3.1 para a situação na qual o campo magnético uniforme aponta para a direita ao invés de verticalmente para cima como na Fig. 3.2.

#### ■ Solução

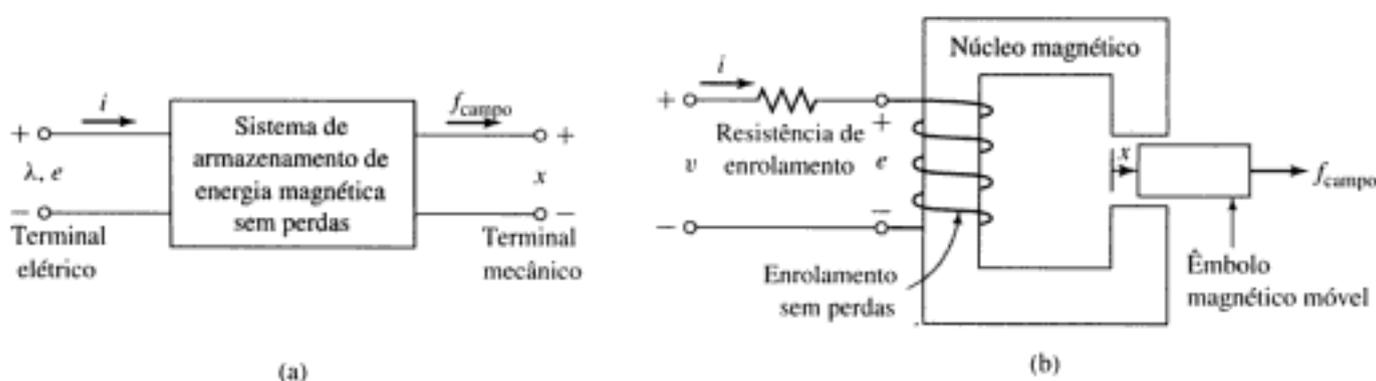
$$T = -0,006 \cos \alpha \quad \text{N} \cdot \text{m}$$

Em situações nas quais as forças atuam apenas sobre elementos condutores de corrente de geometria simples (tais como os do Exemplo 3.1), a Equação 3.6 é geralmente a maneira mais simples e fácil de se calcular as forças atuantes no sistema. Infelizmente, muito poucas situações práticas caem nessa classe. De fato, como discutido no Capítulo 1, a maioria dos dispositivos de conversão eletromecânica de energia contém material magnético e, nesses sistemas, as forças atuam diretamente no material magnético e evidentemente não podem ser calculadas a partir da Equação 3.6.

Técnicas de cálculo detalhado e localizado de forças que atuam sobre os materiais magnéticos são extremamente complexas e exigem conhecimento detalhado da distribuição dos campos por toda a estrutura. Felizmente, a maioria dos dispositivos de conversão eletromecânica de energia é construída com estruturas rígidas indeformáveis. O desempenho desses dispositivos é determinado tipicamente pela força líquida, ou conjugado, que atua sobre o componente móvel, e raramente é necessário calcular os detalhes da distribuição interna das forças. Por exemplo, em um motor adequadamente projetado, as características são determinadas pelo conjugado líquido da aceleração que atua sobre o rotor, ao passo que as forças associadas, que atuam no sentido de esmagar ou deformar o rotor, não representam nenhum papel significativo no desempenho do motor e geralmente não são calculadas.

Para se compreender o comportamento das máquinas elétricas, uma imagem física simples pode ser bem útil. Associado à estrutura do rotor, existe um campo magnético (produzido em muitas máquinas por correntes nos enrolamentos do rotor), ao passo que o mesmo ocorre no estator. Pode-se entender cada um deles como sendo um par de pólos magnéticos, norte e sul, associado a cada uma das estruturas. Do mesmo modo que a agulha da bússola tenta se alinhar com o campo magnético terrestre, esses dois conjuntos de campos tentam se alinhar surgindo um conjugado proporcional ao deslocamento desde a posição de alinhamento. Assim, em um motor, o campo magnético do estator gira à frente do campo do rotor, puxando-o e realizando trabalho. O oposto é verdadeiro em um gerador, no qual o rotor faz trabalho sobre o estator.

Várias técnicas vêm evoluindo para se calcular as forças líquidas de interesse, nos processos de conversão eletromecânica de energia. A técnica desenvolvida neste capítulo e usado em todo o livro é conhecida como o *método da energia* e baseia-se no princípio da *conservação da energia*. Pode-se compreender a base desse método com a ajuda da Fig. 3.3a, onde um dispositivo de conversão eletromecânica de energia, baseado em campo magnético, está esquematizado como sendo um sistema de dois terminais que armazena energia magnética sem perdas. O terminal elétrico tem duas variáveis, uma tensão,  $e$ , e uma corrente,  $i$ , e o terminal mecânico também tem duas variáveis, uma força,  $f_{\text{campo}}$ , e uma posição,  $x$ .



**FIGURA 3.3** (a) Dispositivo esquemático de conversão eletromecânica de energia baseado em campo magnético; (b) dispositivo simples produtor de força.

Esse tipo de representação é válido em situações onde o mecanismo de perdas pode ser separado (conceitualmente, pelo menos) do mecanismo de armazenamento da energia. Nesses casos, as perdas elétricas, tais como as ôhmicas dos enrolamentos, podem ser representadas como sendo elementos externos (isto é, resistores) conectados aos terminais elétricos, e as perdas mecânicas, como o atrito e o deslocamento de ar, podem ser incluídas externamente conectadas aos terminais mecânicos. A Fig. 3.3b mostra um exemplo de tal sistema: um dispositivo simples para produzir força com uma bobina formando o terminal elétrico, e um êmbolo móvel servindo de terminal mecânico.

A interação entre os terminais elétrico e mecânico, isto é, a conversão eletromecânica de energia, ocorre através do meio que é a energia magnética armazenada. Como o sistema de armazenamento de energia não apresenta perdas, é uma questão simples escrever que a taxa de variação em relação ao tempo da energia armazenada no campo magnético,  $W_{\text{campo}}$ , é igual à potência elétrica da entrada (dada pelo produto da tensão e da corrente do terminal) menos a potência mecânica da saída do sistema de armazenamento de energia (dada pelo produto da força mecânica e da velocidade mecânica):

$$\frac{dW_{\text{campo}}}{dt} = ei - f_{\text{campo}} \frac{dx}{dt} \quad (3.7)$$

Verificando que, da Equação 1.27, a tensão nos terminais do nosso enrolamento sem perdas é dada pela derivada no tempo do fluxo concatenado do enrolamento

$$e = \frac{d\lambda}{dt} \quad (3.8)$$

e multiplicando a Equação 3.7 por  $dt$ , obtemos

$$dW_{\text{campo}} = i d\lambda - f_{\text{campo}} dx \quad (3.9)$$

Como mostrado na Seção 3.4, a Equação 3.4 permite determinar a força simplesmente como sendo uma função do fluxo  $\lambda$  e da posição  $x$  do terminal mecânico. Observe que esse resultado surge como consequência da nossa suposição de que seja possível isolar as perdas do problema físico, do que resulta um sistema de armazenamento de energia sem perdas, como o da Fig. 3.3a.

As Equações 3.7 e 3.9 formam a base do método da energia. Essa técnica é bem eficiente em sua capacidade para calcular forças e conjugados em sistemas complexos de conversão eletromecânica de energia. O leitor deve verificar que essa eficiência dá-se às custas de um quadro detalhado do mecanismo produtor de força. As forças em si são produzidas por fenômenos físicos bem conhecidos, como a força de Lorentz que atua sobre os elementos condutores de corrente, descrita pela Equação 3.6, e a interação dos campos magnéticos com os dipolos do material magnético.

## 3.2 BALANÇO ENERGÉTICO

O princípio da conservação da energia afirma que a energia não é criada nem destruída: ela simplesmente muda de forma. Por exemplo, uma bola de golfe é impelida do seu suporte com uma certa quantidade de energia cinética. No final, quando a bola atingir o repouso sobre o gramado, essa energia terá se dissipado como calor devido ao atrito do ar ou do rolamento. Do mesmo modo, no final, a energia cinética do martelo terá se dissipado como calor, depois que um prego penetrar em um pedaço de madeira. Em sistemas isolados, com limites claramente identificáveis, podemos acompanhar a energia de maneira simples: o fluxo líquido de energia que entra no sistema através de seus limites é igual à soma das taxas de variação, no tempo, da energia armazenada no sistema.

Esse resultado, que é uma expressão da primeira lei da termodinâmica, é bem genérico. Neste capítulo, iremos aplicá-lo a sistemas eletromecânicos cujo mecanismo predominante de armazenamento de energia é o campo magnético. Em tais sistemas, pode-se equacionar a transferência de energia como

$$\left( \begin{array}{l} \text{Entrada de} \\ \text{energia a partir} \\ \text{de fontes elétricas} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{Saída de} \\ \text{energia} \\ \text{mecânica} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{Aumento da energia} \\ \text{armazenada no campo} \\ \text{magnético} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{Energia} \\ \text{convertida} \\ \text{em calor} \end{array} \right) \quad (3.10)$$

A Equação 3.10 está escrita de modo que os termos de energias elétrica e magnética tenham valores positivos no caso de ação motora. A equação aplica-se igualmente bem à ação geradora: nesse caso, esses termos têm simplesmente valores negativos. Em ambos os casos, o sinal do termo da geração de calor é tal que, quando essa geração ocorre dentro do sistema, resulta um fluxo de energia térmica para fora do sistema.

Nos sistemas aqui considerados, a conversão da energia em calor dá-se por mecanismos tais como aquecimento ôhmico, devido ao fluxo de corrente nos enrolamentos dos terminais elétricos, e atrito mecânico, devido ao movimento dos componentes de sistema que formam os terminais mecânicos. Como discutido na Seção 3.1, em geral é possível separar matematicamente os mecanismos de perdas dos de armazenamento de energia. Em tais casos, o dispositivo pode ser representado como sendo um sistema de armazenamento de energia magnética, sem perdas, com terminais elétricos e magnéticos, como mostrado na Fig. 3.3a. Os mecanismos de perda podem então ser representados por elementos externos conectados a esses terminais: resistências nos terminais elétricos e amortecedores mecânicos nos terminais mecânicos. A Fig. 3.3a pode ser generalizada de imediato para situações com um número qualquer de terminais elétricos ou mecânicos. Nesse tipo de sistema, o campo magnético atua como meio de acoplamento entre os terminais elétricos e magnéticos.

A capacidade de se identificar um sistema de armazenamento de energia magnética sem perdas é a essência do método da energia. É importante entender que isso é feito matematicamente como parte do processo de modelagem. Naturalmente, não é possível retirar a resistência dos enrolamentos nem o atrito dos mancais. Entretanto, estamos fazendo uso do fato de que um modelo, no qual isso é feito, é uma representação válida do sistema físico.

Para o sistema de armazenamento de energia magnética sem perdas da Fig. 3.3a, rearranjando a Equação 3.9 na forma da Equação 3.10, obtém-se

$$dW_{\text{elctr}} = dW_{\text{mec}} + dW_{\text{campo}} \quad (3.11)$$

onde

$$dW_{\text{elctr}} = i d\lambda = \text{diferencial da entrada de energia elétrica}$$

$$dW_{\text{mec}} = f_{\text{campo}} dx = \text{diferencial da saída de energia mecânica}$$

$$dW_{\text{campo}} = \text{diferencial da variação de energia magnética armazenada}$$

Da Equação 3.8, podemos escrever

$$dW_{\text{elctr}} = ei dt \quad (3.12)$$

Aqui,  $e$  é a tensão induzida nos terminais elétricos pela variação de energia magnética armazenada. É através dessa reação de tensão que o circuito elétrico externo supre potência ao campo de acoplamento magnético, e esse, aos terminais mecânicos de saída. Assim, o processo básico de conversão de energia envolve o campo de acoplamento e as suas ações e reações sobre os sistemas elétricos e mecânicos.

Combinando as Equações 3.11 e 3.12 resulta em

$$dW_{\text{elctr}} = ei dt = dW_{\text{mec}} + dW_{\text{campo}} \quad (3.13)$$

A Equação 3.13 e a lei de Faraday da tensão induzida (Equação 1.27) formam a base do método da energia. As seções seguintes ilustram o seu uso na análise de dispositivos de conversão eletromecânica de energia.

### 3.3 ENERGIA EM SISTEMAS DE CAMPO MAGNÉTICO DE EXCITAÇÃO ÚNICA

Nos Capítulos 1 e 2, examinamos principalmente os circuitos magnéticos de geometria fixa tais como os usados em transformadores e indutores. Nesses dispositivos, a energia é armazenada nos campos de dispersão e até certo ponto no próprio núcleo. No entanto, a energia armazenada não entra diretamente no processo de transformação. Neste capítulo, trataremos dos sistemas de conversão de energia. Entre as partes estacionárias e móveis, os circuitos magnéticos têm entreferros nos quais uma energia considerável é armazenada no campo magnético. Esse campo atua como meio de conversão da energia, e tal energia é o reservatório entre os sistemas elétricos e mecânicos.

Considere o relé eletromagnético mostrado esquematicamente na Fig. 3.4. A resistência da bobina de excitação está mostrada como uma resistência externa  $R$ . As variáveis do terminal mecânico estão mostradas como sendo a força  $f_{\text{campo}}$  produzida pelo campo magnético, dirigido do relé para o sistema mecânico externo, e o deslocamento  $x$ . As perdas mecânicas podem ser incluídas como elementos externos conectados ao terminal mecânico. Do mesmo modo, a armadura móvel está mostrada como tendo massa nula; a sua massa representa energia mecânica armazenada e pode ser incluída como uma massa externa conectada ao terminal mecânico. Como resultado, o núcleo magnético e a armadura constituem um sistema de armazenamento de energia magnética sem perdas, como representado esquematicamente na Fig. 3.3a.

Essa estrutura de relé é essencialmente a mesma que as estruturas magnéticas analisadas no Capítulo 1. Naquele capítulo, vimos que o circuito magnético da Fig. 3.4 pode ser descrito por uma indutância  $L$ , que é função da geometria da estrutura magnética e da permeabilidade do material magnético. Os dispositivos de conversão eletromecânica de energia têm entreferros em seus circuitos magnéticos para separar as partes móveis. Como discutido na Seção 1.1, na maioria dos casos, a relutância do entreferro é muito maior do que a do material magnético. Assim, o armazenamento predominante de energia ocorre no entreferro, e as propriedades do circuito magnético são determinadas pelas dimensões do entreferro.

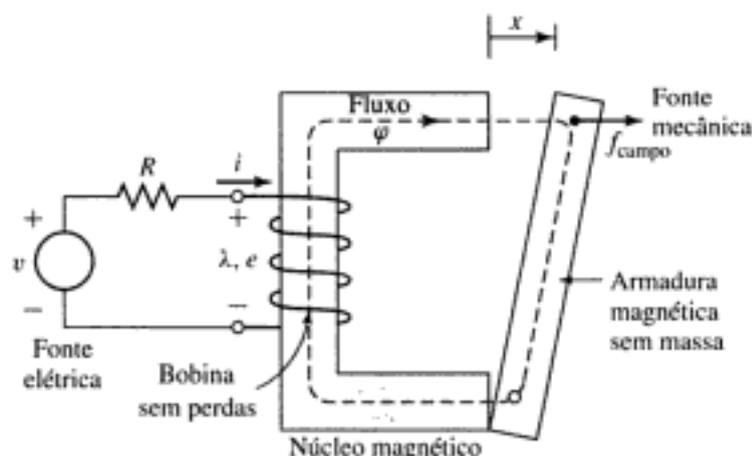


FIGURA 3.4 Desenho esquemático de um relé eletromagnético.

Devido à simplicidade das relações resultantes, a não-linearidade magnética e as perdas do núcleo são freqüentemente desprezadas na análise de dispositivos práticos. Os resultados finais dessas análises aproximadas podem ser, se necessário, corrigidas por métodos semi-empíricos para se levar em consideração os efeitos dos fatores desprezados. Conseqüentemente, as análises são realizadas supondo que o fluxo e a FMM são diretamente proporcionais ao longo de todo o circuito magnético. Assim, o fluxo concatenado  $\lambda$  e a corrente  $i$  são considerados como relacionados linearmente por uma indutância que depende somente da geometria e, portanto, da posição  $x$  da armadura.

$$\lambda = L(x)i \quad (3.14)$$

onde mostra-se a dependência explícita de  $L$  em função de  $x$ .

Como a força magnética  $f_{\text{campo}}$  é definida como atuando a partir do relé sobre o sistema mecânico externo, e  $dW_{\text{mec}}$  é definida como sendo a saída de energia mecânica do relé, podemos escrever

$$dW_{\text{mec}} = f_{\text{campo}} dx \quad (3.15)$$

Assim, usando a Equação 3.15 e a substituição  $dW_{\text{elétr}} = i d\lambda$ , podemos escrever a Equação 3.11 como

$$dW_{\text{campo}} = i d\lambda - f_{\text{campo}} dx \quad (3.16)$$

Como o sistema de armazenamento de energia magnética não tem perdas, trata-se de um sistema conservativo e o valor de  $W_{\text{campo}}$  é especificado unicamente pelos valores de  $\lambda$  e  $x$ ;  $\lambda$  e  $x$  são referidos como *variáveis de estado* já que seus valores determinam de forma única o estado do sistema.

Dessa discussão, vemos que  $W_{\text{campo}}$ , determinado unicamente pelos valores de  $\lambda$  e  $x$ , é o mesmo independentemente de como  $\lambda$  e  $x$  são levados até os seus valores finais. Considere a Fig. 3.5, no qual dois caminhos separados são mostrados para os quais a Equação 3.16 pode ser integrada para obter  $W_{\text{campo}}$  no ponto  $(\lambda_0, x_0)$ . O caminho 1 é o caso geral e é difícil de integrar a menos que ambos  $i$  e  $f_{\text{campo}}$  sejam conhecidos explicitamente como funções de  $\lambda$  e  $x$ . No entanto, como a integração da Equação 3.16 não depende da forma do caminho, o caminho 2 dá o mesmo resultado e permite uma integração muito mais fácil. Da Equação 3.16,

$$W_{\text{campo}}(\lambda_0, x_0) = \int_{\text{caminho 2a}} dW_{\text{campo}} + \int_{\text{caminho 2b}} dW_{\text{campo}} \quad (3.17)$$

Observe que no caminho 2a,  $d\lambda = 0$  e  $f_{\text{campo}} = 0$  (porque  $\lambda = 0$  e não pode haver força magnética na ausência de campos magnéticos). Assim, da Equação 3.16,  $dW_{\text{campo}} = 0$  no caminho 2a.

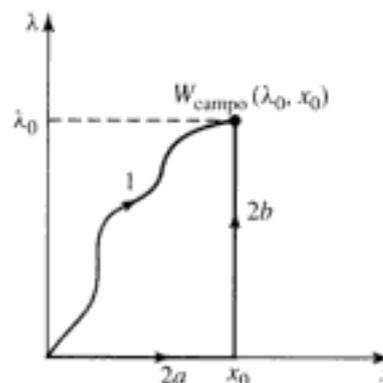


FIGURA 3.5 Caminhos de integração para  $W_{\text{campo}}$ .

No caminho 2b,  $dx = 0$  e, assim, da Equação 3.16, a Equação 3.17 reduz-se à integral de  $i d\lambda$  no caminho 2b (para o qual  $x = x_0$ ).

$$W_{\text{campo}}(\lambda_0, x_0) = \int_0^{\lambda_0} i(\lambda, x_0) d\lambda \quad (3.18)$$

Para um sistema linear no qual  $\lambda$  é proporcional a  $i$ , como na Equação 3.14, a Equação 3.18 dá

$$W_{\text{campo}}(\lambda, x) = \int_0^{\lambda} i(\lambda', x) d\lambda' = \int_0^{\lambda} \frac{\lambda'}{L(x)} d\lambda' = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L(x)} \quad (3.19)$$

Pode-se mostrar que a energia magnética armazenada também pode ser expressa em termos da densidade de energia do campo magnético integrada no volume  $V$  desse. Nesse caso,

$$W_{\text{campo}} = \int_V \left( \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}' \right) dV \quad (3.20)$$

Para material magnético mole de permeabilidade constante ( $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ ), isso reduz-se a

$$W_{\text{campo}} = \int_V \left( \frac{B^2}{2\mu} \right) dV \quad (3.21)$$

### EXEMPLO 3.2

O relé mostrado na Fig. 3.6a é construído de material magnético de permeabilidade infinita com um êmbolo móvel, também de permeabilidade infinita. A altura do êmbolo é muito maior que o comprimento do entreferro ( $h \gg g$ ). Calcule a energia magnética armazenada  $W_{\text{campo}}$  em função da posição do êmbolo ( $0 < x < d$ ) para  $N = 1000$  espiras,  $g = 2,0$  mm,  $d = 0,15$  m,  $l = 0,1$  m e  $i = 10$  A.

#### ■ Solução

A Equação 3.19 pode ser usada para determinar  $W_{\text{campo}}$  quando  $\lambda$  é conhecido. Neste caso,  $i$  é mantido constante. Agora, seria útil ter uma expressão para  $W_{\text{campo}}$  em função de  $i$  e  $x$ . Isso pode ser obtido simplesmente substituindo a Equação 3.14 na Equação 3.19, do que resulta

$$W_{\text{campo}} = \frac{1}{2} L(x) i^2$$

A indutância é dada por

$$L(x) = \frac{\mu_0 N^2 A_{\text{entreferro}}}{2g}$$

onde  $A_{\text{entreferro}}$  é a área do entreferro da seção reta. Da Figura 3.6b, pode-se ver que  $A_{\text{entreferro}}$  é

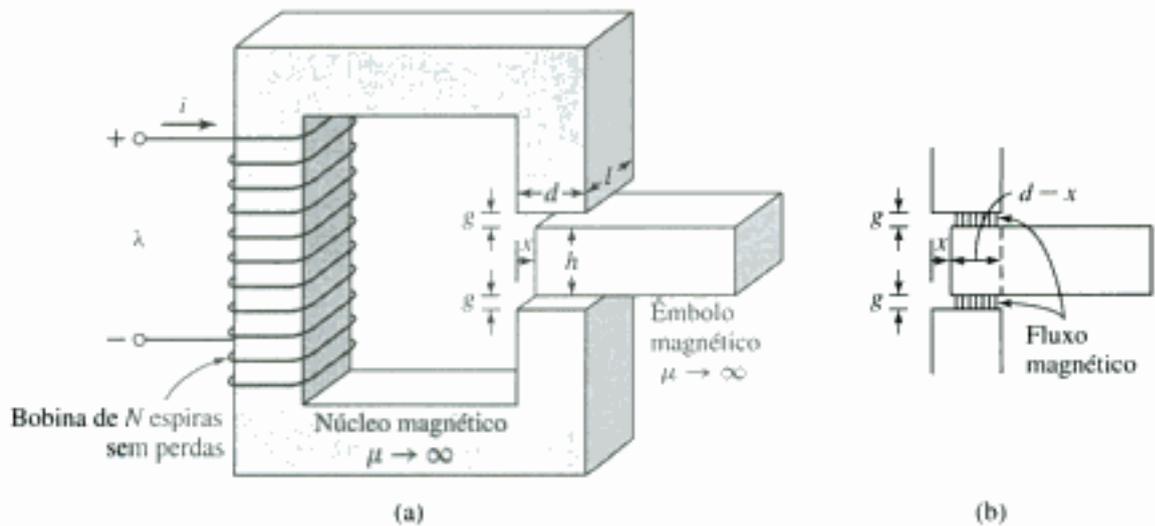
$$A_{\text{entreferro}} = l(d - x) = ld \left( 1 - \frac{x}{d} \right)$$

Assim,

$$L(x) = \frac{\mu_0 N^2 ld(1 - x/d)}{2g}$$

e

$$\begin{aligned} W_{\text{campo}} &= \frac{1}{2} \frac{N^2 \mu_0 ld(1 - x/d)}{2g} i^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1000^2)(4\pi \times 10^{-7})(0,1)(0,15)}{2(0,002)} \times 10^2 \left( 1 - \frac{x}{d} \right) \\ &= 236 \left( 1 - \frac{x}{d} \right) \text{ J} \end{aligned}$$



**FIGURA 3.6** (a) Relé de êmbolo móvel para o Exemplo 3.2. (b) Detalhe mostrando a configuração do entreferro quando o êmbolo está parcialmente deslocado.

### PROBLEMA PRÁTICO 3.2

O relé da Fig. 3.6 é modificado de modo que os entreferros acima e abaixo do êmbolo não sejam mais uniformes. O comprimento do entreferro superior é aumentado para  $g_{\text{sup}} = 3,5$  mm e o do entreferro inferior é aumentado para  $g_{\text{inf}} = 2,5$  mm. O número de espiras é aumentado para  $N = 1500$ . Calcule a energia armazenada em função da posição do êmbolo ( $0 < x < d$ ) para uma corrente de  $i = 5$  A.

#### ■ Solução

$$W_{\text{campo}} = 88,5 \left( 1 - \frac{x}{d} \right) \text{ J}$$

Nessa seção, vimos as relações existentes entre a energia magnética armazenada e as variáveis de terminais elétrico e mecânico, para o caso de um sistema que pode ser representado em termos de um elemento de armazenamento de energia magnética sem perdas. Se tivéssemos escolhido como exemplo um dispositivo com um terminal rotativo em vez de um com deslocamento linear, os resultados teriam sido idênticos exceto que força e deslocamento linear teriam sido substituídos por conjugado e deslocamento angular, respectivamente. Na Seção 3.4, veremos como o conhecimento da energia magnética armazenada permite-nos obter a força mecânica e o conjugado.

## 3.4 DETERMINAÇÃO DA FORÇA E DO CONJUGADO MAGNÉTICOS A PARTIR DA ENERGIA

Como foi discutido na Seção 3.3, em um sistema de armazenamento de energia magnética sem perdas, a energia magnética  $W_{\text{campo}}$  é uma *função de estado*, determinada unicamente pelos valores das variáveis independentes de estado  $\lambda$  e  $x$ . Pode-se mostrar isso explicitamente reescrevendo a Equação 3.16 na forma

$$dW_{\text{campo}}(\lambda, x) = i d\lambda - f_{\text{campo}} dx \quad (3.22)$$

Para qualquer função de estado de duas variáveis independentes, por exemplo,  $F(x_1, x_2)$ , a diferencial total de  $F$ , em relação às duas variáveis de estado  $x_1$  e  $x_2$ , pode ser escrita como

$$dF(x_1, x_2) = \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_{x_2} dx_1 + \left. \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|_{x_1} dx_2 \quad (3.23)$$

É extremamente importante ter em mente que cada uma das derivadas parciais da Equação 3.23 é determinada em relação a uma das variáveis de estado, mantendo constante a outra variável.

A Equação 3.23 é válida para qualquer função de estado  $F$  e, portanto, também o será para  $W_{\text{campo}}$ ; assim

$$dW_{\text{campo}}(\lambda, x) = \left. \frac{\partial W_{\text{campo}}}{\partial \lambda} \right|_x d\lambda + \left. \frac{\partial W_{\text{campo}}}{\partial x} \right|_{\lambda} dx \quad (3.24)$$

Como  $\lambda$  e  $x$  são variáveis independentes, as Equações 3.22 e 3.24 devem ser iguais para todos os valores de  $d\lambda$  e  $dx$ . Assim,

$$i = \left. \frac{\partial W_{\text{campo}}(\lambda, x)}{\partial \lambda} \right|_x \quad (3.25)$$

onde a derivada parcial foi obtida mantendo  $x$  constante, e

$$f_{\text{campo}} = - \left. \frac{\partial W_{\text{campo}}(\lambda, x)}{\partial x} \right|_{\lambda} \quad (3.26)$$

onde  $\lambda$  foi mantido constante para se obter a derivada parcial.

Esse é o resultado que procurávamos. Uma vez conhecido  $W_{\text{campo}}$  em função de  $\lambda$  e  $x$ , a Equação 3.25 pode ser usada para se obter  $i(\lambda, x)$ . Mais importante ainda, a Equação 3.26 pode ser usada para se obter a força mecânica  $f_{\text{campo}}(\lambda, x)$ . Não é enfatizar demais que a derivada parcial da Equação 3.26 é obtida mantendo constante o fluxo concatenado  $\lambda$ . Isso é feito facilmente desde que  $W_{\text{campo}}$  seja uma função conhecida de  $\lambda$  e  $x$ . Observe que essa é uma exigência puramente matemática e não tem nada a ver com manter  $\lambda$  constante quando o dispositivo real for operado.

A força  $f_{\text{campo}}$  é obtida diretamente da Equação 3.26 em termos da variável de estado  $\lambda$ . Se então quisermos expressar a força em função de  $i$ , poderemos fazê-lo substituindo a expressão adequada de  $\lambda$ , em função de  $i$ , na expressão de  $f_{\text{campo}}$  obtida usando-se a Equação 3.26.

Para sistemas magnéticos lineares, nos quais  $\lambda = L(x)i$ , a energia é expressa pela Equação 3.19 e a força pode ser encontrada por substituição direta na Equação 3.26, resultando

$$f_{\text{campo}} = - \left. \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L(x)} \right) \right|_{\lambda} = \frac{\lambda^2}{2L(x)^2} \frac{dL(x)}{dx} \quad (3.27)$$

Se desejado, agora a força pode ser expressa diretamente em termos da corrente  $i$  simplesmente fazendo a substituição  $\lambda = L(x)i$

$$f_{\text{campo}} = \frac{i^2}{2} \frac{dL(x)}{dx} \quad (3.28)$$

### EXEMPLO 3.3



A Tabela 3.1 contém dados de um experimento no qual a indutância de um solenóide foi medida em função da posição  $x$ , onde  $x = 0$  corresponde a uma retração total do solenóide.

**TABELA 3.1** Dados para o Exemplo 3.3

$x$ [cm]	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$L$ [mH]	2,8	2,26	1,78	1,52	1,34	1,26	1,20	1,16	1,13	1,11	1,10

Plote a força do solenóide para uma corrente de 0,75 A em função da posição no intervalo  $0,2 \leq x \leq 1,8$  cm.

### ■ Solução

A solução é obtida mais facilmente usando MATLAB.\* Primeiro, um ajuste polinomial de quarta ordem da indutância em função de  $x$  é obtido usando a função *polyfit* do MATLAB. O resultado tem a forma

$$L(x) = a(1)x^4 + a(2)x^3 + a(3)x^2 + a(4)x + a(5)$$

A Fig. 3.7a mostra uma plotagem dos pontos de dados juntamente com os resultados do ajuste polinomial.

Uma vez obtido esse ajuste, é uma questão imediata calcular a força a partir da Equação 3.28.

$$f_{\text{campo}} = \frac{i^2}{2} \frac{dL(x)}{dx} = \frac{i^2}{2} (4a(1)x^3 + 3a(2)x^2 + 2a(3)x + a(4))$$

Essa força está plotada na Fig. 3.7b. Observe que a força é negativa, significando que atua em um sentido tal que o êmbolo é puxado para dentro do solenóide em direção a  $x = 0$ .

Aqui está o *script* de MATLAB:

```
clc
clear

% Aqui estão os dados: x em cm, L em mH
xdata = [0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 1.2 1.4 1.6 1.8 2.0];
Ldata = [2.8 2.26 1.78 1.52 1.34 1.26 1.20 1.16 1.13 1.11 1.10];

% Converta para unidades SI
x = xdata*1.e-2;
L = Ldata*1.e-3;

len = length(x);
xmax = x(len);

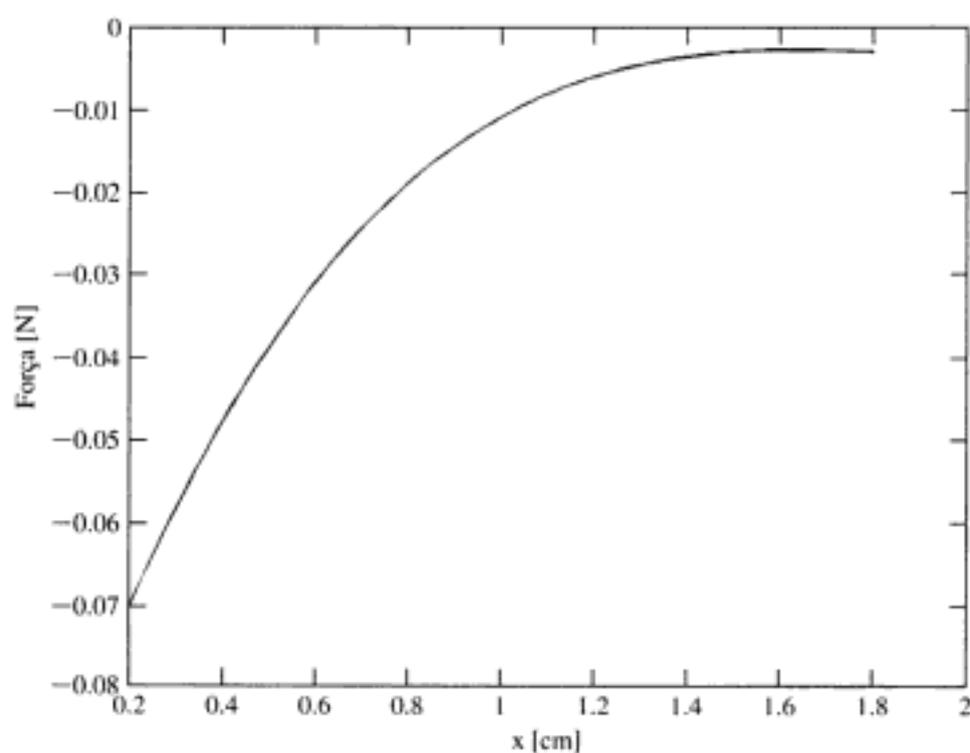
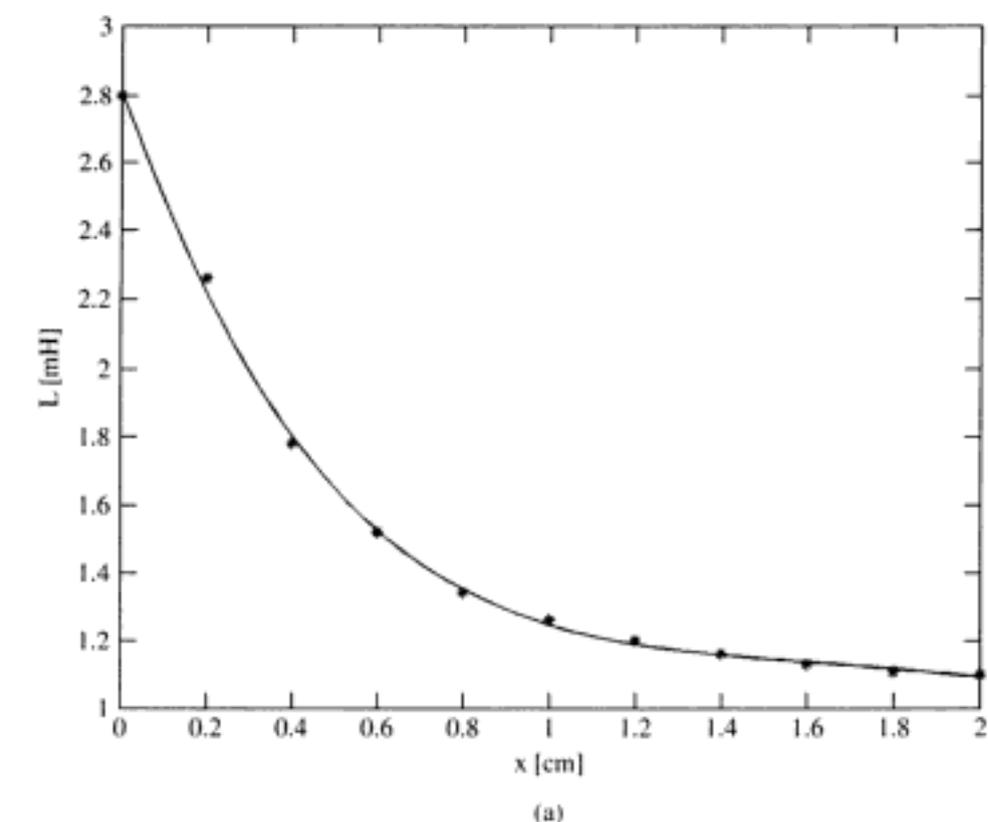
% Use polyfit para realizar um ajuste de quarta ordem de L
% em função de x. Armazene os coeficientes polinomiais
% em um vetor a. O ajuste será da forma:
%
%      Lfit = a(1)*x^4 + a(2)*x^3 + a(3)*x^2 + a(4)*x + a(5);
%
a = polyfit(x,L,4);

% Vamos verificar o ajuste
for n = 1:101
    xfit(n) = xmax*(n-1)/100;
    Lfit(n) = a(1)*xfit(n)^4 + a(2)*xfit(n)^3 + a(3)*xfit(n)^2 ...
    + a(4)*xfit(n) + a(5);
end

% Plote os dados e em seguida o ajuste para comparação (converta
% xfit para cm e Lfit para mH)

plot(xdata,Ldata,'*')
hold
plot(xfit*100,Lfit*1000)
hold
xlabel('x [cm]')
ylabel('L [mH]')
```

\* MATLAB é uma marca registrada da The MathWorks, Inc.



**FIGURA 3.7** Exemplo 3.3. (a) Ajuste de indutância a uma curva polinomial. (b) Força em função da posição  $x$  para  $i = 0,75$  A.

```

fprintf('\n Pausa. Aperte qualquer tecla para plotar a força. \n')
pausa;
% Agora plote a força. A força será dada por
%
%  $i^2 \frac{dL}{dx} = i^2 (4*a(1)*x^3 + 3*a(2)*x^2 + 2*a(3)*x + a(4))$ 
%
% Inicialize a corrente com 0.75 A
I = 0.75;
for n = 1:101
    xfit(n) = 0.002 + 0.016*(n-1)/100;
    F(n) = 4*a(1)*xfit(n)^3 + 3*a(2)*xfit(n)^2 + 2*a(3)*xfit(n) + a(4);
    F(n) = (I^2/2)*F(n);
end
plot(xfit*100,F)
xlabel('x [cm]')
ylabel('Força [N]')

```

### PROBLEMA PRÁTICO 3.3



Um controlador externo é conectado ao solenóide do Exemplo 3.3 que mantém constante o fluxo concatenado da bobina com  $\lambda = 1,5$  mWb. Plote a força resultante do solenóide no intervalo  $0,2 \leq x \leq 1,8$  cm.

#### ■ Solução

A força resultante está plotada na Fig. 3.8.

Em um sistema com um terminal mecânico rotativo, as variáveis mecânicas tornam-se o deslocamento angular  $\theta$  e o conjugado  $T_{\text{campo}}$ . Neste caso, a Equação 3.22 torna-se

$$dW_{\text{campo}}(\lambda, \theta) = i d\lambda - T_{\text{campo}} d\theta \quad (3.29)$$

onde a dependência explícita de  $W_{\text{campo}}$  em função das variáveis de estado  $\lambda$  e  $\theta$  foi indicada.

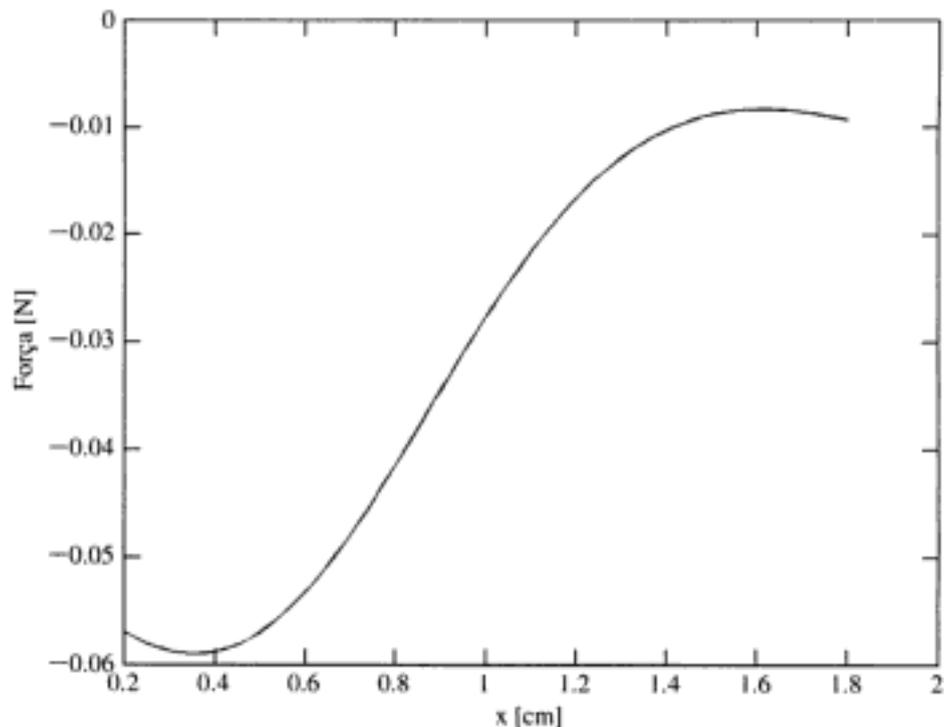


FIGURA 3.8 Problema prático 3.3. Plotagem da força versus  $x$  para  $\lambda = 1,5$  mWb.

Por analogia com o desenvolvimento que levou à Equação 3.26, pode-se obter o conjugado como sendo o negativo da derivada parcial da energia em relação a  $\theta$ , mantendo  $\lambda$  constante,

$$T_{\text{campo}} = - \left. \frac{\partial W_{\text{campo}}(\lambda, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\lambda} \quad (3.30)$$

Em sistemas magnéticos lineares, para os quais  $\lambda = L(\theta)i$ , e por analogia com a Equação 3.19, a energia é dada por

$$W_{\text{campo}}(\lambda, \theta) = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L(\theta)} \quad (3.31)$$

Portanto, o conjugado é dado por

$$T_{\text{campo}} = - \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L(\theta)} \right) \right|_{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L(\theta)^2} \frac{dL(\theta)}{d\theta} \quad (3.32)$$

que pode ser expresso indiretamente em termos da corrente  $i$  como

$$T_{\text{campo}} = \frac{i^2}{2} \frac{dL(\theta)}{d\theta} \quad (3.33)$$

#### EXEMPLO 3.4

O circuito magnético da Fig. 3.9 consiste em um estator de bobina única e um rotor oval. Como o entreferro não é uniforme, a indutância da bobina varia com a posição angular do rotor, medida entre o eixo magnético da bobina do estator e o eixo principal do rotor, de acordo com

$$L(\theta) = L_0 + L_2 \cos(2\theta)$$

onde  $L_0 = 10,6$  mH e  $L_2 = 2,7$  mH. Observe a variação de indutância de segunda harmônica em função do ângulo  $\theta$  do rotor. Isso é consistente com o fato de que a indutância não se altera se o rotor for girado de  $180^\circ$ .

Encontre o conjugado em função de  $\theta$  para uma corrente de bobina de 2 A.

#### ■ Solução

Da Equação 3.33,

$$T_{\text{campo}}(\theta) = \frac{i^2}{2} \frac{dL(\theta)}{d\theta} = \frac{i^2}{2} (-2L_2 \sin(2\theta))$$

A substituição numérica dá

$$T_{\text{campo}}(\theta) = -1,08 \times 10^{-2} \sin(2\theta) \text{ N} \cdot \text{m}$$

Observe que neste caso o conjugado atua em um sentido tal que o eixo do rotor é puxado para se alinhar com o eixo da bobina e assim maximizar a indutância da bobina.

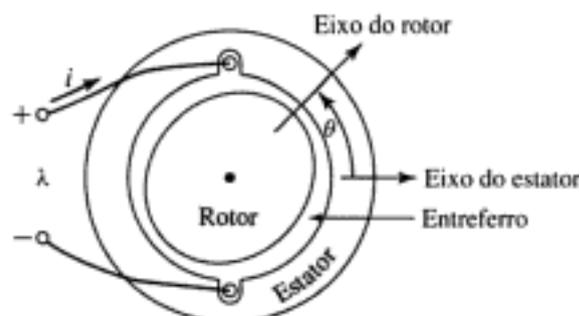


FIGURA 3.9 Circuito magnético para o Exemplo 3.4.

## PROBLEMA PRÁTICO 3.4



Constata-se que a indutância de uma bobina de um circuito magnético, similar ao da Fig. 3.9, varia em função da posição do rotor conforme

$$L(\theta) = L_0 + L_2 \cos(2\theta) + L_4 \sin(4\theta)$$

onde  $L_0 = 25,4$  mH,  $L_2 = 8,3$  mH e  $L_4 = 1,8$  mH. (a) Encontre o conjugado em função de  $\theta$  para uma corrente de enrolamento de 3,5 A. (b) Encontre uma posição de rotor  $\theta_{\max}$  tal que produza um máximo negativo de conjugado.

### ■ Solução

a.  $T_{\text{campo}}(\theta) = -0,1017 \sin(2\theta) + 0,044 \cos(4\theta) \quad \text{N} \cdot \text{m}$

b. O máximo negativo de conjugado ocorre quando  $\theta = 45^\circ$  e  $\theta = 225^\circ$ . Isso pode ser determinado analiticamente, mas é útil plotar o conjugado usando o MATLAB.

## 3.5 DETERMINAÇÃO DA FORÇA E DO CONJUGADO MAGNÉTICOS A PARTIR DA CO-ENERGIA

Uma manipulação matemática da Equação 3.22 pode ser usada para definir uma nova função de estado, conhecida como *co-energia*, que permite obter a força diretamente como uma função de corrente. A escolha de energia ou co-energia como função de estado é puramente uma questão de conveniência; ambas fornecem o mesmo resultado, mas uma ou outra pode ser analiticamente mais simples, dependendo do resultado desejado e das características do sistema analisado.

A co-energia  $W'_{\text{campo}}$  é definida como uma função de  $i$  e  $x$  tal que

$$W'_{\text{campo}}(i, x) = i\lambda - W_{\text{campo}}(\lambda, x) \quad (3.34)$$

A manipulação desejada é realizada usando a diferencial de  $i\lambda$

$$d(i\lambda) = i d\lambda + \lambda di \quad (3.35)$$

e a diferencial de  $W_{\text{campo}}(\lambda, x)$  da Equação 3.22. Da Equação 3.34, tem-se

$$dW'_{\text{campo}}(i, x) = d(i\lambda) - dW_{\text{campo}}(\lambda, x) \quad (3.36)$$

A substituição das Equações 3.22 e 3.35 na Equação 3.36 resulta em

$$dW'_{\text{campo}}(i, x) = \lambda di + f_{\text{campo}} dx \quad (3.37)$$

Da Equação 3.37, pode-se ver que a co-energia  $W'_{\text{campo}}(i, x)$  é uma função de estado das duas variáveis independentes  $i$  e  $x$ . Assim, sua diferencial pode ser expressa como

$$dW'_{\text{campo}}(i, x) = \left. \frac{\partial W'_{\text{campo}}}{\partial i} \right|_x di + \left. \frac{\partial W'_{\text{campo}}}{\partial x} \right|_i dx \quad (3.38)$$

As Equações 3.37 e 3.38 devem ser iguais para todos os valores de  $di$  e  $dx$ . Assim,

$$\lambda = \left. \frac{\partial W'_{\text{campo}}(i, x)}{\partial i} \right|_x \quad (3.39)$$

$$f_{\text{campo}} = \left. \frac{\partial W'_{\text{campo}}(i, x)}{\partial x} \right|_i \quad (3.40)$$

A Equação 3.40 fornece a força mecânica diretamente em termos de  $i$  e  $x$ . Observe que a derivada parcial da Equação 3.40 é obtida mantendo  $i$  constante. Assim,  $W'_{\text{campo}}$  deve ser uma função conhecida de  $i$  e  $x$ . Para qualquer sistema dado, as Equações 3.26 e 3.40 darão o mesmo resultado; a escolha de qual usar para calcular a força será ditada pela preferência e conveniência do usuário.

Em analogia com a dedução da Equação 3.18, a co-energia pode ser calculada da integral de  $\lambda di$

$$W'_{\text{campo}}(i, x) = \int_0^i \lambda(i', x) di' \quad (3.41)$$

Em sistemas magnéticos lineares para os quais  $\lambda = L(x)i$ , portanto, a co-energia é dada, por

$$W'_{\text{campo}}(i, x) = \frac{1}{2} L(x) i^2 \quad (3.42)$$

e a força pode ser encontrada a partir da Equação 3.40 como

$$f_{\text{campo}} = \frac{i^2}{2} \frac{dL(x)}{dx} \quad (3.43)$$

a qual, como esperado, é idêntica à expressão dada pela Equação 3.28.

Do mesmo modo, em um sistema com deslocamento mecânico rotacional, a co-energia pode ser expressa em termos da corrente e do deslocamento angular  $\theta$  por

$$W'_{\text{campo}}(i, \theta) = \int_0^i \lambda(i', \theta) di' \quad (3.44)$$

e o conjugado por

$$T_{\text{campo}} = \left. \frac{\partial W'_{\text{campo}}(i, \theta)}{\partial \theta} \right|_i \quad (3.45)$$

Se o sistema for magneticamente linear,

$$W'_{\text{campo}}(i, \theta) = \frac{1}{2} L(\theta) i^2 \quad (3.46)$$

e

$$T_{\text{campo}} = \frac{i^2}{2} \frac{dL(\theta)}{d\theta} \quad (3.47)$$

a qual é idêntica à Equação 3.33.

Em termos da teoria de campo, para materiais magnéticos moles (em que  $\mathbf{B} = 0$  quando  $\mathbf{H} = 0$ ), pode-se mostrar que

$$W'_{\text{campo}} = \int_V \left( \int_0^{H_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} \right) dV \quad (3.48)$$

No caso de material magnético mole de permeabilidade constante ( $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ ), isso reduz-se a

$$W'_{\text{campo}} = \int_V \frac{\mu H^2}{2} dV \quad (3.49)$$

Para materiais magnéticos permanentes (duros), como os discutidos no Capítulo 1, e para os quais  $B = 0$  quando  $H = H_c$ , a energia e a co-energia são iguais a zero quando  $B = 0$  e,

portanto, quando  $H = H_c$ . Assim, embora a Equação 3.20 ainda seja aplicável ao cálculo de energia, a Equação 3.48 deve ser modificada para a forma

$$W'_{\text{campo}} = \int_V \left( \int_{H_c}^{H_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} \right) dV \quad (3.50)$$

Observe que a Equação 3.50 pode ser considerada de aplicação genérica já que os materiais magnéticos moles podem ser considerados simplesmente como materiais magnéticos duros de  $H_c = 0$ . Nesse caso, a Equação 3.50 reduz-se à Equação 3.48.

Em alguns casos, as representações de circuitos magnéticos podem ser difíceis de se obter ou podem não fornecer soluções com a exatidão desejada. Frequentemente, tais situações caracterizam-se por geometrias complexas e/ou materiais magnéticos em saturação profunda. Nessas situações, técnicas numéricas podem ser utilizadas para se calcular a energia do sistema usando-se a Equação 3.20, ou a co-energia usando-se a Equação 3.48 ou a 3.50.

Uma dessas técnicas, conhecida como *método dos elementos finitos*,<sup>1</sup> tornou-se largamente usada. Por exemplo, esses programas, disponibilizados comercialmente por diversos fornecedores, podem ser usados para calcular as co-energias correspondentes a diversos valores do deslocamento  $x$  de um atuador de deslocamento linear (assegurando-se de manter constante a corrente quando o valor de  $x$  é variado). A força então pode ser obtida da Equação 3.40, calculando-se numericamente a derivada da co-energia a partir dos resultados da análise de elementos finitos.

### EXEMPLO 3.5

Para o relé do Exemplo 3.2, encontre a força no êmbolo em função de  $x$  quando a bobina é acionada por um controlador que produz uma corrente em função de  $x$  dada por

$$i(x) = I_0 \left( \frac{x}{d} \right) \text{ A}$$

#### ■ Solução

Do Exemplo 3.2,

$$L(x) = \frac{\mu_0 N^2 l d (1 - x/d)}{2g}$$

Esse é um sistema magneticamente linear para o qual a força pode ser calculada por

$$f_{\text{campo}} = \frac{i^2}{2} \frac{dL(x)}{dx} = -\frac{i^2}{2} \left( \frac{\mu_0 N^2 l}{2g} \right)$$

Substituindo  $i(x)$  nessa expressão, a força em função de  $x$  pode ser determinada por

$$f_{\text{campo}} = -\frac{I_0^2 \mu_0 N^2 l}{4g} \left( \frac{x}{d} \right)^2$$

Da Equação 3.42, observe que a co-energia desse sistema é igual a

$$W'_{\text{campo}}(i, x) = \frac{i^2}{2} L(x) = \frac{i^2}{2} \frac{N^2 \mu_0 l d (1 - x/d)}{2g}$$

<sup>1</sup>Veja, por exemplo, P. P. Sylvester and R. L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge University Press, New York, 1983.

Substituindo  $i(x)$ , pode-se escrever

$$W'_{\text{campo}}(i, x) = \frac{I_0^2 N^2 \mu_0 l d (1 - x/d)}{4g} \left(\frac{x}{d}\right)^2$$

Embora essa seja uma expressão perfeitamente correta da co-energia em função de  $x$ , dentro das condições especificadas de operação, observe que, se tentássemos calcular a força tomando a derivada parcial dessa expressão de  $W'_{\text{campo}}$  em relação a  $x$ , a expressão resultante não forneceria a expressão correta da força. A razão é bem simples: como visto a partir da Equação 3.40, a derivada parcial deve ser calculada mantendo constante a corrente. Depois de substituir  $i(x)$  para se obter a expressão, a corrente não é mais uma constante e tal condição não pode ser preenchida. Isso ilustra os problemas que podem surgir se as diversas expressões de força e conjugado desenvolvidas aqui forem mal aplicadas.

### PROBLEMA PRÁTICO 3.5

Considere um êmbolo cuja indutância varia como

$$L(x) = L_0(1 - (x/d)^2)$$

Encontre a força do êmbolo em função de  $x$  quando a bobina é acionada por um controlador que produz uma corrente em função de  $x$  dada por

$$i(x) = I_0 \left(\frac{x}{d}\right)^2 \text{ A}$$

#### ■ Solução

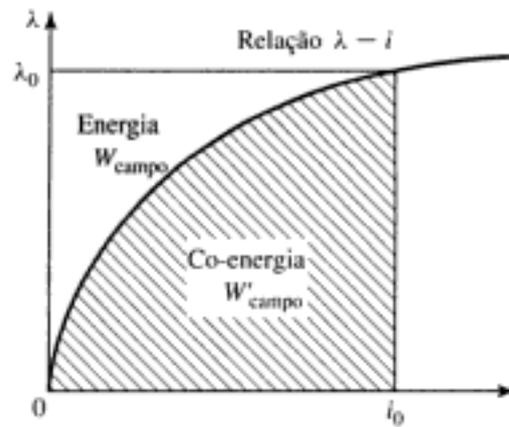
$$f_{\text{campo}} = -\left(\frac{L_0 I_0^2}{d}\right) \left(\frac{x}{d}\right)^5$$

Em um sistema magnético linear, a energia e a co-energia são numericamente iguais:  $\frac{1}{2}\lambda^2/L = \frac{1}{2}Li^2$ . O mesmo é verdadeiro para as densidades de energia e co-energia:  $\frac{1}{2}B^2/\mu = \frac{1}{2}\mu H^2$ . Em um sistema não-linear, no qual  $\lambda$  e  $i$ , ou  $B$  e  $H$ , não são linearmente proporcionais, as duas funções não são nem mesmo numericamente iguais. Uma interpretação gráfica da energia e da co-energia em um sistema não-linear está mostrada na Fig. 3.10. A área entre a curva  $\lambda - i$  e o eixo vertical, igual à integral de  $i d\lambda$ , é a energia. A área até o eixo horizontal, dada pela integral de  $\lambda di$ , é a co-energia. Nesse sistema de excitação única, a soma da energia com a co-energia é, por definição (veja Equação 3.34),

$$W_{\text{campo}} + W'_{\text{campo}} = \lambda i \quad (3.51)$$

A força produzida por um campo magnético, em um dispositivo como o da Fig. 3.4, para um valor em particular de  $x$  e  $i$  ou  $\lambda$ , não pode naturalmente depender de se é calculado a partir da energia ou da co-energia. Uma ilustração gráfica demonstrará que ambos os métodos devem fornecer o mesmo resultado.

Suponha que a armadura do relé da Fig. 3.4 esteja na posição  $x$ , de modo que o dispositivo esteja operando no ponto  $a$  da Fig. 3.11a. A derivada parcial da Equação 3.26 pode ser interpretada como sendo o limite de  $-\Delta W_{\text{campo}}/\Delta x$  com  $\lambda$  constante quando  $\Delta x \rightarrow 0$ . Se permitirmos uma variação  $\Delta x$ , a variação  $-\Delta W_{\text{campo}}$  será mostrada pela área sombreada da Fig. 3.11a. Assim, a força será  $f_{\text{campo}} = (\text{área sombreada})/\Delta x$  quando  $\Delta x \rightarrow 0$ . Por outro lado, a de-

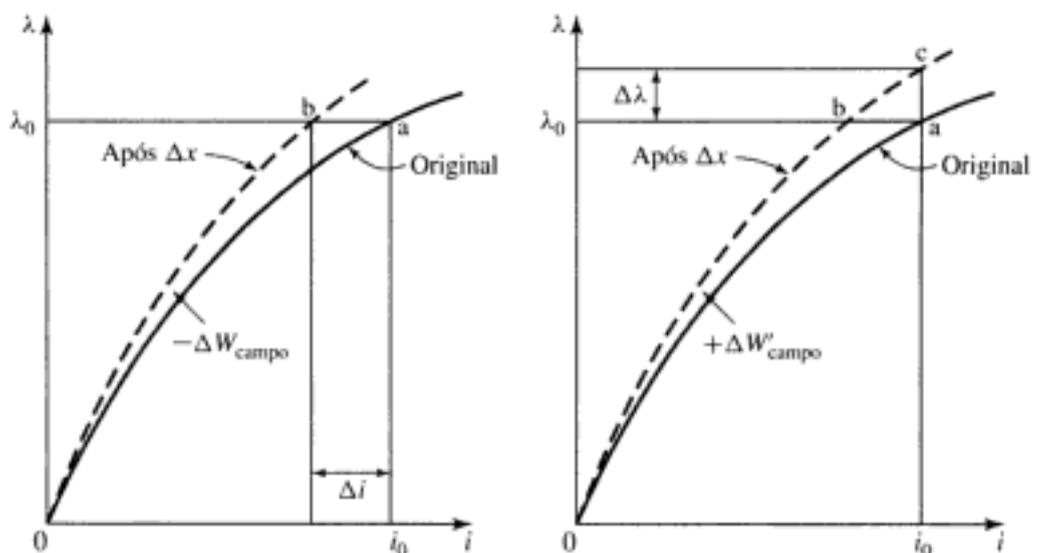


**FIGURA 3.10** Interpretação gráfica da energia e da co-energia em um sistema de excitação única.

derivada parcial da Equação 3.40 pode ser interpretada como o limite de  $\Delta W'_{\text{campo}}/\Delta x$  com  $i$  constante quando  $\Delta x \rightarrow 0$ . Essa perturbação no dispositivo está mostrada na Fig. 3.11b; a força será  $f_{\text{campo}} = (\text{área sombreada})/\Delta x$  quando  $\Delta x \rightarrow 0$ . As áreas sombreadas diferem apenas pelo pequeno triângulo  $abc$  de lados  $\Delta i$  e  $\Delta \lambda$  de modo que no limite as áreas resultantes de  $\Delta x$ , com  $\lambda$  ou  $i$  constantes, são iguais. Assim, a força produzida pelo campo magnético não depende se a determinação é feita a partir da energia ou da co-energia.

As Equações 3.26 e 3.40 expressam a força mecânica de origem elétrica em termos das derivadas parciais das funções de energia e co-energia  $W_{\text{campo}}(\lambda, x)$  e  $W'_{\text{campo}}(i, x)$ . É importante observar duas coisas a respeito delas: as variáveis em termos das quais devem ser expressas, e os seus sinais algébricos. É evidente que a força depende fisicamente da dimensão  $x$  e do campo magnético. O campo e, portanto, a energia e a co-energia podem ser especificados em termos do fluxo concatenado  $\lambda$ , ou da corrente de excitação  $i$ , ou de variáveis relacionadas. Voltamos a enfatizar que a escolha da função de energia ou co-energia como base para a análise é uma questão de conveniência.

Os sinais algébricos das Equações 3.26 e 3.40 mostram que a força atua em um sentido tal que a energia armazenada no campo magnético seja diminuída, no caso de fluxo constante,



**FIGURA 3.11** Efeito de  $\Delta x$  sobre a energia e a co-energia de um dispositivo de excitação única: (a) variação de energia mantendo  $\lambda$  constante; (b) variação de co-energia mantendo  $i$  constante.

ou que a co-energia seja aumentada, no caso de corrente constante. Em um dispositivo de excitação única, a força atua aumentando a indutância. Isto é obtido deslocando as partes do dispositivo de modo a reduzir a relutância do caminho magnético que concatena o enrolamento.

### EXEMPLO 3.6

O circuito magnético mostrado na Fig. 3.12 é feito de aço elétrico de alta permeabilidade. O rotor está livre para girar em torno de um eixo vertical. As dimensões estão mostradas na figura.

- Deduza uma expressão para o conjugado, que atua no rotor, em termos das dimensões e do campo magnético dos dois entreferros. Assuma que a relutância do aço seja desprezível (isto é,  $\mu \rightarrow \infty$ ) e despreze os efeitos de espraçamento.
- A densidade máxima de fluxo nas porções sobrepostas dos entreferros está limitada a aproximadamente 1,65 T para evitar saturação excessiva do aço. Calcule o conjugado máximo para  $r_1 = 2,5$  cm,  $h = 1,8$  cm e  $g = 3$  mm.

#### ■ Solução

- Há dois entreferros em série, cada um de comprimento  $g$ , e portanto a intensidade de campo  $H_g$  do entreferro é igual à

$$H_g = \frac{Ni}{2g}$$

Como a permeabilidade do aço é suposta infinita e  $B_{aço}$  deve permanecer finita, então  $H_{aço} = B_{aço}/\mu$  é zero e a densidade de co-energia (Equação 3.49) do aço é zero ( $\mu H_{aço}^2/2 = B_{aço}^2/2\mu = 0$ ). Assim, a co-energia do sistema é igual à dos entreferros, nos quais a densidade de co-energia é  $\mu_0 H_g^2/2$ . O volume dos dois entreferros sobrepostos é  $2gh(r_1 + 0,5g)\theta$ . Conseqüentemente, a co-energia é igual ao produto da densidade de co-energia do entreferro e do volume do entreferro, ou seja

$$W'_g = \left( \frac{\mu_0 H_g^2}{2} \right) (2gh(r_1 + 0,5g)\theta) = \frac{\mu_0 (Ni)^2 h (r_1 + 0,5g)\theta}{4g}$$

e, assim, da Equação 3.40,

$$T_{\text{campo}} = \left. \frac{\partial W'_g(i, \theta)}{\partial \theta} \right|_i = \frac{\mu_0 (Ni)^2 h (r_1 + 0,5g)}{4g}$$

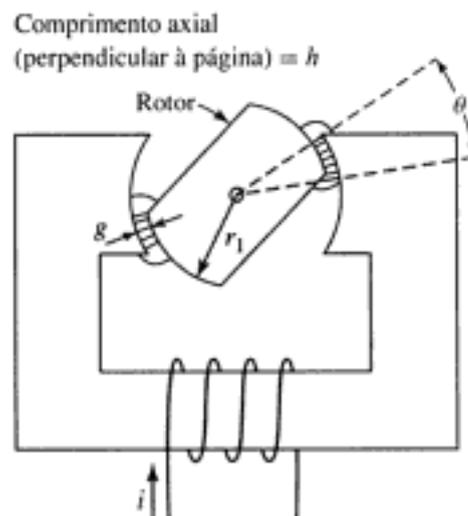


FIGURA 3.12 Sistema magnético do Exemplo 3.6.

O sinal do conjugado é positivo e atua, portanto, no sentido de aumentar o ângulo de sobreposição  $\theta$  e de assim alinhar o rotor e as faces polares do estator.

b. Para  $B_g = 1,65$  T,

$$H_g = \frac{B_g}{\mu_0} = \frac{1,65}{4\pi \times 10^{-7}} = 1,31 \times 10^6 \text{ A/m}$$

e, assim,

$$Ni = 2gH_g = 2(3 \times 10^{-3})1,31 \times 10^6 = 7860 \text{ A.e}$$

$T_{\text{campo}}$  pode agora ser calculado como

$$\begin{aligned} T_{\text{campo}} &= \frac{4\pi \times 10^{-7}(7860)^2(1,8 \times 10^{-2})(2,5 \times 10^{-2} + 0,5(3 \times 10^{-3}))}{4(3 \times 10^{-3})} \\ &= 3,09 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

### PROBLEMA PRÁTICO 3.6

(a) Escreva uma expressão para a indutância do circuito magnético da Fig. 3.12 em função de  $\theta$ . (b) Usando essa expressão, deduza uma outra para o conjugado que atua no rotor em função da corrente de entreferro  $i$  e do ângulo de rotor  $\theta$ .

#### ■ Solução

a.

$$L(\theta) = \frac{\mu_0 N^2 h (r_1 + 0,5g)\theta}{2g}$$

b.

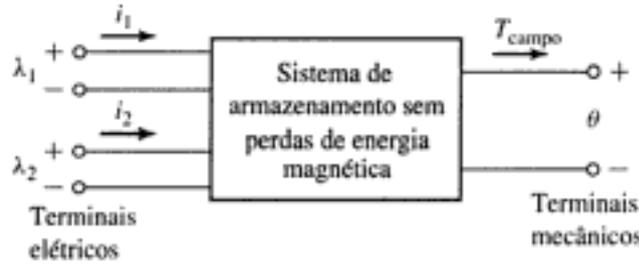
$$T_{\text{campo}} = \frac{i^2}{2} \frac{dL(\theta)}{d\theta} = \frac{i^2}{2} \left( \frac{\mu_0 N^2 h (r_1 + 0,5g)}{2g} \right)$$

## 3.6 SISTEMAS DE CAMPO MAGNÉTICO MULTI-EXCITADO

Muitos dispositivos eletromecânicos têm terminais elétricos múltiplos. Em sistemas de medição, freqüentemente é desejável obter conjugados proporcionais a dois sinais elétricos; um exemplo é um medidor que determina a potência como a partir do produto de tensão e corrente. Do mesmo modo, a maioria dos dispositivos de conversão eletromecânica de energia consiste em sistemas de campo magnético multi-excitado.

A análise desses sistemas segue-se diretamente das técnicas discutidas nas seções anteriores. Esta seção ilustra essas técnicas com base em um sistema de dois terminais elétricos. Uma representação esquemática de um sistema simples com dois terminais elétricos e um mecânico está mostrada na Fig. 3.13. Nesse caso, representa-se um sistema de movimento rotacional. As variáveis do terminal mecânico são o conjugado  $T_{\text{campo}}$  e o deslocamento angular  $\theta$ . Como há três terminais, o sistema deve ser descrito em termos de três variáveis independentes. Podem ser o ângulo mecânico  $\theta$  juntamente com os fluxos concatenados  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , ou as correntes  $i_1$  e  $i_2$ , ou um conjunto híbrido incluindo uma corrente e um fluxo.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Veja, por exemplo, H. H. Woodson and J. R. Melcher, *Electromechanical Dynamics*, Wiley, New York, 1968, Pt. I, Cap. 3.



**FIGURA 3.13** Sistema multi- excitado de armazenamento de energia magnética.

Quando são usados os fluxos, a função diferencial de energia  $W_{\text{campo}}(\lambda_1, \lambda_2, \theta)$ , correspondente à Equação 3.29, é

$$dW_{\text{campo}}(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = i_1 d\lambda_1 + i_2 d\lambda_2 - T_{\text{campo}} d\theta \quad (3.52)$$

e, em analogia direta com a dedução anterior para um sistema de excitação única,

$$i_1 = \left. \frac{\partial W_{\text{campo}}(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \lambda_1} \right|_{\lambda_2, \theta} \quad (3.53)$$

$$i_2 = \left. \frac{\partial W_{\text{campo}}(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \lambda_2} \right|_{\lambda_1, \theta} \quad (3.54)$$

e

$$T_{\text{campo}} = - \left. \frac{\partial W_{\text{campo}}(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\lambda_1, \lambda_2} \quad (3.55)$$

Observe que, em cada uma dessas equações, a derivada parcial em relação a cada variável independente deve ser tomada mantendo constantes as outras duas variáveis independentes.

A energia  $W_{\text{campo}}$  pode ser encontrada integrando a Equação 3.52. Como no caso de excitação única, isso é feito mais convenientemente mantendo  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  constantes em zero e integrando primeiro em  $\theta$ . Sob essas condições,  $T_{\text{campo}}$  é zero e, assim, essa integral é nula. Em seguida, pode-se integrar em  $\lambda_2$  (mantendo  $\lambda_1$  em zero) e finalmente em  $\lambda_1$ . Assim,

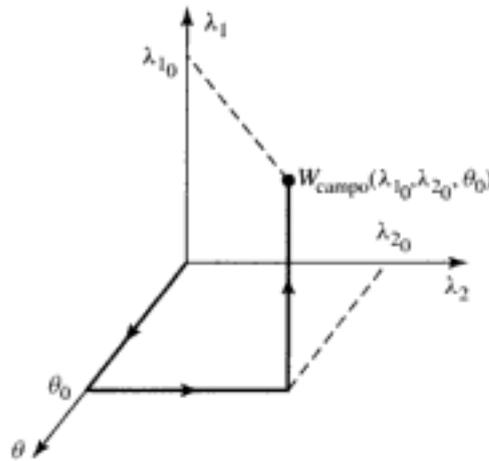
$$\begin{aligned} W_{\text{campo}}(\lambda_{10}, \lambda_{20}, \theta_0) &= \int_0^{\lambda_{20}} i_2(\lambda_1 = 0, \lambda_2, \theta = \theta_0) d\lambda_2 \\ &+ \int_0^{\lambda_{10}} i_1(\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_{20}, \theta = \theta_0) d\lambda_1 \end{aligned} \quad (3.56)$$

Esse caminho de integração está ilustrado na Fig. 3.14 e é um análogo direto do mostrado na Fig. 3.5. Pode-se naturalmente permutar a ordem de integração em relação a  $\lambda_2$  e  $\lambda_1$ . Entretanto, é extremamente importante ter em mente que as variáveis de estado são integradas em um caminho específico, no qual apenas uma variável de estado é variada por vez. Por exemplo,  $\lambda_1$  é mantido em zero enquanto se integra em relação a  $\lambda_2$  na Equação 3.56. Isso está indicado explicitamente na Fig. 3.56 e também pode ser visto na Fig. 3.14. A não observância dessa exigência é um dos erros mais comuns feitos na análise desses sistemas.

Em um sistema magnético linear, as relações entre  $\lambda$  e  $i$  podem ser especificadas em termos das indutâncias, como discutido na Seção 1.2, por

$$\lambda_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 \quad (3.57)$$

$$\lambda_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 \quad (3.58)$$



**FIGURA 3.14** Caminho de integração para se obter  $W_{\text{campo}}(\lambda_{10}, \lambda_{20}, \theta_0)$ .

onde

$$L_{12} = L_{21} \quad (3.59)$$

Aqui, as indutâncias são geralmente funções da posição angular  $\theta$ .

Essas equações podem ser manipuladas para se obter expressões de  $i$  em função de  $\theta$  s

$$i_1 = \frac{L_{22}\lambda_1 - L_{12}\lambda_2}{D} \quad (3.60)$$

$$i_2 = \frac{-L_{21}\lambda_1 + L_{11}\lambda_2}{D} \quad (3.61)$$

onde

$$D = L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21} \quad (3.62)$$

A energia desse sistema linear pode ser encontrada a partir da Equação 3.56

$$\begin{aligned} W_{\text{campo}}(\lambda_{10}, \lambda_{20}, \theta_0) &= \int_0^{\lambda_{20}} \frac{L_{11}(\theta_0)\lambda_2}{D(\theta_0)} d\lambda_2 \\ &\quad + \int_0^{\lambda_{10}} \frac{(L_{22}(\theta_0)\lambda_1 - L_{12}(\theta_0)\lambda_{20})}{D(\theta_0)} d\lambda_1 \\ &= \frac{1}{2D(\theta_0)} L_{11}(\theta_0)\lambda_{20}^2 + \frac{1}{2D(\theta_0)} L_{22}(\theta_0)\lambda_{10}^2 \\ &\quad - \frac{L_{12}(\theta_0)}{D(\theta_0)} \lambda_{10}\lambda_{20} \end{aligned} \quad (3.63)$$

onde a dependência das indutâncias e do determinante  $D(\theta)$ , em função do deslocamento angular  $\theta$ , foi indicada explicitamente.

Na Seção 3.5, para o caso de sistemas de enrolamento único, a função co-energia é definida de modo que permita a determinação da força e do conjugado diretamente em termos da corrente. Uma função semelhante para a co-energia pode ser definida, para o caso de sistemas de dois enrolamentos, como

$$W'_{\text{campo}}(i_1, i_2, \theta) = \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 - W_{\text{campo}} \quad (3.64)$$

É uma função de estado que depende das correntes dos dois terminais e do deslocamento mecânico. A sua diferencial, acompanhando a substituição da Equação 3.52, é dada por

$$dW'_{\text{campo}}(i_1, i_2, \theta) = \lambda_1 di_1 + \lambda_2 di_2 + T_{\text{campo}} d\theta \quad (3.65)$$

Da Equação 3.65, vemos que

$$\lambda_1 = \left. \frac{\partial W'_{\text{campo}}(i_1, i_2, \theta)}{\partial i_1} \right|_{i_2, \theta} \quad (3.66)$$

$$\lambda_2 = \left. \frac{\partial W'_{\text{campo}}(i_1, i_2, \theta)}{\partial i_2} \right|_{i_1, \theta} \quad (3.67)$$

Agora, mais significativamente, o conjugado pode ser determinado diretamente em termos das correntes como

$$T_{\text{campo}} = \left. \frac{\partial W'_{\text{campo}}(i_1, i_2, \theta)}{\partial \theta} \right|_{i_1, i_2} \quad (3.68)$$

De modo semelhante à Equação 3.56, a co-energia pode ser obtida como

$$\begin{aligned} W'_{\text{campo}}(i_{10}, i_{20}, \theta_0) &= \int_0^{i_{20}} \lambda_2(i_1 = 0, i_2, \theta = \theta_0) di_2 \\ &+ \int_0^{i_{10}} \lambda_1(i_1, i_2 = i_{20}, \theta = \theta_0) di_1 \end{aligned} \quad (3.69)$$

Para o sistema linear das Equações 3.57 a 3.59, tem-se

$$W'_{\text{campo}}(i_1, i_2, \theta) = \frac{1}{2} L_{11}(\theta) i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22}(\theta) i_2^2 + L_{12}(\theta) i_1 i_2 \quad (3.70)$$

Em tal sistema linear, o conjugado pode ser encontrado, ou a partir da energia dada pela Equação 3.63 usando-se a Equação 3.55, ou da co-energia dada pela Equação 3.70 usando-se a Equação 3.68. É neste ponto que a utilidade da função co-energia torna-se aparente. A expressão de energia da Equação 3.63 é uma função complexa do deslocamento, e a sua derivada também o é em grau ainda maior. Como alternativa, a função co-energia é uma função relativamente simples de deslocamento, e a partir de sua derivada pode-se determinar facilmente uma expressão para o conjugado, em função das correntes de enrolamento  $i_1$  e  $i_2$  como

$$\begin{aligned} T_{\text{campo}} &= \left. \frac{\partial W'_{\text{campo}}(i_1, i_2, \theta)}{\partial \theta} \right|_{i_1, i_2} \\ &= \frac{i_1^2}{2} \frac{dL_{11}(\theta)}{d\theta} + \frac{i_2^2}{2} \frac{dL_{22}(\theta)}{d\theta} + i_1 i_2 \frac{dL_{12}(\theta)}{d\theta} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Os sistemas com mais de dois terminais elétricos são manipulados de modo análogo. Como no caso do sistema de dois pares de terminais acima, o uso da co-energia em função das correntes de terminal simplifica grandemente a determinação do conjugado ou da força.

### EXEMPLO 3.7



No sistema mostrado na Fig. 3.15, as indutâncias em henrys são dadas por  $L_{11} = (3 + \cos 2\theta) \times 10^{-3}$ ;  $L_{12} = 0,3 \cos \theta$  e  $L_{22} = 30 + 10 \cos 2\theta$ . Encontre e plote o conjugado  $T_{\text{campo}}(\theta)$  para as correntes  $i_1 = 0,8$  A e  $i_2 = 0,01$  A.

### ■ Solução

O conjugado pode ser determinado a partir da Equação 3.71,

$$\begin{aligned} T_{\text{campo}} &= \frac{i_1^2}{2} \frac{dL_{11}(\theta)}{d\theta} + \frac{i_2^2}{2} \frac{dL_{22}(\theta)}{d\theta} + i_1 i_2 \frac{dL_{12}(\theta)}{d\theta} \\ &= \frac{i_1^2}{2} (-2 \times 10^{-3}) \sin 2\theta + \frac{i_2^2}{2} (-20 \sin 2\theta) - i_1 i_2 (0,3) \sin \theta \end{aligned}$$

Para  $i_1 = 0,8 \text{ A}$  e  $i_2 = 0,01 \text{ A}$ , o conjugado é

$$T_{\text{campo}} = -1,64 \times 10^{-3} \sin 2\theta - 2,4 \times 10^{-3} \sin \theta$$

Observe que a expressão do conjugado consiste em termos de dois tipos. Um deles, proporcional à  $i_1 i_2 \sin \theta$ , é devido à interação mútua entre as correntes do rotor e do estator, e age no sentido de alinhar o rotor e o estator de modo a maximizar a sua indutância mútua. Pode-se também pensar de outro modo como sendo devido à tendência de alinhamento de dois campos magnéticos (nesse caso, os do rotor e do estator).

A expressão do conjugado também tem dois termos, proporcional cada um a  $2\theta$  e ao quadrado de uma das correntes de bobina. Esses termos são devidos à ação individual das correntes de enrolamento e correspondem aos conjugados vistos em sistemas de excitação única. Aqui o conjugado é devido ao fato de que as indutâncias próprias são funções da posição do rotor, e de que o conjugado correspondente atua no sentido de maximizar cada indutância de modo a maximizar a co-energia. A variação de  $2\theta$  é devida à variação correspondente nas indutâncias próprias (exatamente como foi visto anteriormente no Exemplo 3.4), o que por sua vez é devido à variação da relutância de entreferro. Observe que uma rotação de  $180^\circ$ , a partir de qualquer posição, resulta na mesma relutância de entreferro (por isso a variação em dobro do ângulo). Esse componente de conjugado é conhecido como *conjugado de relutância*. Os dois componentes de conjugado (mútuo e de relutância), juntos com o conjugado total, estão plotados com MATLAB na Fig. 3.16.

### PROBLEMA PRÁTICO 3.7

Encontre uma expressão para o conjugado de um sistema simétrico de dois enrolamentos cujas indutâncias variam de acordo com

$$L_{11} = L_{22} = 0,8 + 0,27 \cos 4\theta$$

$$L_{12} = 0,65 \cos 2\theta$$

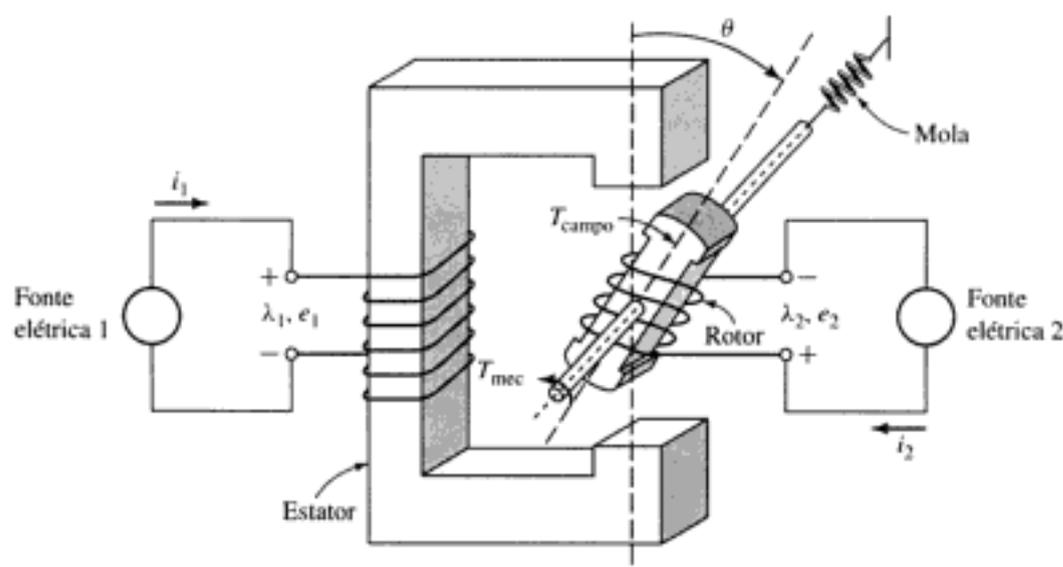
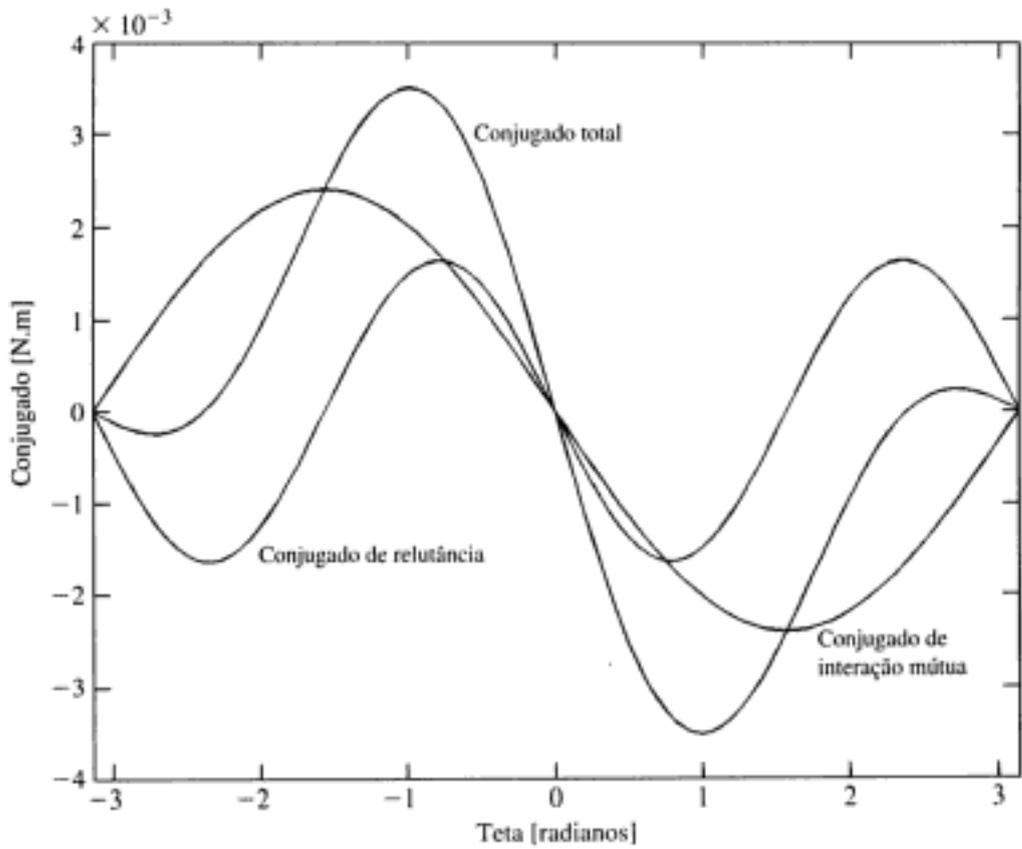


FIGURA 3.15 Sistema magnético de excitação múltipla do Exemplo 3.7.



**FIGURA 3.16** Plotagem dos componentes de conjugado do sistema de excitação múltipla do Exemplo 3.7.

dada a condição de que  $i_1 = -i_2 = 0,37$  A.

■ **Solução**

$$T_{\text{campo}} = -0,296 \text{ sen}(4\theta) + 0,178 \text{ sen}(2\theta)$$

A dedução com deslocamento angular apresentada pode ser repetida de modo semelhante à dos sistemas de deslocamento linear. Se isso for feito, as expressões encontradas para a energia e a co-energia serão

$$\begin{aligned} W_{\text{campo}}(\lambda_{10}, \lambda_{20}, x_0) &= \int_0^{\lambda_{20}} i_2(\lambda_1 = 0, \lambda_2, x = x_0) d\lambda_2 \\ &\quad + \int_0^{\lambda_{10}} i_1(\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_{20}, x = x_0) d\lambda_1 \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} W'_{\text{campo}}(i_{10}, i_{20}, x_0) &= \int_0^{i_{20}} \lambda_2(i_1 = 0, i_2, x = x_0) di_2 \\ &\quad + \int_0^{i_{10}} \lambda_1(i_1, i_2 = i_{20}, x = x_0) di_1 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Do mesmo modo, a força pode ser obtida de

$$f_{\text{campo}} = - \left. \frac{\partial W_{\text{campo}}(\lambda_1, \lambda_2, x)}{\partial x} \right|_{\lambda_1, \lambda_2} \quad (3.74)$$

ou

$$f_{\text{campo}} = \left. \frac{\partial W'_{\text{campo}}(i_1, i_2, x)}{\partial x} \right|_{i_1, i_2} \quad (3.75)$$

Em um sistema magnético linear, a expressão de co-energia dada pela Equação 3.70 torna-se

$$W'_{\text{campo}}(i_1, i_2, x) = \frac{1}{2} L_{11}(x) i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22}(x) i_2^2 + L_{12}(x) i_1 i_2 \quad (3.76)$$

e a força é dada assim por

$$f_{\text{campo}} = \frac{i_1^2}{2} \frac{dL_{11}(x)}{dx} + \frac{i_2^2}{2} \frac{dL_{22}(x)}{dx} + i_1 i_2 \frac{dL_{12}(x)}{dx} \quad (3.77)$$

### 3.7 FORÇAS E CONJUGADOS EM SISTEMAS COM IMÃS PERMANENTES

As deduções das expressões de força e conjugado das Seções 3.4 a 3.6 voltaram-se a sistemas nos quais os campos magnéticos são produzidos pela excitação elétrica de enrolamentos específicos do sistema. No entanto, na Seção 3.5, foi visto que um cuidado especial deve ser tomado quando são considerados os sistemas que contêm imãs permanentes (também referidos como materiais magnéticos *duros*). Especificamente, a discussão que acompanhou a dedução da expressão da co-energia da Equação 3.50 mostrou que em tais sistemas a densidade de fluxo magnético é zero quando  $H = H_c$ , e não quando  $H = 0$ .

Por essa razão, as deduções das expressões de força e conjugado das Seções 3.4 a 3.6 devem ser modificadas para o caso de sistemas que contenham imãs permanentes. Considere, por exemplo, que a dedução da Equação 3.18 depende do fato de que, na Equação 3.17, quando a integração se dá ao longo do caminho  $2a$ , a força pode ser considerada nula, porque não há nenhuma excitação elétrica no sistema. Um argumento semelhante aplica-se à dedução das expressões de energia e co-energia das Equações 3.41 e 3.69.

Em sistemas com imãs permanentes, essas deduções devem ser revisitadas com cuidado. Em alguns casos, tais sistemas não apresentam nenhum enrolamento. Os seus campos magnéticos devem-se apenas à presença de material magnético permanente, e não é possível basear as deduções puramente em fluxos de enrolamentos e correntes. Em outros casos, os campos magnéticos podem ser produzidos por meio de uma combinação de imãs permanentes e enrolamentos.

Uma modificação das técnicas apresentadas nas seções anteriores pode ser usada em sistemas que contenham imãs permanentes. Embora a dedução apresentada aqui seja aplicável especificamente a sistemas em que o imã aparece como um elemento pertencente a um circuito magnético de campo interno uniforme, pode-se generalizá-la para situações mais complexas. No caso mais geral, as expressões da teoria de campo para a energia (Equação 3.20) e a co-energia (Equação 3.50) podem ser usadas.

A essência dessa técnica está em considerar o sistema como tendo um *enrolamento fictício* adicional, que atua na mesma porção do circuito magnético que o imã permanente. Sob condições normais de operação, o enrolamento fictício conduz uma corrente nula. A sua função é simplesmente a de uma “muleta” matemática que pode ser usada para realizar a análise requerida. A corrente nesse enrolamento pode ser ajustada de modo a cancelar o campo magnético produzido pelo imã permanente. Dessa forma, pode-se obter o ponto de partida de “força zero” para as análises, como as que levam da Equação 3.17 à Equação 3.18.

Com o propósito de se calcular a energia e a co-energia do sistema, esse enrolamento é tratado como um outro enrolamento qualquer, tendo o seu próprio conjunto de corrente e fluxo

concatenado. Como resultado, as expressões de energia e co-energia podem ser obtidas como uma função de todos os fluxos concatenados de enrolamento e de todas as correntes, incluindo-se o enrolamento fictício. Como, sob condições normais de operação, a corrente nesse enrolamento será ajustada com valor zero, é útil deduzir a expressão da força a partir da co-energia do sistema, pois as correntes de enrolamento são expressas explicitamente nessa representação.

A Fig. 3.17a mostra um circuito magnético com um ímã permanente e um êmbolo móvel. Para encontrar a força no êmbolo, em função de sua posição, supomos que haja um enrolamento fictício de  $N_f$  espiras conduzindo uma corrente  $i_f$  de tal modo que se produza um fluxo através do ímã permanente, como se mostra na Fig. 3.17b.

Para esse sistema de enrolamento único, podemos escrever a expressão da diferencial de co-energia a partir da Equação 3.37 como

$$dW'_{\text{campo}}(i_f, x) = \lambda_f di_f + f_{\text{campo}} dx \quad (3.78)$$

onde o subscrito 'f' indica o enrolamento fictício. De acordo com a Equação 3.40, a força nesse sistema pode ser escrita como

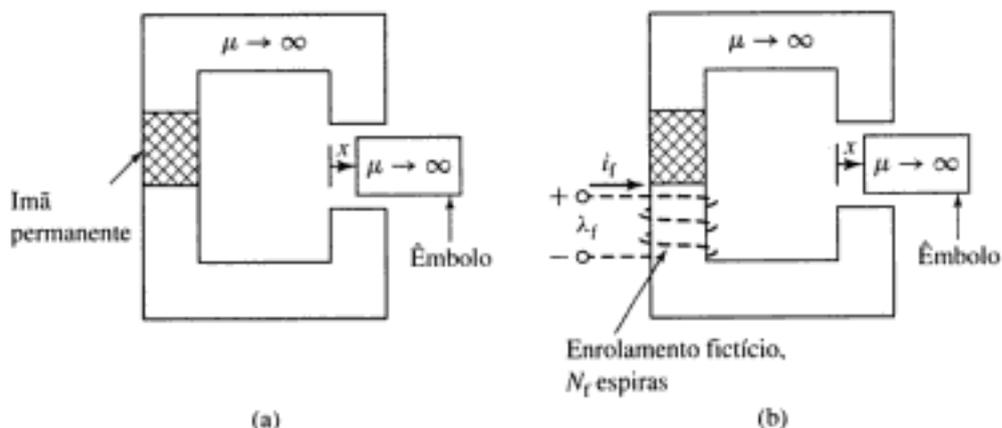
$$f_{\text{campo}} = \left. \frac{\partial W'_{\text{campo}}(i_f = 0, x)}{\partial x} \right|_{i_f} \quad (3.79)$$

onde a derivada parcial é obtida mantendo-se  $i_f$  constante, e a expressão resultante é calculada então em  $i_f = 0$ . Isso é equivalente a fazer  $i_f = 0$  na expressão de  $W'_{\text{campo}}$  antes de se calcular a derivada. Como vimos, manter  $i_f$  constante, na derivada da Equação 3.79, é uma exigência do método da energia; ela deve ser tornada zero para se calcular apropriadamente a força devida apenas ao ímã, de modo a não incluir uma componente de força devida à corrente no enrolamento fictício.

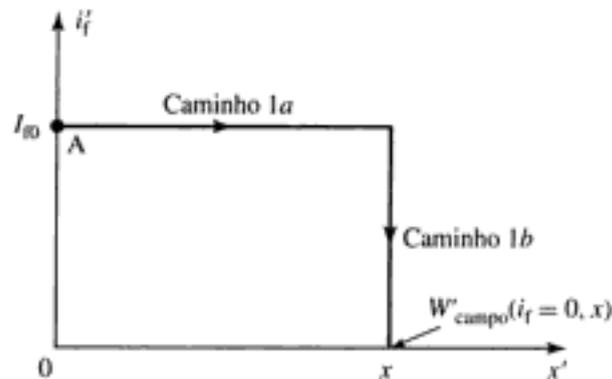
Para se calcular a co-energia  $W'_{\text{campo}}(i_f = x)$  desse sistema, é necessário integrar a Equação 3.78. Como  $W'_{\text{campo}}$  é uma função de estado de  $i_f$  e  $x$ , estamos livres para escolher qualquer caminho de integração que desejarmos. A Fig. 3.18 ilustra um caminho onde essa integração é particularmente simples. Para esse caminho, podemos escrever a expressão da co-energia do sistema como

$$\begin{aligned} W'_{\text{campo}}(i_f = 0, x) &= \int_{\text{caminho 1a}} dW'_{\text{campo}} + \int_{\text{caminho 1b}} dW'_{\text{campo}} \\ &= \int_0^x f_{\text{campo}}(i_f = I_{f0}, x') dx' + \int_{I_{f0}}^0 \lambda_f(i_f, x) di_f \end{aligned} \quad (3.80)$$

que corresponde diretamente à expressão análoga de energia encontrada na Equação 3.17.



**FIGURA 3.17** (a) Circuito magnético com ímã permanente e êmbolo móvel; (b) Enrolamento fictício acrescentado.



**FIGURA 3.18** Caminho de integração para calcular  $W'_{\text{campo}}(i_f = 0, x)$  no sistema de ímã permanente da Fig. 3.17.

Observe que a integração é feita inicialmente em  $x$  com a corrente  $i_f$  mantida constante em  $i_f = I_{f0}$ . Essa é uma corrente muito específica, igual à corrente fictícia de enrolamento que reduziria o fluxo magnético a zero no sistema. Em outras palavras, a corrente  $I_{f0}$  é a corrente no enrolamento fictício que contrabalançaria totalmente o campo magnético produzido pelo ímã permanente. Dessa forma, a força  $f_{\text{campo}}$  é zero no ponto A da Fig. 3.18 e assim permanece na integração em  $x$  ao longo do caminho 1a. Portanto, a integral ao longo do caminho 1a da Equação 3.80 é zero, e essa equação reduz-se a

$$W'_{\text{campo}}(i_f = 0, x) = \int_{I_{f0}}^0 \lambda_f(i_f', x) di_f' \quad (3.81)$$

Observe que a Equação 3.81 é perfeitamente geral e não requer que nem o ímã permanente nem o material magnético do circuito magnético sejam lineares. Após calcular a Equação 3.81, a força em uma posição dada  $x$  do êmbolo pode ser obtida prontamente da Equação 3.79. Observe também que, devido à presença do ímã permanente, nem a co-energia nem a força são nulas quando  $i_f$  é zero, como seria esperado.

### EXEMPLO 3.8

O circuito magnético da Fig. 3.19 é excitado por um ímã permanente de samário-cobalto e contém um êmbolo móvel. Também está mostrado o enrolamento fictício de  $N_f$  espiras que conduz uma corrente  $i_f$ , incluído aqui para a análise. As dimensões são:

$$\begin{aligned} W_m &= 2,0 \text{ cm} & W_g &= 3,0 \text{ cm} & W_o &= 2,0 \text{ cm} \\ d &= 2,0 \text{ cm} & g_o &= 0,2 \text{ cm} & D &= 3,0 \text{ cm} \end{aligned}$$

Encontre (a) uma expressão para a co-energia do sistema em função da posição  $x$  do êmbolo e (b) uma expressão para a força no êmbolo em função de  $x$ . Finalmente, (c) calcule a força em  $x = 0$  e  $x = 0,5$  cm. Despreze os efeitos dos fluxos de espreamento nesse cálculo.

#### ■ Solução

- a. Como é bem linear na maior parte de seu intervalo de operação, a curva de magnetização CC do samário-cobalto pode ser representada como uma linha reta dada pela Equação 1.61

$$B_m = \mu_R(H_m - H_c') = \mu_R H_m + B_r$$

onde o subscrito m é usado aqui para indicar especificamente os campos dentro do imã de samário-cobalto e

$$\begin{aligned}\mu_R &= 1,05\mu_0 \\ H'_c &= -712 \text{ kA/m} \\ B_r &= 0,94 \text{ T}\end{aligned}$$

Observe, com base na Fig. 1.19, que a curva de magnetização CC do samário-cobalto não é completamente linear; ela se dobra ligeiramente para baixo nos valores baixos de densidade de fluxo. Assim, na curva característica  $B$ - $H$  dada, a coercitividade aparente  $H'_c$  é um pouco maior do que a real do samário-cobalto.

Da Equação 1.5, podemos escrever

$$N_f i_f = H_m d + H_g x + H_0 g_0$$

onde o subscrito g refere-se ao entreferro variável e o subscrito 0, ao entreferro fixo. De modo semelhante, da condição de continuidade de fluxo, Equação 1.3, podemos escrever

$$B_m W_m D = B_g W_g D = B_0 W_0 D$$

Verificando que nos entreferros  $B_g = \mu_0 H_g$  e  $B_0 = \mu_0 H_0$ , podemos resolver as equações acima encontrando  $B_m$ :

$$B_m = \frac{\mu_R (N_f i_f - H'_c d)}{d + W_m \left( \frac{\mu_R}{\mu_0} \right) \left( \frac{x}{W_g} + \frac{g_0}{W_0} \right)}$$

Finalmente, podemos determinar o fluxo concatenado  $\lambda_f$  do enrolamento fictício como sendo

$$\lambda_f = N_f W_m D B_m = \frac{N_f W_m D \mu_R (N_f i_f - H'_c d)}{d + W_m \left( \frac{\mu_R}{\mu_0} \right) \left( \frac{x}{W_g} + \frac{g_0}{W_0} \right)}$$

Assim, vemos que o fluxo concatenado  $\lambda_f$  será zero quando  $i_f = I_{f0} = H'_c d / N_f = -B_r d / (\mu_R N_f)$  e, da Equação 3.81, podemos obter a co-energia como

$$\begin{aligned}W'_{\text{campo}}(x) &= \int_{H'_c d / N_f}^0 \left[ \frac{N_f W_m D \mu_R (N_f i_f - H'_c d)}{d + W_m \left( \frac{\mu_R}{\mu_0} \right) \left( \frac{x}{W_g} + \frac{g_0}{W_0} \right)} \right] di_f \\ &= \frac{W_m D (B_r d)^2}{2\mu_R \left[ d + W_m \left( \frac{\mu_R}{\mu_0} \right) \left( \frac{x}{W_g} + \frac{g_0}{W_0} \right) \right]}\end{aligned}$$



FIGURA 3.19 Circuito magnético do Exemplo 3.8.

Observe que a resposta não depende nem de  $N_f$  nem de  $i_f$ . Isso é o esperado pois o enrolamento fictício não existe de fato nesse sistema.

b. Uma vez encontrada a co-energia, a força pode ser determinada da Equação 3.79 como

$$f_{\text{campo}} = - \frac{W_m^2 D(B, d)^2}{2\mu_0 W_g \left[ d + W_m \left( \frac{\mu_R}{\mu_0} \right) \left( \frac{1}{W_g} + \frac{dg}{W_g} \right) \right]^2}$$

Observe que a força é negativa, indicando que ela atua no sentido de diminuir  $x$ , isto é, puxar o êmbolo no sentido que diminui o entreferro.

c. Finalmente, a substituição na expressão da força fornece

$$f_{\text{campo}} = \begin{cases} -115 \text{ N} & \text{em } x = 0 \text{ cm} \\ -85,8 \text{ N} & \text{em } x = 0,5 \text{ cm} \end{cases}$$

### PROBLEMA PRÁTICO 3.8

(a) Deduza uma expressão para a co-energia do circuito magnético da Fig. 3.20 em função da posição  $x$  do êmbolo. (b) Deduza uma expressão para a força na direção de  $x$  sobre o êmbolo e calcule-a para  $x = W_g/2$ . Despreze os efeitos dos fluxos de espreadimento. As dimensões são:

$$W_m = 2,0 \text{ cm} \quad W_g = 2,5 \text{ cm} \quad D = 3,0 \text{ cm} \\ d = 1,0 \text{ cm} \quad g_0 = 0,2 \text{ cm}$$

#### ■ Solução

a.

$$W'_{\text{campo}} = \frac{W_m D(B, d)^2}{2\mu_R \left[ d + \left( \frac{\mu_R}{\mu_0} \right) \left( \frac{2g W_m}{W_g - x} \right) \right]}$$

b.

$$f_{\text{campo}} = - \frac{g W_m^2 D B_r^2}{\mu_0 (W_g - x)^2 \left[ 1 + \left( \frac{\mu_R}{\mu_0} \right) \left( \frac{W_g W_m}{W_g - x} \right) \right]^2}$$

Em  $x = W_g/2$ ,  $f_{\text{campo}} = -107 \text{ N}$ .

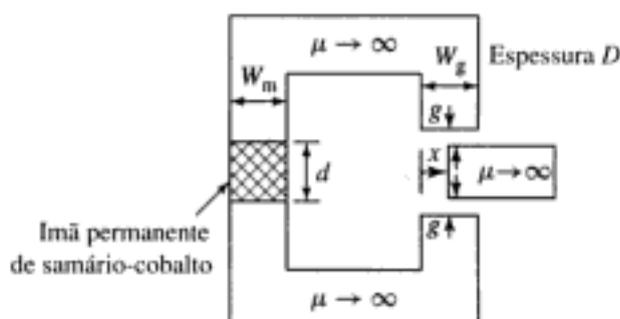
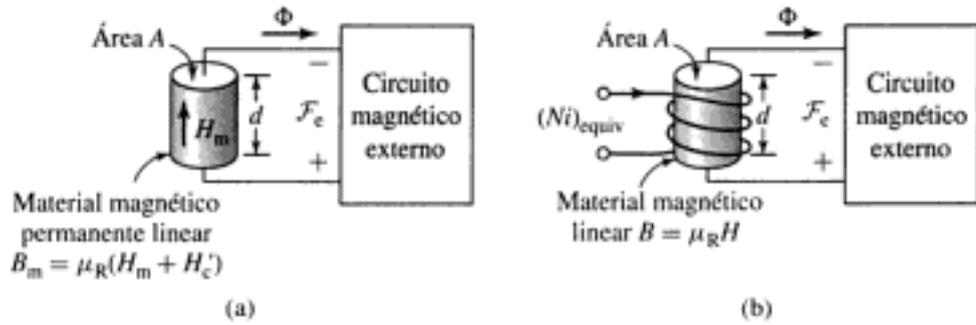


FIGURA 3.20 Circuito magnético do Problema Prático 3.8.

Considere o circuito magnético esquemático da Fig. 3.21a. Consiste em uma seção de material magnético duro (ímã) e linear ( $B_m = \mu_R(H_m - H'_c)$ ), de área  $A$  e comprimento  $d$ . Está conectada em série com um circuito magnético externo de FMM  $\mathcal{F}_e$ .



**FIGURA 3.21** (a) Circuito magnético genérico contendo uma seção de material magnético permanente (ímã) linear. (b) Circuito magnético genérico no qual o ímã permanente foi substituído por uma seção de material magnético linear e um enrolamento fictício.

Da Equação 1.21, tendo em vista que não há ampères-espiras atuando nesse circuito magnético, tem-se

$$H_m d + \mathcal{F}_c = 0 \quad (3.82)$$

O fluxo produzido no circuito magnético externo pelo ímã permanente é dado por

$$\Phi = AB_m = \mu_R A (H_m - H'_c) \quad (3.83)$$

Da Equação 3.82, substituindo  $H_m$  na Equação 3.83, obtém-se

$$\Phi = \mu_R A \left( -H'_c - \frac{\mathcal{F}_c}{d} \right) \quad (3.84)$$

Agora, considere o circuito magnético esquemático da Fig. 3.21b no qual o material magnético duro e linear da Fig. 3.21a foi substituído por um material magnético mole e linear de mesma permeabilidade ( $B = \mu_R H$ ) e de mesmas dimensões (comprimento  $d$  e área  $A$ ). Além disso, foi incluído um enrolamento que conduz  $(Ni)_{equiv}$  ampères-espiras.

Nesse circuito magnético, é possível mostrar que o fluxo pode ser dado por

$$\Phi = \mu_R A \left( \frac{(Ni)_{equiv}}{d} - \frac{\mathcal{F}_c}{d} \right) \quad (3.85)$$

Comparando as Equações 3.84 e 3.85, vemos que o mesmo fluxo será produzido no circuito magnético externo se o valor de ampères-espiras,  $(Ni)_{equiv}$ , do enrolamento da Fig. 3.21b for igual a  $-H'_c d$ .

Esse resultado é útil na análise de estruturas de circuitos magnéticos que contenham materiais magnéticos permanentes lineares, cujas características  $B$ - $H$  possam ser representadas na forma da Equação 1.61. Nesses casos, a substituição da seção constituída pelo ímã permanente por uma outra de material magnético linear de mesmas permeabilidade  $\mu_R$  e geometria, juntamente com um enrolamento equivalente cujo valor em ampères-espiras seja dado por

$$(Ni)_{equiv} = -H'_c d \quad (3.86)$$

dará o mesmo fluxo no circuito magnético externo. Como conseqüência, tanto o ímã permanente linear como a combinação do material magnético linear com o enrolamento são indistinguíveis em relação à produção de campos magnéticos no circuito magnético externo, produzindo assim forças idênticas. Portanto, a análise de tais sistemas pode ser simplificada com essa substituição, como se mostra no Exemplo 3.9. Essa técnica é especialmente útil na análise de circuitos magnéticos que contenham ao mesmo tempo ímãs permanentes e um ou mais enrolamentos.

## EXEMPLO 3.9

A Fig. 3.22a mostra um atuador, constituído por um *yoke* de permeabilidade infinita e um êmbolo, que é excitado com um imã de neodímio-ferro-boro e um enrolamento de excitação com  $N_1 = 1500$  espiras.

As dimensões são

$$W = 4,0 \text{ cm} \quad W_1 = 4,5 \text{ cm} \quad D = 3,5 \text{ cm} \\ d = 8 \text{ mm} \quad g_0 = 1 \text{ mm}$$

Encontre (a) a força na direção  $x$  sobre o êmbolo quando a corrente no enrolamento de excitação é zero e  $x = 3 \text{ mm}$ . (b) Calcule a corrente necessária no enrolamento de excitação para reduzir a zero a força no êmbolo.

■ Solução

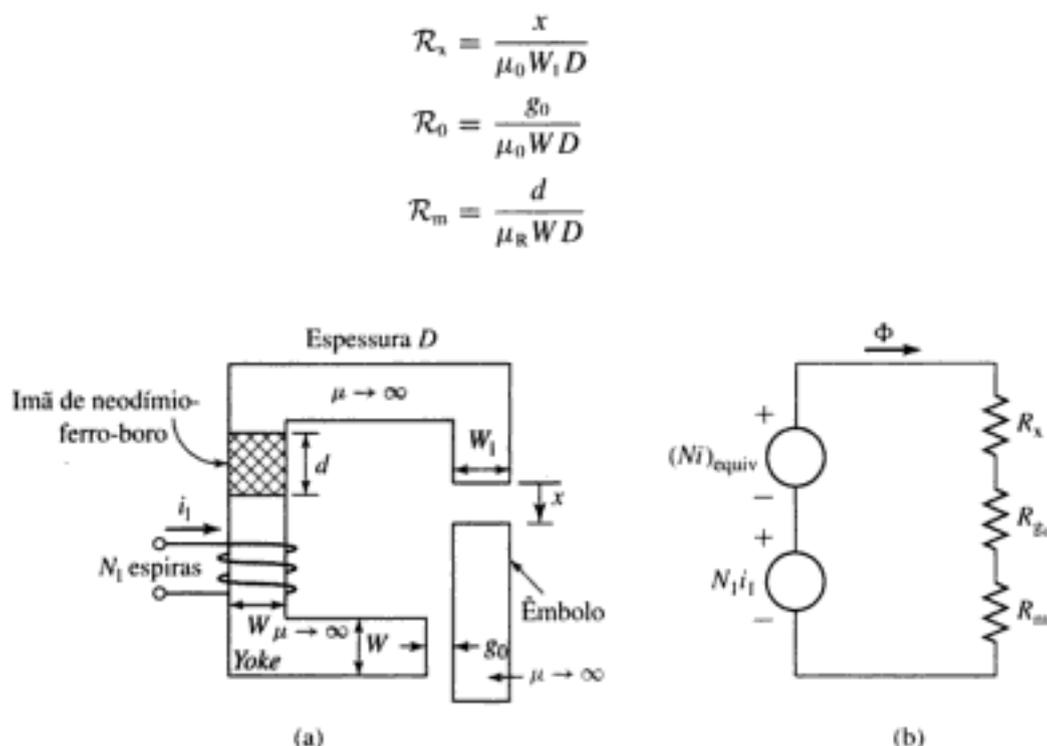
a. Como foi discutido na Seção 1.6, a curva característica de magnetização CC do neodímio-ferro-boro pode ser representada por uma relação linear da forma

$$B = \mu_R(H - H'_c) = B_r + \mu_R H$$

onde  $\mu_R = 1,06\mu_0$ ,  $H'_c = -940 \text{ kA/m}$  e  $B_r = 1,25 \text{ T}$ . Como discutido nessa seção, podemos substituir o imã por uma seção de material linear de permeabilidade  $\mu_R$  e um enrolamento equivalente cujo valor de ampères-espiras é

$$(Ni)_{\text{equiv}} = -H'_c d = -(-9,4 \times 10^5)(8 \times 10^{-3}) = 7520 \text{ ampères-espiras}$$

Baseado nessa substituição, o circuito equivalente do sistema torna-se o da Fig. 3.22b. Há duas fontes de FMM em série com três relutâncias: as do entreferro variável  $\mathcal{R}_x$ , do entreferro fixo  $\mathcal{R}_0$  e do imã  $\mathcal{R}_m$ .



**FIGURA 3.22** (a) Atuador do Exemplo 3.9. (b) Circuito equivalente do atuador onde o ímã permanente foi substituído por um material linear e um enrolamento equivalente que conduz  $(Ni)_{\text{equiv}}$  ampères-espiras.

Com  $i_1 = 0$ , o atuador é equivalente a um sistema de enrolamento único cuja co-energia é dada por

$$W'_{\text{campo}} = \frac{1}{2} Li_1^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{(Ni)_{\text{equiv}}^2}{\mathcal{R}_x + \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_m} \right)$$

A força sobre o êmbolo pode então ser obtida de

$$\begin{aligned} f_{\text{campo}} &= \left. \frac{\partial W'_{\text{campo}}}{\partial x} \right|_{i_{\text{equiv}}} = - \frac{(Ni)_{\text{equiv}}^2}{(\mathcal{R}_x + \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_m)^2} \left( \frac{d\mathcal{R}_x}{dx} \right) \\ &= - \frac{(Ni)_{\text{equiv}}^2}{\mu_0 W_l D (\mathcal{R}_x + \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_m)^2} \end{aligned}$$

Substituindo os valores dados, obtém-se  $f_{\text{campo}} = -703$  N, onde o sinal negativo indica que a força atua no sentido de reduzir  $x$  (isto é, fechar o entreferro).

b. O fluxo no atuador é proporcional ao valor total efetivo de ampères-espiras  $(Ni)_{\text{equiv}} + N_1 i_1$  que atua no circuito magnético. Assim, a força será nula quando o valor líquido de ampères-espiras for igual a zero ou quando

$$i_1 = \frac{(Ni)_{\text{equiv}}}{N_1} = \frac{7520}{1500} = 5,01 \text{ A}$$

Observe, no entanto, que o sinal da corrente (isto é, em que sentido ela deve ser aplicada ao enrolamento de excitação) não pode ser determinado a partir da informação dada aqui, tendo em vista que desconhecemos o sentido de magnetização do imã. Como a força depende do quadrado da densidade de fluxo magnético, o imã pode ser orientado, na perna esquerda do circuito magnético, para produzir fluxo tanto no sentido ascendente como no descendente, e a força calculada na parte (a) será a mesma. Para reduzir a força a zero, uma corrente de 5,01 ampères deve ser aplicada ao enrolamento de excitação, em um sentido tal que o fluxo seja reduzido a zero. Se for aplicada a corrente oposta, a densidade de fluxo aumentará, assim como a força.

### PROBLEMA PRÁTICO 3.9

O Problema Prático 3.8 deve ser refeito substituindo o imã de samário-cobalto por uma seção de material linear e um enrolamento equivalente. Escreva (a) expressões para  $\mathcal{R}_m$ , a relutância da seção de material linear;  $\mathcal{R}_g$ , a relutância do entreferro; e  $(Ni)_{\text{equiv}}$ , os ampères-espiras do enrolamento equivalente; e (b) uma expressão para a indutância do enrolamento equivalente e a co-energia.

$$\begin{aligned} W_m &= 2,0 \text{ cm} & W_g &= 2,5 \text{ cm} & D &= 3,0 \text{ cm} \\ d &= 1,0 \text{ cm} & g_0 &= 0,2 \text{ cm} \end{aligned}$$

#### ■ Solução

a.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m &= \frac{d}{\mu_R W_m D} \\ \mathcal{R}_g &= \frac{2g}{\mu_0 (W_g - x) D} \\ (Ni)_{\text{equiv}} &= -H_c' d = \frac{(B_s d)}{\mu_R} \end{aligned}$$

b.

$$L = \frac{N_{equiv}^2}{(\mathcal{R}_m + \mathcal{R}_g)}$$

$$W'_{campo} = \frac{Li_{equiv}^2}{2} = \frac{(B_r d)^2}{2\mu_r^2(\mathcal{R}_m + \mathcal{R}_g)} = \frac{W_m D (B_r d)^2}{2\mu_r \left[ d + \left( \frac{\mu_B}{\mu_0} \right) \left( \frac{2gW_m}{c} \right) \right]}$$

É evidente que os métodos descritos neste capítulo podem ser estendidos para tratar de situações em que haja ímãs permanentes e múltiplos enrolamentos condutores de corrente. Em muitos dispositivos de interesse prático, a geometria é suficientemente complexa, independente do número de enrolamentos e/ou ímãs permanentes, de modo que a análise de circuitos magnéticos não é necessariamente aplicável, e é de se esperar que as soluções analíticas sejam inexatas, se é que seja possível encontrá-las. Nesses casos, técnicas numéricas, como o método dos elementos finitos discutido anteriormente, podem ser usadas. Usando esse método, a co-energia da Equação 3.48 ou da Equação 3.50, no caso de ímãs permanente, pode ser calculada numericamente para correntes constantes de enrolamento e valores variáveis de deslocamento.

### 3.8 EQUAÇÕES DINÂMICAS

Deduzimos expressões para as forças e conjugados produzidos em dispositivos de conversão eletromecânica de energia como funções de variáveis dos terminais elétricos e de deslocamento mecânico. Essas expressões foram deduzidas para sistemas conservativos de conversão de energia, nos quais assume-se que as perdas possam ser atribuídas a elementos elétricos e mecânicos externos, conectados aos terminais do sistema de conversão de energia. Tais dispositivos de conversão de energia são planejados para operarem como um meio de acoplamento entre sistemas elétricos e mecânicos. Portanto, estamos interessados basicamente na operação por completo do sistema eletromecânico e não apenas no sistema de conversão eletromecânica de energia, em torno do qual ele é construído.

O modelo de um sistema eletromecânico simples, como o mostrado na Fig. 3.23, ilustra os componentes básicos do sistema. Os detalhes variam de sistema para sistema. O sistema mostrado consiste em três partes: o sistema elétrico externo, o sistema de conversão eletromecânica de energia e o sistema mecânico externo. O sistema elétrico é representado por uma fonte de tensão  $v_0$  e uma resistência  $R$ ; a fonte poderia ser representada alternativamente por uma fonte de corrente e uma condutância  $G$  em paralelo.

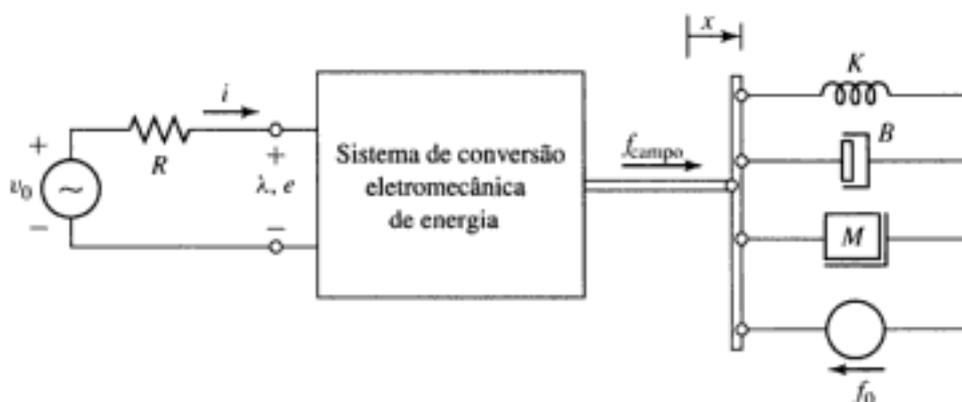


FIGURA 3.23 Modelo de um sistema eletromecânico de excitação simples.

Observe que, nesse modelo, todas as perdas do sistema, incluindo as que são inerentes ao sistema de conversão eletromecânica de energia, são atribuídas à resistência  $R$ . Por exemplo, se a fonte de tensão tiver uma resistência equivalente  $R_f$  e a resistência de enrolamento do sistema de conversão eletromecânica de energia for  $R_{enr}$ , então a resistência  $R$  seria dada pela soma dessas duas resistências;  $R = R_f + R_{enr}$ .

A equação elétrica desse modelo é

$$v_0 = iR + \frac{d\lambda}{dt} \quad (3.87)$$

Se o fluxo concatenado puder ser expresso como  $\lambda = L(x)i$ , a equação externa torna-se

$$v_0 = iR + L(x)\frac{di}{dt} + i\frac{dL(x)}{dx}\frac{dx}{dt} \quad (3.88)$$

O segundo termo da direita,  $L(di/dt)$ , é o termo de tensão da indutância própria. O terceiro termo  $i(dL/dx)(dx/dt)$  inclui o multiplicador  $dx/dt$ . Essa é a velocidade do terminal mecânico, e freqüentemente é chamada simplesmente de *tensão de velocidade*. O termo de tensão de velocidade é comum a todos os sistemas de conversão eletromecânica de energia e é responsável pela transferência de energia de e para o sistema mecânico pelo sistema elétrico.

Em um sistema de excitação múltipla, equações elétricas correspondentes à Equação 3.87 são escritas para cada par de entradas. Se as expressões para  $\lambda$ 's forem expandidas em termos de indutâncias, como na Equação 3.88, então a indutância própria e a mútua serão necessárias.

O sistema mecânico da Fig. 3.23 inclui a representação de uma mola (constante de elasticidade ou de mola  $K$ ), um amortecedor (constante de amortecimento  $B$ ), uma massa  $M$ , e uma força externa de excitação  $f_0$ . Aqui, como no sistema elétrico, o amortecedor representa as perdas do sistema mecânico externo e também todas as perdas mecânicas do sistema de conversão eletromecânica de energia.

As forças na direção  $x$  e o deslocamento  $x$  se relacionam como segue:

**Mola:**

$$f_K = -K(x - x_0) \quad (3.89)$$

**Amortecedor:**

$$f_D = -B\frac{dx}{dt} \quad (3.90)$$

**Massa:**

$$f_M = -M\frac{d^2x}{dt^2} \quad (3.91)$$

onde  $x_0$  é o valor de  $x$  com a mola normalmente não esticada. Nesse caso, o equilíbrio de forças requer que

$$f_{campo} + f_K + f_D + f_M - f_0 = f_{campo} - K(x - x_0) - B\frac{dx}{dt} - M\frac{d^2x}{dt^2} - f_0 = 0 \quad (3.92)$$

Combinando as Equações 3.88 e 3.92, tem-se que as equações diferenciais para o sistema completo da Fig. 3.23, com entradas arbitrárias  $v_0(t)$  e  $f_0(t)$ , serão assim

$$v_0(t) = iR + L(x)\frac{di}{dt} + i\frac{dL(x)}{dx} \quad (3.93)$$

$$f_0(t) = -M \frac{d^2x}{dt^2} - B \frac{dx}{dt} - K(x - x_0) + f_{\text{campo}}(x, i) \quad (3.94)$$

As funções  $L(x)$  e  $f_{\text{campo}}(x, i)$  dependem das propriedades do sistema de conversão eletromecânica de energia e são calculadas como discutido anteriormente.

### EXEMPLO 3.10

A Fig. 3.24 mostra a seção transversal de um eletroímã com um solenóide cilíndrico dentro do qual o êmbolo cilíndrico de massa  $M$  move-se verticalmente dentro de guias de latão de espessura  $g$  e diâmetro médio  $d$ .

A permeabilidade do latão é a mesma do vácuo e vale  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m em unidades SI. O êmbolo está sustentado por uma mola cuja constante de elasticidade é  $K$ . O comprimento dela, quando não esticada, é  $l_0$ . Uma força mecânica de carga  $f_i$  é aplicada ao êmbolo pelo

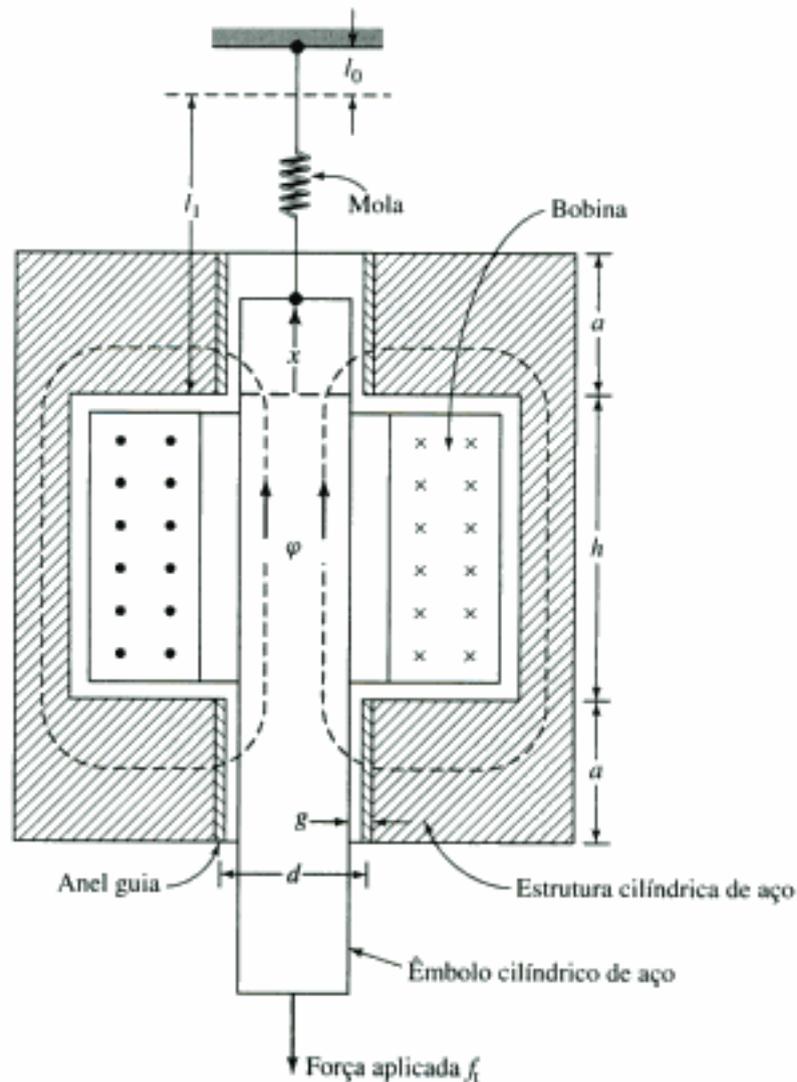


FIGURA 3.24 Eletroímã com solenóide do Exemplo 3.10.

sistema mecânico a ele conectado, como mostrado na Fig. 3.24. Suponha que a força de atrito é linearmente proporcional à velocidade e que o coeficiente de atrito é  $B$ . A bobina tem  $N$  espiras e resistência  $R$ . Sua tensão de terminal é  $v_t$  e sua corrente é  $i$ . Os efeitos da dispersão magnética e da relutância do aço são desprezíveis.

Deduza as equações dinâmicas de movimento do sistema eletromecânico, isto é, as equações diferenciais que expressam as variáveis dependentes  $i$  e  $x$  em termos de  $v_t, f_t$  e das constantes e dimensões dadas.

### ■ Solução

Começamos expressando a indutância em função de  $x$ . Os termos de acoplamento, isto é, a força magnética  $f_{\text{campo}}$  e a FEM  $e$ , podem ser expressos então em termos de  $x$  e  $i$ , e então essas expressões são substituídas nas equações dos sistemas mecânico e elétrico.

A relutância do circuito magnético é a dos dois anéis guias em série, onde o fluxo é direcionado radialmente através deles, como mostrado pelas linhas tracejadas de fluxo  $\varphi$  na Fig. 3.24. Como  $g \ll d$ , a densidade de fluxo nos anéis guias é muito aproximadamente constante em relação à distância radial. Em uma região onde a densidade de fluxo é constante, a relutância é

$$\frac{\text{Comprimento do caminho de fluxo na direção do campo}}{\mu \text{ (área do caminho de fluxo perpendicular ao campo)}}$$

A relutância do entreferro superior é

$$\mathcal{R}_1 = \frac{g}{\mu_0 \pi x d}$$

onde assume-se que o campo está concentrado na área entre o lado superior do êmbolo e o lado inferior do anel guia superior. Do mesmo modo, a relutância do entreferro inferior é

$$\mathcal{R}_2 = \frac{g}{\mu_0 \pi a d}$$

A relutância total é

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 = \frac{g}{\mu_0 \pi d} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{a} \right) = \frac{g}{\mu_0 \pi a d} \left( \frac{a+x}{x} \right)$$

Assim, a indutância é

$$L(x) = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{\mu_0 \pi a d N^2}{g} \left( \frac{x}{a+x} \right) = L' \left( \frac{x}{a+x} \right)$$

onde

$$L' = \frac{\mu_0 \pi a d N^2}{g}$$

A força magnética que atua verticalmente para cima sobre o êmbolo na direção  $x$  positiva é

$$f_{\text{campo}} = \left. \frac{\partial W'_{\text{campo}}(i, x)}{\partial x} \right|_i = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{dx} = \frac{i^2}{2} \frac{aL'}{(a+x)^2}$$

A FEM induzida na bobina é

$$e = \frac{d}{dt}(Li) = L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dx} \frac{dx}{dt}$$

ou

$$e = L' \left( \frac{x}{a+x} \right) \frac{di}{dt} + L' \left( \frac{ai}{(a+x)^2} \right) \frac{dx}{dt}$$

A substituição da força magnética na equação diferencial de movimento do sistema mecânico (Equação 3.94) fornece

$$f_t = -M \frac{d^2x}{dt^2} - B \frac{dx}{dt} - K(x - l_0) + \frac{1}{2} L' \frac{ai^2}{(a+x)^2}$$

A equação de tensão do sistema elétrico é (da Equação 3.93)

$$v_t = iR + L' \left( \frac{x}{a+x} \right) \frac{di}{dt} + iL' \left( \frac{a}{(a+x)^2} \right) \frac{dx}{dt}$$

Essas duas equações são os resultados desejados. São válidas apenas enquanto o lado superior do êmbolo estiver bem dentro do anel guia superior, digamos, entre os limites  $0,1 a < x < 0,9a$ . Esse é o intervalo normal de trabalho do solenóide.

### 3.9 TÉCNICAS ANALÍTICAS

Discutimos dispositivos relativamente simples neste capítulo. Os dispositivos têm um ou dois terminais elétricos e um mecânico, que usualmente está restrito a um movimento incremental. Dispositivos mais complicados, capazes de conversão contínua de energia, serão tratados nos capítulos seguintes. As técnicas analíticas discutidas aqui aplicam-se aos dispositivos simples, mas os princípios são aplicáveis também aos mais complicados.

Alguns dos dispositivos descritos neste capítulo são usados para produzir movimento grosseiro, como em relés e solenóides, onde os dispositivos operam sob condições essencialmente de "ligado" ou "desligado". A análise desses dispositivos é realizada para se determinar a força, em função do deslocamento, e a reação sobre a fonte elétrica. Tais cálculos já foram feitos neste capítulo. Se forem necessários detalhes de movimento, como o deslocamento em função do tempo após a energização do dispositivo, então equações diferenciais não-lineares na forma das Equações 3.93 e 3.94 deverão ser resolvidas.

Contrastando com dispositivos de movimento grosseiro, outros dispositivos como alto-falantes, cápsulas fonográficas ou de microfone, e transdutores de vários tipos são projetados para operar com deslocamentos relativamente pequenos e para produzir uma relação linear entre os sinais elétricos e os movimentos mecânicos, e vice-versa. A relação entre as variáveis elétricas e mecânicas é tornada linear, tanto pelo projeto do dispositivo, como pela restrição da excursão dos sinais a um intervalo linear. Em ambos os casos, as equações diferenciais são lineares e podem ser resolvidas usando técnicas padronizadas para resposta transitória ou em frequência, e assim por diante, conforme a necessidade.

#### 3.9.1 Deslocamento

As equações diferenciais de um dispositivo de excitação simples, como deduzidas no Exemplo 3.10, são da forma

$$\frac{1}{2} L' \left( \frac{ai^2}{(a+x)^2} \right) = M \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + K(x - l_0) + f_t \quad (3.95)$$

$$v_t = iR + L' \left( \frac{x}{a+x} \right) \frac{di}{dt} + L' \left( \frac{ai}{(a+x)^2} \right) \frac{dx}{dt} \quad (3.96)$$

Um problema típico, usando essas equações diferenciais, é encontrar o deslocamento  $x(t)$  quando uma tensão prescrita  $v_t = V_0$  é aplicada em  $t = 0$ . Um problema ainda mais simples é obter o tempo necessário para que a armadura mova-se de sua posição  $x(0)$  em  $t = 0$  até um dado deslocamento  $x = X$ , quando uma tensão  $v_t = V$  é aplicada em  $t = 0$ . Não existe nenhuma solução analítica genérica para essas equações diferenciais; elas são não-lineares, envolvendo produtos e potências das variáveis  $x$  e  $i$  e de suas derivadas. Elas podem ser resolvidas usando-se técnicas de integração numéricas baseadas em computadores.

Em muitos casos, o problema do deslocamento pode ser simplificado e uma solução encontrada por métodos relativamente simples. Por exemplo, quando o enrolamento do dispositivo é conectado à fonte de tensão através de uma resistência relativamente elevada, o termo  $iR$  predomina no segundo membro da Equação 3.96 sobre o termo  $d i / d t$  de tensão da indutância própria e o termo  $d x / d t$  de tensão de velocidade. Pode-se supor então que a corrente  $i$  seja igual a  $V / R$  e inseri-la diretamente na Equação 3.95. A mesma suposição pode ser feita quando o enrolamento é acionado por um circuito eletrônico de potência que controla diretamente a corrente do enrolamento. Supondo que  $i = V / R$ , dois casos podem ser resolvidos facilmente.

**Caso 1** O primeiro caso inclui aqueles dispositivos em que o movimento dinâmico é dominado pelo amortecimento ao invés da inércia, como, por exemplo, dispositivos que de propósito têm baixa inércia ou relés que têm amortecedores para retardar o movimento. Sob tais condições, por exemplo, com  $f_t = 0$ , a equação diferencial da Equação 3.95 reduz-se a

$$B \frac{dx}{dt} = f(x) = \frac{1}{2} L' \left( \frac{a}{(a+x)^2} \right) \left( \frac{V}{R} \right)^2 - K(x - l_0) \quad (3.97)$$

onde  $f(x)$  é a diferença entre a força de origem elétrica e a força da mola no dispositivo da Fig. 3.24. A velocidade, para qualquer valor de  $x$ , é simplesmente  $dx/dt = f(x)/B$ ; o tempo  $t$  para chegar a  $x = X$  é dado por

$$t = \int_0^X \frac{B}{f(x)} dx \quad (3.98)$$

A integração da Equação 3.98 pode ser realizada analítica ou numericamente.

**Caso 2** Neste caso, o movimento dinâmico é governado pela inércia ao invés do amortecimento. Novamente, com  $f_t = 0$ , a equação diferencial da Equação 3.95 reduz-se a

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = f(x) = \frac{1}{2} L' \left( \frac{a}{(a+x)^2} \right) \left( \frac{V}{R} \right)^2 - K(x - l_0) \quad (3.99)$$

A Equação 3.99 pode ser escrita na forma

$$\frac{M}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = f(x) \quad (3.100)$$

e a velocidade  $v(x)$ , para qualquer valor  $x$ , é dada então por

$$v(x) = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{M} \int_0^x f(x') dx'} \quad (3.101)$$

A integração da Equação 3.101 pode ser realizada analítica ou numericamente para se encontrar a velocidade  $v(x)$  e o tempo  $t$  necessário para se chegar a qualquer valor de  $x$ .

### 3.9.2 Linearização

Quando forem usados como transdutores, os dispositivos caracterizados por equações diferenciais não-lineares, como as Equações 3.95 e 3.96, fornecerão respostas não-lineares a sinais de entrada. Para se obter comportamento linear, os deslocamentos e os sinais elétricos em tais dispositivos devem ser restringidos a pequenas excursões em torno de seus valores de equilíbrio. A posição de equilíbrio do deslocamento é obtida por uma FMM de polarização, produzida por uma corrente CC de enrolamento, ou por um imã permanente que atua contra uma mola, ou ainda por um par de enrolamentos que produzem FMM cujas forças cancelam-se no ponto de equilíbrio. O ponto de equilíbrio deve ser estável; o transdutor deve retornar à posição de equilíbrio após uma pequena perturbação.

Com a corrente e a força aplicadas iguais aos seus valores de equilíbrio,  $I_0$  e  $f_0$  respectivamente, o deslocamento  $X_0$  e a tensão  $V_0$  de equilíbrio podem ser determinados, para o sistema descrito pelas Equações 3.95 e 3.96, tornando as derivadas, em relação ao tempo, iguais a zero. Assim,

$$\frac{1}{2}L' \left( \frac{aI_0^2}{(a+I_0)^2} \right) = K(X_0 - I_0) + f_0 \quad (3.102)$$

$$V_0 = I_0 R \quad (3.103)$$

A operação incremental pode ser descrita expressando cada variável como sendo a soma de seus valores de equilíbrio e de incremento; assim  $i = I_0 + i'$ ,  $f_i = f_0 + f'$ ,  $v_i = V_0 + v'$  e  $x = X_0 + x'$ . Então, as equações são linearizadas cancelando todos os produtos de incrementos, que são de segunda ordem. As Equações 3.95 e 3.96 tornam-se, portanto,

$$\frac{1}{2} \frac{L'a(I_0 + i')^2}{(a + X_0 + x')^2} = M \frac{d^2x'}{dt^2} + B \frac{dx'}{dt} + K(X_0 + x' - I_0) + f_0 + f' \quad (3.104)$$

e

$$V_0 + v' = (I_0 + i')R + \frac{L'(X_0 + x')}{a + X_0 + x'} \frac{di'}{dt} + \frac{L'a(I_0 + i')}{(a + X_0 + x')^2} \frac{dx'}{dt} \quad (3.105)$$

Os termos de equilíbrio são cancelados e, mantendo-se apenas os termos incrementais de primeira ordem, resulta um conjunto de equações diferenciais lineares que dependem apenas das variáveis incrementais de primeira ordem,

$$\frac{L'aI_0}{(a + X_0)^2} i' = M \frac{d^2x'}{dt^2} + B \frac{dx'}{dt} + \left[ K + \frac{L'aI_0^2}{(a + X_0)^3} \right] x' + f' \quad (3.106)$$

$$v' = i'R + \frac{L'X_0}{a + X_0} \frac{di'}{dt} + \frac{L'aI_0}{(a + X_0)^2} \frac{dx'}{dt} \quad (3.107)$$

Para se obter a resposta no tempo, técnicas padronizadas podem ser usadas para se resolver esse sistema de equações diferenciais. Alternativamente, pode-se supor que o funcionamento em regime permanente seja senoidal. Em seguida, as Equações 3.106 e 3.107 podem ser convertidas em um sistema de equações algébricas lineares complexas e, finalmente, elas podem então ser resolvidas no domínio de frequência.

## 3.10 RESUMO

Em sistemas eletromecânicos, a energia é armazenada em campos elétricos e magnéticos. Quando a energia do campo for influenciada pela configuração das partes mecânicas que de-

limitam o campo, criam-se forças mecânicas que tendem a mover os elementos mecânicos de forma que a energia seja transmitida do campo para o sistema mecânico.

Sistemas magnéticos de excitação simples foram considerados primeiro na Seção 3.3. Removendo os elementos de perdas elétricas e mecânicas do sistema de conversão eletromecânica de energia (e incorporando-os como elementos de perdas nos sistemas externos elétricos e mecânicos), o dispositivo de conversão de energia pode ser modelado como sendo um sistema conservativo. A sua energia torna-se então uma função de estado, determinada por suas variáveis de estado  $\lambda$  e  $x$ . Na Seção 3.4, foram deduzidas expressões para determinar a força e o conjugado como sendo o negativo da derivada parcial da energia, em relação ao deslocamento, calculada mantendo-se constante o fluxo concatenado  $\lambda$ .

Na Seção 3.5, a função de estado da co-energia, com variáveis de estado  $i$  e  $x$  ou  $\theta$ , é introduzida. Mostra-se então que a força e o conjugado são dados pela derivada parcial da co-energia, em relação ao deslocamento, calculada mantendo-se constante a corrente  $i$ .

Esses conceitos são ampliados na Seção 3.6 para incluir sistemas com enrolamentos múltiplos. A Seção 3.7 expande ainda mais o desenvolvimento para incluir sistemas em que os ímãs permanentes estão presentes entre as fontes de energia magnética armazenada.

Os dispositivos de conversão de energia operam entre os sistemas elétricos e os mecânicos. O seu comportamento é descrito por equações diferenciais que incluem os termos de acoplamento entre sistemas, como foi discutido na Seção 3.8. Usualmente essas equações são não-lineares e, se necessário, podem ser resolvidas por métodos numéricos. Como discutido na Seção 3.9, em alguns casos, aproximações podem ser feitas para simplificar as equações. Em muitas situações, por exemplo, as análises linearizadas podem fornecer *insights* úteis, em relação tanto ao projeto como ao desempenho dos dispositivos.

Este capítulo tratou de princípios básicos que se aplicam amplamente ao processo de conversão eletromecânica de energia, com ênfase em sistemas com campos magnéticos. Basicamente, as máquinas rotativas e os transdutores lineares de deslocamento trabalham da mesma forma. O restante deste livro será dedicado quase inteiramente a máquinas rotativas. Tipicamente, contêm múltiplos enrolamentos e podem incluir ímãs permanentes. O seu desempenho pode ser analisado usando as técnicas e princípios desenvolvidos neste capítulo.

## 3.11 PROBLEMAS

- 3.1** O rotor da Fig. 3.25 é semelhante ao da Fig. 3.2 (Exemplo 3.1), exceto que tem duas bobinas em vez de uma. O rotor é não-magnético e está colocado em um campo magnético uniforme de módulo  $B_0$ . Os lados das bobinas têm raio  $R$  e estão espaçados uniformemente ao redor da superfície do rotor. A primeira bobina está conduzindo uma corrente  $I_1$  e a segunda, uma corrente  $I_2$ .

Supondo que o rotor tenha um comprimento de 0,30 m,  $R = 0,13$  m, e  $B_0 = 0,85$  T, encontre o conjugado no sentido de  $\theta$  em função da posição  $\alpha$  do rotor para (a)  $I_1 = 0$  A e  $I_2 = 5$  A, (b)  $I_1 = 5$  A e  $I_2 = 0$  A, e (c)  $I_1 = 8$  A e  $I_2 = 8$  A.

- 3.2** As correntes de enrolamento do rotor do Problema 3.1 são controladas em função do ângulo  $\alpha$  do rotor de modo que

$$I_1 = 8 \sin \alpha \text{ A} \quad \text{e} \quad I_2 = 8 \cos \alpha \text{ A}$$

Escreva uma expressão para o conjugado do rotor em função da posição  $\alpha$  do rotor.

- 3.3** Calcule a energia magnética armazenada no circuito magnético do Exemplo 1.2.

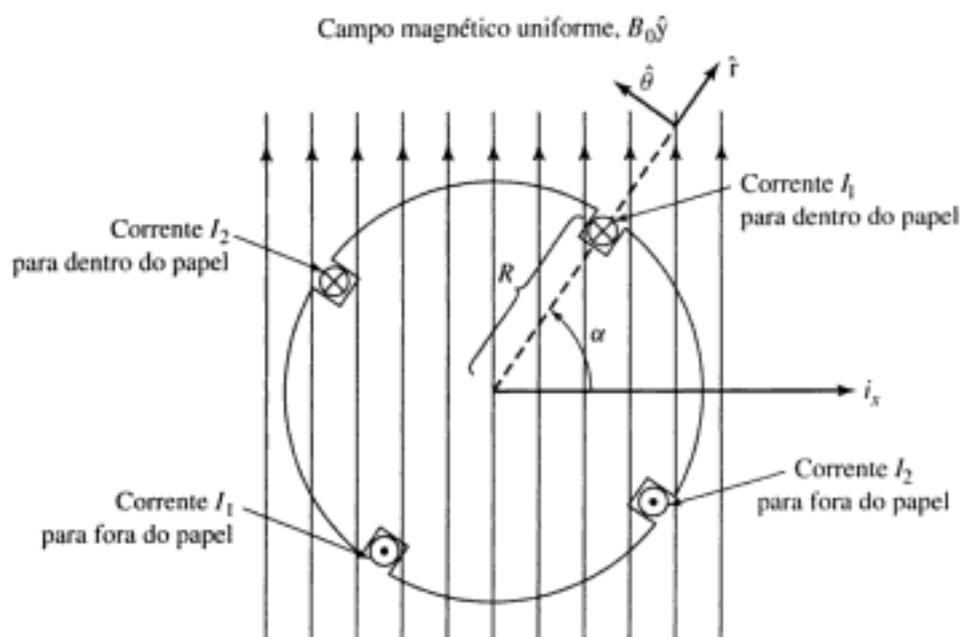


FIGURA 3.25 Rotor de duas bobinas do Problema 3.1.

3.4 Um indutor tem uma indutância que foi obtida experimentalmente como sendo

$$L = \frac{2L_0}{1 + x/x_0}$$

onde  $L_0 = 30$  mH,  $x_0 = 0,87$  mm, e  $x$  é o deslocamento de um elemento móvel. A sua resistência de enrolamento foi medida, sendo igual a  $110$  m $\Omega$ .

- O deslocamento  $x$  é mantido constante em  $0,90$  mm, e a corrente é incrementada de  $0$  a  $6,0$  A. Encontre a energia magnética resultante armazenada no indutor.
  - Em seguida, a corrente é mantida constante em  $6,0$  A e o deslocamento é incrementado até  $1,80$  mm. Encontre a alteração correspondente de energia magnética armazenada.
- 3.5 Repita o Problema 3.4 supondo que o indutor esteja conectado a uma fonte de tensão que aumenta de  $0$  a  $0,4$  V (parte [a]) e então é mantida constante em  $0,4$  V (parte [b]). Em ambos os cálculos, suponha que todos os transitórios elétricos possam ser ignorados.
- 3.6 O indutor do Problema 3.4 é acionado por uma fonte senoidal de corrente da forma

$$i(t) = I_0 \text{sen } \omega t$$

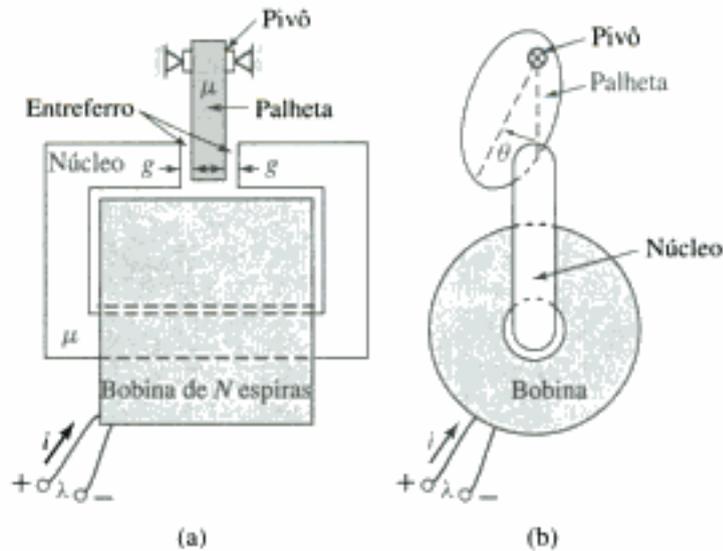
onde  $I_0 = 5,5$  A e  $\omega = 100\pi$  (50 Hz). Com o deslocamento mantido fixo em  $x = x_0$ , calcule (a) a energia magnética média ( $W_{\text{campo}}$ ), em relação ao tempo, armazenada no indutor e (b) a potência dissipada média, em relação ao tempo, na resistência de enrolamento.



- 3.7 Um atuador com uma palheta rotativa está mostrada na Fig. 3.26. Você pode assumir que a permeabilidade do núcleo e da palheta seja infinita ( $\mu \rightarrow \infty$ ). O comprimento total do entreferro é  $2g$  e o formato da palheta é tal que se pode assumir que a área efetiva do entreferro é dada por

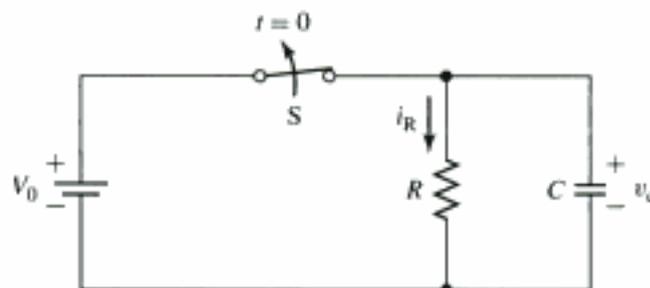
$$A_g = A_0 \left( 1 - \left( \frac{4\theta}{\pi} \right)^2 \right)$$

(válido apenas no intervalo  $|\theta| \leq \pi/6$ ). As dimensões do atuador são  $g = 0,8$  mm,  $A_0 = 6,0$  mm<sup>2</sup> e  $N = 650$  espiras.



**FIGURA 3.26** Atuador com palheta rotativa do Problema 3.7. (a) Vista lateral. (b) Vista frontal.

- a. Supondo que a bobina esteja conduzindo uma corrente  $i$ , escreva uma expressão para a energia magnética armazenada no atuador em função do ângulo  $\theta$  para  $|\theta| \leq \pi/6$ .
  - b. Encontre a indutância correspondente  $L(\theta)$ . Use o MATLAB para plotar essa indutância em função de  $\theta$ .
- 3.8** Um circuito RC está conectado a uma bateria, como mostrado na Fig. 3.27. A chave S está inicialmente fechada e é aberta no tempo  $t = 0$ .
- a. Encontre a tensão  $v_C(t)$  do capacitor para  $t \geq 0$ .
  - b. Quais são os valores inicial e final ( $t = \infty$ ) da energia armazenada no capacitor? (Sugestão:  $W_{\text{campo}} = \frac{1}{2} q^2/C$ , onde  $q = CV_0$ .) Qual é a energia armazenada no capacitor em função do tempo?
  - c. Qual é a potência dissipada no resistor em função do tempo? Qual é a energia total dissipada no resistor?
- 3.9** Um circuito RL está conectado a uma bateria, como mostrado na Fig. 3.28. A chave S está inicialmente fechada e é aberta no tempo  $t = 0$ .
- a. Encontre a corrente  $i_L(t)$  do indutor para  $t \geq 0$ . (Sugestão: Observe que, enquanto a chave estiver fechada, o diodo estará inversamente polarizado, podendo ser visto como um circuito aberto. Logo após a chave ser aberta, o diodo torna-se diretamente polarizado, podendo ser visto como um curto-circuito.)



**FIGURA 3.27** Circuito RC do Problema 3.8

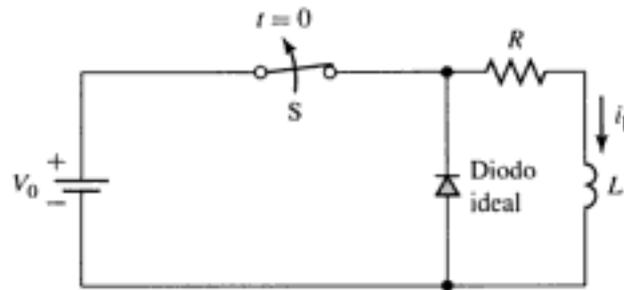


FIGURA 3.28 Circuito RL do Problema 3.9.

- b. Quais são os valores inicial e final ( $t = \infty$ ) da energia armazenada no indutor? Qual é a energia armazenada no indutor em função do tempo?
- c. Qual é a potência dissipada no resistor em função do tempo? Qual é a energia total dissipada no resistor?
- 3.10** A constante de tempo  $L/R$  do enrolamento de campo de um gerador síncrono de 500 MVA é 4,8 s. Em condições normais de funcionamento, sabe-se que o enrolamento de campo dissipa 1,3 MW. Calcule a energia magnética armazenada correspondente.
- 3.11** A indutância de um enrolamento de fase de um motor trifásico de pólos salientes foi medida, sendo dada por

$$L(\theta_m) = L_0 + L_2 \cos 2\theta_m$$

onde  $\theta_m$  é a posição angular do rotor.

- a. Quantos pólos há no rotor deste motor?
- b. Supondo que todas as demais correntes de enrolamento sejam zero e que esta fase seja excitada por uma corrente constante  $I_0$ , encontre o conjugado  $T_{\text{campo}}(\theta)$  que atua sobre o rotor.



- 3.12** Atuadores de solenóide, cilíndricos e envoltos em ferro, na forma mostrada na Fig. 3.29, são usados em acionamento de disjuntores, operação de válvulas e outras aplicações onde uma força relativamente grande deve ser aplicada a um elemento que se desloca por uma distância relativamente pequena. Quando a corrente da bobina é zero, o êmbolo cai até um pino limitador de deslocamento de modo que o entreferro  $g$  tenha 2,25 cm. Quando a bobina é energizada por uma corrente contínua de intensidade suficiente, o êmbolo é elevado até um outro pino limitador, ajustado de modo que o entreferro  $g$  seja 0,2 cm. O êmbolo é apoiado de modo que possa se mover livremente na direção vertical. Pode-se supor que o entreferro radial entre a carcaça e o êmbolo seja uniforme e tenha 0,05 cm.

Neste problema, despreze a dispersão e o espriamento magnéticos nos entreferros. A bobina de excitação tem 1.300 espiras e conduz uma corrente constante de 2,3 A. Suponha que a FMM no ferro possa ser desprezada e use MATLAB para

- a. plotar a densidade de fluxo no entreferro variável, entre o *yoke* e o êmbolo, para o intervalo de deslocamentos do êmbolo,
- b. plotar os valores correspondentes da energia magnética total armazenada no campo magnético em  $\mu\text{J}$ , e
- c. plotar os valores correspondentes de indutância da bobina em  $\mu\text{H}$ .
- 3.13** Considere o atuador de êmbolo da Fig. 3.29. Suponha que o êmbolo esteja inicialmente totalmente aberto ( $g = 2,25$  cm) e que uma bateria seja usada para suprir uma corrente de 2,5 A ao enrolamento.

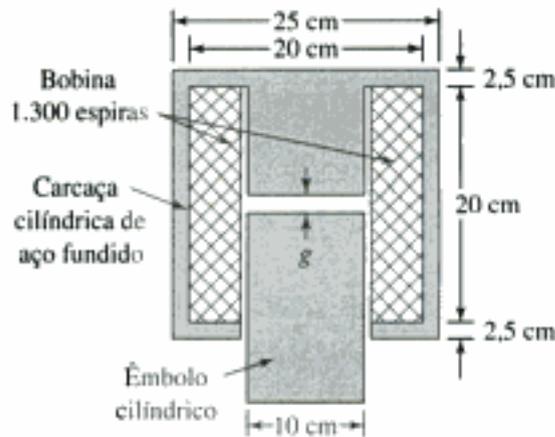


FIGURA 3.29 Atuador de êmbolo do Problema 3.12.

- a. Se o êmbolo for obrigado a se mover muito lentamente (isto é, lentamente em relação à constante de tempo elétrica do atuador), reduzindo o entreferro de 2,25 a 0,20 cm, quanto trabalho mecânico em joules será fornecido ao êmbolo?
  - b. Para as condições da parte (a), quanta energia será fornecida pela bateria (além da potência dissipada na bobina)?
- 3.14** Como mostrado na Fig. 3.30, um eletroímã de  $N$  espiras deve ser usado para levantar uma barra de ferro de massa  $M$ . A aspereza da superfície do ferro é tal que quando o ferro e o eletroímã estão em contato, há um entreferro mínimo de  $g_{\min} = 0,18$  mm em cada perna. A área da seção reta do eletroímã é  $A_c = 32$  cm e a resistência da bobina é  $2,8 \Omega$ . Calcule a tensão mínima na bobina que deve ser usada para elevar uma barra de 95 kg de massa contra a força de gravidade. Despreze a relutância do ferro.
- 3.15** Dados sobre a curva de magnetização da porção de ferro do circuito magnético do atuador de êmbolo do Problema 3.12 estão mostrados abaixo:

Fluxo (mWb)	5,12	8,42	9,95	10,6	10,9	11,1	11,3	11,4	11,5	11,6
FMM (A . e)	68	135	203	271	338	406	474	542	609	677

- a. Use a função *polyfit* do MATLAB para obter um ajuste de terceira ordem para a relutância e o fluxo total *versus* a FMM das partes de ferro do circuito magnético.

Seus ajustes serão da forma:

$$\mathcal{R}_{\text{ferro}} = a_1 \mathcal{F}_{\text{ferro}}^3 + a_2 \mathcal{F}_{\text{ferro}}^2 + a_3 \mathcal{F}_{\text{ferro}} + a_4$$

$$\phi_{\text{ferro}} = b_1 \mathcal{F}_{\text{ferro}}^3 + b_2 \mathcal{F}_{\text{ferro}}^2 + b_3 \mathcal{F}_{\text{ferro}} + b_4$$

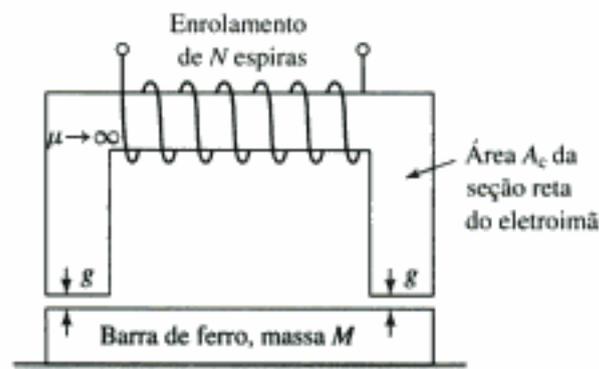
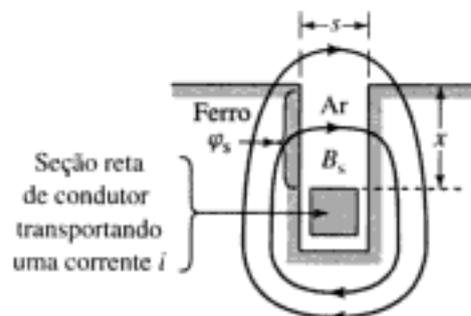


FIGURA 3.30 Elevação de uma barra de ferro por um eletroímã (Problema 3.14).

Liste os coeficientes.

- b. (i) Usando MATLAB e as funções encontradas na parte (a), plote a curva de magnetização do circuito magnético completo (fluxo concatenado  $\lambda$  versus corrente de enrolamento  $i$ ) para um entreferro de comprimento variável de  $g = 0,2$  cm. Nos mesmos eixos, plote a curva de magnetização para o caso em que se supõe uma permeabilidade infinita para o ferro. A corrente máxima na sua plotagem deve corresponder a um fluxo no circuito magnético de 600 mWb.  
(ii) Calcule a energia e a co-energia do campo magnético para cada um desses casos, correspondentes a uma corrente de enrolamento de 2,0 A.
- c. Repita a parte (b) para um comprimento variável de entreferro de  $g = 2,25$  cm. Na parte (ii), calcule a energia e a co-energia do campo magnético, correspondentes a uma corrente de enrolamento de 20 A.
- 3.16** Um indutor é feito de uma bobina de 525 espiras e de um núcleo, com uma seção de  $14 \text{ cm}^2$  de área e um comprimento de entreferro de 0,16 mm. A bobina está conectada diretamente a uma fonte de tensão de 120 V e 60 Hz. Despreze a resistência da bobina e a indutância de dispersão. Supondo que a relutância da bobina seja desprezível, calcule a força média, em relação ao tempo, que atua sobre o núcleo tendendo a fechar o entreferro. Como essa força iria variar se o comprimento do entreferro fosse dobrado?
- 3.17** A Fig. 3.31 mostra de forma genérica o fluxo dispersivo em uma ranhura retangular. O fluxo é produzido por uma corrente  $i$  em um condutor de seção retangular que está inserido em uma ranhura no ferro. Suponha que a relutância do ferro seja desprezível e que o fluxo dispersivo cruze a ranhura na região entre a parte superior do condutor e o topo da ranhura.
- Deduza uma expressão para a densidade de fluxo  $B_s$  na região entre a parte superior do condutor e o topo da ranhura.
  - Deduza uma expressão para o fluxo de dispersão  $\varphi_s$ , que cruza a ranhura na região acima do condutor, em termos da altura  $x$  da ranhura acima do condutor, da largura  $s$  da ranhura, e do comprimento  $l$  da porção de condutor perpendicular ao papel que está inserida na ranhura.
  - Deduza uma expressão para a força  $f$  criada por esse campo magnético em um condutor de comprimento  $l$ . Em que sentido essa força atua sobre o condutor?
  - Para uma corrente de 850 A, calcule a força por metro em um condutor que está inserido em uma ranhura de 2,5 cm de largura.



**FIGURA 3.31** Condutor em uma ranhura (Problema 3.17).

- 3.18** Um solenóide comprido e delgado de raio  $r_0$  e altura  $h$  está mostrado na Fig. 3.32. O campo magnético dentro de um solenóide como esse está direcionado axialmente e é essencialmente uniforme, sendo igual a  $H = Ni/h$ . Pode-se mostrar que o campo magnético fora do solenóide é desprezível. Calcule a pressão radial, em newtons por metro quadrado, que age sobre os lados do solenóide para uma corrente constante  $i = I_0$ .
- 3.19** Um sistema eletromecânico, no qual o armazenamento de energia elétrica dá-se nos campos elétricos, pode ser analisado por técnicas diretamente análogas às deduzidas neste capítulo para os sistemas de campo magnético. Considere um sistema como esse em que é possível separar matematicamente entre si o mecanismo de perdas e o de armazenamento de energia nos campos elétricos. Então, o sistema poderá ser representado como na Fig. 3.33. Para um único terminal elétrico, a Equação 3.11 pode ser aplicada, tendo-se

$$dW_{\text{elétr}} = vi dt = v dq$$

onde  $v$  é a tensão no terminal elétrico e  $q$  é a carga líquida associada ao armazenamento de energia elétrica. Assim, por analogia com a Equação 3.16,

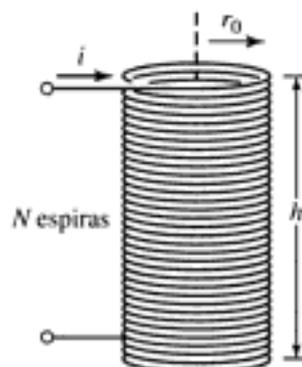
$$dW_{\text{campo}} = v dq - f_{\text{campo}} dx$$

- Deduz a expressão para a energia elétrica armazenada  $W_{\text{campo}}(q, x)$  análoga à da energia magnética armazenada da Equação 3.18.
  - Deduz a expressão, análoga à Equação 3.26, para a força de origem elétrica  $f_{\text{campo}}$ . Expresse claramente qual variável deve ser mantida constante quando se calcula a derivada.
  - Por analogia com a dedução das Equações 3.34 a 3.41, deduz a expressão para a co-energia  $W'_{\text{campo}}(v, x)$  e a correspondente força de origem elétrica.
- 3.20** Um capacitor (Fig. 3.34) é constituído de duas placas condutoras de área  $A$  separadas no ar por uma distância  $x$ . A tensão nos terminais é  $v$  e a carga nas placas é  $q$ . A capacitância  $C$ , definida como sendo a razão entre a carga e a tensão, é

$$C = \frac{q}{v} = \frac{\epsilon_0 A}{x}$$

onde  $\epsilon_0$  é a constante dielétrica do vácuo (em unidades do SI,  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$  F/m).

- Usando os resultados do Problema 3.19, deduz expressões para a energia  $W_{\text{campo}}(q, x)$  e a co-energia  $W'_{\text{campo}}(v, x)$ .
- Os terminais do capacitor são conectados a uma fonte de tensão constante  $V_0$ . Deduz a expressão que forneça a força necessária para manter as placas separadas por uma distância constante  $x = \delta$ .



**FIGURA 3.32** Bobina solenóide (Problema 3.18).

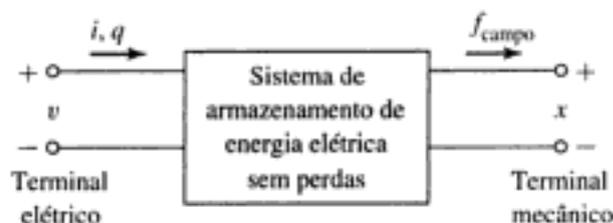


FIGURA 3.33 Sistema de armazenamento de energia elétrica sem perdas.

- 3.21 A Fig. 3.35 mostra esquematicamente um *voltímetro eletrostático* que é um sistema capacitativo constituído por um eletrodo fixo e um outro móvel. O eletrodo móvel é conectado a um braço que gira em torno de um eixo de modo que o entreferro entre os eletrodos mantém-se constante quando o braço gira. A capacitância deste sistema é dada por

$$C(\theta) = \frac{\epsilon_0 R d (\alpha - |\theta|)}{g} \quad (|\theta| \leq \alpha)$$

Uma mola de torção é conectada ao braço móvel, produzindo um conjugado

$$T_{\text{mola}} = -K(\theta - \theta_0)$$

- Para  $0 \leq \theta \leq \alpha$ , usando os resultados do Problema 3.19, deduza uma expressão para o conjugado eletromagnético  $T_{\text{campo}}$  em termos da tensão aplicada  $V_{cc}$ .
- Encontre uma expressão para a posição angular do braço móvel em função da tensão aplicada  $V_{cc}$ .
- Para um sistema com

$$\begin{aligned} R &= 12 \text{ cm}, & d &= 4 \text{ cm}, & g &= 0,2 \text{ mm} \\ \alpha &= \pi/3 \text{ rad}, & \theta_0 &= 0 \text{ rad}, & K &= 3,65 \text{ N} \cdot \text{m/rad} \end{aligned}$$

Plote a posição do braço em graus como uma função da tensão aplicada para  $0 \leq V_{cc} \leq 1500 \text{ V}$ .

- 3.22 O circuito magnético de dois enrolamentos da Fig. 3.36 tem um enrolamento em um *yoke* fixo e um segundo enrolamento em um elemento móvel. O elemento móvel é obrigado a se movimentar de modo que os comprimentos dos dois entreferros permaneçam iguais.
- Encontre as indutâncias próprias dos enrolamentos 1 e 2 em termos das dimensões do núcleo e do número de espiras.
  - Encontre a indutância mútua entre os dois enrolamentos.
  - Calcule a co-energia  $W'_{\text{campo}}(i_1, i_2)$ .
  - Encontre uma expressão para a força que atua sobre o elemento móvel, em função das correntes dos enrolamentos.

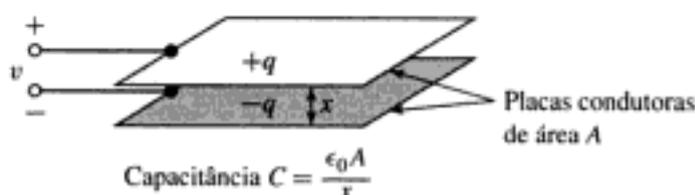


FIGURA 3.34 Placas de capacitor (Problema 3.20).

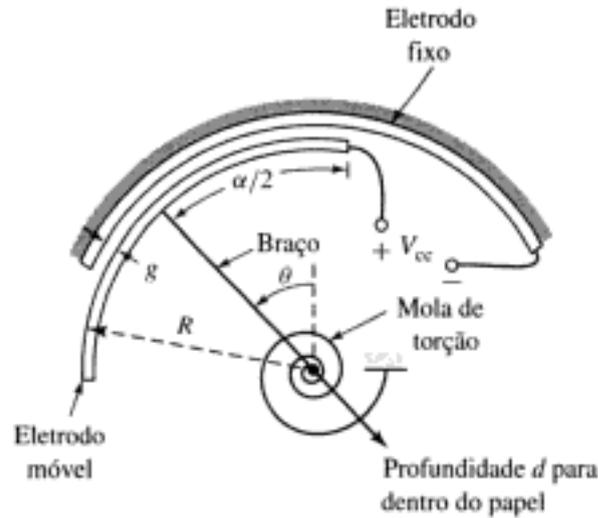


FIGURA 3.35 Voltímetro eletrostático esquemático (Problema 3.21).



3.23 Duas bobinas, uma montada em um estator e a outra, em um rotor, têm indutâncias próprias e mútua de

$$L_{11} = 3,5 \text{ mH} \quad L_{22} = 1,8 \text{ mH} \quad L_{12} = 2,1 \cos \theta \text{ mH}$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre os eixos das bobinas. Elas estão conectadas em série e conduzem uma corrente

$$i = \sqrt{2} I \sin \omega t$$

- Deduza uma expressão para o conjugado instantâneo  $T$  no rotor em função da posição angular  $\theta$ .
- Encontre uma expressão para o conjugado médio  $T_{\text{médio}}$ , em relação ao tempo, em função de  $\theta$ .
- Calcule o valor numérico de  $T_{\text{médio}}$  para  $I = 10 \text{ A}$  e  $\theta = 90^\circ$ .
- Faça o esboço das curvas de  $T_{\text{médio}}$  versus  $\theta$  para as correntes  $I = 5, 7,07$  e  $10 \text{ A}$ .

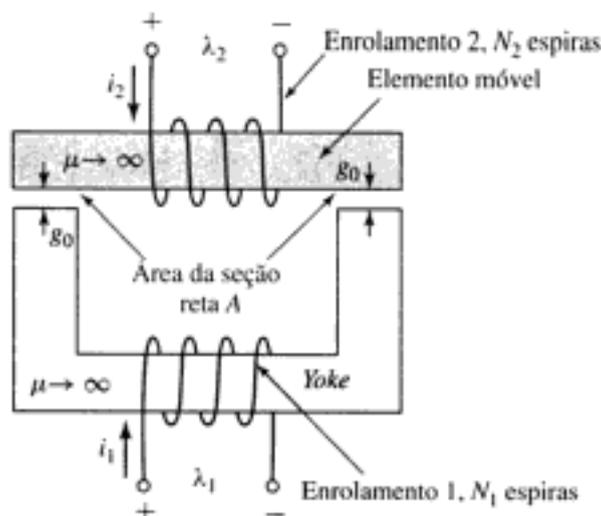


FIGURA 3.36 Circuito magnético de dois enrolamentos para o Problema 3.22.

- e. Agora, uma mola helicoidal controladora de posição, tendendo a manter o rotor em  $\theta = 90^\circ$ , é conectada ao rotor. O conjugado da mola é proporcional à deflexão angular medida desde  $\theta = 90^\circ$  e vale  $-0,1 \text{ N} \cdot \text{m}$  quando o rotor é girado até  $\theta = 0^\circ$ . Mostre, nas curvas da parte (d), como você poderia obter a posição angular da combinação rotor mais mola para correntes de bobina de  $I = 5, 7,07$  e  $10 \text{ A}$ . Com base nas curvas, estime o ângulo do rotor para cada uma dessas correntes.
- f. Escreva um *script* de MATLAB para plotar a posição angular do rotor em função da corrente eficaz para  $0 \leq I \leq 10 \text{ A}$ .

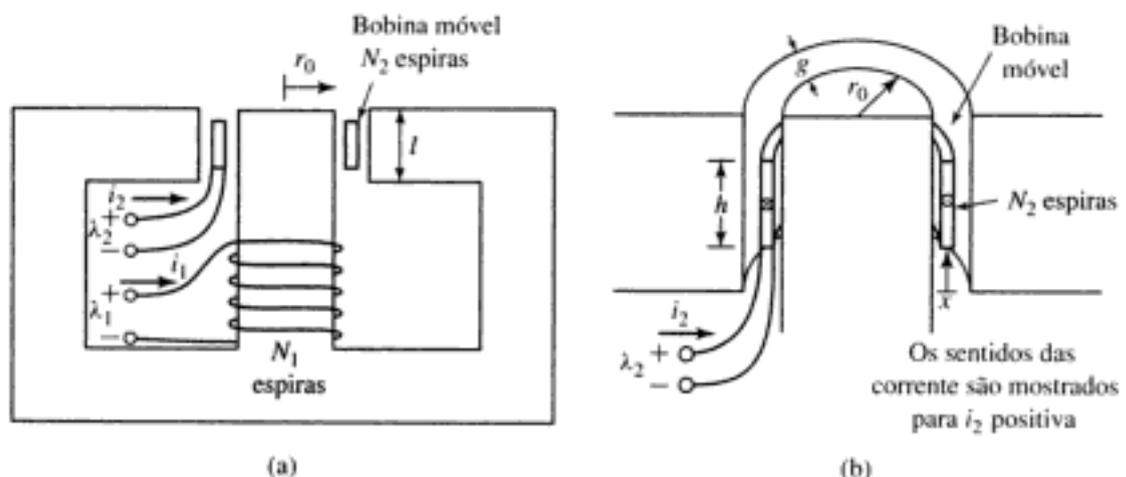
(Observe que esse problema ilustra os princípios do amperímetro CA do tipo eletrodinâmico)

- 3.24** Dois enrolamentos, um montado em um estator e o outro, em um rotor, têm indutâncias próprias e mútua de

$$L_{11} = 4,5 \text{ H} \quad L_{22} = 2,5 \text{ H} \quad L_{12} = 2,8 \cos \theta \text{ H}$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre os eixos dos enrolamentos. As resistências dos enrolamentos podem ser desprezadas. O enrolamento 2 está em curto-circuito e a corrente no enrolamento 1, em função do tempo, é  $i_1 = 10 \sin \omega t \text{ A}$ .

- Deduza uma expressão para o valor numérico, em newtons-metros, do conjugado instantâneo no rotor em termos do ângulo  $\theta$ .
  - Calcule o conjugado médio, em relação ao tempo, em newtons-metros quando  $\theta = 45^\circ$ .
  - Se o rotor puder se mover, irá ele girar continuamente ou tenderá a entrar em repouso? Nesse último caso, para qual valor de  $\theta_0$ ?
- 3.25** Um alto-falante é constituído de um núcleo magnético, de permeabilidade infinita e simetria circular, como se mostra nas Figs. 3.37a e b. O comprimento  $g$  do entreferro é muito menor que o raio  $r_0$  do núcleo central. A bobina móvel só pode se movimentar na direção  $x$  e está conectada ao cone do alto-falante, não mostrado na figura. Um campo magnético radial constante é produzido no entreferro por uma corrente contínua na bobina 1,  $i_1 = I_1$ . Um sinal de áudiofrequência  $i_2 = I_2 \cos \omega t$  é aplicado então à bobina móvel. Suponha que a bobina móvel tenha uma espessura desprezível e que seja composta de  $N_2$  espiras distribuídas uniformemente ao longo de sua altura  $h$ . Suponha também que o seu deslocamento é tal que ela permanece dentro do entreferro ( $0 \leq x \leq l - h$ ).
- Calcule a força sobre a bobina móvel, usando a Lei da Força de Lorentz (Equação 3.1).



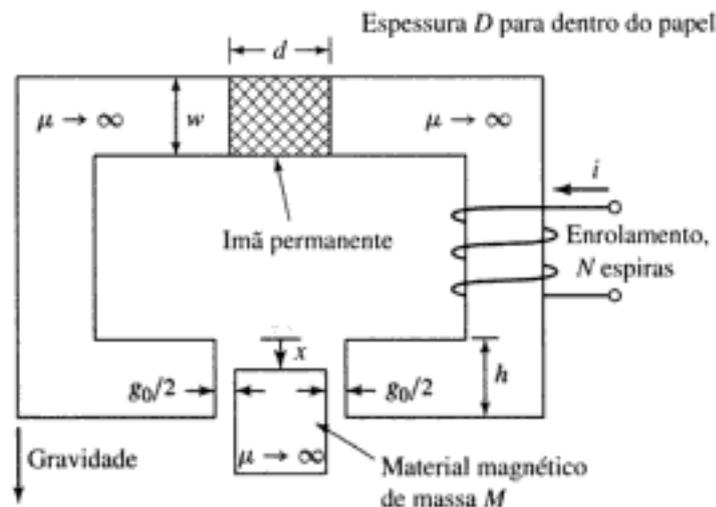
**FIGURA 3.37** Alto-falante do Problema 3.25.

- b. Calcule a indutância própria de cada bobina.
  - c. Calcule a indutância mútua entre as bobinas. (Sugestão: Suponha que uma corrente seja aplicada à bobina móvel. A seguir, calcule o fluxo concatenado da bobina 1. Observe que o fluxo concatenado varia com o deslocamento  $x$ .)
  - d. Calcule a força na bobina móvel a partir da co-energia  $W'_{campo}$ .
- 3.26** Repita o Exemplo 3.8 com o ímã de samário-cobalto substituído por um de neodímio-ferro-boro.
- 3.27** A estrutura magnética da Fig. 3.38 é uma vista esquemática de um sistema projetado para sustentar um bloco de material magnético ( $\mu \rightarrow \infty$ ) de massa  $M$  contra a força de gravidade. O sistema contém um ímã permanente e um enrolamento. Sob condições normais, a força é fornecida apenas pelo ímã permanente. A função do enrolamento é contrabalançar o campo produzido pelo ímã de modo que a massa possa ser removida do dispositivo. O sistema é projetado de tal modo que os entreferros nos lados da massa permanecem constantes com comprimento  $g_0/2$ .  
Suponha que o ímã permanente possa ser representado linearmente por

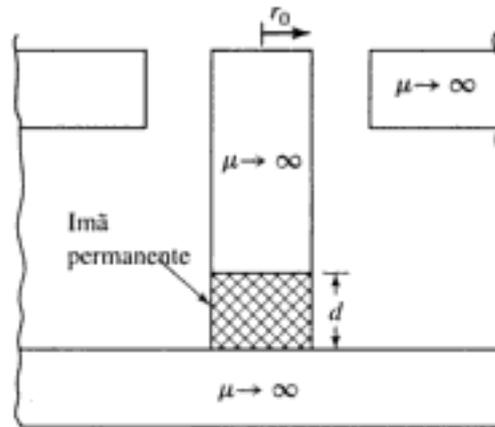
$$B_m = \mu_R(H_m - H_c)$$

e que o sentido do enrolamento é tal que uma corrente positiva de enrolamento reduz o fluxo de entreferro produzido pelo ímã permanente. Despreze os efeitos do espriamento magnético.

- a. Suponha que a corrente de enrolamento seja zero. (i) Encontre a força  $f_{campo}$  que atua sobre a massa na direção  $x$  devida apenas ao ímã permanente em função de  $x$  ( $0 \leq x \leq h$ ). (ii) Encontre a massa máxima  $M_{max}$  que pode ser sustentada contra a gravidade para  $0 \leq x \leq h$ .
  - b. Para  $M = M_{max}/2$ , encontre a corrente mínima necessária para garantir que a massa cairá do sistema quando a corrente for aplicada.
- 3.28** O enrolamento 1 no alto-falante do Problema 3.25 (Fig. 3.37) é substituído por um ímã permanente, como mostrado na Fig. 3.39. O ímã pode ser representado linearmente por  $B_m = \mu_R(H_m - H_c)$ .
- a. Supondo que a corrente da bobina móvel seja zero, ( $i_2 = 0$ ), calcule a densidade de fluxo magnético no entreferro.



**FIGURA 3.38** Sistema de sustentação magnética para o Problema 3.27.



**FIGURA 3.39** Núcleo central do alto-falante da Fig. 3.37 com o enrolamento 1 substituído por um ímã permanente (Problema 3.28).

- b. Calcule o fluxo concatenado da bobina móvel devido ao ímã permanente em função do deslocamento  $x$ .
  - c. Calcule a co-energia  $W'_{\text{campo}}(i_2, x)$ , supondo que a corrente da bobina móvel seja suficientemente pequena, de modo que a componente de  $W'_{\text{campo}}$ , devida à indutância própria da bobina móvel, pode ser ignorada.
  - d. Calcule a força na bobina móvel.
- 3.29** A Fig. 3.40 mostra um sistema de simetria circular no qual um êmbolo móvel (que pode se mover apenas na direção vertical) é sustentado por uma mola de constante  $K = 5,28 \text{ N/m}$ . O sistema é excitado por um ímã permanente de samário-cobalto com a forma de uma arruela de raio externo  $R_3$ , raio interno  $R_2$ , e espessura  $t_m$ . As dimensões do sistema são:

$$R_1 = 2,1 \text{ cm}, \quad R_2 = 4 \text{ cm}, \quad R_3 = 4,5 \text{ cm}$$

$$h = 1 \text{ cm}, \quad g = 1 \text{ mm}, \quad t_m = 3 \text{ mm}$$

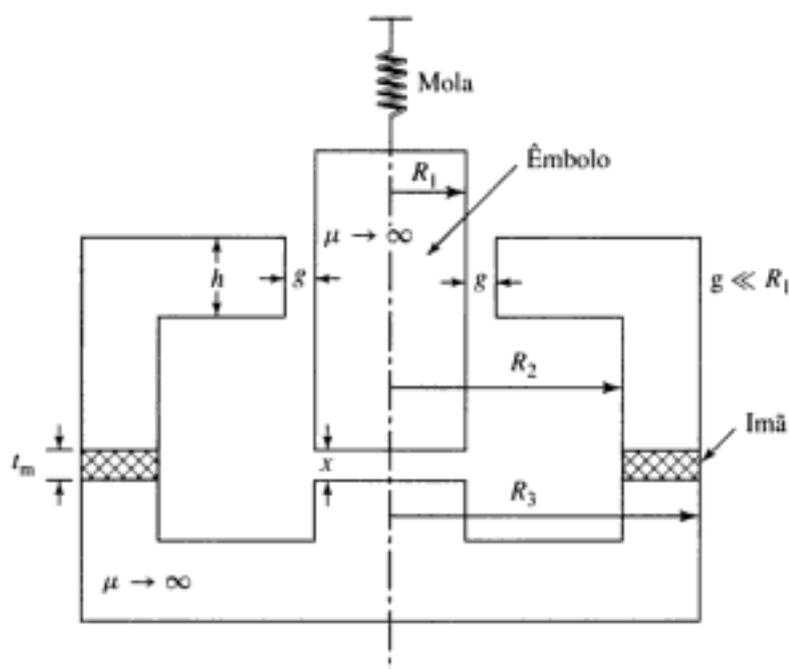
Observa-se que a posição de equilíbrio do êmbolo é  $x = 1,0 \text{ mm}$ .

- a. Encontre a densidade de fluxo magnético  $B_g$ , no entreferro constante, e  $B_x$ , no entreferro variável.
  - b. Calcule a força magnética na direção  $x$  que puxa para baixo o êmbolo.
  - c. A força da mola é dada por  $f_{\text{mola}} = K(X_0 - x)$ . Encontre  $X_0$ .
- 3.30** O êmbolo de um solenóide é conectado a uma mola. A força na mola é dada por  $f = K_0(0,9a - x)$ , onde  $x$  é o comprimento do entreferro. A indutância do solenóide tem a forma  $L = L_0(1 - x/a)$ , e sua resistência de enrolamento é  $R$ .

Inicialmente, o êmbolo está em repouso na posição  $x = 0,9a$ , quando uma tensão CC de magnitude  $V_0$  é aplicada ao solenóide.

- a. Encontre uma expressão, em função do tempo, para a força necessária para manter o êmbolo na posição  $a/2$ .
  - b. Se, então, o êmbolo for liberado e permitido que atinja o equilíbrio, encontre a posição de equilíbrio  $X_0$ . Você pode supor que essa posição esteja no intervalo  $0 \leq X_0 \leq a$ .
- 3.31** Considere o sistema de solenóide do Problema 3.30. Suponha os seguintes valores para os parâmetros:

$$L_0 = 4,0 \text{ mH} \quad a = 2,2 \text{ cm} \quad R = 1,5 \Omega \quad K_0 = 3,5 \text{ N/cm}$$



**FIGURA 3.40** Sistema com ímã permanente para o Problema 3.29.

O êmbolo tem massa  $M = 0,2$  kg. Suponha que a bobina seja conectada a uma fonte CC de magnitude 4 A. Despreze os efeitos da gravidade.

- Encontre o deslocamento de equilíbrio  $X_0$ .
  - Escreva as equações dinâmicas do movimento do sistema.
  - Linearize essas equações para o caso de um movimento incremental do sistema em torno de sua posição de equilíbrio.
  - Se o êmbolo for deslocado de uma distância incremental  $\epsilon$ , a partir de sua posição de equilíbrio  $X_0$ , e liberado, com velocidade zero no tempo  $t = 0$ , encontre (i) O movimento resultante do êmbolo em função do tempo, e (ii) A componente correspondente, variável no tempo, da corrente induzida entre os terminais da bobina.
- 3.32** O solenóide do Problema 3.31 é conectado agora a uma fonte de tensão CC de magnitude 6 V.
- Encontre o deslocamento de equilíbrio  $X_0$ .
  - Escreva as equações dinâmicas do movimento do sistema.
  - Linearize essas equações para o caso de movimento incremental do sistema em torno de sua posição de equilíbrio.
- 3.33** Considere o rotor de bobina única do Exemplo 3.1. Suponha que o enrolamento do rotor esteja conduzindo uma corrente constante de  $I = 8$  A, e que o rotor tenha um momento de inércia de  $J = 0,0125$  kg  $\cdot$  m<sup>2</sup>.
- Encontre a posição de equilíbrio do rotor. É estável?
  - Escreva as equações dinâmicas do movimento do sistema.
  - Encontre a frequência natural em hertz para o movimento incremental do rotor em torno de sua posição de equilíbrio.
- 3.34** Considere um eletroímã com solenóide semelhante ao do Exemplo 3.10 (Fig. 3.24) exceto que o comprimento do êmbolo cilíndrico é reduzido a  $a + h$ . Deduza as equações dinâmicas de movimento do sistema.

## Introdução às Máquinas Rotativas

O objetivo deste capítulo é introduzir e discutir alguns dos princípios que fundamentam o funcionamento das máquinas elétricas. Como será visto, esses princípios são comuns às máquinas CA e CC. São desenvolvidas várias técnicas e aproximações usadas na redução de uma máquina real a modelos matemáticos simples, capazes de ilustrar os princípios básicos.

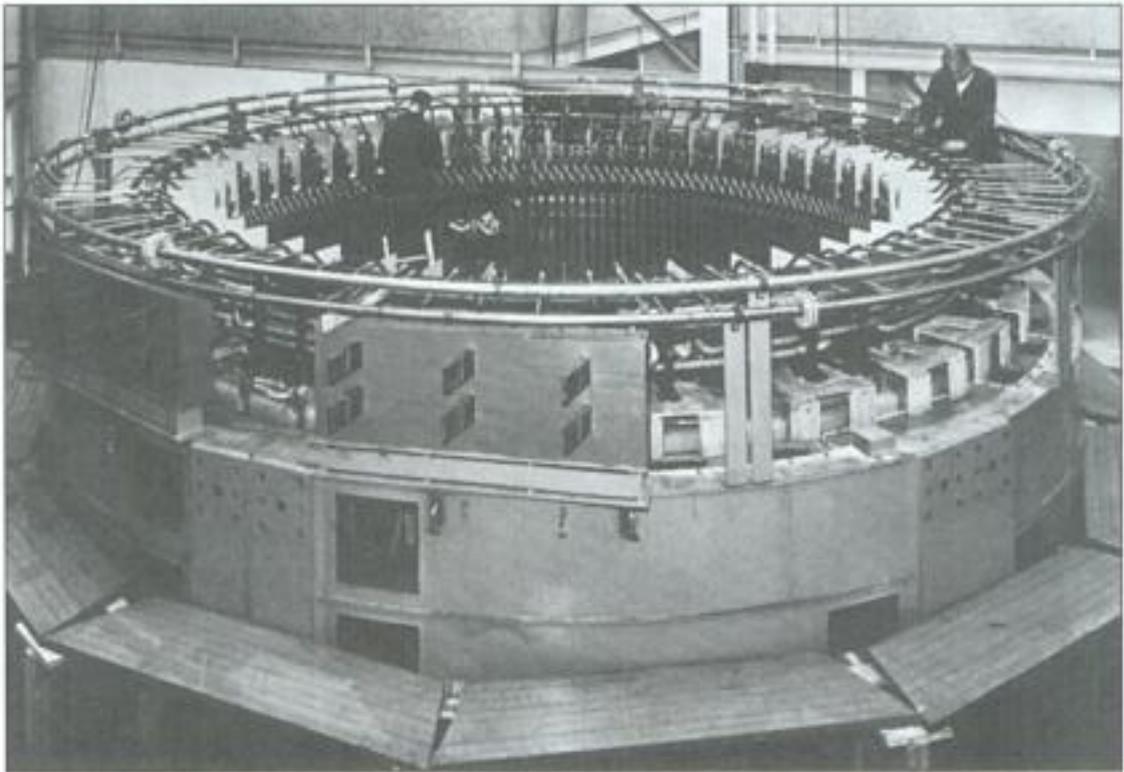
### 4.1 CONCEITOS ELEMENTARES

A Equação 1.27,  $e = d\lambda/dt$ , pode ser usada para determinar as tensões induzidas por campos magnéticos variáveis no tempo. A conversão eletromagnética de energia ocorre quando surgem alterações no fluxo concatenado  $\lambda$  decorrentes do movimento mecânico. Nas máquinas rotativas, as tensões são geradas nos enrolamentos ou grupos de bobinas quando esses giram mecanicamente dentro de um campo magnético, ou quando um campo magnético gira mecanicamente próximo aos enrolamentos, ou ainda quando o circuito magnético é projetado de modo que a relutância varie com a rotação do rotor. Por meio desses métodos, o fluxo concatenado em uma bobina específica é alterado ciclicamente e uma tensão variável no tempo é gerada.

Um grupo dessas bobinas, conectadas em conjunto, é referido comumente como *enrolamento de armadura*. Em geral, o termo enrolamento de armadura de uma máquina rotativa é usado para se referir a um enrolamento ou grupo de enrolamentos que conduzam corrente alternada. Em *máquinas CA*, tais como as síncronas ou as de indução, os enrolamentos de armadura alojam-se tipicamente na parte estacionária do motor conhecida como *estator*, caso em que esses enrolamentos podem ser referidos também como *enrolamentos de estator*. A Fig. 4.1 mostra, em construção, o enrolamento de estator de um motor síncrono trifásico multipolos de grande porte.

Em uma *máquina CC*, o enrolamento de armadura encontra-se na parte rotativa conhecida como *rotor*. A Figura 4.2 mostra o rotor de uma máquina CC. Como veremos, o enrolamento de armadura de uma máquina CC consiste em muitas bobinas conectadas entre si para formar um laço fechado. Quando o rotor está girando, um contato mecânico rotativo é usado para fornecer corrente ao enrolamento de armadura.

Tipicamente, as máquinas síncronas e CC apresentam um segundo enrolamento (ou conjunto de enrolamentos) que conduz corrente contínua e que é usado para produzir o fluxo principal de operação da máquina. Tal enrolamento é referido tipicamente como *enrolamento de campo*. O enrolamento de campo em uma máquina CC encontra-se no estator, ao passo

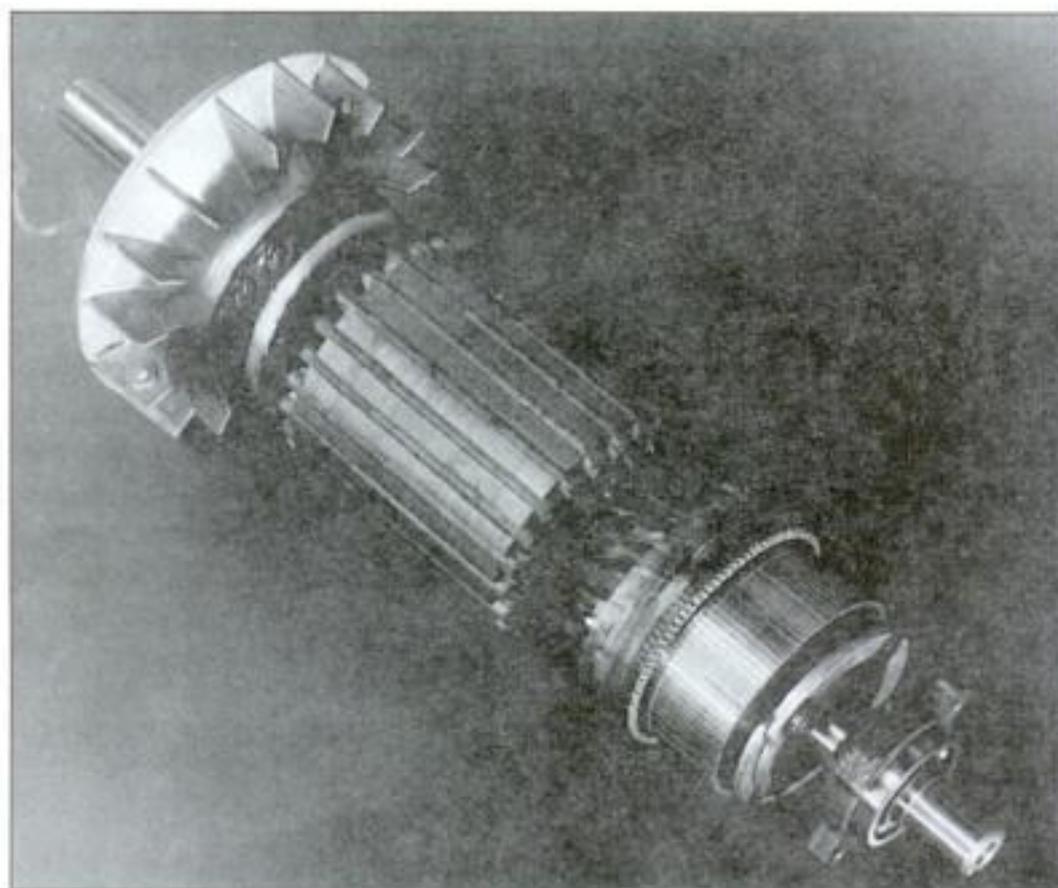


**FIGURA 4.1** Estator de um gerador hidrelétrico trifásico de 190 MVA, 12 kV e 375 rpm. Os condutores contêm passagens ocas para a circulação da água de refrigeração. (*Brown Boveri Corporation*)

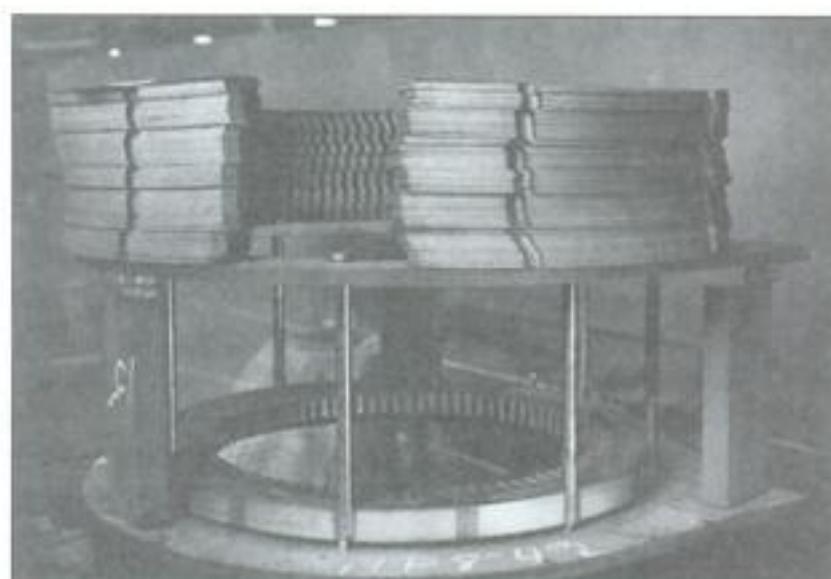
que, no caso de uma máquina síncrona, ele é encontrado no rotor, caso em que a corrente deve ser fornecida ao enrolamento de campo por meio de um contato mecânico rotativo. Como já vimos, os ímãs permanentes também produzem fluxo magnético constante e, em algumas máquinas, são usados no lugar dos enrolamentos de campo.

Na maioria das máquinas rotativas, o estator e o rotor são feitos de aço elétrico e os enrolamentos são instalados em ranhuras alojadas nessas estruturas. Como foi discutido no Capítulo 1, o uso de um material como esse, de alta permeabilidade, maximiza o acoplamento entre as bobinas e aumenta a densidade de energia magnética associada com a interação eletromecânica. Também permite que o projetista de máquinas dê forma aos campos magnéticos e distribua-os de acordo com as exigências de projeto de cada máquina em particular. O fluxo variável no tempo, presente nas estruturas da armadura dessas máquinas, tende a induzir correntes, conhecidas como *correntes parasitas*, no aço elétrico. As correntes parasitas podem ser uma grande fonte de perdas nessas máquinas e podem reduzir significativamente o seu desempenho. Para minimizar os efeitos das correntes parasitas, a estrutura da armadura é construída tipicamente de chapas delgadas de aço elétrico isoladas entre si. Isso está ilustrado na Fig. 4.3 em que se mostra, para um motor CA, o núcleo do estator sendo construído como um empilhamento ou pacote de chapas individuais.

Em algumas máquinas, tais como *máquinas de relutância variável* e *motores de passo*, o rotor não tem enrolamentos. A operação dessas máquinas depende da não uniformidade da relutância de entreferro, associada às variações de posição do rotor, e também das correntes variáveis no tempo que são aplicadas aos seus enrolamentos de estator. Em tais máquinas, tanto as estruturas do estator como as do rotor estão sujeitas a um fluxo magnético variável no tempo e, como resultado, ambas podem necessitar de chapas para reduzir as perdas por correntes parasitas.



**FIGURA 4.2** Armadura de um motor CC. (*General Electric Company*)



**FIGURA 4.3** Núcleo de estator parcialmente terminado de um motor CA. (*Westinghouse Electric Company*)

As máquinas elétricas rotativas assumem diversas formas e são conhecidas por diversos nomes: CC, síncronas, de imã permanente, de indução, de relutância variável, de histerese, sem escovas, e assim por diante. Embora essas máquinas aparentem ser bastante diferentes, os princípios físicos que regem o seu comportamento são bastante similares e frequentemente é útil pensar nelas em termos de um mesmo ponto de vista físico. Por exemplo, a análise de uma máquina CC mostra que, associadas tanto ao rotor como ao estator, há distribuições fixas de fluxo magnético no espaço e que as características de produção de conjugado da máquina CC provêm da tendência desses fluxos a se alinhar entre si. Uma máquina de indução, apesar de muitas diferenças fundamentais, trabalha exatamente de acordo com o mesmo princípio. É possível identificar distribuições de fluxo associadas ao rotor e o estator. Embora não sejam estacionárias, mas estejam na realidade girando em sincronismo, como no motor CC, elas estão distanciadas entre si por uma separação angular constante, e o conjugado é produzido pela tendência dessas distribuições de fluxo a se alinhar entre si.

Certamente, modelos analíticos são essenciais à análise e ao projeto de máquinas elétricas e, ao longo deste livro, tais modelos serão desenvolvidos. Entretanto, é importante também reconhecer que um *insight* físico do desempenho desses dispositivos é igualmente útil. Um dos objetivos deste capítulo e dos subseqüentes é conduzir o leitor no desenvolvimento de tal *insight*.

## 4.2 INTRODUÇÃO ÀS MÁQUINAS CA E CC

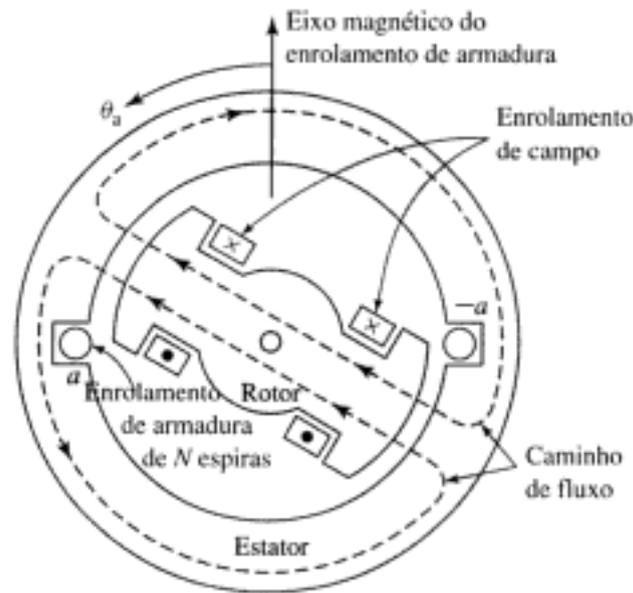
### 4.2.1 Máquinas CA

As máquinas CA tradicionais classificam-se em duas categorias: *síncronas* e *de indução*. Nas máquinas síncronas, as correntes do enrolamento do rotor são fornecidas através de contatos rotativos fixados diretamente na parte estacionária do motor. Nas máquinas de indução, as correntes são induzidas nos enrolamentos do rotor por meio da combinação da variação, no tempo, de correntes no estator e do movimento do rotor em relação ao estator.

**Máquinas Síncronas** Uma descrição preliminar do desempenho de uma máquina síncrona pode ser obtida discutindo a tensão induzida na armadura do gerador síncrono CA de *pólos salientes*, muito simplificado, que está mostrado esquematicamente na Fig. 4.4. O enrolamento de campo dessa máquina produz apenas um par de pólos magnéticos (como os de uma barra imantada), e por essa razão essa máquina é referida como máquina de *dois pólos*.

Com raras exceções, o enrolamento de armadura de uma máquina síncrona localiza-se no estator, e o enrolamento de campo, no rotor, esse também é o caso da máquina simplificada na Fig. 4.4. O enrolamento de campo é excitado por uma corrente contínua que é levada até ele por meio de *escovas* estacionárias de carvão que fazem contato com *anéis coletores* ou *anéis deslizantes* girantes. Usualmente, essa disposição para os dois enrolamentos é ditada por fatores de ordem prática: é vantajoso ter o enrolamento de campo, único e de baixa potência, no rotor e o enrolamento de armadura, de potência elevada e geralmente polifásico, no estator.

O enrolamento de armadura consiste aqui em uma única bobina de  $N$  espiras. Está mostrada por meio de uma vista transversal dos seus dois lados  $a$  e  $-a$  que estão alojados em ranhuras estreitas, diametralmente opostas, localizadas na periferia interna do estator da Fig. 4.4. Os condutores que formam esses lados da bobina são paralelos ao eixo da máquina e são ligados em série por terminais de conexão (não mostrados na figura). O rotor é girado a velocidade constante a partir de uma fonte de potência mecânica conectada ao seu eixo. Supõe-se que o enrolamento de armadura esteja em circuito aberto e, portanto, o fluxo dessa máquina será produzido apenas pelo enrolamento de campo. Os caminhos de fluxo estão mostrados esquematicamente por linhas tracejadas na Fig. 4.4.

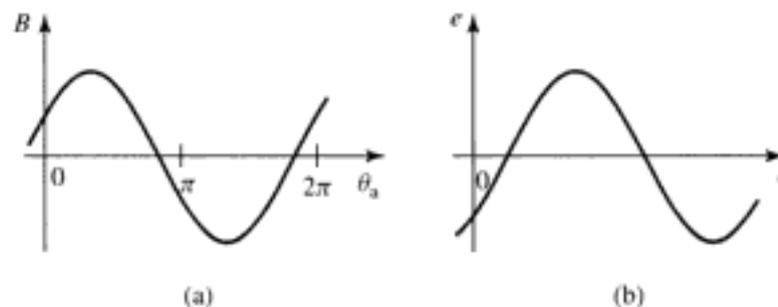


**FIGURA 4.4** Vista esquemática de um gerador síncrono monofásico com um único enrolamento e dois pólos.

Em uma análise altamente idealizada dessa máquina, será assumido que a distribuição do fluxo magnético no entreferro é senoidal. A distribuição radial resultante da densidade de fluxo  $B$  está mostrada na Fig. 4.5a como função do ângulo espacial  $\theta_a$  (medido em relação ao eixo magnético do enrolamento da armadura) ao longo da periferia do rotor. Na prática, moldando-se as faces dos pólos de forma adequada, pode-se conseguir com que a densidade de fluxo, no entreferro de máquinas reais de pólos salientes, esteja muito próxima de uma distribuição senoidal.

À medida que o rotor gira, o fluxo concatenado do enrolamento da armadura varia no tempo. Tendo em vista as suposições de distribuição senoidal da densidade de fluxo e de velocidade constante do rotor, a tensão resultante na bobina será senoidal no tempo, como está mostrado na Fig. 4.5b. A tensão da bobina passa por um ciclo completo a cada revolução da máquina de dois pólos da Fig. 4.4. Sua frequência em ciclos por segundo (Hz) é a mesma que a velocidade do rotor em rotações por segundo: a frequência elétrica da tensão gerada está sincronizada com a velocidade mecânica; sendo essa a razão para a expressão máquina "síncrona". Assim, uma máquina síncrona de dois pólos deve girar a 3600 rotações por minuto para produzir uma tensão de 60 Hz.

Um número bem elevado de máquinas síncronas tem mais de dois pólos. Como exemplo específico, a Fig. 4.6 mostra esquematicamente um gerador monofásico de *quatro pólos*. As bobinas de campo estão ligadas de modo que os pólos tenham polaridades alternadas. Há dois comprimentos de onda completos, ou ciclos, na distribuição de fluxo ao longo da perife-



**FIGURA 4.5** (a) Distribuição espacial da densidade de fluxo e (b) a forma de onda correspondente da tensão gerada no gerador monofásico da Fig. 4.4.

ria, como se mostra na Fig. 4.7. O enrolamento de armadura consiste agora em duas bobinas  $a_1, -a_1$  e  $a_2, -a_2$  ligadas em série pelos seus terminais de conexão. A cada bobina corresponde um comprimento de onda de fluxo. Agora a tensão gerada passa por dois ciclos completos a cada revolução do rotor. A frequência em hertz será assim o dobro da velocidade em rotações por segundo.

Quando uma máquina tem mais de dois pólos, é conveniente concentrar-se em apenas um par de pólos e assegurar-se de que as condições elétricas, magnéticas e mecânicas associadas aos demais pares de pólos sejam repetições das do par considerado. Por essa razão, é conveniente expressar os ângulos em *graus elétricos* ou *radianos elétricos* em vez de unidades mecânicas. Um par de pólos em uma máquina de múltiplos pólos, ou um ciclo de distribuição de fluxo, é igual a 360 graus elétricos ou  $2\pi$  radianos elétricos. Por exemplo, como há pólos/2 comprimentos de onda, ou ciclos, a cada revolução completa, resulta, que

$$\theta_{ac} = \left( \frac{\text{pólos}}{2} \right) \theta_a \quad (4.1)$$

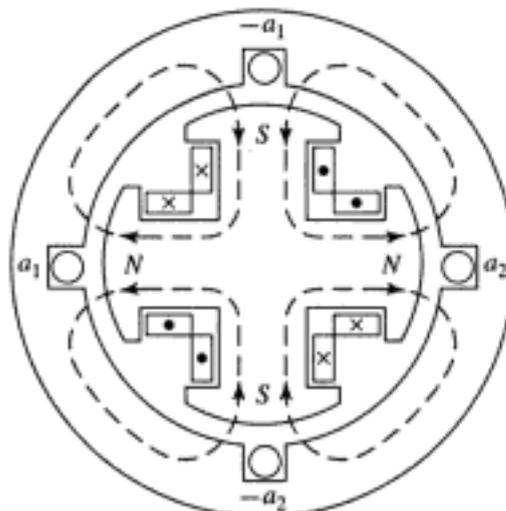
onde  $\theta_{ac}$  é o ângulo em unidades elétricas e  $\theta_a$  é o ângulo espacial. Essa mesma relação aplica-se a todas as medidas angulares de uma máquina de múltiplos pólos; seus valores em unidades elétricas serão iguais a (pólos/2) vezes seus valores espaciais reais.

A tensão de uma bobina de uma máquina de múltiplos pólos passa por um ciclo completo toda vez que um par de pólos passa pela bobina ou (pólos/2) vezes a cada revolução. A frequência elétrica  $f_c$  da tensão gerada em uma máquina síncrona é portanto

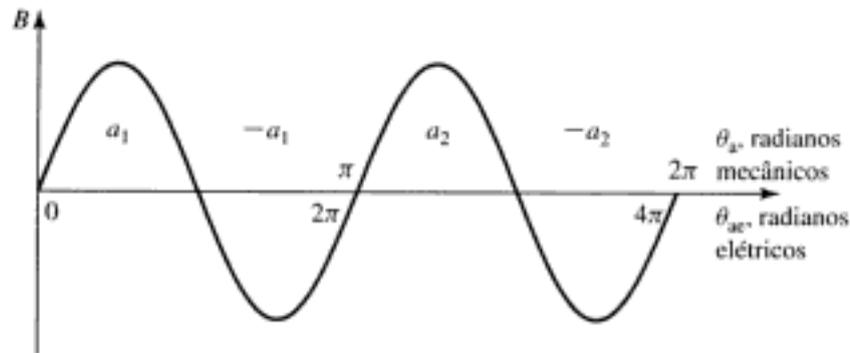
$$f_c = \left( \frac{\text{pólos}}{2} \right) \frac{n}{60} \text{ Hz} \quad (4.2)$$

onde  $n$  é a velocidade mecânica em rotações por minuto, e portanto  $n/60$  é a velocidade em rotações por segundo. A frequência elétrica da tensão gerada em radianos por segundo é  $\omega_c = (\text{pólos}/2)\omega_m$  onde  $\omega_m$  é a velocidade mecânica em radianos por segundo.

Os rotores mostrados nas Figs. 4.4 e 4.6 têm pólos *salientes* com *enrolamentos concentrados*. A Fig. 4.8 mostra esquematicamente um rotor de *pólos não salientes*, referidos também como *cilíndricos* ou *lisos*. O enrolamento de campo é um *enrolamento distribuído* de dois pólos; os lados da bobina estão distribuídos em múltiplas ranhuras ao longo da periferia do rotor e posicionados de modo tal que uma distribuição aproximadamente senoidal de fluxo radial, no entreferro, seja produzida.



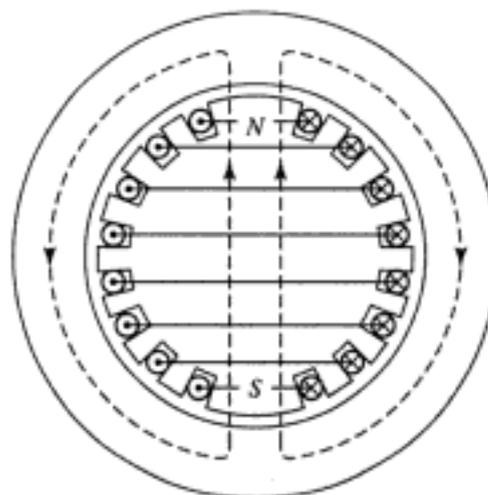
**FIGURA 4.6** Vista esquemática de um gerador simples, síncrono, monofásico e de quatro pólos.



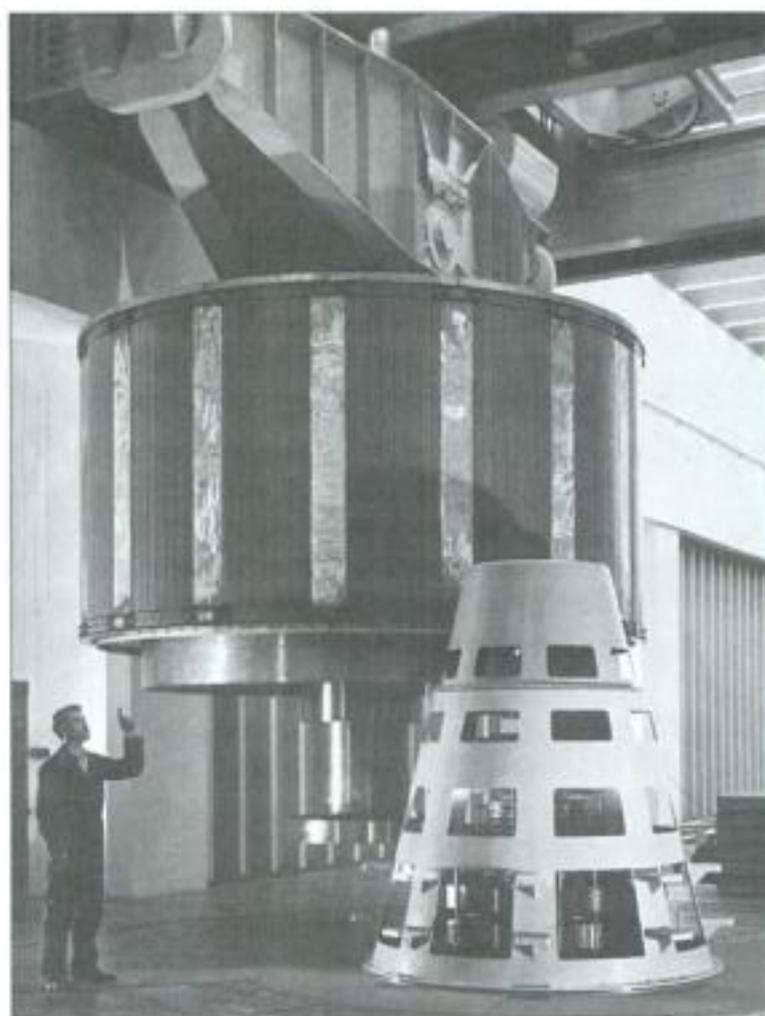
**FIGURA 4.7** Distribuição espacial da densidade de fluxo de entreferro em um gerador síncrono ideal de quatro pólos.

A relação entre a frequência elétrica e a velocidade de um rotor, dada pela Equação 4.2, pode servir de base para se compreender a razão pela qual alguns geradores síncronos têm rotores com estruturas de pólos salientes, ao passo que outros têm rotores cilíndricos. A maioria dos sistemas de potência do mundo operam com frequência de 50 ou 60 Hz. Uma estrutura de pólos salientes é característica de geradores hidrelétricos porque as turbinas hidráulicas operam em velocidades relativamente baixas e, portanto, um número relativamente elevado de pólos é necessário para produzir a frequência desejada; a estrutura de pólos salientes é mecanicamente melhor adaptada a essa situação. O rotor de um gerador hidrelétrico de grande porte está mostrado na Fig. 4.9. Entretanto, as turbinas a vapor ou a gás operam melhor em velocidades relativamente elevadas. Como consequência, os alternadores acionados por turbina, ou geradores a turbina, são comumente máquinas de rotor cilíndrico de dois ou quatro pólos. Os rotores são feitos a partir de uma única peça forjada de aço, ou de diversas peças, como mostrado nas Figs. 4.10 e 4.11.

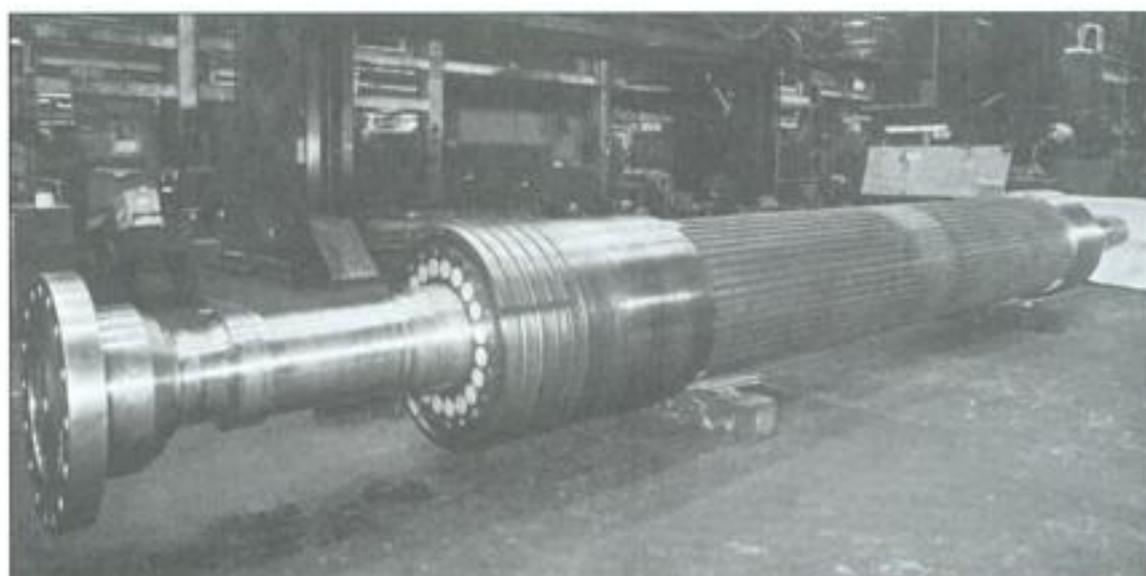
A maioria dos sistemas de potência do mundo é trifásica e, conseqüentemente, os geradores síncronos são máquinas trifásicas com pouquíssimas exceções. Para se produzir um conjunto de três tensões defasadas de 120 graus elétricos no tempo, devem ser usadas no mínimo três bobinas defasadas de 120 graus elétricos no espaço. Uma vista esquemática simplificada de uma máquina trifásica de dois pólos, com uma bobina por fase, está mostrada na Fig. 4.12a. As três fases são indicadas pelas letras a, b e c. Em uma máquina elementar de quatro pólos, um mínimo de dois conjuntos de bobinas como esse deve ser usado, como se ilustra na Fig. 4.12b; em uma máquina elementar com múltiplos pólos, o número mínimo de conjuntos de bobinas é dado pela metade do número de pólos.



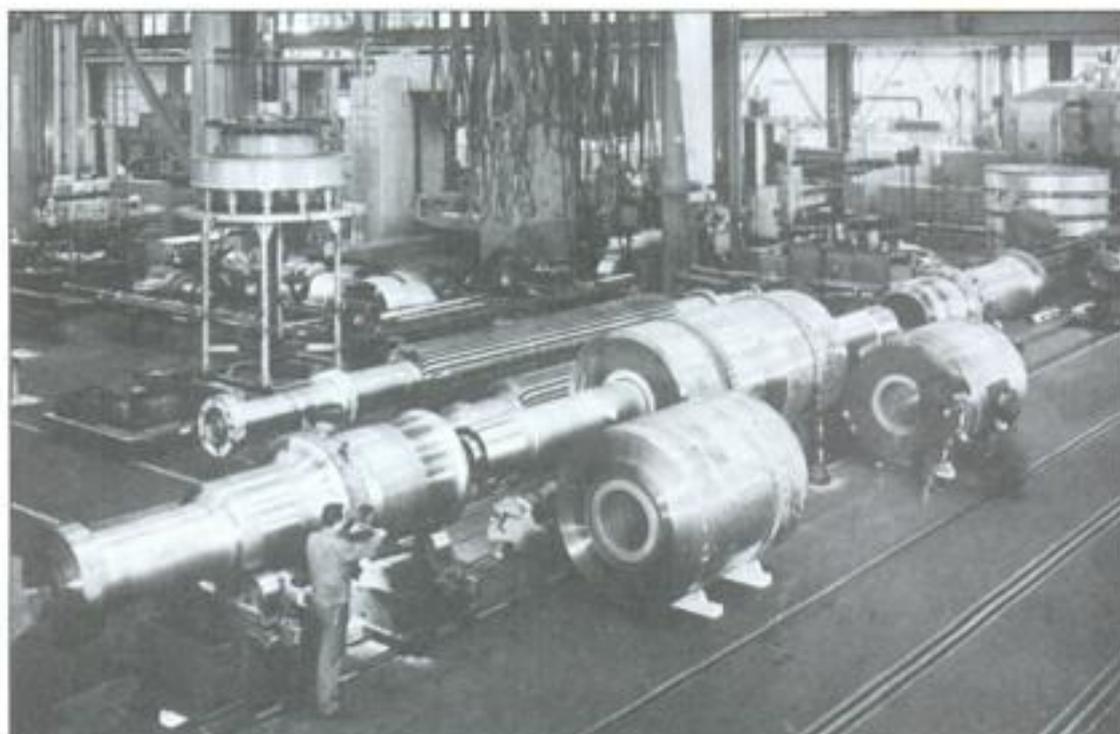
**FIGURA 4.8** Enrolamento de campo elementar de um rotor cilíndrico de dois pólos.



**FIGURA 4.9** Rotor refrigerado a água pertencente ao gerador hidrelétrico de 190 MVA cujo estator está mostrado na Fig. 4.1. (*Brown Boveri Corporation*)



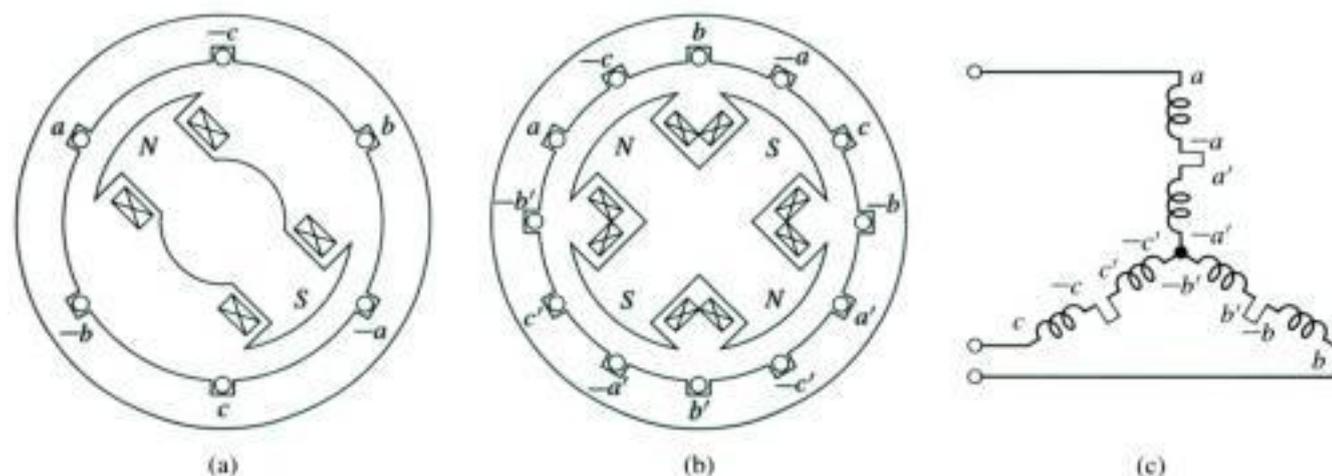
**FIGURA 4.10** Rotor de um gerador a turbina de dois pólos e 3600 rpm. (*Westinghouse Electric Corporation*)



**FIGURA 4.11** Partes de um rotor composto por diversas peças, pertencente a um gerador trifásico a turbina de 1333 MVA e 1800 rpm. As peças forjadas ainda quentes são introduzidas no eixo e, durante o resfriamento, elas contraem-se firmando-se sobre o mesmo. Após é feita a usinagem final e a fresagem das ranhuras dos enrolamentos. A massa total do rotor é de aproximadamente 197.300 kg. (*Brown Boveri Corporation*)

As duas bobinas de cada fase da Fig. 4.12b são conectadas em série de modo que suas tensões são somadas, e as três fases podem então ser ligadas em  $Y$  ou em  $\Delta$ . A Fig. 4.12c mostra como as bobinas podem ser interligadas para formar uma ligação em  $Y$ . No entanto, observe que, como as tensões de cada fase são idênticas, uma conexão em paralelo também é possível, por exemplo, a bobina  $(a, -a)$  em paralelo com a bobina  $(a', -a')$ , e assim por diante.

Quando um gerador síncrono fornece potência elétrica a uma carga, a corrente de armadura cria no entreferro uma onda de fluxo magnético que gira na velocidade síncrona, como mostra a Seção 4.5. Esse fluxo reage ao fluxo criado pela corrente de campo, resultando um

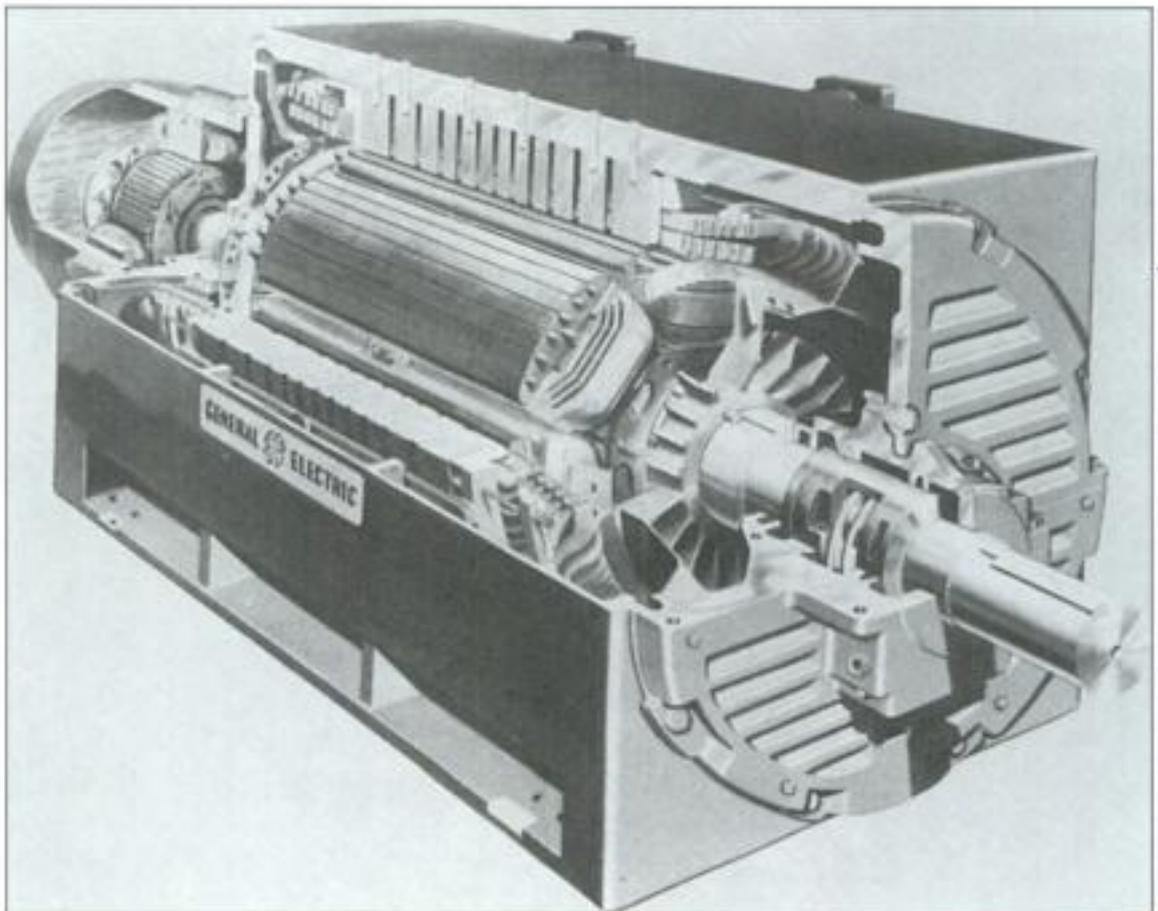


**FIGURA 4.12** Vistas esquemáticas de geradores trifásicos: (a) dois pólos, (b) quatro pólos e (c) ligação em  $Y$  dos enrolamentos.

conjugado eletromecânico a partir da tendência desses dois campos magnéticos a se alinhar entre si. Em um gerador, esse conjugado opõe-se à rotação, e então um conjugado mecânico deve ser aplicado a partir de acionador mecânico primário para que a rotação seja mantida. Esse conjugado eletromecânico é o mecanismo através do qual o gerador síncrono converte a energia mecânica em elétrica.

Por outro lado, um gerador síncrono pode funcionar também como motor síncrono. Uma vista em corte longitudinal de um motor trifásico síncrono de 60 Hz está mostrada na Fig. 4.13. Uma corrente alternada é aplicada ao enrolamento de armadura do estator, e uma excitação CC, ao enrolamento de campo do rotor. O campo magnético produzido pelas correntes de armadura gira em velocidade síncrona. Para produzir um conjugado eletromecânico constante, os campos magnéticos do estator e do rotor devem ser constantes em amplitude e estacionários um em relação ao outro. Em um motor síncrono, a velocidade de regime permanente é determinada pelo número de pólos e pela frequência da corrente de armadura. Portanto, um motor síncrono, operado a partir de uma fonte CA de frequência constante, funciona com velocidade constante em regime permanente.

Em um motor, o conjugado eletromecânico tem o sentido da rotação e contrabalança o conjugado oposto necessário para movimentar a carga mecânica. O fluxo produzido pelas correntes, na armadura de um motor síncrono, gira à frente do fluxo produzido pelo campo. Portanto, arrasta esse último (e conseqüentemente o rotor) fazendo trabalho. O oposto ocorre em um gerador síncrono, onde o campo faz trabalho quando seu fluxo arrasta o da armadura, que vem atrás. Tanto em geradores como em motores, são produzidos um conjugado eletromecânico e uma tensão rotacional. Esses são os fenômenos essenciais da conversão eletromecânica de energia.

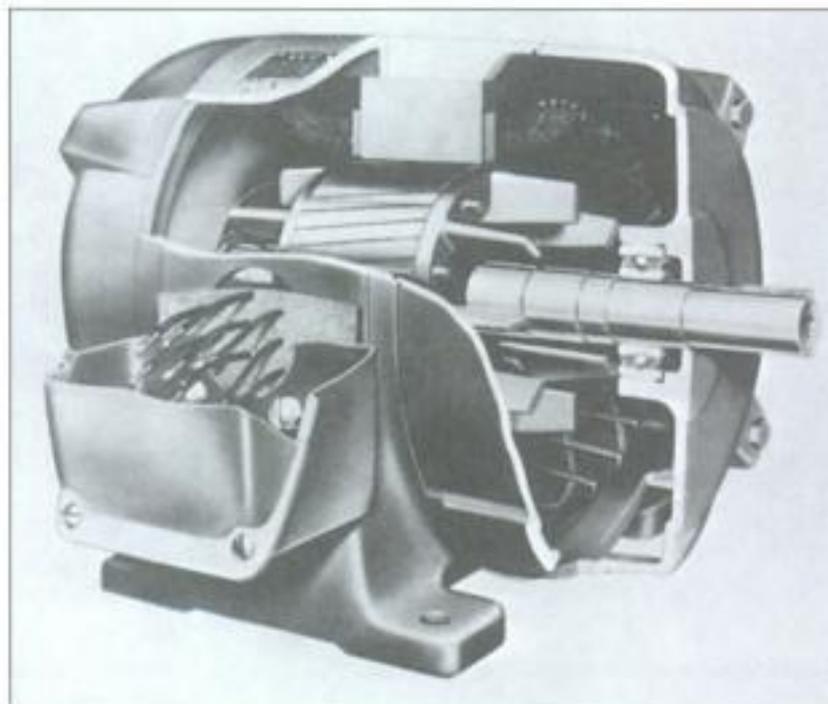


**FIGURA 4.13** Vista em corte longitudinal de um motor síncrono de alta velocidade. A excitatriz mostrada no lado esquerdo do rotor é um pequeno gerador CA com um conjunto rotativo de retificadores semicondutores acoplado ao eixo. (*General Electric Company*)

**Máquinas de Indução** Um segundo tipo de máquina CA é a *máquina de indução*. Como na máquina síncrona, o enrolamento do estator de uma máquina de indução é excitado com correntes alternadas. Contrastando com uma máquina síncrona, onde o enrolamento de campo do rotor é excitado com corrente CC, correntes alternadas fluem nos enrolamentos do rotor de uma máquina de indução. Nas máquinas de indução, as correntes alternadas são aplicadas diretamente aos enrolamentos do estator e, então, correntes no rotor são produzidas por indução, isto é, por ação de transformador. Desse modo, a máquina de indução pode ser vista como um transformador generalizado em que potência elétrica é transformada entre o rotor e o estator juntamente com uma mudança de frequência e um fluxo de potência mecânica. Embora o motor de indução seja o mais comum de todos os motores, raramente é usado como gerador, pois as suas características de desempenho como gerador, na maioria das aplicações, não são satisfatórias. No entanto, em anos recentes tem-se constatado que ele é bem adequado em aplicações envolvendo energia eólica. A máquina de indução também pode ser usada como conversor de frequência.

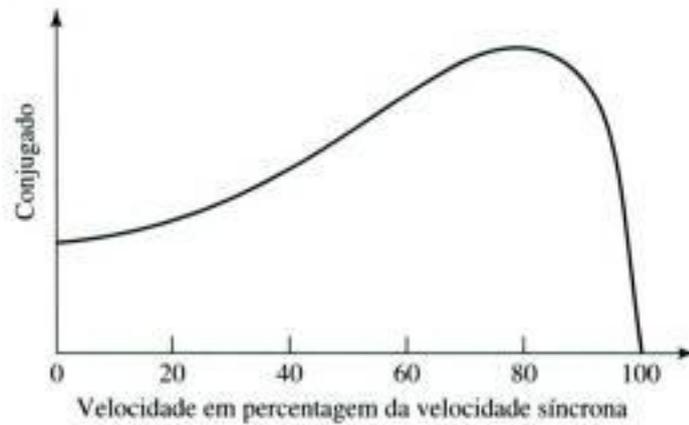
No motor de indução, os enrolamentos de estator são essencialmente os mesmos do motor síncrono. Entretanto, os enrolamentos de rotor são eletricamente curto-circuitados e frequentemente não têm conexões externas; as correntes são induzidas por ação de transformador. Uma vista em corte longitudinal de um motor de indução do tipo gaiola de esquilo está mostrada na Fig. 4.14. Aqui, os "enrolamentos" são na realidade barras sólidas de alumínio que são fundidas nas ranhuras do rotor e colocadas em curto circuito por anéis de alumínio fundido localizados em cada extremidade do rotor. Esse tipo de construção de rotor resulta em motores de indução que são relativamente baratos e altamente confiáveis, fatores esses que contribuem à sua imensa popularidade e ampla aplicação.

Como em um motor síncrono, o fluxo de armadura do motor de indução adianta-se em relação ao do rotor e produz um conjugado eletromecânico. De fato, como na máquina síncrona, veremos que há um sincronismo entre os fluxos do rotor e do estator, quando esses giram, e que o conjugado está relacionado com o deslocamento relativo entre eles. Diferentemente de uma máquina síncrona, entretanto, o rotor em si de uma máquina de indução não



**FIGURA 4.14** Vista em corte longitudinal de um motor de indução do tipo gaiola de esquilo. (Westinghouse Electric Corporation)

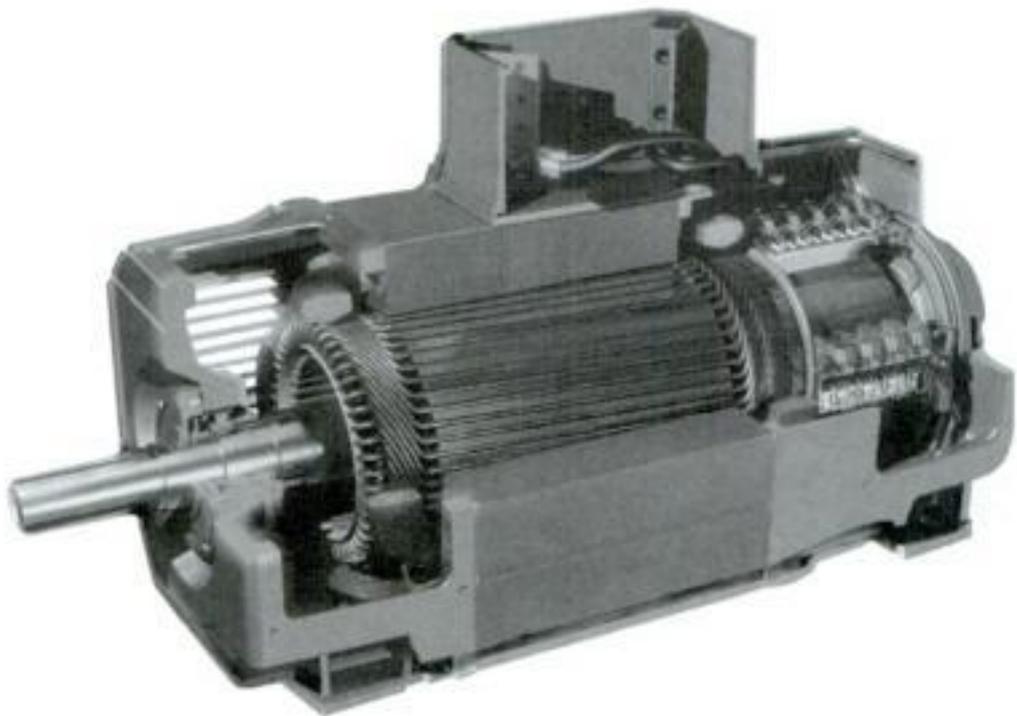
gira em sincronismo; há um “escorregamento” do rotor em relação ao fluxo síncrono da armadura, dando origem às correntes induzidas no rotor e, portanto, ao conjugado. Os motores de indução operam em velocidades inferiores à velocidade mecânica síncrona. Uma curva característica típica de velocidade *versus* conjugado para um motor de indução está mostrada na Fig. 4.15.



**FIGURA 4.15** Curva característica de velocidade *versus* conjugado de um motor de indução típico.

## 4.2.2 Máquinas CC

Como já foi discutido, o enrolamento de armadura de um gerador CC está no rotor com a corrente saindo dele por meio de escovas de carvão. O enrolamento de campo está no estator e é excitado por corrente contínua. Uma vista em corte longitudinal de um motor CC está mostrada na Fig. 4.16.



**FIGURA 4.16** Vista em corte longitudinal de um típico motor CC de potência elevada. (ASEA Brown Boveri)

Um gerador CC de dois pólos muito elementar está mostrado na Fig. 4.17. O enrolamento de armadura, consistindo em uma única bobina de  $N$  espiras, está indicado pelos dois lados da bobina  $a$  e  $-a$  colocados em pontos diametralmente opostos sobre o rotor com os condutores paralelos ao eixo. O rotor gira normalmente a velocidade constante a partir de uma fonte de potência mecânica conectada ao eixo. Usualmente, a distribuição de fluxo no entreferro aproxima-se de uma onda de picos achatados, ao invés da onda senoidal encontrada nas máquinas CA, como se mostra na Fig. 4.18a. A rotação da bobina gera uma tensão de bobina que é uma função de tempo tendo a mesma forma que a da onda de distribuição da densidade de fluxo espacial.

Embora o propósito final seja a geração de uma tensão contínua, a tensão induzida em uma bobina individual de armadura é uma tensão alternada que, portanto, deve ser retificada. A tensão de saída de uma máquina CA pode ser retificada usando retificadores semicondutores externos. Isso é diferente da máquina CC convencional, na qual a retificação é produzida mecanicamente por meio de um *comutador*. Esse é um cilindro formado de segmentos de cobre isolados entre si por mica, ou algum outro material altamente isolante, e montado, mas isolado, sobre o eixo do rotor. Escovas estacionárias de carvão, mantidas apoiadas contra a superfície do comutador, conectam o enrolamento aos terminais externos da armadura. O comutador e as escovas podem ser vistos facilmente na Fig. 4.16. A necessidade de comutação é a razão pela qual os enrolamentos de armadura das máquinas CC são colocados no rotor.

No caso do gerador CC elementar, o comutador assume a forma mostrada na Fig. 4.17. Para o sentido de rotação mostrado, o comutador em qualquer instante conecta o lado da bobina que está próximo do pólo sul à escova positiva, e o que está próximo do pólo norte, à escova negativa. O comutador executa uma retificação de onda completa, transformando a forma de onda de tensão, presente entre as escovas, na forma de onda da Fig. 4.18b, e tornando disponível uma tensão unipolar para o circuito externo. Naturalmente, a máquina CC da Fig. 4.17 foi simplificada até o ponto de estar fora da realidade em termos práticos e, posteriormente, será essencial examinar a ação de comutadores mais realísticos.

O efeito da corrente contínua no enrolamento de campo de uma máquina CC é a criação de uma distribuição de fluxo magnético estacionária em relação ao estator. De modo similar, o efeito do comutador é tal que, quando uma corrente contínua flui através das escovas, a armadura cria uma distribuição de fluxo magnético que também é fixa no espaço e cujo eixo, determinado pelo projeto da máquina e pela posição das escovas, é tipicamente perpendicular ao eixo do fluxo de campo.

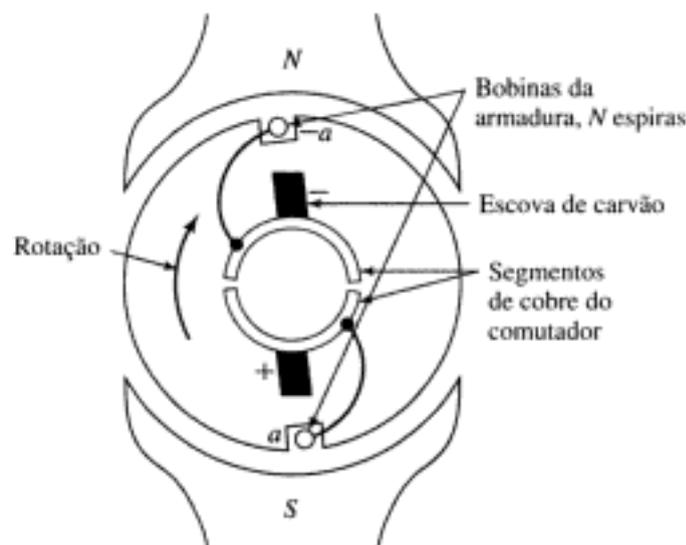
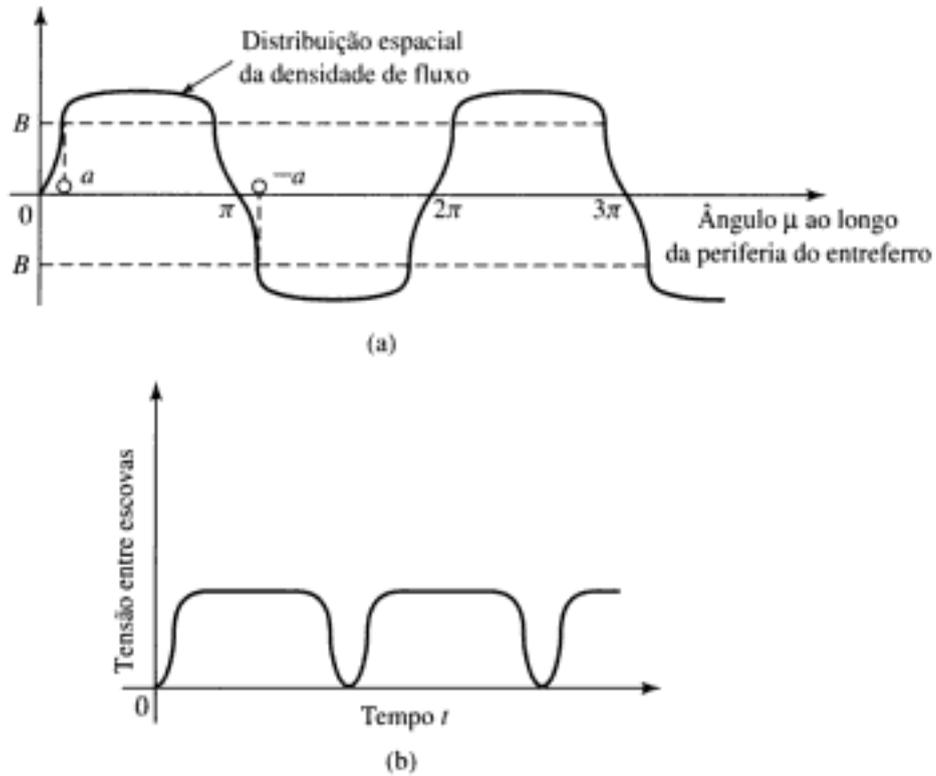


FIGURA 4.17 Máquina CC elementar com comutador.



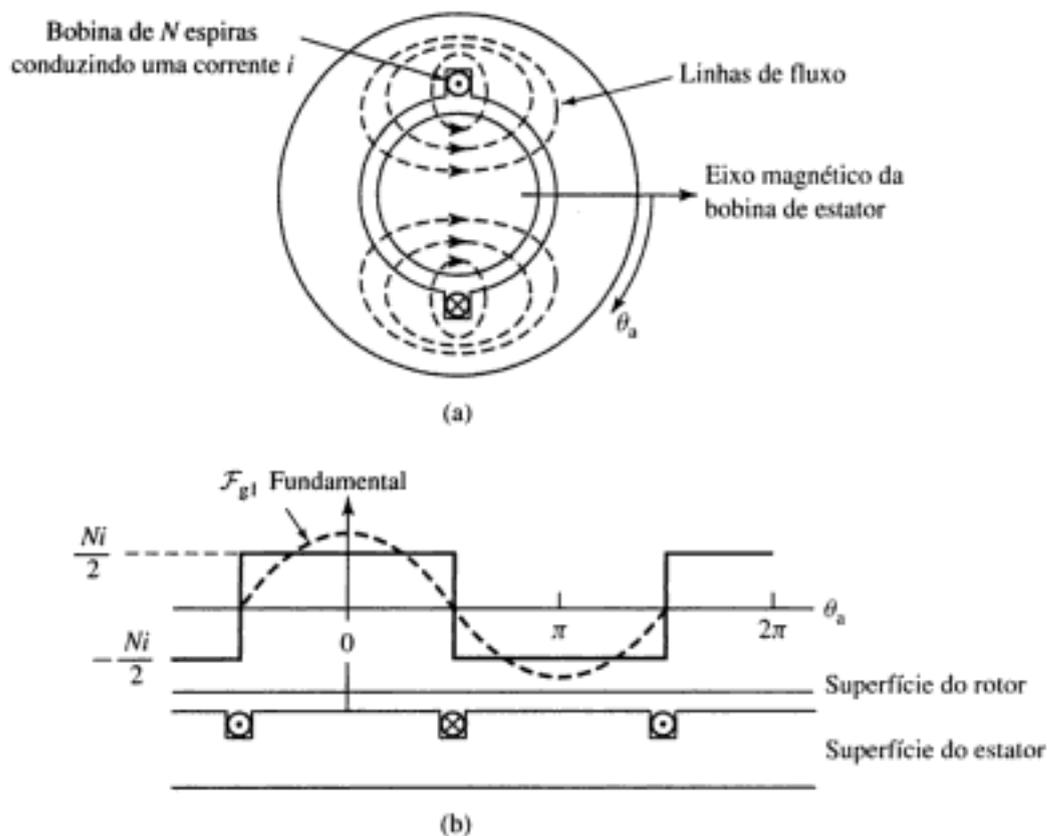
**FIGURA 4.18** (a) Distribuição espacial da densidade de fluxo no entreferro de uma máquina CC elementar; (b) forma de onda da tensão entre as escovas.

Assim, exatamente como nas máquinas CA discutidas anteriormente, é a interação dessas duas distribuições de fluxo que cria o conjugado da máquina CC. Se a máquina estiver atuando como gerador, esse conjugado opõe-se à rotação. Se estiver atuando como motor, o conjugado eletromecânico atua no sentido da rotação. Comentários semelhantes aos já feitos em relação aos papéis desempenhados, no processo de conversão de energia das máquinas síncronas, pela tensão gerada e pelo conjugado eletromecânico aplicam-se igualmente bem às máquinas CC.

### 4.3 FMM DE ENROLAMENTOS DISTRIBUÍDOS

A maioria das armaduras tem enrolamentos distribuídos, isto é, enrolamentos que se estendem por diversas ranhuras ao redor da periferia do entreferro, como nas Figs. 4.2 e 4.1. As bobinas individuais são conectadas entre si de modo que resulte um campo magnético com o mesmo número de pólos que o enrolamento de campo.

Os campos magnéticos dos enrolamentos distribuídos podem ser estudados examinando-se o campo magnético produzido por um enrolamento que tenha uma única bobina de  $N$  espiras compreendendo 180 graus elétricos, como se mostra na Fig. 4.19a. Uma bobina que se estende por 180 graus elétricos é conhecida como *bobina de passo pleno*. Os pontos e cruces indicam fluxos de corrente que se aproximam ou se afastam do leitor, respectivamente. Por simplicidade, o rotor cilíndrico mostrado é concêntrico. As linhas tracejadas da Fig. 4.19a. mostram, de forma genérica, a natureza do campo magnético produzido pela corrente na bobina. Como as permeabilidades do ferro da armadura e do campo são muito maiores que a do ar, podemos supor com exatidão suficiente para os propósitos aqui presentes que toda a relutância do circuito magnético encontra-se no entreferro. Pela simetria da estrutura, é evidente que a intensidade do campo magnético  $H_g$  de entreferro na posição angular  $\theta_a$ , sob um dos pólos, é a mesma em módulo que aquela localizada no ângulo  $\theta_a + \pi$ , sob o pólo oposto. Entretanto, os campos apresentam sentidos opostos.



**FIGURA 4.19** (a) Vista esquemática do fluxo produzido por um enrolamento concentrado de passo pleno em uma máquina de entreferro uniforme. (b) A FMM produzida no entreferro por uma corrente nesse enrolamento.

Ao longo de qualquer dos caminhos fechados, mostrados pelas linhas de fluxo na Fig. 4.19a, a FMM é  $Ni$ . A suposição de que toda a relutância do circuito magnético esteja no entreferro leva ao resultado de que a integral de linha  $\mathbf{H}$  dentro do ferro é muito pequena podendo ser desprezada. Assim, é razoável desprezarmos as quedas de FMM que ocorrem nas partes do circuito magnético que estão dentro do ferro. Por simetria, podemos argumentar que os campos  $H_g$  no entreferro nos lados opostos do rotor são iguais em módulo mas opostos em sentido. Segue-se que a FMM no entreferro deve estar distribuída de modo uniforme. Como cada linha de fluxo cruza o entreferro duas vezes, a queda de FMM no entreferro deve ser igual à metade do total ou  $Ni/2$ .

A Fig. 4.19b mostra o entreferro e o enrolamento em forma desenvolvida, isto é, dispostos em forma plana. A distribuição da FMM no entreferro é mostrada pela distribuição de amplitude  $Ni/2$  semelhante a degraus. Supondo que as aberturas das ranhuras sejam estreitas, a FMM faz um salto abrupto de  $Ni$  ao se passar de um lado a outro da bobina. Essa distribuição de FMM será discutida novamente na Seção 4.4, onde os campos magnéticos resultantes serão calculados.

### 4.3.1 Máquinas CA

A análise de Fourier pode mostrar que a FMM produzida no entreferro por uma única bobina, como a de passo pleno da Fig. 4.19, consiste em uma componente espacial harmônica fundamental mais uma série de componentes harmônicas de ordem mais elevada. No projeto de máquinas CA, sérios esforços são feitos para distribuir as bobinas construindo-se os enrolamentos de modo a minimizar as componentes harmônicas de ordem mais elevada e a produzir uma onda de FMM de entreferro que é constituída predominantemente pela componente

espaial fundamental senoidal. Assim, é adequado assumir que isso foi feito aqui e concentrar a nossa atenção na componente fundamental.

A onda retangular da FMM de entreferro da bobina concentrada de dois pólos e passo pleno da Fig. 4.19b pode ser decomposta em uma série de Fourier compreendendo uma componente fundamental e uma série de harmônicas ímpares. A componente fundamental  $\mathcal{F}_{g1}$  é

$$\mathcal{F}_{g1} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{Ni}{2} \right) \cos \theta_a \quad (4.3)$$

onde  $\theta_a$  é medido a partir do eixo magnético da bobina do estator, como mostrado pela senóide tracejada na Fig. 4.19b. É uma onda senoidal espacial de amplitude

$$(F_{g1})_{\text{pico}} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{Ni}{2} \right) \quad (4.4)$$

com seu pico alinhado com o eixo magnético da bobina.

Agora considere um *enrolamento distribuído*, consistindo em bobinas distribuídas por diversas ranhuras. Por exemplo, a Fig. 4.20a mostra a fase *a* do enrolamento de armadura de uma máquina CA trifásica de dois pólos que foi um tanto simplificada. As fases *b* e *c* ocupam as ranhuras vazias. Os enrolamentos das três fases são idênticos e estão posicionados tendo os seus eixos magnéticos separados de 120 graus entre si. Vamos dar nossa atenção apenas à FMM de entreferro da fase *a*. Deixaremos a discussão dos efeitos das três fases para a Seção 4.5. O enrolamento está disposto em duas camadas. Cada bobina de passo pleno de  $N_b$  espiras tem um lado no topo de uma ranhura e o outro lado no fundo de uma ranhura distanciada de um pólo. Em máquinas reais, essa disposição de duas camadas simplifica o problema geométrico de se fazer passar as espiras dos terminais das bobinas individuais umas pelas outras.

A Fig. 4.20b mostra um pólo desse enrolamento desenvolvido no plano. Com as bobinas conectadas em série e, desse modo, conduzindo a mesma corrente, a onda de FMM é uma série de degraus de altura  $2N_b i_a$  cada um (igual aos ampères-espiras na ranhura), onde  $i_a$  é a corrente de enrolamento. Sua componente fundamental espacial é mostrada pela senóide. Pode-se ver que o enrolamento distribuído produz uma onda que se aproxima mais de uma onda de FMM senoidal do que a bobina concentrada da Fig. 4.19.

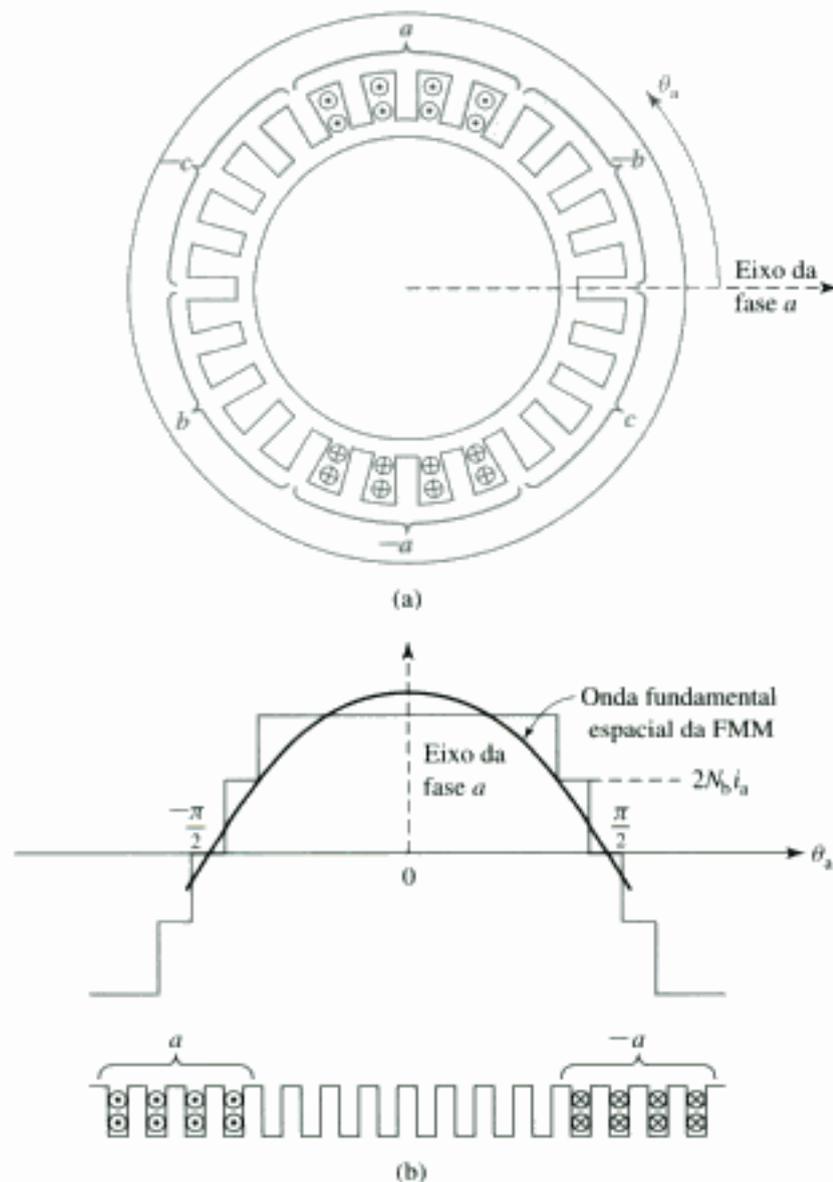
A amplitude da componente harmônica fundamental espacial da onda de FMM de um enrolamento distribuído é menor do que a soma das componentes fundamentais das bobinas individuais porque os eixos magnéticos das bobinas individuais não estão alinhados com a resultante. A forma modificada da Equação 4.3 para um enrolamento distribuído de múltiplos pólos tendo  $N_{\text{fase}}$  espiras por fase em série é

$$\mathcal{F}_{g1} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{k_{\text{enr}} N_{\text{fase}}}{\text{pólos}} \right) i_a \cos \left( \frac{\text{pólos}}{2} \theta_a \right) \quad (4.5)$$

em que o fator  $4/\pi$  surge da análise da série de Fourier da onda retangular da FMM de uma bobina concentrada com passo pleno, como na Equação 4.3, e o *fator de enrolamento*  $k_{\text{enr}}$  leva em consideração a distribuição do enrolamento. Esse fator é necessário porque as FMMs produzidas pelas bobinas individuais de qualquer grupo de uma fase têm eixos magnéticos diferentes. Quando elas são ligadas em série para formar o enrolamento de fase, a sua soma fasorial é então menor do que a sua soma numérica. (Veja o Apêndice B para detalhes.) Para a maioria dos enrolamentos trifásicos, o valor de  $k_{\text{enr}}$  está tipicamente no intervalo de 0,85 a 0,95.

O fator  $k_{\text{enr}} N_{\text{fase}}$  é o número efetivo de espiras por fase em série para a FMM fundamental. A amplitude de pico dessa onda de FMM é

$$(F_{g1})_{\text{pico}} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{k_{\text{enr}} N_{\text{fase}}}{\text{pólos}} \right) i_a \quad (4.6)$$



**FIGURA 4.20** A FMM de uma fase de um enrolamento trifásico distribuído de dois pólos com bobinas de passo pleno.

#### EXEMPLO 4.1

O enrolamento da fase  $a$  da armadura de dois pólos da Fig. 4.20a pode ser considerado como consistindo em 8 bobinas, de passo pleno e  $N_b$  espiras, ligadas em série, com cada ranhura contendo duas bobinas. Há um total de 24 bobinas de armadura, e assim cada ranhura está separada por  $360^\circ/24 = 15^\circ$ . Suponha que o ângulo  $\theta_s$  seja medido a partir do eixo magnético da fase  $a$  de modo que as quatro ranhuras contendo os lados indicados por  $a$  das bobinas estejam em  $\theta_s = 67,5^\circ, 82,5^\circ, 97,5^\circ$  e  $112,5^\circ$ . Os lados opostos das bobinas estão assim nas ranhuras localizadas em  $-112,5^\circ, -97,5^\circ, -82,5^\circ$  e  $-67,5^\circ$ , respectivamente. Assuma que esse enrolamento está conduzindo uma corrente  $i_a$ .

(a) Escreva uma expressão para a FMM espacial fundamental produzida pelas duas bobinas cujos lados estão nas ranhuras em  $\theta_s = 112,5^\circ$  e  $-67,5^\circ$ . (b) Escreva uma expressão para a FMM espacial fundamental produzida pelas duas bobinas cujos lados estão nas ranhuras em  $\theta_s = 67,5^\circ$  e  $-112,5^\circ$ . (c) Escreva uma expressão para a FMM espacial fundamental do enrolamento completo da armadura. (d) Determine o fator de enrolamento  $k_{\text{enr}}$  para esse enrolamento distribuído.

### ■ Solução

- a. Observando que o eixo magnético desse par de bobinas está em  $\theta_a = (112,5^\circ - 67,5^\circ)/2 = 22,5^\circ$  e que o total de ampères-espiras na ranhura é igual a  $2N_b i_a$ , a FMM produzida por esse par de bobinas pode ser obtido em analogia com a Equação 4.3, obtendo-se

$$(\mathcal{F}_{g1})_{22,5^\circ} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{2N_b i_a}{2} \right) \cos(\theta_a - 22,5^\circ)$$

- b. Esse par de bobinas produz a mesma FMM espacial fundamental que o par da parte (a) com a exceção de que essa FMM está centrada em  $\theta_a = -22,5^\circ$ . Assim

$$(\mathcal{F}_{g1})_{-22,5^\circ} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{2N_b i_a}{2} \right) \cos(\theta_a + 22,5^\circ)$$

- c. Em analogia com as partes (a) e (b), a FMM espacial fundamental total pode ser escrita como

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{g1})_{\text{total}} &= (\mathcal{F}_{g1})_{-22,5^\circ} + (\mathcal{F}_{g1})_{-7,5^\circ} + (\mathcal{F}_{g1})_{7,5^\circ} + (\mathcal{F}_{g1})_{22,5^\circ} \\ &= \frac{4}{\pi} \left( \frac{2N_b}{2} \right) i_a [\cos(\theta_a + 22,5^\circ) + \cos(\theta_a + 7,5^\circ) \\ &\quad + \cos(\theta_a - 7,5^\circ) + \cos(\theta_a - 22,5^\circ)] \\ &= \frac{4}{\pi} \left( \frac{7,66N_b}{2} \right) i_a \cos \theta_a \\ &= 4,88N_b i_a \cos \theta_a \end{aligned}$$

- d. Verificando que, para esse enrolamento,  $N_{\text{fase}} = 8N_b$ , a FMM total da parte (c) pode ser reescrita como

$$(\mathcal{F}_{g1})_{\text{total}} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{0,958N_{\text{fase}}}{2} \right) i_a \cos \theta_a$$

Uma comparação com a Equação 4.5 mostra que, nesse enrolamento, o fator de enrolamento é  $k_{\text{enr}} = 0,958$ .

### PROBLEMA PRÁTICO 4.1

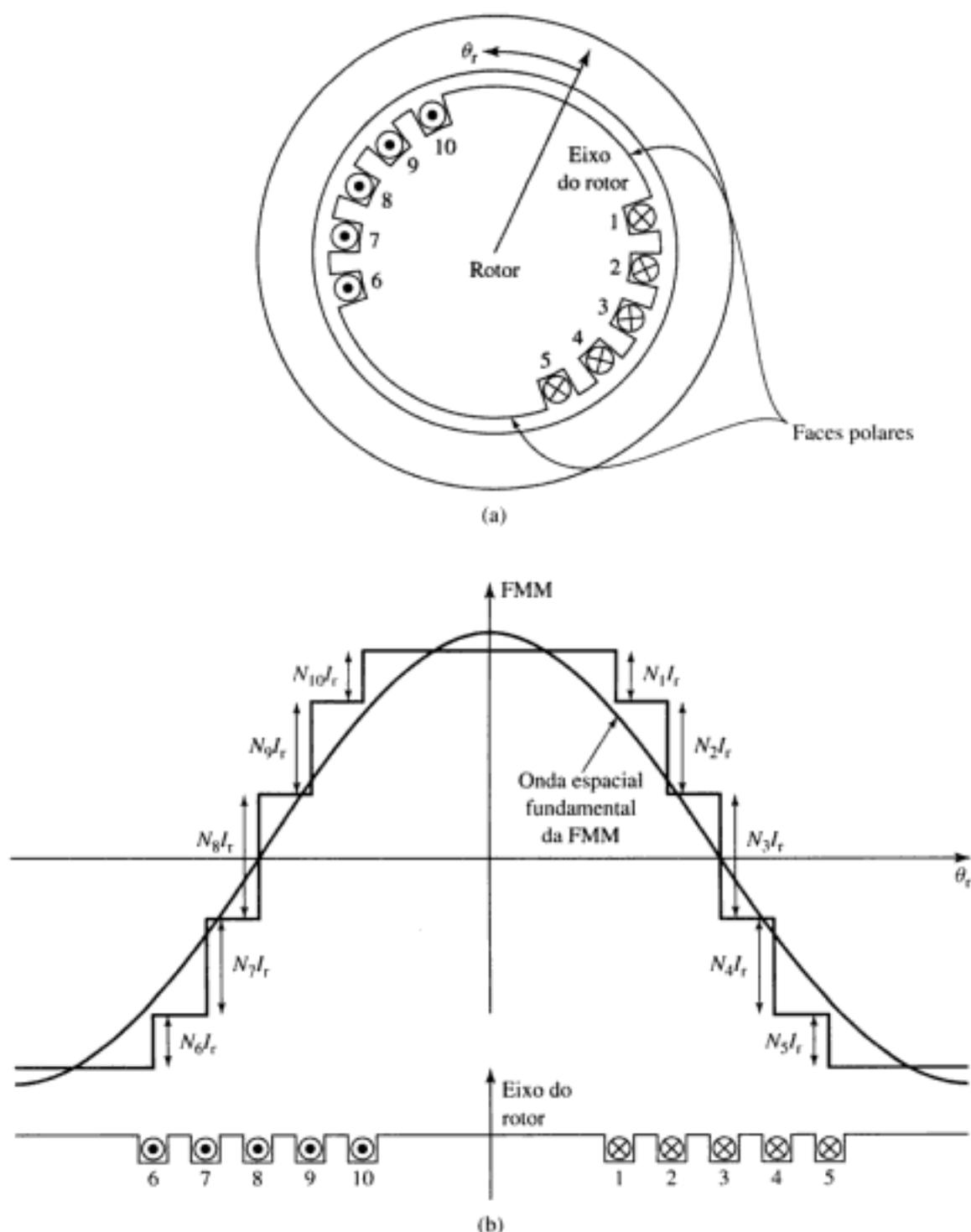
Calcule o fator de enrolamento para o enrolamento da fase *a* da Fig. 4.20 se o número de espiras nas quatro bobinas dos dois pares externos de ranhuras for igual a seis ao passo que o número de espiras nas quatro bobinas das ranhuras internas for igual a oito.

### ■ Solução

$$k_{\text{enr}} = 0,962$$

A Equação 4.5 descreve a componente espacial fundamental da onda de FMM produzida pela corrente da fase *a* de um enrolamento distribuído. Se a corrente da fase *a* for senoidal no tempo, por exemplo,  $i_a = I_m \cos \omega t$ , o resultado será uma onda de FMM que é estacionária no espaço e varia senoidalmente em relação a  $\theta_a$  e ao tempo. Na Seção 4.5, estudaremos o efeito das correntes em todas as três fases e veremos que a aplicação de correntes trifásicas produzirá uma onda girante de FMM.

De modo semelhante, freqüentemente os enrolamentos do rotor são distribuídos nas ranhuras para reduzir os efeitos das harmônicas espaciais. A Fig. 4.21a mostra o rotor de um gerador típico de dois pólos e rotor cilíndrico. Embora o enrolamento seja simétrico em relação ao eixo do rotor, o número de espiras por ranhura pode ser variado para controlar as



**FIGURA 4.21** A FMM de entreferro do enrolamento distribuído do rotor de um gerador de rotor cilíndrico.

diversas harmônicas. Na Fig. 4.21b, pode-se ver que há menos espiras nas ranhuras próximas da face do pólo. Além disso, o projetista pode variar o distanciamento entre as ranhuras. Em relação aos enrolamentos distribuídos de armadura, a onda fundamental de FMM no entreferro de um enrolamento de rotor de múltiplos pólos pode ser obtida a partir da Equação 4.5 em termos do número total  $N_r$  de espiras em série, a corrente de enrolamento  $I_r$  e um fator de enrolamento  $k_r$ , obtendo-se

$$\mathcal{F}_{g1} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{k_r N_r}{\text{pólos}} \right) I_r \cos \left( \frac{\text{pólos}}{2} \theta_r \right) \quad (4.7)$$

onde  $\theta_r$  é o ângulo espacial medido em relação ao eixo magnético do rotor, como mostrado na Fig. 4.21b. Sua amplitude de pico é

$$(F_{gl})_{\text{pico}} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{k_r N_r}{\text{pólos}} \right) I_r \quad (4.8)$$

### 4.3.2 Máquinas CC

Devido às restrições impostas pelo comutador à colocação do enrolamento, a onda de FMM da armadura de uma máquina CC aproxima-se mais da forma de onda em dente de serra do que da forma de onda senoidal das máquinas CA. Por exemplo, a Fig. 4.22 mostra esquematicamente em corte transversal a armadura de uma máquina CC de dois pólos. (Na prática, em todas as máquinas CC, com exceção das muito pequenas, um número mais elevado de bobinas e ranhuras seria provavelmente usado.) Os sentidos das correntes são mostrados por pontos e cruzes. As conexões da bobina do enrolamento da armadura são tais que esse enrolamento produz um campo magnético cujo eixo é vertical, sendo assim perpendicular ao eixo do enrolamento de campo. À medida que a armadura gira, as conexões entre as bobinas e os circuitos externos são alteradas pelo comutador de modo tal que o campo magnético da armadura permaneça vertical. Assim, o fluxo da armadura está sempre perpendicular ao produzido pelo enrolamento de campo, resultando um conjugado unidirecional contínuo. A ação do comutador será discutida com algum detalhe na Seção 7.2.

A Fig. 4.23a mostra esse enrolamento desenvolvido no plano. A onda de FMM está mostrada na Fig. 4.23b. Assumindo que as ranhuras sejam estreitas, ela consistirá em uma série de degraus. Supondo-se um enrolamento de duas camadas e bobinas de passo pleno, a altura de cada degrau será igual ao número de ampères-espiras  $2N_b i_b$  em uma ranhura, onde  $N_b$  é o número de espiras em cada bobina e  $i_b$  é a corrente da bobina. O valor de pico da onda de FMM ocorre na direção do eixo magnético da armadura, a meio caminho entre os pólos do campo. Esse enrolamento é equivalente a uma bobina de  $12N_b i_b$  ampères-espiras distribuídos ao redor da armadura. Supondo-se que os pólos sejam simétricos, o valor de pico da onda de FMM em cada pólo de armadura é  $6N_b i_b$  ampères-espiras.

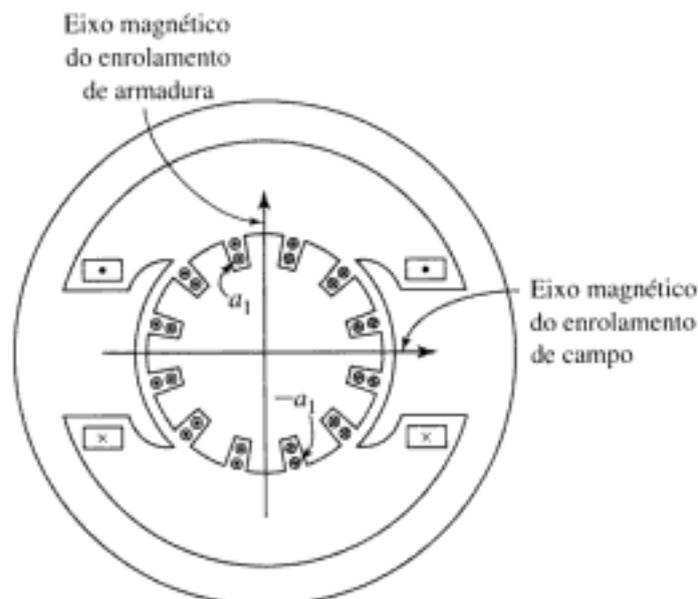
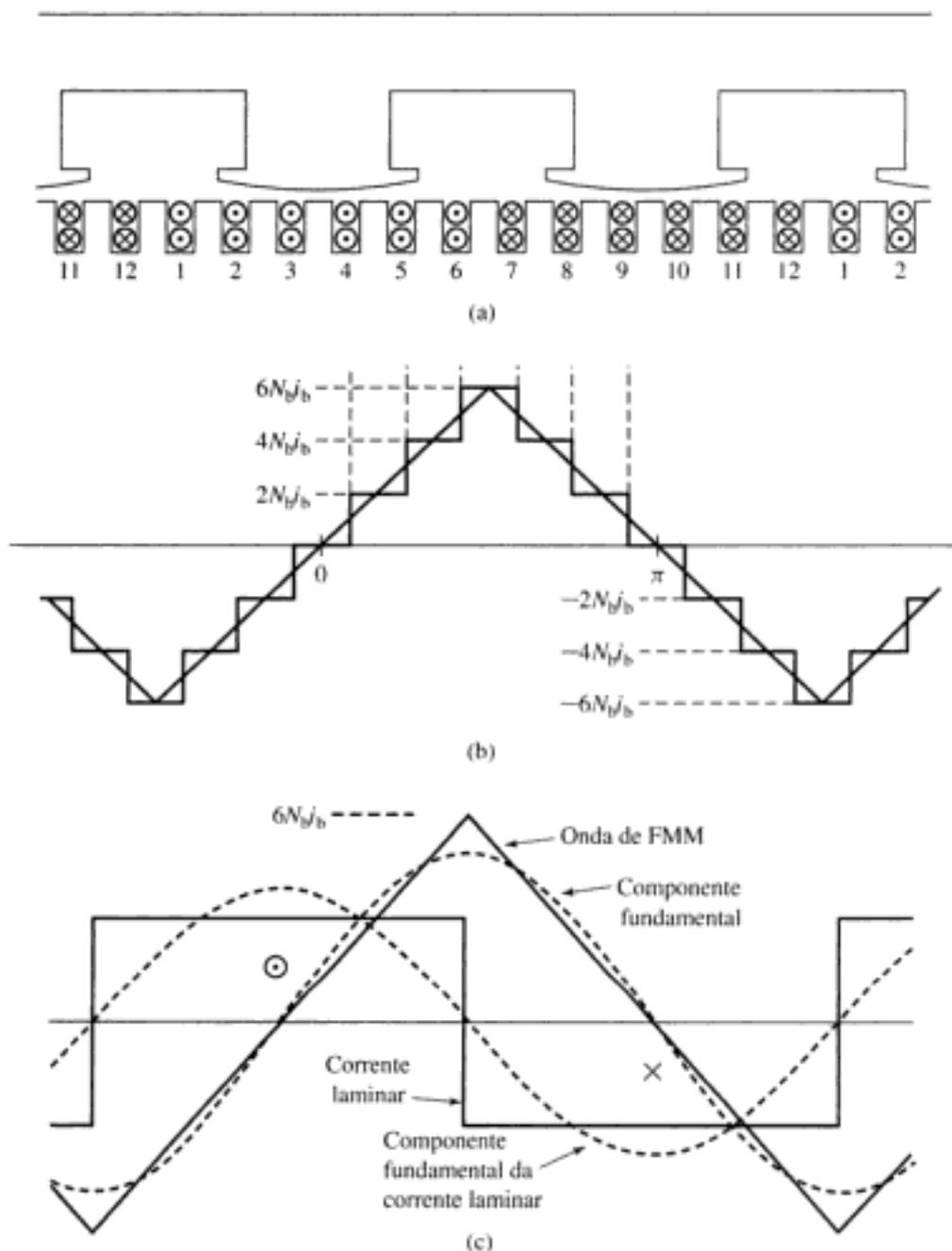


FIGURA 4.22 Corte transversal de uma máquina CC de dois pólos.



**FIGURA 4.23** (a) Desenvolvimento no plano da máquina CC da Fig. 4.22; (b) onda de FMM; (c) onda equivalente em dente de serra da FMM, sua componente fundamental, e a corrente retangular laminar equivalente.

Essa onda de FMM pode ser aproximada pela forma de onda em dente de serra da Fig. 4.23b e repetida na Fig. 4.23c. Em um enrolamento mais realístico, com um número mais elevado de ranhuras de armadura por pólo, a distribuição triangular torna-se uma aproximação muito satisfatória. Essa onda de FMM seria produzida por uma distribuição retangular da densidade de corrente na superfície da armadura, como mostrado na Fig. 4.23c.

Neste nosso estudo preliminar, é conveniente decompor as ondas de FMM dos enrolamentos distribuídos em suas componentes de série de Fourier. A componente fundamental da forma de onda em dente de serra da FMM da Fig. 4.23c é mostrada pela onda senoidal. Seu valor de pico é  $8/\pi^2 = 0,81$  vezes a altura da onda em dente de serra. Essa onda fundamental de FMM é a que seria produzida pela componente harmônica espacial fundamental da distribuição retangular de densidade de corrente da Fig. 4.23c. Essa lâmina de corrente distribuída senoidalmente está mostrada em forma tracejada na Fig. 4.23c.

Observe que a distribuição de FMM nos entreferros depende apenas da disposição dos enrolamentos e da simetria das estruturas magnéticas em cada pólo. Entretanto, a densidade de fluxo magnético nos entreferros depende não apenas da FMM mas também das condições magnéticas nos contornos, principalmente o comprimento do entreferro, o efeito das aberturas das ranhuras, e a forma das faces dos pólos. O projetista leva em consideração esses efeitos por meio de análises detalhadas com as quais, no entanto, não precisamos nos ocupar aqui.

As máquinas CC têm freqüentemente uma estrutura magnética com mais de dois pólos. Por exemplo, a Fig. 4.24a mostra esquematicamente uma máquina CC de quatro pólos. O enrolamento de campo produz alternadamente polaridades norte-sul-norte-sul, e os condutores da armadura são distribuídos em quatro feixes nas ranhuras conduzindo correntes alternadamente em direção, e para longe do leitor, como se simboliza pelas áreas hachuradas. Essa máquina está mostrada em forma desenvolvida na Fig. 4.24b. A onda correspondente da FMM em forma de dente de serra também está mostrada. Supondo que haja simetria nos enrolamentos e pólos do campo, cada par sucessivo de pólos é igual a qualquer outro par. Então, as condições magnéticas no entreferro podem ser determinadas examinando-se um par qualquer de pólos adjacentes, isto é, de 360 graus elétricos.

O valor de pico da onda em dente de serra da FMM de armadura pode ser escrito em termos do número total de condutores nas ranhuras da armadura como

$$(F_g)_{\text{pico}} = \left( \frac{C_a}{2m \cdot \text{pólos}} \right) i_a \quad A \cdot \text{espiras/pólo} \quad (4.9)$$

onde

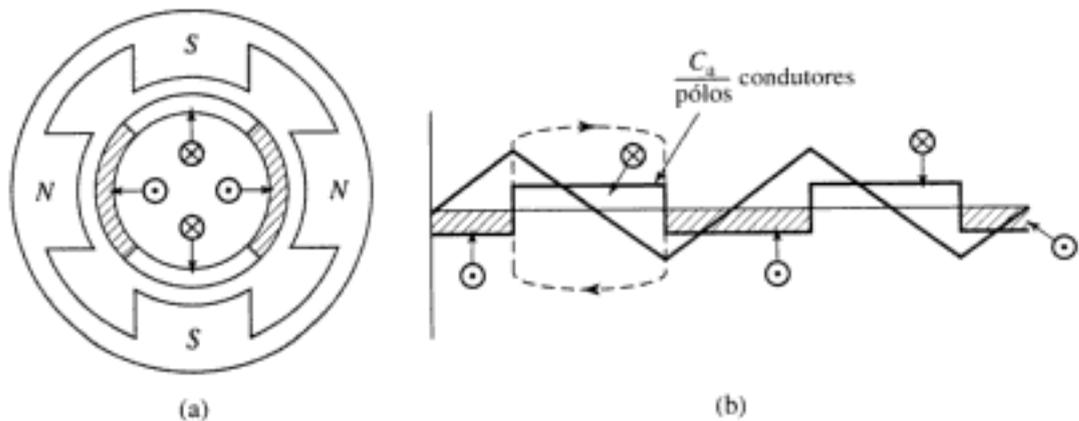
$C_a$  = número total de condutores no entreferro de armadura

$m$  = número de caminhos paralelos no enrolamento de armadura

$i_a$  = corrente de armadura, A

Essa equação leva em consideração o fato de que em alguns casos a armadura pode estar enrolada com múltiplos caminhos de corrente em paralelo. Essa é a razão pela qual freqüentemente é mais conveniente pensar na armadura em termos do número de condutores (sendo que cada condutor corresponde a um único caminho que conduz corrente dentro de uma ranhura). Assim,  $i_a/m$  é a corrente em cada condutor. Essa equação vem diretamente da integral de linha calculada ao longo do caminho fechado tracejado da Fig. 4.24b, que cruza o entreferro duas vezes e envolve  $C_a/\text{pólos}$  condutores, cada um desses conduzindo a corrente  $i_a/m$  no mesmo sentido. Em forma mais compacta,

$$(F_g)_{\text{pico}} = \left( \frac{N_a}{\text{pólos}} \right) i_a \quad (4.10)$$



**FIGURA 4.24** (a) Seção transversal de uma máquina CC de quatro pólos; (b) planificação da corrente laminar e da onda de FMM.

onde  $N_a = C_p/(2m)$  é o número de espiras em série da armadura. Da série de Fourier da onda de FMM, em forma de dente de serra, da Fig. 4.24b, o valor de pico da fundamental espacial é dado por

$$(F_{g1})_{\text{pico}} = \frac{8}{\pi^2} \left( \frac{N_a}{\text{pólos}} \right) i_a \quad (4.11)$$

## 4.4 CAMPOS MAGNÉTICOS EM MÁQUINAS ROTATIVAS

Nossas investigações preliminares de máquinas CA e CC estão baseadas na suposição de que as distribuições espaciais de FMM sejam senoidais. Constataremos que essa suposição levará a resultados muito satisfatórios na maioria dos problemas que envolvem máquinas CA, porque comumente seus enrolamentos estão distribuídos de modo a minimizar os efeitos das harmônicas espaciais. Inerentemente, devido às restrições impostas pelo comutador em relação à disposição dos enrolamentos, as ondas de FMM das máquinas CC aproximam-se mais de perto de uma onda em forma de dente de serra. No entanto, a teoria baseada no modelo senoidal evidencia as características fundamentais da teoria das máquinas CC. Sempre que necessário, os resultados podem ser prontamente modificados para explicar quaisquer discrepâncias significativas.

Freqüentemente é mais fácil começar examinando-se uma máquina de dois pólos, na qual os ângulos e as velocidades elétrica e mecânica são iguais. Os resultados podem ser extrapolados imediatamente a máquinas de múltiplos pólos lembrando que ângulos elétricos e velocidades angulares estão relacionados com os ângulos mecânicos e as velocidades angulares pelo fator pólos/2 (veja, por exemplo, a Equação 4.1).

O comportamento das máquinas elétricas é determinado pelos campos magnéticos criados por correntes nos diversos enrolamentos da máquina. Essa seção discute como esses campos magnéticos e correntes se relacionam.

### 4.4.1 Máquinas com Entreferros Uniformes

A Fig. 4.25a mostra uma bobina, de  $N$  espiras e passo pleno, alojada em uma estrutura magnética de alta permeabilidade ( $\mu \rightarrow \infty$ ), e um rotor cilíndrico concêntrico. A FMM  $\mathcal{F}_g$  de entreferro dessa configuração está plotada, em função do ângulo  $\theta_a$ , na Fig. 4.25b. Para essa estrutura, com um entreferro uniforme de comprimento  $g$  e raio  $r_r$  (muito maior que  $g$ ), pode-se supor com boa exatidão que o campo magnético  $\mathbf{H}$  no entreferro está orientado apenas radialmente e que seu módulo é constante no entreferro.

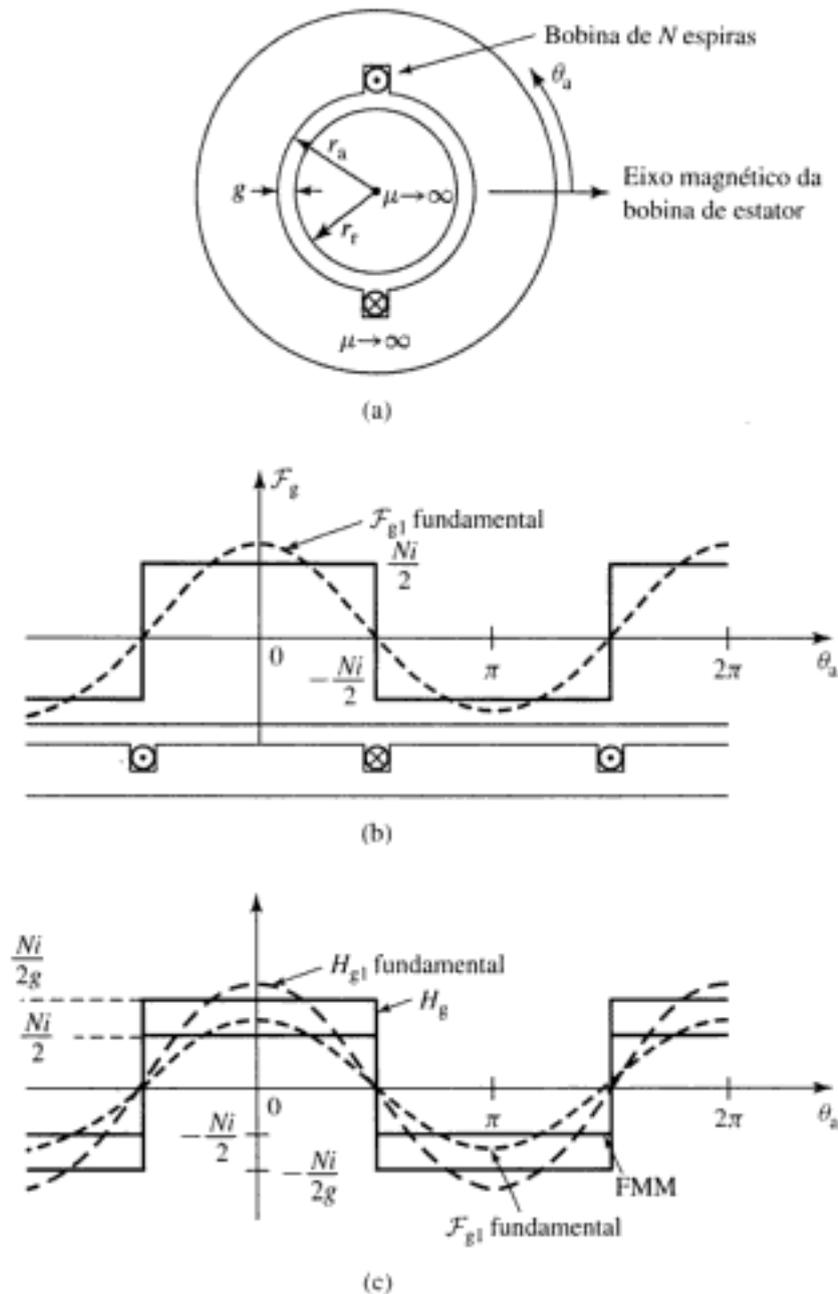
A distribuição de FMM no entreferro da Fig. 4.25b é igual à integral de linha de  $H_g$  através do entreferro. Nesse caso de  $H_g$  radial constante, essa integral é simplesmente igual ao produto do campo magnético radial  $H_g$  no entreferro vezes o comprimento  $g$  do entreferro, e assim  $H_g$  pode ser obtido dividindo-se simplesmente a FMM do entreferro pelo comprimento deste:

$$H_g = \frac{\mathcal{F}_g}{g} \quad (4.12)$$

Assim, na Fig. 4.25c, pode-se ver que o campo radial  $H_g$  e a FMM apresentam forma idêntica, relacionando-se entre si simplesmente pelo fator  $1/g$ .

A componente harmônica espacial fundamental de  $H_g$  pode ser obtida diretamente da componente fundamental  $\mathcal{F}_{g1}$ , dada pela Equação 4.3,

$$H_{g1} = \frac{\mathcal{F}_{g1}}{g} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{Ni}{2g} \right) \cos \theta_a \quad (4.13)$$



**FIGURA 4.25** A FMM de entreferro e a componente radial de  $H_g$  para um enrolamento concentrado de passo pleno.

É uma onda espacial senoidal de amplitude

$$(H_{g1})_{\text{pico}} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{Ni}{2g} \right) \quad (4.14)$$

Para um enrolamento distribuído, como o da Fig. 4.20, a intensidade do campo magnético de entreferro é obtida facilmente, tão logo a FMM de entreferro seja conhecida. Assim, a componente fundamental de  $H_g$  pode ser encontrada dividindo-se a componente fundamental da FMM de entreferro (Equação 4.5) pelo comprimento de entreferro  $g$

$$H_{g1} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{k_{\text{ent}} N_{\text{fase}}}{g \cdot \text{pólos}} \right) i_a \cos \left( \frac{\text{pólos}}{2} \theta_a \right) \quad (4.15)$$

Essa equação foi escrita para o caso geral de uma máquina de múltiplos pólos, e  $N_{\text{fase}}$  é o número total de espiras em série por fase.

Observe que a FMM espacial fundamental de entreferro  $\mathcal{F}_{g1}$  e o campo magnético de entreferro  $H_{g1}$ , produzidos por um enrolamento distribuído com fator de enrolamento  $k_{enr}$  e  $N_{fase}$  / pólos espiras em série por pólo, são iguais aos produzidos por um enrolamento concentrado de passo pleno com  $(k_{enr}N_{fase})$ /pólos espiras por pólo. Na análise de máquinas com enrolamentos distribuídos, esse resultado é útil porque, quando se consideram grandezas fundamentais espaciais, permite que a solução distribuída seja obtida a partir da solução para uma única bobina de  $N$  espiras e passo pleno, simplesmente substituindo  $N$  pelo número efetivo de espiras,  $k_{enr}N_{fase}$ , do enrolamento distribuído.

**EXEMPLO 4.2**

Um gerador CA síncrono de quatro pólos com um entreferro uniforme tem um enrolamento de rotor distribuído com 263 espiras em série, um fator de enrolamento de 0,935 e um entreferro de comprimento 0,7 mm. Supondo que a queda de FMM no aço elétrico seja desprezível, encontre a corrente de enrolamento de rotor necessária para produzir uma densidade de fluxo magnético fundamental espacial de pico de 1,6 T no entreferro da máquina.

**■ Solução**

A densidade de fluxo magnético fundamental espacial no entreferro pode ser obtida multiplicando-se a permeabilidade do vácuo  $\mu_0$  pelo campo magnético do entreferro, que por sua vez pode ser encontrado a partir da componente fundamental espacial da FMM no entreferro dividida pelo comprimento de entreferro  $g$ . Assim, da Equação 4.8

$$(B_{g1})_{pico} = \frac{\mu_0(\mathcal{F}_{g1})_{pico}}{g} = \frac{4\mu_0}{\pi g} \left( \frac{k_r N_r}{\text{pólos}} \right) I_r$$

e  $I_r$  pode ser obtida de

$$\begin{aligned} I_r &= \left( \frac{\pi g \cdot \text{pólos}}{4\mu_0 k_r N_r} \right) (B_{g1})_{pico} \\ &= \left( \frac{\pi \times 0,0007 \times 4}{4 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 0,935 \times 263} \right) 1,6 \\ &= 11,4 \text{ A} \end{aligned}$$

**PROBLEMA PRÁTICO 4.2**

Uma máquina síncrona de dois pólos tem um comprimento de entreferro de 2,2 cm e um enrolamento de campo com um total de 830 espiras em série. Quando excitada por uma corrente de campo de 47 A, a densidade de fluxo magnético fundamental espacial de pico no entreferro da máquina é medida como sendo 1,35 T.

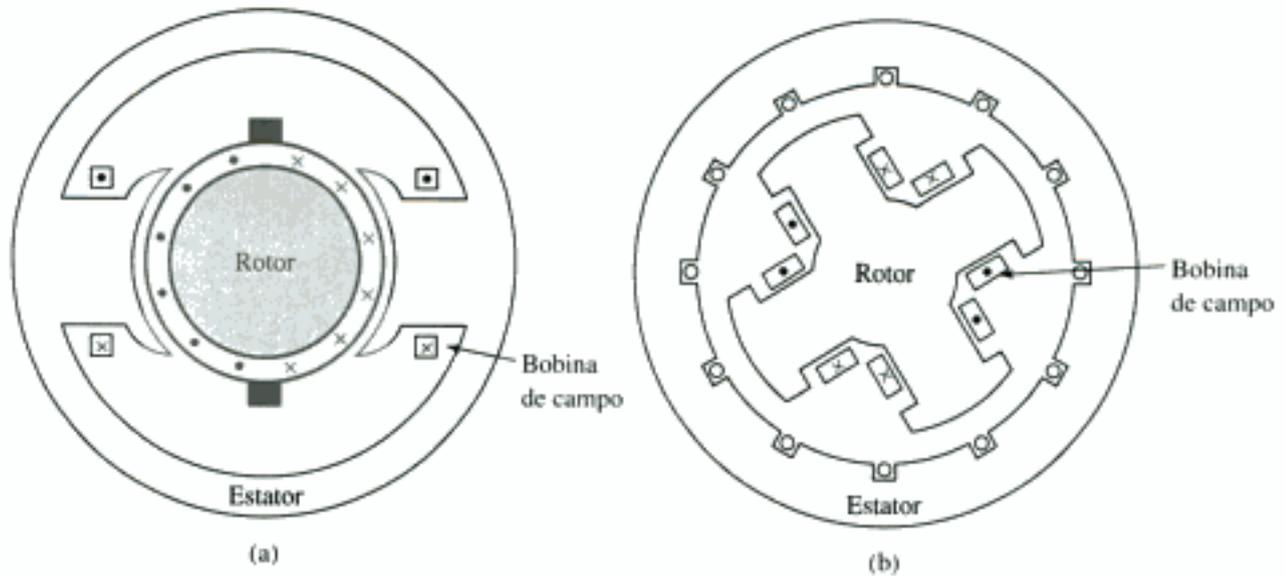
Com base na densidade de fluxo medida, calcule o fator de enrolamento  $k_r$  do enrolamento de campo.

**■ Solução**

$$k_r = 0,952$$

**4.4.2 Máquinas com Entreferrros Não Uniformes**

A Fig. 4.26a mostra a estrutura de uma máquina CC típica e a Fig. 4.26b mostra a estrutura de uma máquina síncrona típica de pólos salientes. Ambas as máquinas consistem em estruturas



**FIGURA 4.26** Estrutura de máquinas típicas de pólos salientes: (a) máquina CC e (b) máquina síncrona de pólos salientes.

magnéticas com entreferros extremamente não uniformes. Nesses casos, a distribuição de campo magnético no entreferro é mais complexa do que a de máquinas de entreferro uniforme.

A análise detalhada das distribuições de campo magnético nessas máquinas requer soluções completas para o problema do campo. Por exemplo, a Fig. 4.27 mostra a distribuição de campo magnético em um gerador CC de pólos salientes (obtida por uma solução baseada em elementos finitos). No entanto, a experiência tem mostrado que, por meio de diversas simplificações, pode-se desenvolver técnicas analíticas que produzem resultados com exatidão razoável. Essas técnicas serão ilustradas em capítulos posteriores, onde os efeitos das saliências em máquinas CC e CA são discutidos.

## 4.5 ONDAS GIRANTES DE FMM EM MÁQUINAS CA

Para se compreender a teoria e a operação das máquinas CA polifásicas, é necessário estudar a natureza da onda de FMM produzida por um enrolamento polifásico. A atenção estará focada em uma máquina de dois pólos ou em um par de pólos de um enrolamento de múltiplos pólos. Para desenvolver um *insight* do caso polifásico, é útil começar com a análise de um enrolamento monofásico.

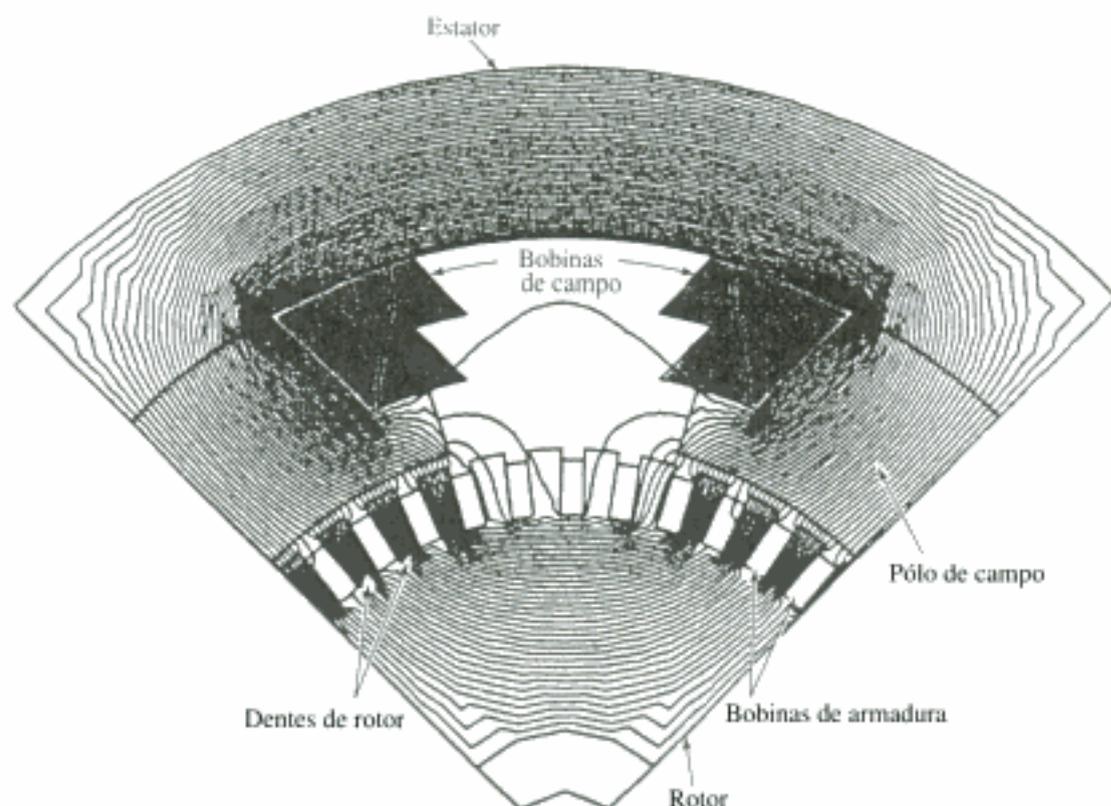
### 4.5.1 Onda de FMM de um Enrolamento Monofásico

A Fig. 4.28a mostra a componente fundamental espacial da distribuição de FMM de um enrolamento monofásico, onde, a partir da Equação 4.5,

$$\mathcal{F}_{g1} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{k_{\text{enr}} N_{\text{fase}}}{\text{pólos}} \right) i_a \cos \left( \frac{\text{pólos}}{2} \theta_a \right) \quad (4.16)$$

Quando esse enrolamento é excitado por uma corrente que varia de forma senoidal no tempo com a frequência  $\omega_c$  segundo a equação

$$i_a = I_a \cos \omega_c t \quad (4.17)$$



**FIGURA 4.27** Solução baseada em elementos finitos para a distribuição do campo magnético em um gerador CC de pólos salientes. Bobinas de campo excitadas; bobinas de armadura sem corrente. (*General Electric Company*)

a distribuição da FMM é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{gl} &= F_{\max} \cos \left( \frac{\text{pólos}}{2} \theta_a \right) \cos \omega_e t \\ &= F_{\max} \cos (\theta_{ac}) \cos \omega_e t \end{aligned} \quad (4.18)$$

A Equação 4.18 foi escrita de forma a enfatizar o fato de que o resultado é uma distribuição de FMM de amplitude máxima

$$F_{\max} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{k_{\text{ent}} N_{\text{fase}}}{\text{pólos}} \right) I_a \quad (4.19)$$

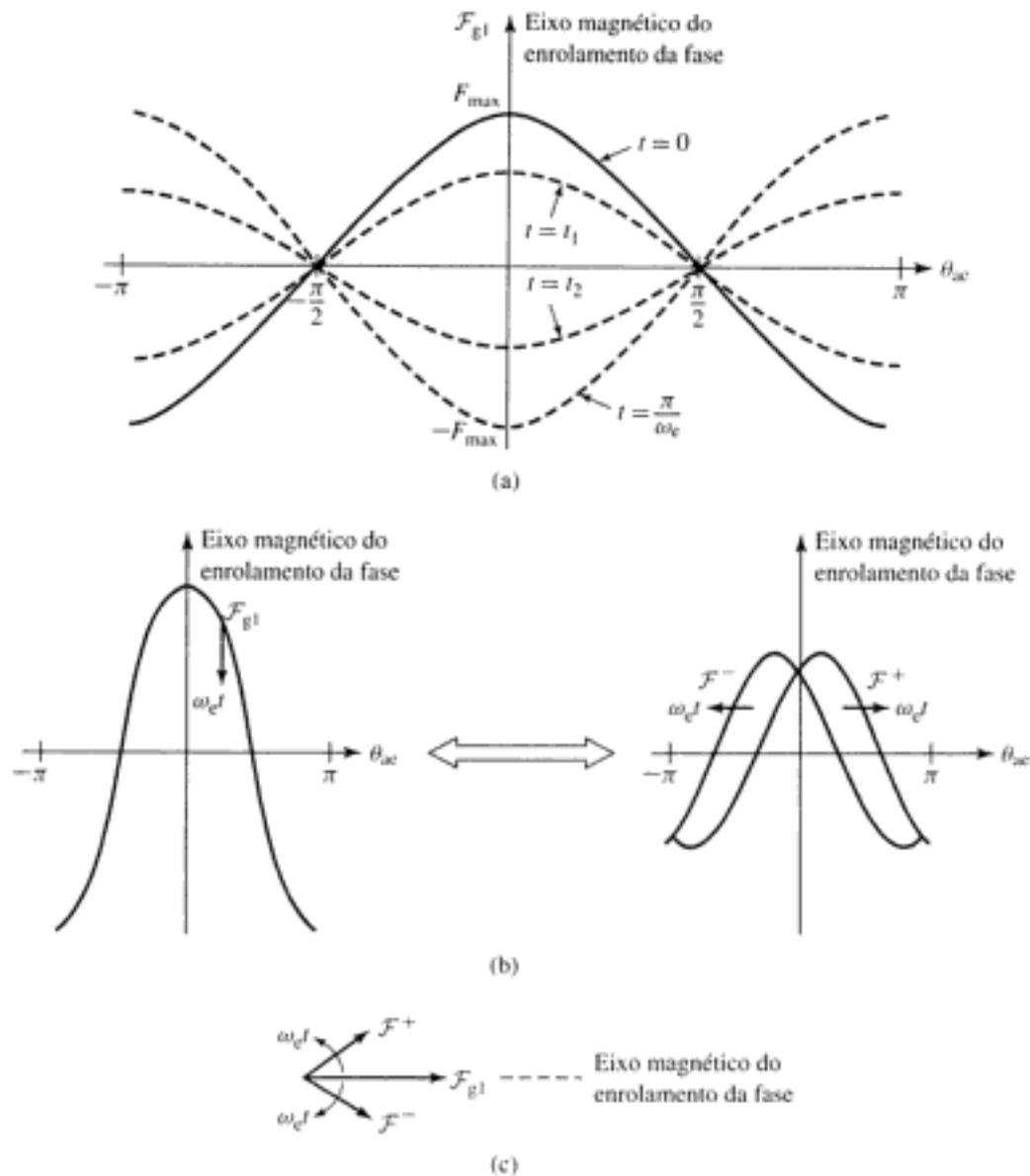
Essa distribuição de FMM permanece fixa no espaço com uma amplitude que varia de forma senoidal no tempo com a frequência  $\omega_e$ , como se mostra na Fig. 4.28a. Observe que, para simplificar a notação, a Equação 4.1 foi usada para expressar a distribuição de FMM da Equação 4.18 em termos do ângulo elétrico  $\theta_{ac}$ .

O uso de uma identidade trigonométrica comum<sup>1</sup> permite reescrever a Equação 4.18 na forma

$$\mathcal{F}_{gl} = F_{\max} \left[ \frac{1}{2} \cos (\theta_{ac} - \omega_e t) + \frac{1}{2} \cos (\theta_{ac} + \omega_e t) \right] \quad (4.20)$$

mostrando que a FMM de um enrolamento monofásico pode ser decomposta em duas ondas girantes de FMM, cada uma de amplitude igual à metade da amplitude máxima de  $\mathcal{F}_{gl}$  com uma

<sup>1</sup>  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta)$



**FIGURA 4.28** FMM espacial fundamental de entreferro para um enrolamento monofásico: (a) distribuição de FMM para um enrolamento de uma fase em vários tempos; (b) FMM total  $\mathcal{F}_{g1}$  decomposta em duas ondas progressivas  $\mathcal{F}^-$  e  $\mathcal{F}^+$ ; (c) decomposição fasorial de  $\mathcal{F}_{g1}$ .

delas,  $\mathcal{F}_{g1}^+$ , deslocando-se no sentido  $+\theta_a$  e a outra,  $\mathcal{F}_{g1}^-$ , deslocando-se no sentido  $-\theta_a$ , ambas com a velocidade angular elétrica  $\omega_e$  (igual a velocidade angular mecânica de  $2\omega_e/p$  pólos):

$$\mathcal{F}_{g1}^+ = \frac{1}{2} F_{max} \cos(\theta_{ac} - \omega_e t) \quad (4.21)$$

$$\mathcal{F}_{g1}^- = \frac{1}{2} F_{max} \cos(\theta_{ac} + \omega_e t) \quad (4.22)$$

Essa decomposição está mostrada graficamente na Fig. 4.28b e em representação fasorial na Fig. 4.28c.

O fato de que a FMM no entreferro de um enrolamento monofásico, excitado por uma fonte de corrente alternada, pode ser decomposta em duas ondas progressivas girantes, positiva e negativa, é um passo conceitual importante na compreensão das máquinas CA. Como mostrado na Seção 4.5.2, em máquinas CA polifásicas, os enrolamentos estão deslocados igualmente em fase no espaço, e as correntes de enrolamento estão deslocadas de modo simi-

lar em termos de fase no tempo, com a consequência de que as ondas progressivas negativas de fluxo dos vários enrolamentos somam-se anulando-se, ao passo que as ondas progressivas positivas de fluxo reforçam-se, resultando uma única onda progressiva positiva de fluxo.

Em máquinas elétricas monofásicas, a onda progressiva positiva de fluxo produz conjugado útil ao passo que a onda progressiva negativa de fluxo produz conjugado negativo pulsante e perdas. Essas máquinas são projetadas de modo a minimizar os efeitos da onda progressiva negativa de fluxo, embora, diferentemente do caso de máquinas polifásicas, esses efeitos não possam ser totalmente eliminados.

#### 4.5.2 Onda de FMM de um Enrolamento Polifásico

Nesta seção, estudaremos as distribuições de FMM em enrolamentos trifásicos, como as encontradas no estator de máquinas trifásicas síncronas e de indução. As análises apresentadas podem ser prontamente estendidas para um enrolamento polifásico com qualquer número de fases. Novamente, a atenção estará focada em uma máquina de dois pólos ou em um par de pólos de um enrolamento de múltiplos pólos.

Em uma máquina trifásica, os enrolamentos das fases individuais estão afastados entre si por 120 graus elétricos no espaço ao redor da circunferência de entreferro, como mostrado pelas bobinas  $a$ ,  $-a$ ,  $b$ ,  $-b$  e  $c$ ,  $-c$  na Fig. 4.29. As bobinas concentradas de passo pleno mostradas aqui podem ser consideradas como representando enrolamentos distribuídos que produzem ondas senoidais de FMM centradas nos eixos magnéticos das respectivas fases. As ondas senoidais fundamentais espaciais de FMM das três fases estão afastadas respectivamente de 120 graus elétricos no espaço. Cada fase é excitada por uma corrente alternada que varia de forma senoidal no tempo. Sob condições de equilíbrio trifásico, as correntes instantâneas são

$$i_a = I_m \cos \omega_e t \quad (4.23)$$

$$i_b = I_m \cos (\omega_e t - 120^\circ) \quad (4.24)$$

$$i_c = I_m \cos (\omega_e t + 120^\circ) \quad (4.25)$$

onde  $I_m$  é o valor máximo de corrente e a origem do tempo é tomada arbitrariamente como sendo o instante em que a corrente da fase  $a$  é máxima positiva. Assume-se que a sequência de fases seja  $abc$ . As correntes instantâneas estão mostradas na Fig. 4.30. Os pon-

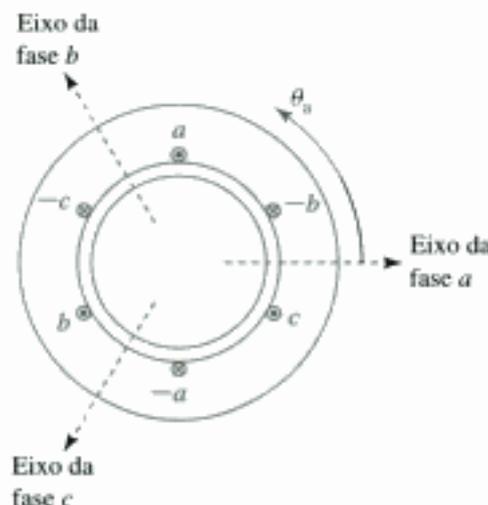
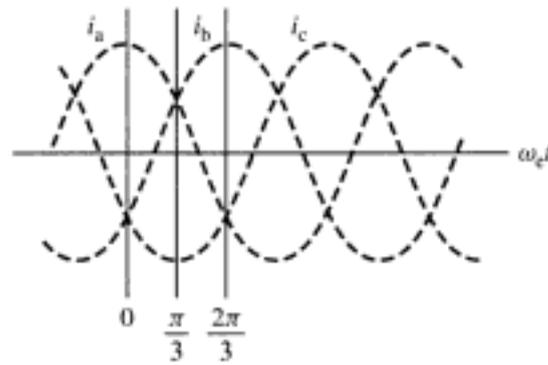


FIGURA 4.29 Enrolamento de estator trifásico simplificado de dois pólos.



**FIGURA 4.30** Correntes de fase instantâneas sob condições de equilíbrio trifásico.

tos e cruzeiros nos lados das bobinas (Fig. 4.29) indicam os sentidos de referência para correntes positivas de fase.

Foi mostrado anteriormente que a FMM da fase  $a$  é

$$\mathcal{F}_{a1} = \mathcal{F}_{a1}^+ + \mathcal{F}_{a1}^- \quad (4.26)$$

onde

$$\mathcal{F}_{a1}^+ = \frac{1}{2} F_{\max} \cos(\theta_{ae} - \omega_e t) \quad (4.27)$$

$$\mathcal{F}_{a1}^- = \frac{1}{2} F_{\max} \cos(\theta_{ae} + \omega_e t) \quad (4.28)$$

e

$$F_{\max} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{k_{\text{ent}} N_{\text{fase}}}{\text{pólos}} \right) I_m \quad (4.29)$$

Observe que para evitar uma complexidade excessiva de notação, o subscrito  $g$  foi descartado. Aqui o subscrito  $a1$  indica a componente espacial fundamental da FMM da fase  $a$  no entreferro.

Do mesmo modo, para as fases  $b$  e  $c$ , cujos eixos estão em  $\theta_a = 120^\circ$  e  $\theta_a = -120^\circ$ , respectivamente,

$$\mathcal{F}_{b1} = \mathcal{F}_{b1}^+ + \mathcal{F}_{b1}^- \quad (4.30)$$

$$\mathcal{F}_{b1}^+ = \frac{1}{2} F_{\max} \cos(\theta_{ae} - \omega_e t) \quad (4.31)$$

$$\mathcal{F}_{b1}^- = \frac{1}{2} F_{\max} \cos(\theta_{ae} + \omega_e t + 120^\circ) \quad (4.32)$$

e

$$\mathcal{F}_{c1} = \mathcal{F}_{c1}^+ + \mathcal{F}_{c1}^- \quad (4.33)$$

$$\mathcal{F}_{c1}^+ = \frac{1}{2} F_{\max} \cos(\theta_{ae} - \omega_e t) \quad (4.34)$$

$$\mathcal{F}_{c1}^- = \frac{1}{2} F_{\max} \cos(\theta_{ae} + \omega_e t - 120^\circ) \quad (4.35)$$

A FMM total é a soma das contribuições de cada uma das três fases

$$\mathcal{F}(\theta_{ae}, t) = \mathcal{F}_{a1} + \mathcal{F}_{b1} + \mathcal{F}_{c1} \quad (4.36)$$

Essa soma pode ser realizada bem facilmente em termos de ondas progressivas positivas e negativas. A soma das ondas progressivas negativas resulta em zero

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^-(\theta_{ae}, t) &= \mathcal{F}_{a1}^- + \mathcal{F}_{b1}^- + \mathcal{F}_{c1}^- \\ &= \frac{1}{2} F_{\max} [\cos(\theta_{ae} + \omega_e t) + \cos(\theta_{ae} + \omega_e t - 120^\circ) \\ &\quad + \cos(\theta_{ae} + \omega_e t + 120^\circ)] \\ &= 0\end{aligned}\quad (4.37)$$

ao passo que as ondas progressivas positivas reforçam-se

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^+(\theta_{ae}, t) &= \mathcal{F}_{a1}^+ + \mathcal{F}_{b1}^+ + \mathcal{F}_{c1}^+ \\ &= \frac{3}{2} F_{\max} \cos(\theta_{ae} - \omega_e t)\end{aligned}\quad (4.38)$$

Assim, o resultado de se deslocar os três enrolamentos de  $120^\circ$  em termos de fase espacial e de  $120^\circ$  em termos de fase temporal é uma onda progressiva positiva de FMM

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\theta_{ae}, t) &= \frac{3}{2} F_{\max} \cos(\theta_{ae} - \omega_e t) \\ &= \frac{3}{2} F_{\max} \cos\left(\left(\frac{\text{pólos}}{2}\right) \theta_a - \omega_e t\right)\end{aligned}\quad (4.39)$$

A onda de FMM de entreferro, descrita pela Equação 4.39, é uma função senoidal fundamental espacial do ângulo espacial elétrico  $\theta_{ae}$  (e conseqüentemente do ângulo espacial  $\theta_a = (2/\text{pólos})\theta_{ae}$ ). Ela tem uma amplitude constante de  $(3/2)F_{\max}$ , isto é, 1,5 vezes a amplitude da onda de FMM de entreferro, produzida pelas fases individuais sozinhas, e apresenta um pico positivo no ângulo  $\theta_a = (2/\text{pólos})\omega_e t$ . Assim, sob condições de equilíbrio trifásico, o enrolamento trifásico produz uma onda de FMM de entreferro que gira na *velocidade angular síncrona*  $\omega_s$

$$\omega_s = \left(\frac{2}{\text{pólos}}\right) \omega_e \quad (4.40)$$

onde

$\omega_e$  = frequência angular da excitação elétrica aplicada [rad/s]

$\omega_s$  = velocidade angular espacial síncrona da onda de FMM de entreferro [rad/s]

A correspondente *velocidade síncrona*  $n_s$ , em rpm (rotações por minuto), pode ser expressa em termos da frequência elétrica aplicada  $f_e = \omega_e/(2\pi)$ , em Hz, como

$$n_s = \left(\frac{120}{\text{pólos}}\right) f_e \quad \text{rpm} \quad (4.41)$$

Em geral, um campo girante de amplitude constante será produzido por um enrolamento de  $q$  fases excitado por  $q$  correntes de fase equilibradas de frequência  $f_e$  quando os respectivos eixos de fase estiverem afastados de  $2\pi/q$  radianos elétricos no espaço. A amplitude dessa onda de fluxo será  $q/2$  vezes a contribuição máxima de qualquer fase em particular, e a velocidade angular síncrona permanecerá  $\omega_s = \left(\frac{2}{\text{pólos}}\right) \omega_e$  radianos por segundo.

Nessa seção, vimos que um enrolamento polifásico excitado por correntes polifásicas equilibradas produz uma onda de FMM girante. A produção de uma onda de FMM girante e o fluxo magnético girante correspondente é a chave da operação das máquinas elétricas rotativas polifásicas. É a interação dessa onda de fluxo magnético com o fluxo do rotor que produz conjugado. Conjugado constante é produzido quando o fluxo magnético produzido pelo rotor gira em sincronismo com o do estator.

### 4.5.3 Análise Gráfica de FMM Polifásica

Para correntes trifásicas equilibradas, como dadas pelas Equações 4.23 a 4.25, a produção de uma FMM girante também pode ser mostrada graficamente. Considere a situação em  $t = 0$  (Fig. 4.30), instante em que a corrente de fase  $a$  está em seu valor máximo  $I_m$ . Então, a FMM da fase  $a$  está com o seu valor máximo  $F_{\max}$ , como mostrado pelo vetor  $F_a = F_{\max}$  desenhado ao longo do eixo magnético da fase  $a$  na máquina de dois pólos, mostrada esquematicamente na Fig. 4.31a. Nesse momento, as correntes  $i_b$  e  $i_c$  são ambas  $I_m/2$  no sentido negativo, como está mostrado pelos pontos e cruzeiros na Fig. 4.31a indicando os sentidos reais instantâneos. As FMMs correspondentes das fases  $b$  e  $c$  são mostradas pelos vetores  $F_b$  e  $F_c$ , ambos de módulo  $F_m/2$  desenhados no sentido negativo ao longo dos eixos magnéticos das fases  $b$  e  $c$ , respectivamente. A resultante, obtida pela soma das contribuições individuais das três fases, é um vetor de módulo  $F = \frac{3}{2} F_{\max}$  centrado no eixo da fase  $a$ . Ela representa uma onda senoidal espacial com o seu pico positivo centrado no eixo da fase  $a$  e tendo uma amplitude  $\frac{3}{2}$  vezes a da contribuição da fase  $a$  sozinha.

Em um tempo posterior  $\omega_e t = \pi/3$  (Fig. 4.30), as correntes das fases  $a$  e  $b$  são a metade do máximo positivo, e a da fase  $c$  é um máximo negativo. As componentes de FMM individuais e suas resultantes estão mostradas agora na Fig. 4.31b. A resultante tem a mesma amplitude que em  $t = 0$ , mas agora ela girou 60 graus elétricos no espaço em sentido anti-horário. Do mesmo modo, em  $\omega_e t = 2\pi/3$  (quando a corrente de fase  $b$  é um máximo positivo e as correntes de fase  $a$  e  $c$  são a metade do máximo negativo), a mesma distribuição de FMM resultante é novamente obtida, mas ela girou ainda mais 60 graus elétricos além em sentido anti-horário e agora está alinhada com o eixo magnético da fase  $b$  (veja a Fig. 4.31c). À medida que o tempo passa, então, a onda da FMM resultante retém a forma senoidal e a amplitude, mas gira progressivamente ao redor do entreferro; pode-se ver que o resultado líquido é uma onda de FMM de amplitude constante girando com uma velocidade angular uniforme.

Depois de um ciclo, a FMM resultante deve estar de volta à posição da Fig. 4.31a. Portanto, a onda de FMM executa uma revolução por ciclo elétrico em uma máquina de dois pólos. Em uma máquina de múltiplos pólos, a onda progride um par de pólos a cada ciclo elétrico e, portanto, uma revolução em pólos/2 ciclos elétricos.

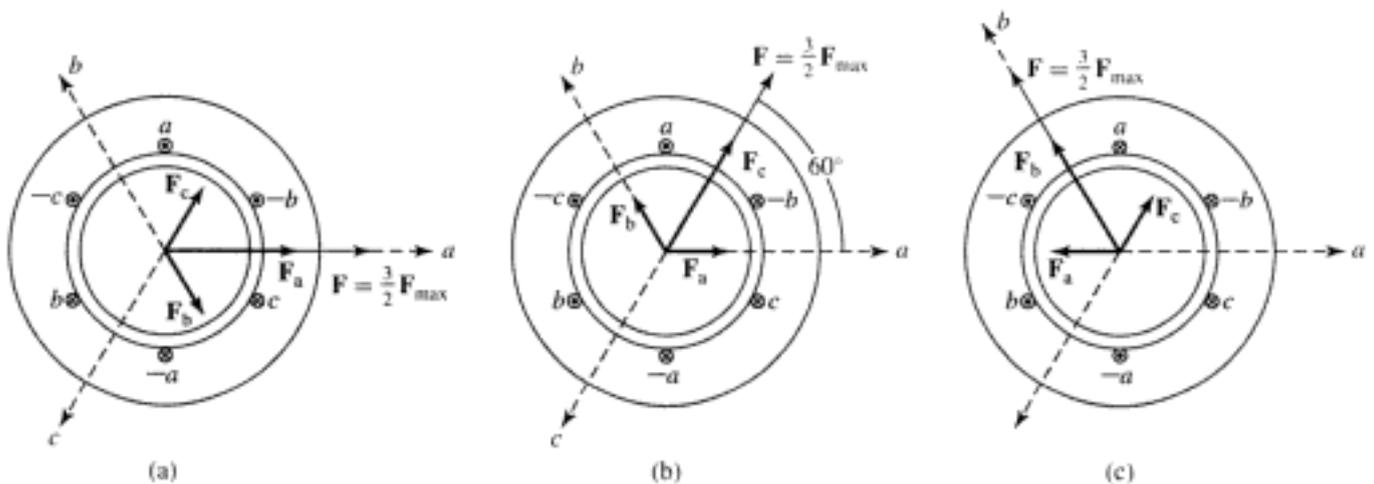


FIGURA 4.31 A produção de um campo magnético girante por meio de correntes trifásicas.

**EXEMPLO 4.3**

Considere um estator trifásico excitado com correntes equilibradas de 60 Hz. Obtenha a velocidade angular síncrona em rad/s e a velocidade em rpm para estatores com dois, quatro e seis pólos.

**■ Solução**

Para uma frequência de  $f_c = 60$  Hz, a frequência angular elétrica é igual a

$$\omega_c = 2\pi f_c = 120\pi \approx 377 \text{ rad/s}$$

Usando as Equações 4.40 e 4.41, a seguinte tabela pode ser construída:

Pólos	$n$ , rpm	$\omega_s$ (rad/s)
2	3600	$120\pi \approx 377$
4	1800	$60\pi$
6	1200	$40\pi$

**PROBLEMA PRÁTICO 4.3**

Repita o Exemplo 4.3 para um estator trifásico excitado por correntes equilibradas de 50 Hz.

**■ Solução**

Pólos	$n$ , rpm	$\omega_s$ (rad/s)
2	3000	$100\pi$
4	1500	$50\pi$
6	1000	$100\pi/3$

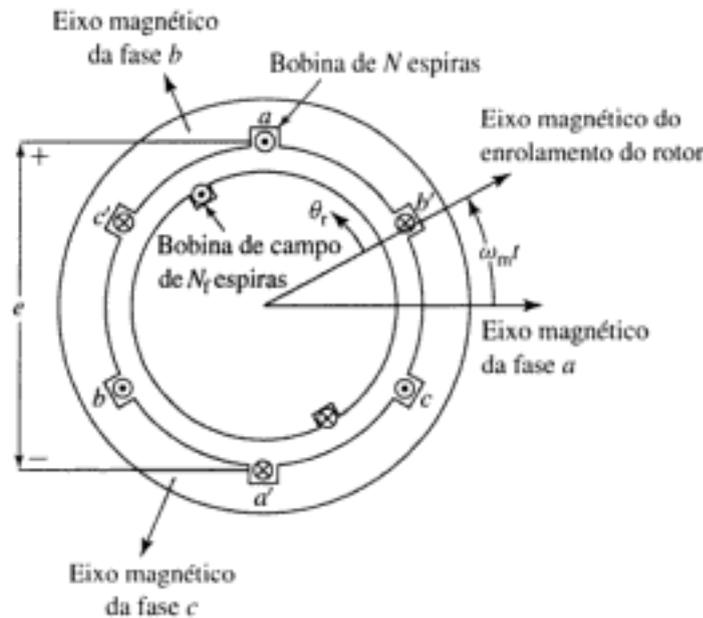
**4.6 TENSÃO GERADA**

A natureza geral da tensão induzida já foi discutida na Seção 4.2. Agora, expressões quantitativas para a tensão induzida serão determinadas.

**4.6.1 Máquinas CA**

Uma máquina CA elementar está mostrada em corte transversal na Fig. 4.32. As bobinas do rotor e também as do estator estão ilustradas como sendo concentradas, de múltiplas espiras e de passo pleno. Como vimos, uma máquina com enrolamentos distribuídos pode ser representada desse modo simplesmente multiplicando o número de espiras em série no enrolamento por um fator de enrolamento. Supondo um entreferro pequeno, pode-se assumir que o enrolamento de campo produz um fluxo radial espacial fundamental com uma densidade de fluxo de pico  $B_{\text{pico}}$  no entreferro. Embora a Fig. 4.32 mostre uma máquina de dois pólos, a análise apresentada aqui é para o caso geral de uma máquina de múltiplos pólos. Como foi deduzido no Exemplo 4.2, se o entreferro for uniforme, o valor de  $B_{\text{pico}}$  poderá ser obtido de

$$B_{\text{pico}} = \frac{4\mu_0}{\pi g} \left( \frac{k_f N_f}{\text{pólos}} \right) I_f \quad (4.42)$$



**FIGURA 4.32** Vista em seção transversal de uma máquina elementar CA trifásica.

onde

$g$  = comprimento do entreferro

$N_f$  = total de espiras em série no enrolamento de campo

$k_f$  = fator de enrolamento do enrolamento de campo

$I_f$  = corrente de campo

Quando os pólos do rotor estão alinhados com o eixo magnético de uma fase do estator, o fluxo concatenado com o enrolamento de uma fase do estator é  $k_{enf} N_{fase} \Phi_p$  onde  $\Phi_p$  é o fluxo de entreferro por pólo [Wb]. Para a densidade de fluxo senoidal de entreferro, que foi assumida, tem-se

$$B = B_{\text{pico}} \cos\left(\frac{\text{pólos}}{2} \theta_r\right) \quad (4.43)$$

$\Phi_p$  pode ser obtido como sendo a integral da densidade de fluxo sobre a área do pólo

$$\begin{aligned} \Phi_p &= l \int_{-\pi/\text{pólos}}^{+\pi/\text{pólos}} B_{\text{pico}} \cos\left(\frac{\text{pólos}}{2} \theta_r\right) r d\theta_r \\ &= \left(\frac{2}{\text{pólos}}\right) 2B_{\text{pico}} l r \end{aligned} \quad (4.44)$$

Aqui,

$\theta_r$  = ângulo medido a partir do eixo magnético do rotor

$r$  = raio até o entreferro

$l$  = comprimento axial do ferro do estator/rotor

À medida que o rotor gira, o fluxo concatenado varia senoidalmente com o ângulo entre os eixos magnéticos das bobinas do estator e do rotor. Com o rotor girando a uma velocidade angular constante  $\omega_m$ , o fluxo concatenado com a bobina de estator da fase  $a$  é

$$\begin{aligned} \lambda_a &= k_{enf} N_{fase} \Phi_p \cos\left(\left(\frac{\text{pólos}}{2}\right) \omega_m t\right) \\ &= k_{enf} N_{fase} \Phi_p \cos \omega_{me} t \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde o tempo  $t$  é escolhido arbitrariamente como sendo zero quando o pico da onda de densidade de fluxo coincide com o eixo magnético da fase  $a$ . Aqui,

$$\omega_{me} = \left( \frac{\text{pólos}}{2} \right) \omega_m \quad (4.46)$$

é a velocidade mecânica do rotor expressa em radianos por segundo elétricos.

Pela lei de Faraday, a tensão induzida na fase  $a$  é

$$e_a = \frac{d\lambda_a}{dt} = k_{\text{enr}} N_{\text{fase}} \frac{d\Phi_p}{dt} \cos \omega_{me} t - \omega_{me} k_{\text{enr}} N_{\text{fase}} \Phi_p \sin \omega_{me} t \quad (4.47)$$

A polaridade dessa tensão induzida é tal que, se a bobina do estator for colocada em curto-circuito, a tensão induzida dará origem a uma corrente que fluirá em um sentido que se oporá a quaisquer alterações no fluxo concatenado da bobina do estator. Embora a Equação 4.47 tenha sido deduzida supondo-se que apenas o enrolamento de campo estivesse produzindo fluxo de entreferro, a equação aplica-se igualmente bem ao caso geral em que  $\Phi_p$  é o fluxo líquido por pólo no entreferro, produzido por correntes tanto no rotor como no estator.

O primeiro termo do segundo membro da Equação 4.47 é uma tensão de transformador e está presente apenas quando a amplitude da onda de fluxo de entreferro varia no tempo. O segundo termo é *tensão de velocidade* gerada pelo movimento relativo da onda de fluxo de entreferro em relação à bobina de estator. Na operação normal em regime permanente da maioria das máquinas rotativas, a amplitude da onda de fluxo de entreferro é constante. Nessas condições, o primeiro termo é zero e a tensão gerada é simplesmente a tensão de velocidade. O termo *força eletromotriz* (abreviado FEM) é usado freqüentemente para a tensão de velocidade. Assim, para um fluxo constante de entreferro,

$$e_a = -\omega_{me} k_{\text{enr}} N_{\text{fase}} \Phi_p \sin \omega_{me} t \quad (4.48)$$

#### EXEMPLO 4.4

A chamada equação *de cruzamento de fluxo* exprime que a tensão  $v$  induzida em um fio de comprimento  $l$  (no quadro do fio), movendo-se em relação a um campo magnético constante com uma densidade de fluxo de módulo  $B$ , é dada por

$$v = l v_{\perp} B$$

onde  $v_{\perp}$  é a componente da velocidade do fio perpendicular à direção da densidade de fluxo magnético.

Considere a máquina trifásica elementar de dois pólos da Fig. 4.32. Suponha que a densidade de fluxo de entreferro produzida pelo rotor seja da forma

$$B_g(\theta_r) = B_{\text{pico}} \sin \theta_r$$

e que o rotor gire a uma velocidade angular constante  $\omega_r$ . (Como trata-se de uma máquina de dois pólos, observe que  $\omega_m = \omega_r$ ). Supondo que os lados da bobina do enrolamento de armadura estejam no entreferro e não nas ranhuras, mostre que, para uma fase, a tensão induzida em uma bobina concentrada de armadura, de passo pleno e  $N$  espiras, pode ser calculada a partir da equação de cruzamento de fluxo e que é idêntica à calculada usando-se a Equação 4.48. O raio médio do entreferro é  $r$  e o comprimento do entreferro é  $g$  ( $g \ll r$ ).

#### ■ Solução

Começamos observando que a equação de cruzamento de fluxo exige que o condutor esteja se movimentando e que o campo magnético não varie no tempo. Assim, para que ela

seja aplicada no cálculo do campo magnético, devemos passar o nosso quadro de referência para o rotor.

No quadro de referência do rotor, o campo magnético é constante e os lados da bobina do estator, quando movendo-se em relação ao centro do entreferro no raio  $r$ , aparenta estar se movendo com uma velocidade  $\omega_{me}r$ , perpendicular ao fluxo de entreferro orientado radialmente. Se assumirmos que os eixos magnéticos das bobinas de rotor e de fase estejam alinhados no tempo  $t = 0$ , a posição de um lado da bobina em função do tempo será dada por  $\theta_r = -\omega_{me}t$ . A tensão induzida em um lado de uma espira pode, portanto, ser calculada como

$$e_1 = l v_{\perp} B_p(\theta_r) = l \omega_{me} r B_{pico} \text{sen}(-\omega_{me}t)$$

Há  $N$  espiras por bobina e dois lados por espira. Assim, a tensão total na bobina é dada por

$$e = 2N e_1 = -2N l \omega_{me} r B_{pico} \text{sen} \omega_{me}t$$

Da Equação 4.48, a tensão induzida na bobina de estator, de passo pleno e dois pólos, é dada por

$$e = -\omega_{me} N \Phi_p \text{sen} \omega_{me}t$$

Usando  $\Phi_p = 2B_{pico}lr$  da Equação 4.44 e substituindo, obtém-se

$$e = -\omega_{me} N (2B_{pico}lr) \text{sen} \omega_{me}t$$

que é idêntica à tensão determinada usando-se a equação de cruzamento de fluxo.

Na operação normal de máquinas CA em regime permanente, estamos usualmente interessados nos valores eficazes de tensões e correntes ao invés de seus valores instantâneos. Da Equação 4.48, o valor máximo da tensão induzida é

$$E_{\max} = \omega_{me} k_{\text{ent}} N_{\text{fase}} \Phi_p = 2\pi f_{me} k_{\text{ent}} N_{\text{fase}} \Phi_p \quad (4.49)$$

Seu valor eficaz é

$$E_{\text{ef}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f_{me} k_{\text{ent}} N_{\text{fase}} \Phi_p = \sqrt{2} \pi f_{me} k_{\text{ent}} N_{\text{fase}} \Phi_p \quad (4.50)$$

onde  $f_{me}$  é a velocidade elétrica do rotor medida em Hz, que também é igual à frequência elétrica da tensão gerada. Observe que essas equações são idênticas em forma às equações correspondentes de FEM de um transformador. Em uma máquina rotativa, o movimento relativo entre uma bobina e uma onda de densidade de fluxo espacial e amplitude constante produz tensão da mesma forma que um fluxo variável no tempo o faz em associação com as bobinas estacionárias de um transformador. A rotação introduz o elemento de variação no tempo e transforma a distribuição espacial de densidade de fluxo em uma variação de tensão no tempo.

A tensão induzida em um único enrolamento é uma tensão monofásica. Para a produção de um conjunto de tensões trifásicas equilibradas, resulta que três enrolamentos deslocados de 120 graus elétricos no espaço devem ser usados, como mostrado de forma elementar na Fig. 4.12. A máquina da Fig. 4.12 está mostrada em ligação  $Y$  e, assim, cada tensão de enrolamento é uma tensão de fase. Assim, a Equação 4.50 fornece a tensão eficaz de fase produzida nessa máquina quando  $N_{\text{fase}}$  é o número total de espiras em série por fase. Para uma máquina ligada em  $\Delta$ , a tensão de enrolamento calculada a partir da Equação 4.50 seria uma tensão de linha da máquina.

#### EXEMPLO 4.5

Um gerador de 60 Hz síncrono trifásico de dois pólos ligado em  $Y$  e rotor cilíndrico tem um enrolamento de campo com  $N_f$  espiras distribuídas e um fator de enrolamento  $k_f$ . O enola-

mento de armadura tem  $N_a$  espiras por fase e fator de enrolamento  $k_a$ . O comprimento do entreferro é  $g$ , e o raio médio do entreferro é  $r$ . O comprimento ativo do enrolamento de armadura é  $l$ . As dimensões e os dados do enrolamento são

$$\begin{aligned} N_f &= 68 \text{ espiras em série} & k_f &= 0,945 \\ N_a &= 18 \text{ espiras em série / fase} & k_a &= 0,933 \\ r &= 0,53 \text{ m} & g &= 4,5 \text{ cm} \\ l &= 3,8 \text{ m} \end{aligned}$$

O rotor é acionado por uma turbina a vapor a uma velocidade de 3600 rpm. Para uma corrente contínua de campo de  $I_f = 720$  A, calcule (a) a FMM fundamental de pico  $(F_{g1})_{\text{pico}}$  produzida pelo enrolamento de campo, (b) a densidade de fluxo fundamental de pico  $(B_{g1})_{\text{pico}}$  no entreferro, (c) o fluxo fundamental por pólo  $\Phi_p$ , e (d) o valor eficaz da tensão gerada em circuito aberto na armadura.

### ■ Solução

a. Da Equação 4.8,

$$\begin{aligned} (F_{g1})_{\text{pico}} &= \frac{4}{\pi} \left( \frac{k_f N_f}{\text{pólos}} \right) I_f = \frac{4}{\pi} \left( \frac{0,945 \times 68}{2} \right) 720 \\ &= \frac{4}{\pi} (32,1) 720 = 2,94 \times 10^4 \text{ A} \cdot \text{espiras/pólo} \end{aligned}$$

b. Usando a Equação 4.12, obtemos

$$(B_{g1})_{\text{pico}} = \frac{\mu_0 (F_{g1})_{\text{pico}}}{g} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 2,94 \times 10^4}{4,5 \times 10^{-2}} = 0,821 \text{ T}$$

Devido ao efeito das ranhuras que contêm o enrolamento de armadura, a maioria do fluxo de entreferro está confinada aos dentes do estator. A densidade de fluxo dos dentes no centro de um pólo é mais elevada que o valor calculado na parte (b), provavelmente cerca de 2 vezes mais. Em um projeto detalhado, essa densidade de fluxo deve ser calculada para se determinar se os dentes estão excessivamente saturados.

c. Da Equação 4.44

$$\Phi_p = 2(B_{g1})_{\text{pico}} r = 2(0,821)(3,8)(0,53) = 3,31 \text{ Wb}$$

d. Da Equação 4.50, com  $f_{me} = 60$  Hz, a tensão de fase é

$$\begin{aligned} E_{\text{ef, fase}} &= \sqrt{2} \pi f_{me} k_a N_a \Phi_p = \sqrt{2} \pi (60)(0,933)(18)(3,31) \\ &= 14,8 \text{ kV eficazes} \end{aligned}$$

A tensão de linha é, portanto,

$$E_{\text{ef, linha}} = \sqrt{3} (14,8 \text{ kV}) = 25,7 \text{ kV eficazes}$$

### PROBLEMA PRÁTICO 4.4

O rotor da máquina do Exemplo 4.5 deve ser reenrolado. O novo enrolamento de campo terá um total de 76 espiras em série e um fator de enrolamento de 0,925. (a) Calcule a corrente de campo da qual resultará uma densidade de fluxo de pico no entreferro de 0,83 T. (b) Calcule a correspondente tensão eficaz de linha de circuito aberto que resultará se essa máquina modificada for operada com esse valor de corrente de campo e 3600 rpm.

### ■ Solução

a.  $I_c = 696 \text{ A}$

b.  $E_{ef, linha} = 26,0 \text{ kV}$  eficazes

## 4.6.2 Máquinas CC

Em uma máquina CC, embora o objetivo final seja a geração de tensão CC, tensões CA são produzidas nas bobinas do enrolamento de armadura à medida que essas bobinas giram através da distribuição de fluxo CC do enrolamento de campo estacionário. Portanto, a tensão alternada do enrolamento de armadura deve ser retificada. A retificação mecânica é obtida por meio do comutador, como foi discutido na Seção 4.2.2.

Considere uma das bobinas de armadura de  $N$  espiras da máquina elementar de dois pólos da Fig. 4.17. O comutador simples de dois segmentos proporciona a retificação de onda completa da tensão de bobina. Embora tipicamente a distribuição espacial do fluxo de entreferro em máquinas CC esteja muito longe de ser senoidal, podemos aproximar o valor da tensão gerada supondo uma distribuição senoidal. Como vimos, uma tal distribuição de fluxo produzirá uma tensão CA senoidal na bobina de armadura. A ação de retificação do comutador produzirá uma tensão CC sobre as escovas, como na Fig. 4.33. O valor médio, ou CC, dessa tensão pode ser encontrado obtendo-se a média da Equação 4.48,

$$E_a = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \omega_m N \Phi_p \sin(\omega_m t) d(\omega_m t) = \frac{2}{\pi} \omega_m N \Phi_p \quad (4.51)$$

Em máquinas CC, usualmente é mais conveniente expressar a tensão  $E_a$  em termos da velocidade mecânica  $\omega_m$  (rad/s) ou  $n$  (rpm). A substituição da Equação 4.46 na Equação 4.51, para uma máquina de múltiplos pólos, fornece

$$E_a = \left( \frac{\text{pólos}}{\pi} \right) N \Phi_p \omega_m = \text{pólos } N \Phi_p \left( \frac{n}{30} \right) \quad (4.52)$$

Em sentido prático, o enrolamento de bobina CC subentendido aqui está, naturalmente, fora da realidade. Mais adiante será essencial examinar com mais cuidado a ação dos comutadores. Na realidade, em termos práticos, a Equação 4.52 também fornece resultados corretos para o caso de enrolamentos distribuídos CA de armadura, desde que  $N$  seja tomado como sendo o número total de espiras em série entre os terminais de armadura. Usualmente, a tensão é expressa em termos do número total de condutores ativos  $C_a$  e do número  $m$  de caminhos paralelos no enrolamento de armadura. Como são necessários dois lados de uma bobina para perfazer uma espira e  $1/m$  dessas estão conectadas em série, o número de espiras em série é  $N_s = C_a/(2m)$ . Então, substituindo na Equação 4.52, obtém-se

$$E_a = \left( \frac{\text{pólos}}{2\pi} \right) \left( \frac{C_a}{m} \right) \Phi_p \omega_m = \left( \frac{\text{pólos}}{60} \right) \left( \frac{C_a}{m} \right) \Phi_p n \quad (4.53)$$

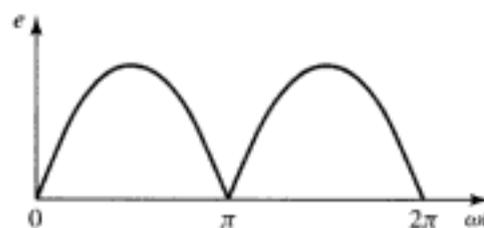


FIGURA 4.33 Tensão entre as escovas da máquina elementar CC da Fig. 4.17.

## 4.7 CONJUGADO EM MÁQUINAS DE PÓLOS NÃO SALIENTES

O comportamento de qualquer dispositivo eletromagnético, atuando como componente de um sistema eletromecânico, pode ser descrito em termos de suas equações de terminais elétricos e de seu deslocamento e conjugado eletromecânico. O objetivo desta seção é deduzir as equações de tensão e conjugado para uma máquina elementar ideal. Os resultados podem ser prontamente estendidos posteriormente para máquinas mais complexas. Deduziremos essas equações desde dois pontos de vista e mostraremos que basicamente elas originam-se das mesmas idéias.

O primeiro ponto de vista é essencialmente o mesmo da Seção 3.6. A máquina será vista como um elemento de circuito cujas indutâncias dependem da posição angular do rotor. O fluxo concatenado  $\lambda$  e a co-energia do campo magnético serão expressos em termos das correntes e indutâncias. Então, o conjugado pode ser encontrado a partir da derivada parcial da energia ou co-energia em relação à posição do rotor, e as tensões de terminal, a partir da soma das quedas de tensão  $Ri$  nas resistências e as tensões da lei de Faraday  $d\lambda/dt$ . O resultado será um conjunto de equações diferenciais não-lineares que descrevem o desempenho dinâmico da máquina.

O segundo ponto de vista considera a máquina como dois grupos de enrolamentos que produzem fluxo magnético no entreferro: um grupo no estator e o outro no rotor. Fazendo suposições adequadas em relação a esses campos (similares às usadas para se deduzir expressões analíticas para as indutâncias), expressões simples podem ser desenvolvidas para o fluxo concatenado e a co-energia de entreferro em termos das grandezas de campo. O conjugado e a tensão gerada podem ser encontrados então a partir dessas expressões. Desse modo, o conjugado pode ser expresso explicitamente como a tendência de dois campos magnéticos a se alinhar, do mesmo modo que ímãs permanentes tendem a se alinhar, e a tensão gerada pode ser expressa em termos do movimento relativo entre um campo e um enrolamento. Essas expressões levam a uma descrição física simples do comportamento normal das máquinas elétricas em regime permanente.

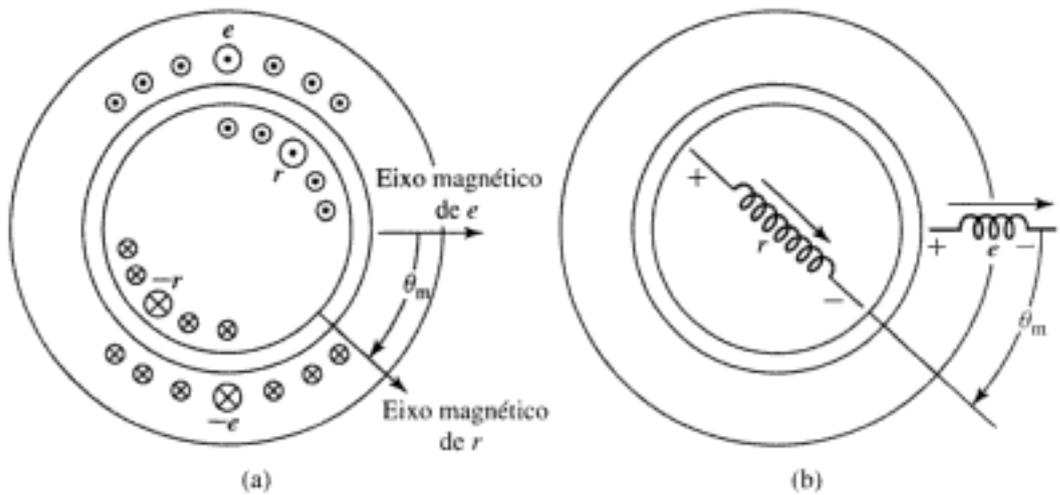
### 4.7.1 Ponto de Vista de Circuito Acoplado

Considere a máquina elementar de entreferro uniforme da Fig. 4.34 com um enrolamento no estator e um no rotor, em que  $\theta_m$  é o ângulo mecânico entre os eixos dos dois enrolamentos. Esses enrolamentos estão distribuídos por um dado número de ranhuras de modo que suas ondas de FMM possam ser aproximadas por senóides espaciais. Na Fig. 4.34a, os lados das bobinas  $s$ ,  $-s$  e  $r$ ,  $-r$  marcam as posições dos centros dos feixes de condutores constituídos pelos enrolamentos distribuídos. Um outro modo de se desenhar esses enrolamentos está mostrado na Fig. 4.34b, que também mostra os sentidos de referência para as tensões e as correntes. Assume-se aqui que uma corrente com o sentido da seta produz um campo magnético no entreferro também com o sentido da seta, de modo que uma única seta define os sentidos de referência da corrente e do fluxo.

O estator e o rotor são cilindros concêntricos e as aberturas das ranhuras são desprezadas. Conseqüentemente, o nosso modelo elementar não inclui os efeitos dos pólos salientes, que serão investigados em capítulos posteriores. Supomos também que as relutâncias dos ferros do estator e do rotor são desprezíveis. Finalmente, embora a Fig. 4.34 mostre uma máquina de dois pólos, escreveremos os desenvolvimentos seguintes para o caso geral de uma máquina de múltiplos pólos, substituindo  $\theta_m$  pelo ângulo elétrico do rotor

$$\theta_{me} = \left( \frac{\text{pólos}}{2} \right) \theta_m \quad (4.54)$$

Com base nessas suposições, pode-se ver que as indutâncias próprias  $L_{ee}$  e  $L_{rr}$  do estator e do rotor são constantes, mas a indutância mútua entre o estator e o rotor depende do ângulo



**FIGURA 4.34** Máquina elementar de dois pólos com entreferro uniforme: (a) distribuição de enrolamentos e (b) representação esquemática.

elétrico  $\theta_{me}$  entre os eixos magnéticos dos enrolamentos do estator e do rotor. A indutância mútua está em seu máximo positivo quando  $\theta_{me} = 0$  ou  $2\pi$ , é zero quando  $\theta_{me} = \pm\pi/2$ , e está em seu máximo negativo quando  $\theta_{me} = \pm\pi$ . Supondo ondas senoidais de FMM e um entreferro uniforme, a distribuição espacial do fluxo de entreferro é senoidal, e a indutância mútua será da forma

$$\mathcal{L}_{er}(\theta_{me}) = L_{er} \cos(\theta_{me}) \quad (4.55)$$

onde a letra manuscrita  $\mathcal{L}$  denota uma indutância que é função do ângulo elétrico  $\theta_{me}$ . A letra maiúscula em itálico  $L$  denota um valor constante. Assim,  $L_{er}$  é o valor da indutância mútua; seu valor quando os eixos magnéticos do estator e do rotor estão alinhados ( $\theta_{me} = 0$ ). Em termos de indutâncias, os fluxos concatenados  $\lambda_e$  e  $\lambda_r$  do estator e do rotor são

$$\lambda_e = L_{ee}i_e + \mathcal{L}_{er}(\theta_{me})i_r = L_{ee}i_e + L_{er} \cos(\theta_{me})i_r \quad (4.56)$$

$$\lambda_r = \mathcal{L}_{er}(\theta_{me})i_e + L_{rr}i_r = L_{er} \cos(\theta_{me})i_e + L_{rr}i_r \quad (4.57)$$

onde as indutâncias podem ser calculadas como no Apêndice B. Em notação matricial

$$\begin{bmatrix} \lambda_e \\ \lambda_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ee} & \mathcal{L}_{er}(\theta_{me}) \\ \mathcal{L}_{er}(\theta_{me}) & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ i_r \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

As tensões  $v_e$  e  $v_r$  dos terminais são

$$v_e = R_e i_e + \frac{d\lambda_e}{dt} \quad (4.59)$$

$$v_r = R_r i_r + \frac{d\lambda_r}{dt} \quad (4.60)$$

onde  $R_e$  e  $R_r$  são as resistências dos enrolamentos do estator e do rotor respectivamente.

Quando o rotor está girando,  $\theta_{me}$  deve ser tratado como uma variável. A diferenciação das Equações 4.56 e 4.57, substituindo os resultados nas Equações 4.59 e 4.60, leva a

$$v_e = R_e i_e + L_{ee} \frac{di_e}{dt} + L_{er} \cos(\theta_{me}) \frac{di_r}{dt} - L_{er} i_r \sin(\theta_{me}) \frac{d\theta_{me}}{dt} \quad (4.61)$$

$$v_r = R_r i_r + L_{rr} \frac{di_r}{dt} + L_{er} \cos(\theta_{me}) \frac{di_e}{dt} - L_{er} i_e \sin(\theta_{me}) \frac{d\theta_{me}}{dt} \quad (4.62)$$

onde

$$\frac{d\theta_{me}}{dt} = \omega_{me} = \left(\frac{\text{pólos}}{2}\right) \omega_m \quad (4.63)$$

é a velocidade instantânea em radianos elétricos por segundo. Em uma máquina de dois pólos (como a da Fig. 4.34),  $\theta_{me}$  e  $\omega_{me}$  são iguais aos valores instantâneos do ângulo  $\theta_m$  no eixo, e da velocidade  $\omega_m$  no eixo, respectivamente. Em uma máquina de múltiplos pólos, eles estão relacionados entre si por meio das Equações 4.54 e 4.46. Os segundos e terceiros termos, nos segundos membros das Equações 4.61 e 4.62, são tensões induzidas  $L(di/dt)$  como as induzidas em circuitos estacionários acoplados tais como enrolamentos de transformadores. Os quartos termos são causados pelo movimento mecânico e são proporcionais à velocidade instantânea. São os termos das tensões de velocidade que correspondem à troca de potência entre os sistemas elétrico e mecânico.

O conjugado eletromecânico pode ser obtido a partir da co-energia. Usando a Equação 3.70, tem-se

$$\begin{aligned} W'_{\text{campo}} &= \frac{1}{2} L_{ee} i_e^2 + \frac{1}{2} L_{rr} i_r^2 + L_{er} i_e i_r \cos \theta_{me} \\ &= \frac{1}{2} L_{ee} i_e^2 + \frac{1}{2} L_{rr} i_r^2 + L_{er} i_e i_r \cos \left( \left( \frac{\text{pólos}}{2} \right) \theta_m \right) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Observe que a co-energia da Equação 4.64 foi expressa especificamente em termos do ângulo no eixo  $\theta_m$ , porque a expressão do conjugado da Equação 3.68 exige que o conjugado seja obtido a partir da derivada da co-energia em relação ao ângulo espacial  $\theta_m$  e não em relação ao ângulo elétrico  $\theta_{me}$ . Assim, da Equação 3.68,

$$\begin{aligned} T &= \left. \frac{\partial W'_{\text{campo}}(i_e, i_r, \theta_m)}{\partial \theta_m} \right|_{i_e, i_r} = - \left( \frac{\text{pólos}}{2} \right) L_{er} i_e i_r \operatorname{sen} \left( \frac{\text{pólos}}{2} \theta_m \right) \\ &= - \left( \frac{\text{pólos}}{2} \right) L_{er} i_e i_r \operatorname{sen} \theta_{me} \end{aligned} \quad (4.65)$$

onde  $T$  é o conjugado eletromecânico que atua acelerando o rotor (isto é, um conjugado positivo atua aumentando  $\theta_m$ ). O sinal negativo na Equação 4.65 significa que o conjugado eletromecânico atua em um sentido tal que leva os campos magnéticos do estator e do rotor ao alinhamento.

As Equações 4.61, 4.62 e 4.65 são um conjunto de três equações que relacionam as variáveis elétricas  $v_e$ ,  $i_e$ ,  $v_r$ ,  $i_r$  com as variáveis mecânicas  $T$  e  $\theta_m$ . Essas equações, junto com as restrições impostas às variáveis elétricas pelas redes conectadas aos terminais (fontes ou cargas e impedâncias externas), e as impostas ao rotor (conjugado aplicado e conjugados inercial, elástico e de atrito), determinam o desempenho do dispositivo e as suas características como dispositivo de conversão entre os sistemas externos elétricos e mecânicos. Essas equações diferenciais são não-lineares e de difícil solução exceto em circunstâncias especiais. Não estamos interessados em sua solução aqui; estamos usando-as meramente como degraus do desenvolvimento da teoria das máquinas rotativas.

#### EXEMPLO 4.6

Considere a máquina elementar de dois pólos e dois enrolamentos da Fig. 4.34. Seu eixo está acoplado a um dispositivo mecânico que pode ser levado a absorver ou entregar conjugado mecânico dentro de um amplo intervalo de velocidades. Essa máquina pode ser conectada e operada de diversos modos. Para esse exemplo, vamos considerar a situação em que o enrolamento do rotor é excitado com corrente contínua  $I_r$ , e o enrolamento do estator é conectado a uma fonte de corrente CA que pode tanto absorver como entregar potência elétrica.

Seja a corrente de estator

$$i_e = I_e \cos \omega_e t$$

onde  $t = 0$  é escolhido arbitrariamente como sendo o momento em que a corrente de estator tem seu valor de pico.

- Deduz a expressão para o conjugado magnético desenvolvido pela máquina quando a sua velocidade é variada sob controle do dispositivo mecânico conectado a seu eixo.
- Encontre a velocidade para a qual produz-se conjugado médio quando a frequência do estator é 60 Hz.
- Com as excitações assumidas para as fontes de corrente, que tensões são induzidas nos enrolamentos de estator e de rotor na velocidade síncrona ( $\omega_m = \omega_e$ )?

### ■ Solução

- Da Equação 4.65 para uma máquina de dois pólos

$$T = -L_{er} i_e i_r \sin \theta_m$$

Para as condições dadas neste problema, com  $\theta_m = \omega_m t + \delta$ ,

$$T = -L_{er} I_e I_r \cos \omega_e t \sin (\omega_m t + \delta)$$

onde  $\omega_m$  é a velocidade angular em sentido horário aplicada ao rotor pelo acionamento mecânico e  $\delta$  é a posição angular do rotor em  $t = 0$ . Usando uma identidade trigonométrica,<sup>2</sup> temos

$$T = -\frac{1}{2} L_{er} I_e I_r [\sin [(\omega_m + \omega_e)t + \delta] + \sin [(\omega_m - \omega_e)t + \delta]]$$

O conjugado consiste em dois termos senoidais, variáveis no tempo, de frequências  $\omega_m + \omega_e$  e  $\omega_m - \omega_e$ . Como foi mostrado na Seção 4.5, uma corrente CA aplicada ao enrolamento monofásico do estator de dois pólos da máquina da Fig. 4.34 cria duas ondas de fluxo, uma deslocando-se no sentido de  $\theta_m$  positivo com velocidade angular  $\omega_e$  e a segunda, no sentido de  $\theta_m$  negativo também com velocidade angular  $\omega_e$ . É da interação do rotor com essas duas ondas de fluxo que resultam as duas componentes da expressão do conjugado.

- Exceto quando  $\omega_m = \pm \omega_e$ , o conjugado médio em um intervalo de tempo suficientemente longo é zero. Entretanto, quando  $\omega_m = \omega_e$ , o rotor está girando em sincronismo com a onda de fluxo de estator que se desloca em sentido positivo, e o conjugado torna-se

$$T = -\frac{1}{2} L_{er} I_e I_r [\sin (2\omega_e t + \delta) + \sin \delta]$$

O primeiro termo de seno é um componente de frequência dupla cujo valor médio é zero. O segundo termo é o conjugado médio

$$T_{\text{médio}} = -\frac{1}{2} L_{er} I_e I_r \sin \delta$$

Um conjugado médio diferente de zero também será produzido quando  $\omega_m = -\omega_e$ , o que simplesmente significa rotação em sentido anti-horário; o rotor está se deslocando agora em sincronismo com a onda de fluxo do estator que se desloca em sentido negativo. O sinal negativo na expressão de  $T_{\text{médio}}$  significa que um valor positivo de  $T_{\text{médio}}$  atua diminuindo  $\delta$ .

Trata-se de uma máquina síncrona monofásica ideal. Com uma frequência de estator de 60 Hz, produzirá um conjugado médio diferente de zero para velocidades de  $\pm \omega_m = \omega_e = 2\pi 60$  rad/s, correspondendo a velocidades de  $\pm 3600$  rpm, como se pode ver na Equação 4.41.

<sup>2</sup>  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)]$

- c. A partir dos segundo e quarto termos da Equação 4.61 ( com  $\theta_c = \theta_m = \omega_m t + \delta$ ), a tensão induzida no estator, quando  $\omega_m = \omega_c$ , é

$$e_s = -\omega_c L_{ss} I_s \sin \omega_c t - \omega_c L_{\sigma r} I_r \sin (\omega_c t + \delta)$$

A partir do(s)terceiro e quarto termos da Equação 4.62, a tensão induzida no rotor é

$$\begin{aligned} e_r &= -\omega_c L_{\sigma r} I_s [\sin \omega_c t \cos (\omega_c t + \delta) + \cos \omega_c t \sin (\omega_c t + \delta)] \\ &= -\omega_c L_{\sigma r} I_s \sin (2\omega_c t + \delta) \end{aligned}$$

A componente de rotação para trás do fluxo no estator induz uma tensão de frequência dupla no rotor, ao passo que a componente de rotação para frente, que está girando em sincronismo com o rotor, aparece como um fluxo CC ao rotor, e conseqüentemente não induz nenhuma tensão no enrolamento do rotor.

Agora considere uma máquina de entreferro uniforme com diversos enrolamentos de estator e rotor. Os mesmos princípios gerais, que se aplicam ao modelo elementar da Fig. 4.34, aplicam-se também à máquina de múltiplos enrolamentos. Cada enrolamento tem a sua indutância própria em particular assim como indutâncias mútuas com outros enrolamentos. As indutâncias próprias e mútuas entre pares de enrolamentos do mesmo lado do entreferro são constantes, supondo-se um entreferro uniforme e saturação magnética desprezível. Entretanto, as indutâncias mútuas entre pares de enrolamentos de estator e rotor variam proporcionalmente ao co-seno do ângulo entre os seus eixos magnéticos. O conjugado resulta da tendência do campo magnético dos enrolamentos do rotor a se alinhar com o dos enrolamentos do estator. Pode ser expresso pela soma de termos como o da Equação 4.65.

#### EXEMPLO 4.7

Considere uma máquina síncrona trifásica de quatro pólos com um entreferro uniforme. Suponha que as indutâncias próprias e mútuas do enrolamento de armadura sejam constantes

$$L_{aa} = L_{bb} = L_{cc}$$

$$L_{ab} = L_{bc} = L_{ca}$$

Do mesmo modo, suponha que a indutância própria  $L_f$  do enrolamento de campo seja constante, ao passo que as indutâncias mútuas entre o enrolamento de campo e os três enrolamentos de fase da armadura variem com o ângulo  $\theta_m$  entre os eixos magnéticos do enrolamento de campo e o da fase  $a$

$$L_{af} = L_{af} \cos 2\theta_m$$

$$L_{bf} = L_{af} \cos (2\theta_m - 120^\circ)$$

$$L_{cf} = L_{af} \cos (2\theta_m + 120^\circ)$$

Mostre que, quando o campo é excitado com corrente constante  $I_f$  e a armadura é excitada com correntes trifásicas equilibradas da forma

$$i_a = I_a \cos (\omega_c t + \delta)$$

$$i_b = I_a \cos (\omega_c t - 120^\circ + \delta)$$

$$i_c = I_a \cos (\omega_c t + 120^\circ + \delta)$$

então o conjugado será constante se o rotor girar na velocidade síncrona, como dado pela Equação 4.40.

### ■ Solução

O conjugado pode ser calculado a partir da co-energia como foi descrito na Seção 3.6. Essa máquina em particular é um sistema de quatro enrolamentos. Assim, a co-energia consistirá em quatro termos envolvendo metade da indutância própria multiplicada pelo quadrado da correspondente corrente de enrolamento, assim como termos de produtos que consistem em indutâncias mútuas entre pares de enrolamentos multiplicadas pelas correspondentes correntes de enrolamento. Observando que apenas os termos que envolvem as indutâncias mútuas entre o enrolamento de campo e os três enrolamentos de fase da armadura conterão termos que variam com  $\theta_m$ , podemos escrever a co-energia na forma

$$\begin{aligned} W'_{\text{campo}}(i_a, i_b, i_c, i_f, \theta_m) &= (\text{termos constantes}) + \mathcal{L}_{af}i_a i_f + \mathcal{L}_{bf}i_b i_f + \mathcal{L}_{cf}i_c i_f \\ &= (\text{termos constantes}) + L_{af}I_a I_f [\cos 2\theta_m \cos(\omega_c t + \delta) \\ &\quad + \cos(2\theta_m - 120^\circ) \cos(\omega_c t - 120^\circ + \delta) \\ &\quad + \cos(2\theta_m + 120^\circ) \cos(\omega_c t + 120^\circ + \delta)] \\ &= (\text{termos constantes}) + \frac{3}{2}L_{af}I_a I_f \cos(2\theta_m - \omega_c t - \delta) \end{aligned}$$

O conjugado pode ser encontrado agora a partir da derivada parcial de  $W'_{\text{campo}}$  em relação a  $\theta_m$

$$\begin{aligned} T &= \left. \frac{\partial W'_{\text{campo}}}{\partial \theta_m} \right|_{i_a, i_b, i_c, i_f} \\ &= -3L_{af}I_a I_f \sin(2\theta_m - \omega_c t - \delta) \end{aligned}$$

Dessa expressão, vemos que o conjugado será constante quando o rotor girar na velocidade síncrona  $\omega_s$  tal que

$$\theta_m = \omega_s t = \left(\frac{\omega_c}{2}\right)t$$

em cujo caso o conjugado será igual a

$$T = 3L_{af}I_a I_f \sin \delta$$

Observe que, diferentemente do caso da máquina monofásica do Exemplo 4.6, o conjugado dessa máquina trifásica, operando na velocidade síncrona sob condições trifásicas equilibradas, é constante. Como vimos, isso é devido ao fato de que a onda de FMM do estator consiste em uma única onda de fluxo girante, ao contrário do caso monofásico em que a corrente de fase do estator produz duas ondas de fluxo, uma para frente, e outra para trás. Essa onda de fluxo para trás não está em sincronismo com o rotor e portanto é responsável pela componente de conjugado variável no tempo de frequência dupla vista no Exemplo 4.6.

### PROBLEMA PRÁTICO 4.5

Para a máquina de quatro pólos do Exemplo 4.4.7, encontre a velocidade síncrona na qual um conjugado constante será produzido se as correntes do rotor forem da forma

$$i_a = I_2 \cos(\omega_c t + \delta)$$

$$i_b = I_2 \cos(\omega_c t + 120^\circ + \delta)$$

$$i_c = I_2 \cos(\omega_c t - 120^\circ + \delta)$$

### ■ Solução

$$\omega_s = -(\omega_c/2)$$

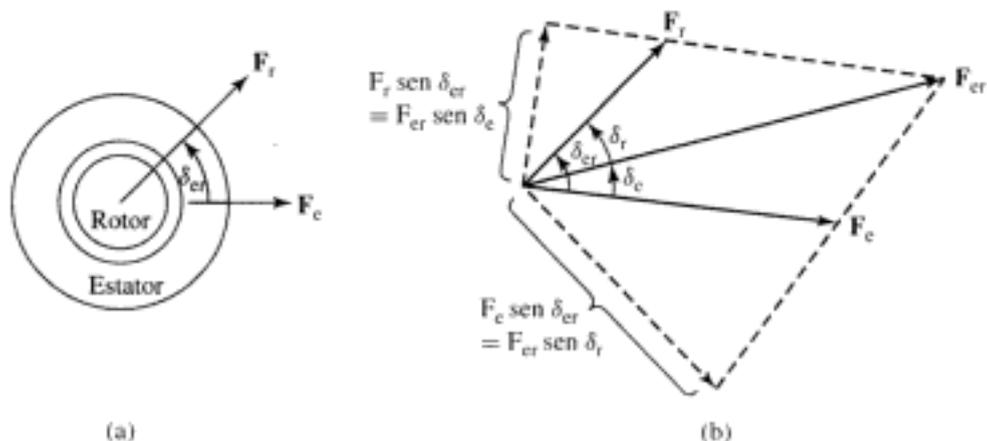
No Exemplo 4.7, encontramos que, sob condições equilibradas, uma máquina síncrona de quatro pólos produz conjugado constante quando a velocidade angular de rotação é igual à metade da frequência elétrica de excitação. Esse resultado pode ser generalizado para mostrar que, sob condições equilibradas de operação, uma máquina síncrona multifásica e de múltiplos pólos produzirá conjugado constante na velocidade de rotor em que este gira em sincronismo com a onda girante de fluxo produzida pelas correntes do estator. Por isso, ela é conhecida como *velocidade síncrona* da máquina. Das Equações 4.40 e 4.41, a velocidade síncrona é igual a  $\omega_s = (2/\text{pólos})\omega_e$  em rad/s ou  $n_s = (120/\text{pólos})f_e$  em rpm.

### 4.7.2 Ponto de Vista do Campo Magnético

Na discussão da Seção 4.7.1, as características de uma máquina rotativa vista de seus terminais elétricos e mecânicos foram expressas em termos de suas indutâncias de enrolamento. Esse ponto de vista dá pouco *insight* dos fenômenos físicos que ocorrem dentro da máquina. Nesta seção, iremos explorar uma formulação alternativa em termos dos campos magnéticos interatuantes.

Como vimos, as correntes nos enrolamentos da máquina criam fluxo magnético entre o estator e o rotor, sendo que os caminhos de fluxo são completados através do ferro do estator e do rotor. Essa condição corresponde ao surgimento de pólos magnéticos em ambos o estator e o rotor, centrados em seus respectivos eixos magnéticos, como mostrado na Fig. 4.35a para uma máquina de dois pólos com entreferro uniforme. O conjugado é produzido pela tendência dos dois campos magnéticos componentes a alinhar os seus eixos magnéticos. Uma visão física útil é que isso é muito semelhante à situação de duas barras magnéticas pivotadas em seus centros no mesmo eixo. Haverá um conjugado, proporcional ao deslocamento angular entre as barras magnéticas, que atuará de modo a alinhá-las. Na máquina da Fig. 4.35a, o conjugado resultante é proporcional ao produto das amplitudes das ondas de FMM do estator e do rotor e é também uma função do ângulo  $\delta_{er}$ , medido desde o eixo da onda de FMM do estator até o do rotor. De fato, mostraremos que, em uma máquina de entreferro uniforme, o conjugado é proporcional a  $\delta_{er}$ .

Em uma máquina típica, a maioria do fluxo produzido pelos enrolamentos de estator e rotor cruzam o entreferro e acoplam ambos os enrolamentos. Isso é chamado de *fluxo mútuo*, em analogia direta com o fluxo mútuo ou de magnetização de um transformador. Entretanto, uma parte do fluxo produzido pelos enrolamentos do rotor e do estator não cruzam o entreferro-



**FIGURA 4.35** Máquina de dois pólos simplificada: (a) modelo elementar e (b) diagrama vetorial das ondas de FMM. O conjugado é produzido pela tendência a se alinhar dos campos magnéticos do rotor e do estator. Observe que essas figuras são desenhadas com  $\delta_{er}$  positivo, isto é, com a onda de FMM do rotor  $F_r$  à frente da  $F_e$  do estator.

ro, em analogia ao fluxo de dispersão de um transformador. Esses componentes de fluxo são conhecidos como *fluxo de dispersão do rotor* e *fluxo de dispersão do estator*. Os componentes desse fluxo de dispersão incluem fluxos dispersivo de ranhura e de topo de dente, fluxo dispersivo de terminação de espira, e harmônicas espaciais no campo de entreferro.

Apenas o fluxo mútuo é de interesse direto para a produção de conjugado. Entretanto, os fluxos de dispersão afetam de fato o desempenho das máquinas, devido às tensões que eles induzem em seus respectivos enrolamentos. Seus efeitos sobre as características elétricas são explicados por meio de indutâncias, de forma análoga ao uso da inclusão de indutâncias de dispersão nos modelos de transformadores do Capítulo 2.

Quando se expressa o conjugado em termos de correntes de enrolamento ou de suas FMMs correspondentes, as expressões resultantes não incluem termos que contenham indutâncias de dispersão. Nossa análise aqui será então em termos do fluxo mútuo resultante. Iremos desenvolver uma expressão para a co-energia magnética armazenada no entreferro em termos das FMMs de estator e rotor e do ângulo  $\delta_{er}$  entre seus eixos magnéticos. O conjugado pode então ser obtido a partir da derivada parcial da co-energia em relação ao ângulo  $\delta_{er}$ .

Para simplificar a análise, iremos supor que o comprimento radial  $g$  do entreferro (o espaço livre entre o rotor e o estator) seja pequeno, quando comparado com o raio do rotor ou do estator. Em uma máquina com entreferro uniforme, construída com aço elétrico de permeabilidade magnética elevada, é possível mostrar que resultará um fluxo de entreferro orientado basicamente em forma radial, e que há uma diferença relativamente pequena entre as densidades de fluxo na superfície do rotor, na superfície do estator, ou a qualquer distância radial intermediária no entreferro. O campo no entreferro pode então ser representado como um campo radial  $H_g$  ou  $B_g$  cuja intensidade varia com o ângulo ao redor da periferia. A integral de linha de  $H_g$  através do entreferro é então simplesmente  $H_g g$  e é igual à FMM resultante  $\mathcal{F}_{er}$  de entreferro produzida pelos enrolamentos de estator e rotor; assim

$$H_g g = \mathcal{F}_{er} \quad (4.66)$$

onde  $\mathcal{F}$  denota a onda de FMM em função do ângulo ao redor da periferia.

As ondas de FMM do estator e do rotor são ondas senoidais espaciais nas quais  $\delta_{er}$  é o ângulo de fase entre seus eixos magnéticos em graus elétricos. Elas podem ser representadas pelos vetores espaciais  $F_e$  e  $F_r$  desenhadas ao longo dos eixos magnéticos das ondas de FMM do estator e do rotor respectivamente, como na Fig. 4.35b. A FMM resultante  $F_{er}$ , também uma onda senoidal que atua no entreferro, é a soma vetorial delas. Da fórmula trigonométrica da diagonal de um paralelogramo, o valor de pico é obtido de

$$F_{er}^2 = F_e^2 + F_r^2 + 2F_e F_r \cos \delta_{er} \quad (4.67)$$

em que os  $F$ s são os valores de pico das ondas de FMM. O campo radial resultante  $H_g$  é uma onda senoidal espacial cujo valor de pico  $H_{g,pico}$  é, da Equação 4.66,

$$(H_g)_{pico} = \frac{F_{er}}{g} \quad (4.68)$$

Agora, considere a co-energia do campo magnético armazenada no entreferro. Da Equação 3.49, a densidade de co-energia em um ponto, em que a intensidade de campo magnético é  $H$ , é  $(\mu_0/2)H^2$  em unidades do SI. Assim, a densidade média de co-energia em todo o volume do entreferro é  $\mu_0/2$  vezes o valor médio de  $H_g^2$ . O valor médio do quadrado de uma onda senoidal é a metade de seu valor de pico. Assim,

$$\text{Densidade média de co-energia} = \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{(H_g)_{pico}^2}{2} \right) = \frac{\mu_0}{4} \left( \frac{F_{er}}{g} \right)^2 \quad (4.69)$$

A co-energia total é obtida então como sendo

$$\begin{aligned} W'_{\text{campo}} &= (\text{densidade média de co-energia})(\text{volume de entreferro}) \\ &= \frac{\mu_0}{4} \left( \frac{F_{er}}{g} \right)^2 \pi D l g = \frac{\mu_0 \pi D l}{4g} F_{er}^2 \end{aligned} \quad (4.70)$$

onde  $l$  é o comprimento axial do entreferro e  $D$  é o seu diâmetro médio.

Da Equação 4.67, a co-energia armazenada no entreferro pode ser expressa agora em termos das amplitudes de pico das ondas de FMM de estator e rotor e do ângulo de fase espacial entre elas; assim

$$W'_{\text{campo}} = \frac{\mu_0 \pi D l}{4g} (F_c^2 + F_r^2 + 2F_c F_r \cos \delta_{er}) \quad (4.71)$$

Verificando que manter uma FMM constante é equivalente a manter uma corrente constante, uma expressão para o conjugado eletromecânico  $T$  pode ser obtida agora, em termos dos campos magnéticos interatuantes, calculando-se a derivada parcial da co-energia do campo em relação ao ângulo. Para uma máquina de dois pólos

$$T = \left. \frac{\partial W'_{\text{campo}}}{\partial \delta_{er}} \right|_{F_c, F_r} = - \left( \frac{\mu_0 \pi D l}{2g} \right) F_c F_r \sin \delta_{er} \quad (4.72)$$

A expressão geral para o conjugado de uma máquina de múltiplos pólos é

$$T = - \left( \frac{\text{pólos}}{2} \right) \left( \frac{\mu_0 \pi D l}{2g} \right) F_c F_r \sin \delta_{er} \quad (4.73)$$

Nessa equação,  $\delta_{er}$  é o ângulo elétrico de fase espacial entre as ondas de FMM do rotor e do estator e o conjugado  $T$  atua no sentido em que o rotor é acelerado. Assim, quando  $\delta_{er}$  é positivo, o conjugado é negativo e a máquina está funcionando como gerador. De modo semelhante, um valor negativo de  $\delta_{er}$  corresponde a um conjugado positivo e, correspondentemente, funciona como motor.

Essa importante equação exprime que o conjugado é proporcional aos valores de pico das ondas de FMM  $F_c$  e  $F_r$  do estator e do rotor, e ao seno do ângulo elétrico de fase espacial  $\delta_{er}$  entre elas. O sinal de menos significa que os campos tendem a se alinhar entre si. Conjugados iguais e opostos são exercidos sobre o estator e o rotor. O conjugado sobre o estator é transmitido através da carcaça da máquina à fundação.

Agora, pode-se comparar os resultados da Equação 4.73 com os da Equação 4.65. Verificando que  $F_c$  é proporcional a  $i_c$  e  $F_r$  é proporcional a  $i_r$ , pode-se ver que são semelhantes na forma. De fato, eles devem ser iguais, como pode ser verificado substituindo-se  $F_c$ ,  $F_r$  (Seção 4.3.1) e  $L_{cr}$  (Apêndice B) por expressões apropriadas. Observe que esses resultados foram deduzidos supondo que a relutância do ferro fosse desprezível. No entanto, as duas técnicas são igualmente válidas para uma permeabilidade finita do ferro.

Referindo-se à Fig. 4.35b, pode-se ver que  $F_r \sin \delta_{er}$  é a componente da onda  $F_r$  em quadratura elétrica espacial com a onda  $F_c$ . De modo semelhante,  $F_c \sin \delta_{er}$  é a componente da onda  $F_c$  em quadratura com a onda  $F_r$ . Assim, o conjugado é proporcional ao produto de um campo magnético pela componente do outro em quadratura consigo, muito semelhante ao produto vetorial da análise vetorial. Observe também que, na Fig. 4.35b,

$$F_c \sin \delta_{er} = F_{er} \sin \delta_r \quad (4.74)$$

e

$$F_r \sin \delta_{er} = F_{er} \sin \delta_c \quad (4.75)$$

onde, como visto na Fig. 4.35,  $\delta_r$  é o ângulo medido desde o eixo da onda de FMM resultante até o eixo da onda de FMM do rotor. De modo semelhante,  $\delta_c$  é o ângulo medido desde o eixo da onda de FMM do estator até o eixo da onda de FMM resultante.

O conjugado, que atua acelerando o rotor, pode então ser expresso em termos da onda de FMM resultante. Substituindo-se a Equação 4.74 ou a Equação 4.75 na Equação 4.73, obtêm-se

$$T = -\left(\frac{\text{pólos}}{2}\right) \left(\frac{\mu_0 \pi D l}{2g}\right) F_e F_{er} \sin \delta_e \quad (4.76)$$

$$T = -\left(\frac{\text{pólos}}{2}\right) \left(\frac{\mu_0 \pi D l}{2g}\right) F_r F_{er} \sin \delta_r \quad (4.77)$$

A comparação das Equações 4.73, 4.76 e 4.77 mostra que o conjugado pode ser expresso em termos dos campos magnéticos componentes devidos a *cada* corrente isoladamente, como na Equação 4.73, ou em termos do campo *resultante* e de *qualquer* um dos componentes, como nas Equações 4.76 e 4.77, desde que usemos o ângulo correspondente entre os eixos dos campos. A capacidade de pensar em qualquer uma dessas formas é útil na análise de máquinas.

Nas Equações 4.73, 4.76 e 4.77, os campos foram expressos em termos dos valores de pico de suas ondas de FMM. Quando se despreza a saturação magnética, os campos podem, naturalmente, ser expressos em termos dos valores de pico de suas ondas de densidade de fluxo, ou em termos do fluxo total por pólo. Assim, o valor de pico  $B_g$  de campo devido a uma onda de FMM distribuída senoidalmente em um entreferro uniforme de máquina é  $\mu_0 F_{g,\text{pico}}/g$ , onde  $F_{g,\text{pico}}$  é o valor de pico da onda de FMM. Por exemplo, a FMM resultante  $F_{er}$  produz uma onda de densidade de fluxo resultante cujo valor de pico é  $B_{er} = \mu_0 F_{er}/g$ . Assim,  $F_{er} = g B_{er}/\mu_0$  e substituindo na Equação 4.77, obtém-se

$$T = -\left(\frac{\text{pólos}}{2}\right) \left(\frac{\pi D l}{2}\right) B_{er} F_r \sin \delta_r \quad (4.78)$$

Uma das limitações inerentes ao projeto de aparelhos eletromagnéticos é a densidade de fluxo de saturação dos materiais magnéticos. Devido à saturação nos dentes da armadura, o valor de pico  $B_{er}$  da onda de densidade de fluxo resultante no entreferro é limitado a cerca de 1,5 a 2,0 T. O valor máximo admissível para a corrente de enrolamento, e conseqüentemente a correspondente onda de FMM, é limitado pela elevação de temperatura do enrolamento e por outros requisitos de projeto. Como a densidade de fluxo resultante e a FMM aparecem explicitamente na Equação 4.78, essa equação está em uma forma conveniente aos propósitos de projeto. Ela pode ser usada para estimar o conjugado máximo que é possível de se obter com uma máquina de um dado tamanho.

#### EXEMPLO 4.8

Um motor síncrono de quatro pólos, operando a 1800 rpm e 60 Hz, tem um entreferro de 1,2 mm. O diâmetro médio do entreferro é 27 cm, e seu comprimento axial é 32 cm. O enrolamento do rotor tem 786 espiras e um fator de enrolamento de 0,976. Supondo que razões térmicas limitem a corrente do rotor a 18 A, estime o conjugado e a potência de saída máximos que se pode esperar obter dessa máquina.

#### ■ Solução

Primeiro, podemos determinar a FMM de rotor máxima a partir da Equação 4.8

$$(F_r)_{\text{max}} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{k_r N_r}{\text{pólos}}\right) (I_r)_{\text{max}} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{0,976 \times 786}{4}\right) 18 = 4395 \text{ A}$$

Supondo que o valor de pico do fluxo de entreferro resultante esteja limitado a 1,5 T, podemos estimar o conjugado máximo a partir da Equação 4.78 tornando  $\delta_r$  igual a  $-\pi/2$  (lembrando que valores negativos de  $\delta_r$ , com a FMM do rotor atrasada em relação à FMM resultante, correspondem a um conjugado positivo, motor).

$$\begin{aligned}
 T_{\max} &= \left( \frac{\text{pólos}}{2} \right) \left( \frac{\pi D l}{2} \right) B_{cr} (F_r)_{\max} \\
 &= \left( \frac{4}{2} \right) \left( \frac{\pi \times 0,27 \times 0,32}{2} \right) 1,5 \times 4400 = 1790 \text{ N} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$

Para uma velocidade síncrona de 1800 rpm, tem-se  $\omega_m = n_s (\pi/30) = 1800 (\pi/30) \text{ rad/s}$ , e assim a potência correspondente pode ser calculada como  $P_{\max} = \omega_m T_{\max} = 337 \text{ kW}$ .

#### PROBLEMA PRÁTICO 4.6

Repita o Exemplo 4.8 para um motor síncrono de dois pólos e 60 HZ com um comprimento de entreferro de 1,3 mm, um diâmetro médio de entreferro de 22 cm e um comprimento axial de 41 cm. O enrolamento do rotor tem 900 espiras e um fator de enrolamento de 0,965. A corrente máxima de rotor é 22 A.

#### ■ Solução

$$T_{\max} = 2585 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ e } P_{\max} = 975 \text{ kW}$$

Formas alternativas da equação de conjugado surgem quando se verifica que o fluxo resultante por pólo é

$$\Phi_p = (\text{valor médio de } B \text{ em um pólo})(\text{área do pólo}) \quad (4.79)$$

e que o valor médio de uma senóide no intervalo de meio comprimento de onda é  $2/\pi$  vezes o seu valor de pico. Assim,

$$\Phi_p = \frac{2}{\pi} B_{\text{pico}} \left( \frac{\pi D l}{\text{pólos}} \right) = \left( \frac{2 D l}{\text{pólos}} \right) B_{\text{pico}} \quad (4.80)$$

onde  $B_{\text{pico}}$  é o valor de pico da respectiva onda de densidade de fluxo. Por exemplo, usando o valor de pico do fluxo resultante  $B_{cr}$  e substituindo a Equação 4.80 na Equação 4.78, obtém-se

$$T = -\frac{\pi}{2} \left( \frac{\text{pólos}}{2} \right)^2 \Phi_{cr} F_r \text{ sen } \delta_r \quad (4.81)$$

onde  $\Phi_{cr}$  é o fluxo por pólo resultante que é produzido pelo efeito combinado das FMMs do estator e do rotor.

Recapitulando, temos agora diversas formas para expressar o conjugado de uma máquina de entreferro uniforme em termos de seus campos magnéticos. *Todas são simplesmente expressões de que o conjugado é proporcional ao produto dos módulos dos campos interagentes, e ao seno do ângulo espacial elétrico entre os seus eixos magnéticos.* O sinal negativo indica que o conjugado eletromecânico atua em um sentido tal que a distância angular entre os campos diminui. Em nossa discussão introdutória dos tipos de máquinas, a Equação 4.81 será a forma preferida.

Além disso, pode-se fazer um outro comentário relativo às equações de conjugado e ao processo de raciocínio que leva a elas. Durante a dedução, não houve restrições em relação a manter as ondas de FMM ou de densidade de fluxo estacionárias no espaço. Elas podem permanecer estacionárias ou serem ondas em deslocamento, como foi discutido na Seção 4.5. Como vimos, se os campos magnéticos do estator e do rotor forem constantes em amplitude e se deslocarem ao redor do entreferro na mesma velocidade, um conjugado constante será produzido pela tendência dos campos do estator e do rotor a se alinhar entre si de acordo com as equações do conjugado.

## 4.8 MÁQUINAS LINEARES

Em geral, cada um dos tipos de máquinas discutidos neste livro pode ser produzido em versões lineares além das versões rotativas que comumente são encontradas e que serão extensivamente discutidas nos próximos capítulos. De fato, pela clareza da discussão, muitos dos tipos de máquinas discutidos neste livro são desenhados em suas formas desenvolvidas ou planificadas (coordenadas cartesianas), tal como na Fig. 4.19b.

Talvez o uso mais largamente conhecido dos motores lineares seja no campo dos transportes. Nessas aplicações, motores de indução lineares são usados. Tipicamente o “estator” CA está no veículo em movimento, e um “rotor” estacionário condutor constitui os trilhos. Nesses sistemas, além de propiciar a propulsão, as correntes induzidas nos trilhos podem ser usadas para produzir levitação, oferecendo assim um mecanismo de transporte a alta velocidade, sem as dificuldades associadas com as interações que ocorrem entre as rodas e os trilhos no transporte mais convencional efetuado com trilhos.

Os motores lineares também encontraram aplicação na indústria de máquinas ferramentas e em robótica onde o movimento linear (necessário para o posicionamento e a operação de manipuladores) é um requisito comum. Além disso, máquinas alternativas (recíprocas) lineares estão sendo construídas para o acionamento de compressores e alternadores recíprocos.

A análise de máquinas lineares é muito similar à das máquinas rotativas. Em geral, dimensões e distâncias lineares substituem as angulares, e forças substituem os conjugados. Com essas exceções, as expressões para os parâmetros de máquina são desenvolvidas de modo análogo aos apresentados aqui para as máquinas rotativas, e os resultados são semelhantes em forma.

Considere o enrolamento linear mostrado na Fig. 4.36. Esse enrolamento, consistindo em  $N$  espiras por ranhura e conduzindo uma corrente  $i$ , é diretamente análogo ao enrolamento circular mostrado em forma desenvolvida na Fig. 4.25. De fato, a única diferença é a substituição da posição angular  $\theta_a$  pela linear  $z$ .

A componente fundamental da onda de FMM da Fig. 4.36 pode ser encontrada diretamente da Equação 4.13 simplesmente verificando que esse enrolamento tem um comprimento de onda igual a  $\beta$  e que a componente fundamental dessa onda de FMM varia de acordo com  $(2\pi z/\beta)$ . Assim, substituindo o ângulo  $\theta_a$  na Equação 4.13 por  $2\pi z/\beta$ , podemos obter a componente fundamental da onda de FMM diretamente como

$$H_{g1} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{Ni}{2g} \right) \cos \left( \frac{2\pi z}{\beta} \right) \quad (4.82)$$

Se uma máquina real tiver um enrolamento distribuído (similar a seu equivalente circular, mostrado na Fig. 4.20) consistindo em um total de  $N_{\text{fase}}$  espiras distribuídas em  $p$  períodos ao longo de  $z$  (isto é, em um comprimento de  $p\beta$ ), a componente fundamental de  $H_g$  pode ser encontrada, por analogia com a Equação 4.15, como sendo

$$H_{g1} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{k_{\text{enr}} N_{\text{fase}} i}{2pg} \right) \cos \left( \frac{2\pi z}{\beta} \right) \quad (4.83)$$

onde  $k_{\text{enr}}$  é o fator de enrolamento.

De modo análogo à discussão da Seção 4.5.2, um enrolamento trifásico linear pode ser construído a partir de três enrolamentos como os da Fig. 4.31. Cada fase está deslocada em posição de uma distância  $\beta/3$ , e as fases são excitadas por correntes trifásicas equilibradas de frequência angular  $\omega_c$

$$i_a = I_m \cos \omega_c t \quad (4.84)$$

$$i_b = I_m \cos \omega_c t \quad (4.85)$$

$$i_c = I_m \cos (\omega_c t - 120^\circ) \quad (4.86)$$

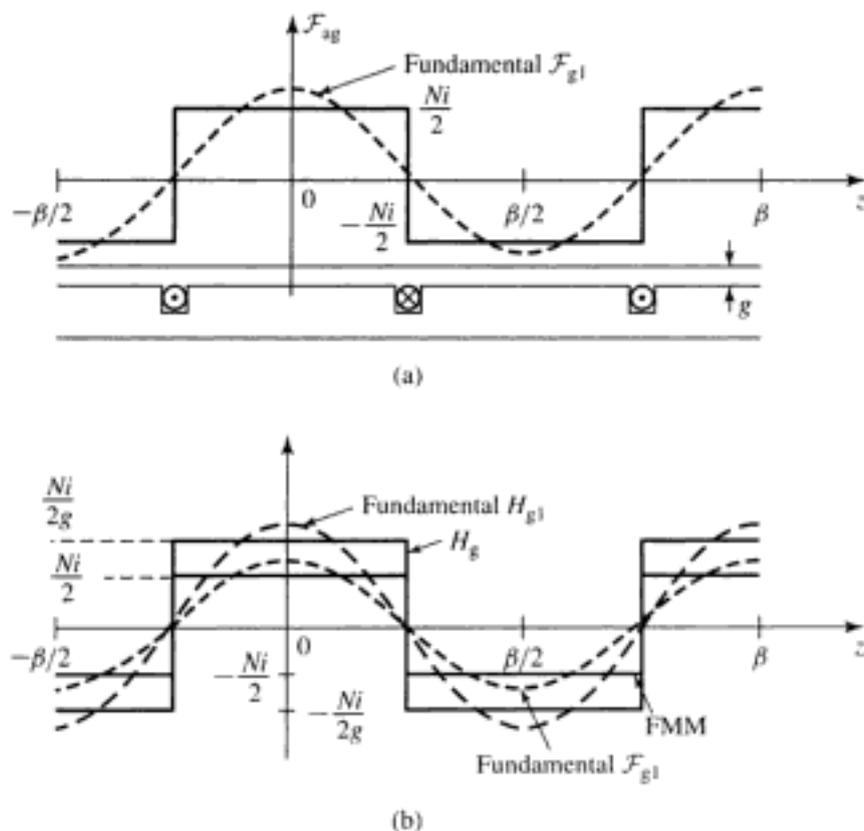


FIGURA 4.36 A FMM e o campo  $H$  de um enrolamento linear concentrado de passo pleno.

Seguindo o desenvolvimento das Equações 4.26 até 4.38, podemos ver que haverá uma única FMM progressiva positiva que pode ser escrita diretamente da Equação 4.38, simplesmente substituindo  $\theta_a$  por  $2\pi z/\beta$ , obtendo-se

$$\mathcal{F}^+(z, t) = \frac{3}{2} F_{\max} \cos\left(\frac{2\pi z}{\beta} - \omega_e t\right) \quad (4.87)$$

onde  $F_{\max}$  é dada por

$$F_{\max} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{k_{\text{enr}} N_{\text{fase}}}{2p}\right) I_m \quad (4.88)$$

Da Equação 4.87, podemos ver que o resultado é uma onda de FMM que se desloca na direção  $z$  com uma velocidade linear

$$v = \frac{\omega_e \beta}{2\pi} = f_e \beta \quad (4.89)$$

onde  $f_e$  é a frequência de excitação em hertz.

#### EXEMPLO 4.9

Um motor CA trifásico linear tem um enrolamento com um comprimento de onda de  $\beta = 0,5$  m e um entreferro com 1,0 cm de comprimento. Um total de 45 espiras, com um fator de enrolamento de  $k_{\text{enr}} = 0,92$ , é distribuído em um comprimento total de enrolamento de  $3\beta = 1,5$  m. Suponha que os enrolamentos sejam excitados com correntes trifásicas equilibradas de amplitude de pico de 700 A e frequência de 25 Hz. Calcule (a) a amplitude da onda de FMM resultante, (b) a densidade de fluxo de pico correspondente no entreferro e (c) a velocidade dessa onda progressiva de FMM.

### ■ Solução

a. Das Equações 4.87 e 4.88, a amplitude da onda de FMM resultante é

$$\begin{aligned} F_{\text{pico}} &= \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} \left( \frac{k_{\text{ent}} N_{\text{fase}}}{2p} \right) I_m \\ &= \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} \left( \frac{0,92 \times 45}{2 \times 3} \right) 700 \\ &= 8,81 \times 10^3 \text{ A/m} \end{aligned}$$

b. A densidade de fluxo de pico no entreferro pode ser obtida a partir do resultado da parte (a) dividindo pelo comprimento do entreferro e multiplicando por  $\mu_0$ :

$$\begin{aligned} B_{\text{pico}} &= \frac{\mu_0 F_{\text{pico}}}{g} \\ &= \frac{(4\pi \times 10^{-7})(8,81 \times 10^3)}{0,01} \\ &= 1,11 \text{ T} \end{aligned}$$

c. Finalmente, a velocidade da onda progressiva pode ser determinada a partir da Equação 4.89:

$$v = f_c \beta = 25 \times 0,5 = 12,5 \text{ m/s}$$

### PROBLEMA PRÁTICO 4.7

Um motor síncrono trifásico linear tem um comprimento de onda de 0,93 m. Observa-se que ele está se deslocando a uma velocidade de 83 km/h. Calcule a frequência da excitação elétrica necessária sob essas condições de operação.

### ■ Solução

$$f = 24,8 \text{ Hz}$$

As máquinas lineares não são discutidas de forma específica neste livro. No entanto, recomenda-se com insistência que o leitor verifique a correspondência direta existente entre os fundamentos do desempenho e da análise das máquinas lineares e os de seus equivalentes rotativos. Uma diferença maior entre esses dois tipos de máquinas é que as máquinas lineares têm *efeitos de extremidade\**, correspondendo aos campos magnéticos que se “dispersam” do entreferro à frente e atrás da máquina. Esses efeitos estão além do escopo deste livro e foram tratados em detalhe na literatura.<sup>3</sup>

## 4.9 SATURAÇÃO MAGNÉTICA

As características das máquinas elétricas dependem em muito do uso de materiais magnéticos. Esses materiais são necessários para formar o circuito magnético e são usados pelos projetistas de máquinas para obter as características específicas das máquinas. Como vimos no

\* N. de T.: *End effects*, em inglês.

<sup>3</sup> Veja, por exemplo, S. Yamamura, *Theory of Linear Induction Motors*, 2ª edição, Halsted Press, 1978. Também, S. Nasar e I. Boldea, *Linear Electric Motors: Theory, Design and Practical Applications*, Prentice-Hall, 1987.

Capítulo 1, os materiais magnéticos estão abaixo do ideal. À medida que o fluxo magnético é aumentado, eles começam a saturar, com o resultado de que suas permeabilidades magnéticas começam a diminuir assim como a sua efetividade em contribuir à densidade de fluxo total da máquina.

O conjugado eletromecânico e a tensão gerada em todas as máquinas dependem dos fluxos concatenados em seus enrolamentos. Para FMMs específicas nos enrolamentos, os fluxos dependem das relutâncias das partes de ferro dos circuitos magnéticos e das relutâncias dos entreferros. Portanto, a saturação pode influenciar apreciavelmente as características das máquinas.

Um outro aspecto da saturação, mais sutil e difícil de ser avaliado sem comparações experimentais e teóricas, relaciona-se com a influência da saturação sobre as premissas básicas a partir das quais a abordagem analítica das máquinas é desenvolvida. Especificamente, as relações envolvendo a FMM de entreferro baseiam-se tipicamente na suposição de que a relutância do ferro é desprezível. Quando essas relações são aplicadas às máquinas na prática, com graus variados de saturação no ferro, erros significativos nos resultados das análises podem ser esperados. Por essas razões, para aperfeiçoar tais relações analíticas, a máquina real pode ser substituída por uma máquina equivalente, uma cujo ferro tem relutância desprezível mas cujo entreferro é aumentado de um valor suficiente para absorver a queda de potencial magnético no ferro da máquina real.

Do mesmo modo, os efeitos das não-uniformidades, tais como as ranhuras e os condutos de ventilação, também podem ser incorporados aumentando-se o comprimento efetivo do entreferro. No final, essas diversas técnicas de aproximação devem ser verificadas e confirmadas experimentalmente. Nos casos em que se constatar que essas técnicas simples são inadequadas, análises detalhadas, como as que empregam elementos finitos ou outras técnicas numéricas, podem ser usadas. No entanto, deve-se ter em mente que o uso dessas técnicas representam um aumento significativo da complexidade da modelagem.

As características de saturação das máquinas rotativas são apresentadas tipicamente na forma de uma *característica de circuito aberto ou a vazio*, também chamada *curva de magnetização* ou *curva de saturação*. Um exemplo está mostrado na Fig. 4.37. Essa característica representa a curva de magnetização para a geometria do ferro e do ar em particular da máquina sob análise. Para uma máquina síncrona, a curva de saturação de circuito aberto é obtida operando a máquina em velocidade constante e medindo a tensão de armadura de circuito aberto em função da corrente de campo. A linha reta tangente à porção inferior da curva é a *linha de entreferro*, correspondendo aos níveis baixos de fluxo dentro da máquina. Sob essas



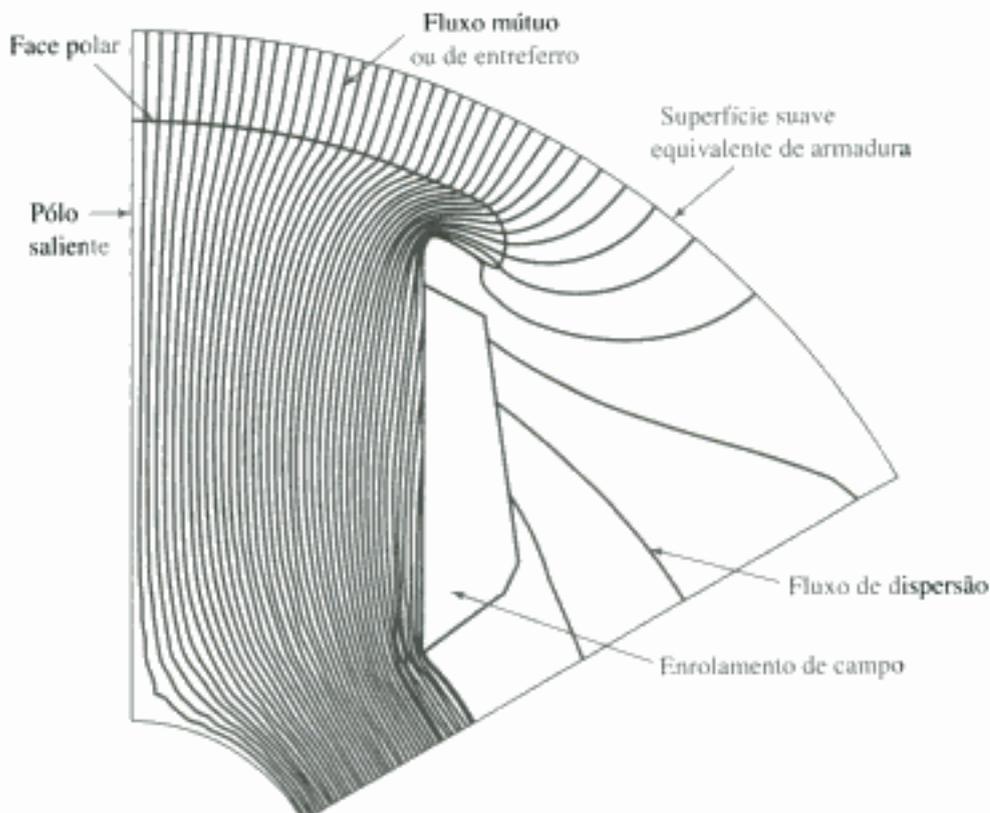
**FIGURA 4.37** Curva característica de circuito aberto típica e linha de entreferro.

condições, a relutância do ferro da máquina é tipicamente desprezível, e a FMM necessária para excitar a máquina é simplesmente a necessária para superar a relutância do ar. Se não fosse pelos efeitos da saturação, a linha de entreferro e a característica de circuito aberto iriam coincidir. Assim, o afastamento entre a curva e a linha de entreferro é uma indicação do grau de saturação presente. Em máquinas típicas, na tensão nominal, a razão entre a FMM total e a requerida apenas pelo entreferro está usualmente entre 1,1 e 1,25.

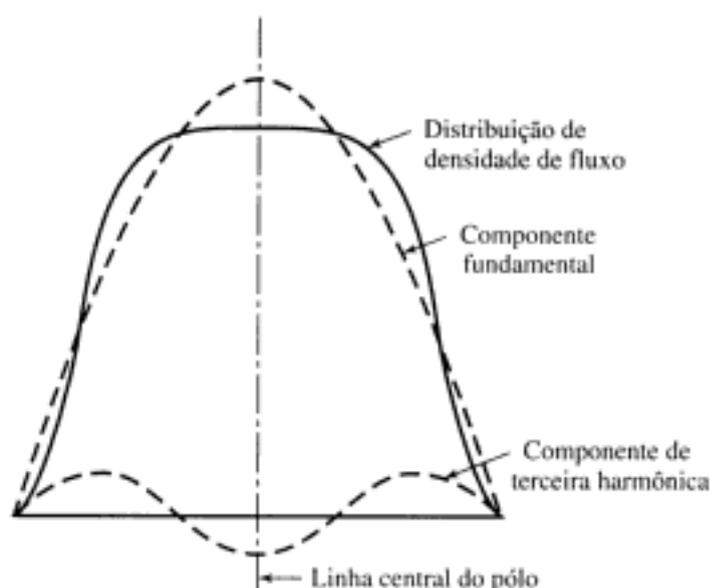
Na fase de projeto, a característica de circuito aberto pode ser calculada a partir de técnicas de projeto de dados como a análise de elementos finitos. Uma solução típica de elementos finitos para a distribuição de fluxo ao redor do pólo de uma máquina de pólos salientes está mostrada na Fig. 4.38. A distribuição do fluxo de entreferro obtida com essa solução, juntamente com as componentes fundamental e de terceira harmônica, está mostrada na Fig. 4.39.

Além dos efeitos de saturação, a Fig. 4.39 ilustra claramente o efeito de um entreferro não uniforme. Como esperado, a densidade de fluxo ao redor da face polar, onde o entreferro é pequeno, é muito mais elevada que nas regiões mais afastadas do pólo. Esse tipo de análise detalhada é de grande utilidade para um projetista obter as propriedades específicas de uma máquina.

Como vimos, a curva de magnetização de uma máquina síncrona existente pode ser determinada operando a máquina como um gerador sem carga, e medindo os valores da tensão nos terminais correspondentes a uma série de valores de corrente de campo. Para um motor de indução, a máquina é operada na, ou próxima da, velocidade síncrona (caso em que uma corrente muito baixa será induzida nos enrolamentos do rotor), e valores de corrente de magnetização são obtidos para uma série de valores aplicados de tensão de estator. Deve ser enfatizado, no entanto, que a saturação em uma máquina totalmente sob carga ocorre como resultado da FMM total que atua no circuito magnético. Como a distribuição de fluxo sob carga é diferente em geral de quando não há carga, os detalhes das características de saturação da máquina podem ser diferentes da curva de circuito aberto da Fig. 4.37.



**FIGURA 4.38** Solução de elementos finitos para a distribuição de fluxo ao redor de um pólo saliente. (*General Electric Company*)



**FIGURA 4.39** Onda de densidade de fluxo correspondente à Fig. 4.38 com suas componentes fundamental e de terceira harmônica.

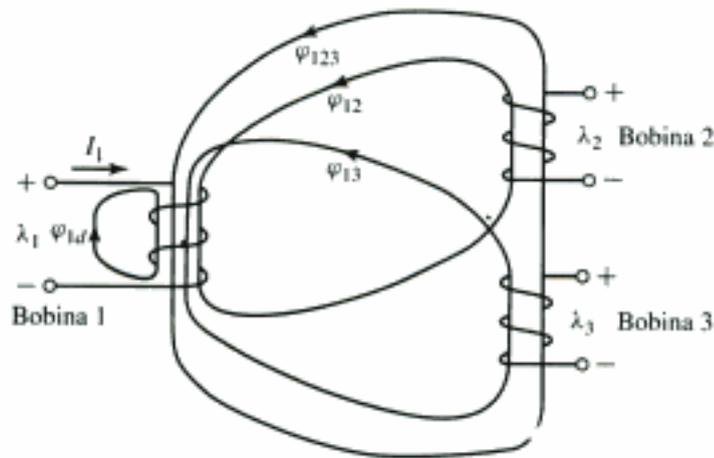
## 4.10 FLUXOS DISPERSIVOS

Na Seção 2.4, mostramos que em um transformador de dois enrolamentos, o fluxo criado por cada enrolamento pode ser decomposto em dois componentes. Um dos componentes consiste no fluxo que concatena ambos os enrolamentos, e o outro consiste no fluxo que concatena apenas o enrolamento que cria o fluxo. O primeiro componente, chamado *fluxo mútuo*, é responsável pelo acoplamento das duas bobinas. O segundo, conhecido como *fluxo dispersivo*, contribui apenas à indutância própria de cada bobina.

Observe que o conceito de fluxos mútuo e dispersivo é significativo apenas no contexto de sistemas de múltiplos enrolamentos. Para sistemas de três ou mais enrolamentos, a contabilidade deve ser feita com muito cuidado. Considere, por exemplo, o sistema de três enrolamentos da Fig. 4.40. Os vários componentes de fluxo, criados por uma corrente no enrolamento 1, estão mostrados esquematicamente. Aqui,  $\varphi_{123}$  é claramente um fluxo mútuo que concatena todos os três enrolamentos, e  $\varphi_{1d}$  é claramente um fluxo dispersivo porque ele concatena apenas o enrolamento 1. Entretanto,  $\varphi_{12}$  é um fluxo mútuo com respeito ao enrolamento 2 e fluxo dispersivo em relação ao enrolamento 3, ao passo que  $\varphi_{13}$  é fluxo mútuo com respeito ao enrolamento 3 e dispersivo em relação ao enrolamento 2.

Freqüentemente as máquinas elétricas contêm sistemas com múltiplos enrolamentos, exigindo uma contabilidade cuidadosa para explicar as contribuições de fluxo dos vários enrolamentos. Embora os detalhes de tal análise estejam além do escopo deste livro, é útil discutir esses efeitos de modo qualitativo e descrever como afetam as indutâncias básicas da máquina.

**Fluxos de Harmônicas Espaciais no Entreferro** Neste capítulo, vimos que, embora as bobinas distribuídas isoladamente produzam fluxo de entreferro com uma quantidade significativa de conteúdo harmônico espacial, é possível distribuir esses enrolamentos de modo que a componente fundamental espacial seja enfatizada ao passo que os efeitos das harmônicas sejam grandemente reduzidos. Como resultado, podemos desprezar os efeitos das harmônicas e considerar apenas os fluxos das fundamentais espaciais ao deduzir as expressões de indutâncias própria e mútua das Equações B.26 e B.27.

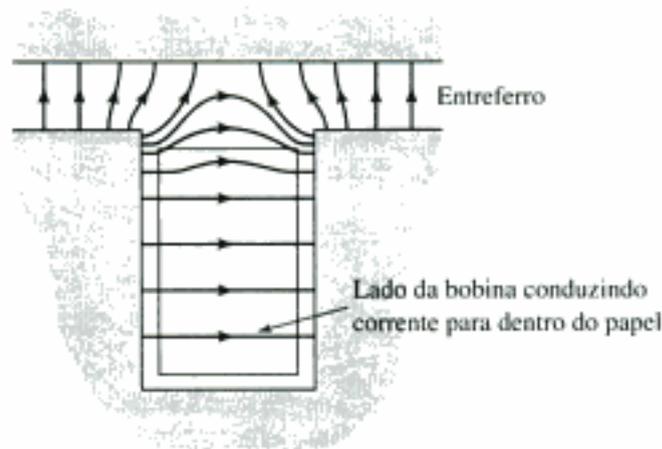


**FIGURA 4.40** Sistema de três bobinas mostrando os componentes de fluxo mútuo e dispersivo produzidos pela corrente na bobina 1.

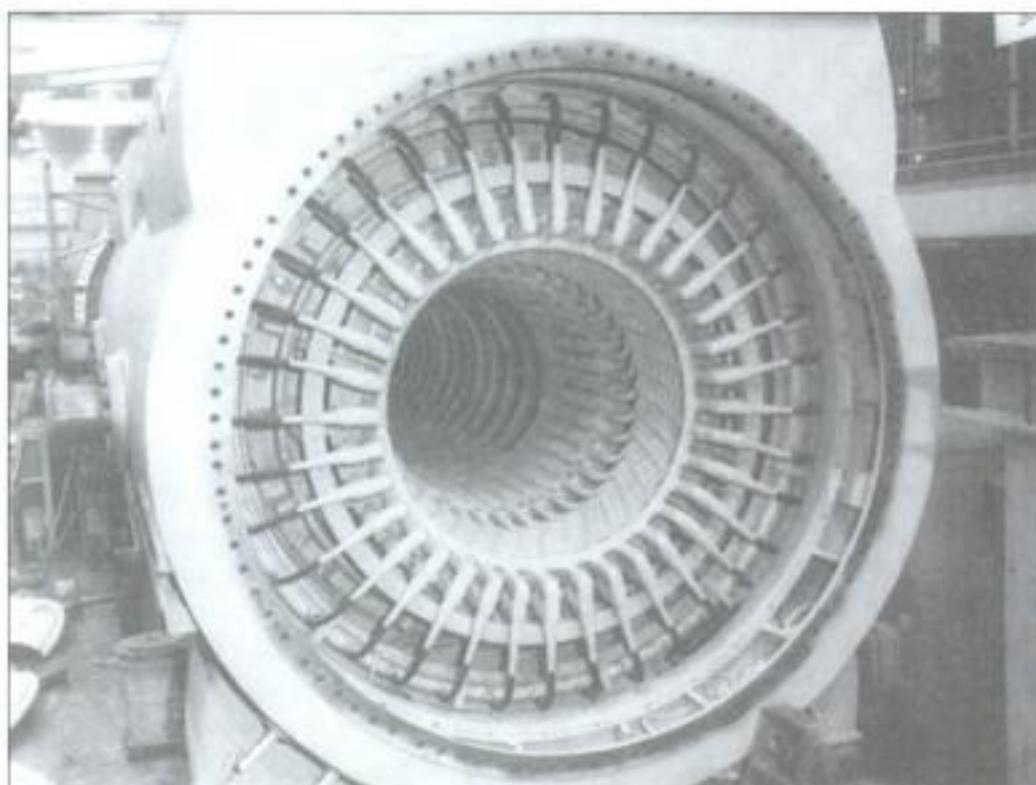
Mesmo sendo freqüentemente pequenas, as componentes harmônicas espaciais existem de fato. Em máquinas CC, elas constituem fluxos úteis produtores de conjugado e, portanto, podem ser contabilizadas como fluxo mútuo entre os enrolamentos do rotor e do estator. Em máquinas CA, entretanto, elas podem gerar tensões harmônicas no tempo ou ondas de fluxo que giram assincronamente. Geralmente, não há como inclui-las com rigor na maioria das análises comuns. No entanto, é consistente com as suposições básicas dessas análises constatar que esses fluxos formam uma parte do fluxo dispersivo dos enrolamentos individuais que os produzem.

**Fluxo Dispersivo de Ranhura** A Fig. 4.41 mostra o fluxo criado por um único lado de uma bobina em uma ranhura. Observe que, além do fluxo que cruza o entreferro, contribuindo para o fluxo de entreferro, há componentes de fluxo que atravessam a ranhura. Como esse fluxo concatena apenas a bobina que o está produzindo, ele se constitui também em um componente da indutância de dispersão do enrolamento que o produz.

**Dispersão de Cabeça de Espira** A Fig. 4.42 mostra as terminações dos enrolamentos (cabeça) do estator em uma máquina CA. A distribuição do campo magnético criada pela cabeça das espiras é extremamente complexa. Em geral, esses fluxos não contribuem para o fluxo mútuo entre o rotor e o estator, contribuindo também desse modo para a indutância de dispersão.



**FIGURA 4.41** Fluxo criado por um lado de uma bobina em uma ranhura.



**FIGURA 4.42** Vista da extremidade do estator de um gerador a turbina de 26 kV, 908 MVA e 3600 rpm com enrolamentos refrigerados a água. Conexões hidráulicas para o fluxo de refrigeração são fornecidas para cada espira de terminação do enrolamento. (*General Electric Company*)

Dessa discussão vemos que a expressão da indutância própria da Equação B.26 deve, em geral, ser modificada por um termo adicional  $L_{\sigma}$ , que representa a indutância de dispersão do enrolamento. Essa indutância de dispersão corresponde diretamente à indutância de dispersão de um enrolamento de transformador, como foi discutido no Capítulo 1. Embora a indutância de dispersão seja usualmente difícil de ser calculada analiticamente e deva ser determinada por técnicas aproximativas ou empíricas, ela desempenha um papel importante no desempenho das máquinas.

## 4.11 RESUMO

Este capítulo apresenta uma descrição breve e elementar de três tipos básicos de máquinas rotativas: síncrona, de indução e de corrente contínua. Em todas elas, os princípios básicos são essencialmente os mesmos. Tensões são geradas pelo movimento relativo de um campo magnético em relação a um enrolamento, e conjugados são produzidos pela interação dos campos magnéticos dos enrolamentos do estator e do rotor. As características dos diversos tipos de máquinas são determinadas pelos métodos de conexão e excitação dos enrolamentos, mas os princípios básicos são essencialmente similares.

As ferramentas analíticas básicas para o estudo das máquinas rotativas são as expressões da tensão gerada e do conjugado eletromecânico. Em conjunto, elas exprimem o acoplamento entre os sistemas elétrico e mecânico. Para desenvolver uma teoria razoavelmente quantitativa sem a confusão que se origina de demasiados detalhes, fizemos diversas aproximações simplificadoras. No estudo das máquinas CA, supusemos variações senoidais no tempo para

as tensões e correntes, e ondas senoidais espaciais para a densidade de fluxo no entreferro e FMM no entreferro. Ao examinar a FMM produzida pelos enrolamentos CA distribuídos, constatamos que a componente fundamental espacial é a mais importante. Por outro lado, nas máquinas CC, a FMM do enrolamento de armadura aproxima-se mais de uma onda dente de serra. Em nosso estudo introdutório deste capítulo, entretanto, supusemos distribuições senoidais de FMM para as máquinas CA e CC. Nós examinaremos essa suposição com mais profundidade para o caso de máquinas CC no Capítulo 7. Da lei de Faraday, resulta a Equação 4.50 da tensão eficaz gerada no enrolamento de uma máquina CA, ou a Equação 4.53 da tensão média gerada entre as escovas de uma máquina CC.

Ao examinar a onda de FMM de um enrolamento trifásico, constatamos que correntes trifásicas equilibradas produzem um campo magnético de amplitude constante no entreferro girando com velocidade síncrona, como mostrado na Fig. 4.31 e Equação 4.39. A importância desse fato não pode ser subestimada, porque significa que é possível operar tais máquinas, tanto motores como geradores, sob condições de conjugado constante (e conseqüentemente de potência elétrica constante como está discutido no Apêndice A), eliminado-se o conjugado de frequência dobrada, variável no tempo, que inerentemente está associado às máquinas monofásicas. Por exemplo, imagine um gerador monofásico de 60 Hz e multimegawatts submetido a uma pulsação instantânea com multimegawatts de potência a 120 Hz! A descoberta dos campos girantes levou à invenção do motor de indução, polifásico, simples, robusto, confiável e de partida própria, que será analisado no Capítulo 6. (Um motor de indução monofásico não parte sozinho, ele necessita de um enrolamento auxiliar, como se mostra no Capítulo 9.)

Em máquinas monofásicas, ou em máquinas polifásicas que operam sob condições desequilibradas, a componente girante para trás da onda de FMM da armadura induz correntes e perdas na estrutura do rotor. Assim, a operação de máquinas polifásicas sob condições equilibradas elimina não só a componente de segunda harmônica do conjugado gerado, mas também elimina uma fonte significativa de perdas e aquecimento no rotor. Foi a invenção de máquinas polifásicas que operam sob condições equilibradas que tornou possível o projeto e a construção de geradores síncronos de grande porte com especificações tão elevadas quanto 1000 MV.

Depois de supor que os campos magnéticos têm uma distribuição senoidal no entreferro, nós desenvolvemos então expressões para o conjugado magnético. Uma imagem física simples da produção de conjugado é a de dois ímãs, um no estator e outro no rotor, como mostrado esquematicamente na Fig. 4.35a. O conjugado atua com sentido tal que os ímãs fiquem alinhados entre si. Para obtermos uma análise quantitativa razoavelmente próxima, sem sermos emaranhados pelos detalhes, assumimos um entreferro uniforme e desprezamos a relutância dos caminhos magnéticos nas partes feitas de ferro, com a observação de que essa suposição poderia não ser válida em todas as situações, sendo necessário um modelo mais detalhado.

Na Seção 4.7, deduzimos expressões para o conjugado magnético sob dois pontos de vista, ambos baseados nos princípios fundamentais do Capítulo 3. O primeiro ponto de vista considera a máquina como um conjunto de circuitos acoplados magneticamente, com indutâncias que dependem da posição angular do rotor, como na Seção 4.7.1. O segundo considera a máquina do ponto de vista dos campos magnéticos no entreferro, como na Seção 4.7.2. Foi demonstrado que o conjugado pode ser expresso como sendo o produto do campo do estator pelo campo do rotor e pelo seno do ângulo entre seus eixos magnéticos, como na Equação 4.73 ou em qualquer uma das formas desenvolvidas a partir da Equação 4.73. Os dois pontos de vista são complementares, e a capacidade de raciocinar em termos de ambos é útil para alcançar uma compreensão de como as máquinas operam.

Este capítulo tratou dos princípios básicos subjacentes à teoria das máquinas rotativas. Em si, ele é obviamente incompleto. Muitas questões permanecem sem respostas. Como aplicamos esses princípios à determinação das características das máquinas síncronas, de indução

e de corrente contínua? Quais são alguns dos problemas práticos que surgem com o uso de ferro e cobre e do isolamento nas máquinas reais? Quais são algumas das considerações econômicas e de engenharia que afetam as aplicações de máquinas elétricas? Quais são os fatores físicos que limitam as condições sob as quais uma máquina pode operar com sucesso? O Apêndice D discute alguns desses problemas. Em conjunto, o Capítulo 4 e o Apêndice D servem de introdução aos tratamentos mais detalhados das máquinas rotativas nos próximos capítulos.

## 4.12 PROBLEMAS

- 4.1** O rotor de um gerador síncrono de seis pólos está girando na velocidade mecânica de 1200 rpm.
- Expresse essa velocidade mecânica em radianos por segundo.
  - Qual é a frequência, em hertz e em radianos por segundo, da tensão gerada?
  - Que velocidade mecânica, em rotações por minuto, é necessária para gerar tensão na frequência de 50 Hz?
- 4.2** A tensão gerada em uma fase de um gerador síncrono trifásico a vazio é da forma  $v(t) = V_0 \cos \omega t$ . Escreva expressões para a tensão nas duas fases restantes.
- 4.3** Um motor trifásico é usado para acionar uma bomba. Observa-se (pelo uso de um estroboscópio) que a velocidade do motor diminui de 898 rpm, quando a bomba está sem carga, para 830 rpm, quando a bomba está com carga.
- Esse motor é síncrono ou de indução?
  - Estime a frequência da tensão de armadura aplicada em hertz.
  - Quantos pólos tem esse motor?
- 4.4** O objetivo deste problema é ilustrar como os enrolamentos de certas máquinas, isto é, máquinas CC, podem ser representadas aproximadamente por películas uniformes de corrente, sendo que o grau de correspondência melhora à medida que o enrolamento é distribuído entre um número maior de ranhuras ao longo da periferia da armadura. Com esse propósito, considere uma armadura com oito ranhuras distribuídas uniformemente ao longo de 360 graus elétricos (correspondendo a um par de pólos). O entreferro tem comprimento uniforme, as aberturas das ranhuras são muito pequenas, e a relutância do ferro é desprezível.
- Faça um desenho de 360 graus elétricos da armadura com suas ranhuras em forma desenvolvida, como na Fig. 4.23a, e numere as ranhuras de 1 a 8 da esquerda para a direita. O enrolamento consiste em oito bobinas de espira única, cada uma conduzindo uma corrente contínua de 10 A. Os lados de bobina colocados em qualquer uma das ranhuras 1 a 4 conduzem corrente para dentro do papel, e as colocadas em qualquer uma das ranhuras 5 a 8 conduzem corrente para fora do papel.
- Considere que todas as oito bobinas são colocadas com um lado na ranhura 1 e o outro, na ranhura 5. As demais ranhuras estão vazias. Desenhe a onda de FMM retangular produzida por essas ranhuras.
  - A seguir, considere que quatro bobinas têm um lado na ranhura 1 e o outro, na ranhura 5, ao passo que as quatro bobinas restantes têm um lado na ranhura 3 e o outro, na ranhura 7. Desenhe as componentes das ondas de FMM produzidas por cada grupo de bobinas, e sobreponha as componentes para obter a onda de FMM resultante.
  - Agora considere que duas bobinas são colocadas nas ranhuras 1 e 5, duas nas ranhuras 2 e 6, duas em 3 e 7, e duas em 4 e 8. Novamente, sobreponha as ondas retangulares componentes para produzir a onda resultante. Observe que a tarefa pode ser

sistematizada e simplificada verificando que a onda de FMM é simétrica em relação a seu eixo e apresenta um degrau em cada ranhura, diretamente proporcional ao número de ampères-condutores na ranhura.

- d. Seja agora que a armadura consista em 16 ranhuras por 360 graus elétricos com um lado de bobina por ranhura. Desenhe a onda de FMM resultante.
- 4.5** Uma máquina CA trifásica ligada em Y está operando inicialmente sob condições equilibradas quando um dos enrolamentos de fase torna-se um circuito aberto. Como não há conexão de neutro no enrolamento, isso exige que as correntes nos dois enrolamentos restantes tornem-se iguais e opostas. Sob essa condição, calcule os valores relativos das ondas resultantes de FMM progressivas positiva e negativa.
- 4.6** Qual é o efeito sobre as ondas girantes de FMM e de fluxo de um enrolamento trifásico produzidas por correntes trifásicas equilibradas se duas das conexões de fase são permutadas?
- 4.7** Em uma máquina bifásica equilibrada, os dois enrolamentos estão deslocados de 90 graus elétricos no espaço, e as correntes nos dois enrolamentos estão defasadas de 90 graus elétricos no tempo. Para essa máquina, desenvolva um raciocínio que leve à equação da onda de FMM girante, correspondente à Equação 4.39 (que foi deduzida para o caso de uma máquina trifásica).
- 4.8** Esse problema investiga as vantagens de encurtar o passo das bobinas de estator de uma máquina CA. A Fig. 4.43a mostra uma única bobina de passo pleno em uma máquina de dois pólos. A Fig. 4.43b mostra uma bobina de passo encurtado para a qual os lados da bobina estão afastados de  $\beta$  radianos, ao invés de  $\pi$  radianos ( $180^\circ$ ), como no caso da bobina de passo pleno.

Para uma distribuição de fluxo radial no entreferro da forma

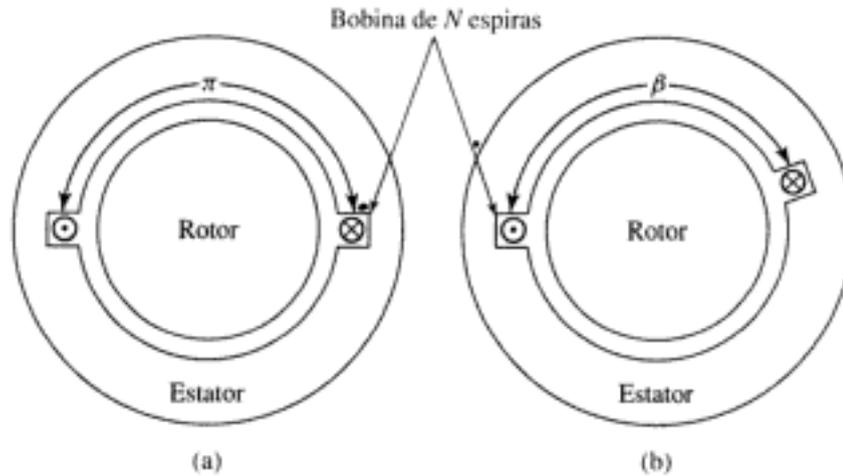
$$B_r = \sum_{n \text{ ímpar}} B_n \cos n\theta$$

onde  $n = 1$  corresponde à harmônica fundamental espacial,  $n = 3$  corresponde à terceira harmônica, e assim por diante, o fluxo concatenado de cada bobina é a integral de  $B_r$  sobre a superfície abrangida por aquela bobina. Assim, para a  $n$ -ésima harmônica espacial, a razão entre o fluxo concatenado máximo da bobina de passo encurtado e o da bobina de passo pleno é

$$\frac{\int_{-\beta/2}^{\beta/2} B_n \cos n\theta \, d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} B_n \cos n\theta \, d\theta} = \frac{\int_{-\beta/2}^{\beta/2} \cos n\theta \, d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos n\theta \, d\theta} = |\text{sen}(n\beta/2)|$$

É comum, por exemplo, encurtar o passo das bobinas de uma máquina CA em 30 graus elétricos ( $\beta = 5\pi/6 = 150^\circ$ ). Para  $n = 1, 3, 5$ , calcule a redução fracionária no fluxo concatenado devida ao encurtamento do passo.

- 4.9** Uma máquina síncrona de seis pólos e 60 Hz tem um enrolamento de rotor com um total de 138 espiras em série e um fator de enrolamento  $k_r = 0,935$ . O comprimento do rotor é 1,97 m, o raio do rotor é 58 cm e o comprimento do entreferro é igual a 3,15 cm.
- Qual é a velocidade nominal de operação em rpm?
  - Calcule a corrente no enrolamento do rotor que é necessária para se obter uma componente fundamental de pico de 1,23 T de densidade de fluxo no entreferro?
  - Calcule o fluxo correspondente por pólo.
- 4.10** Suponha que um enrolamento de fase da máquina síncrona do Problema 4.9 seja uma bobina de passo pleno, 11 espiras por par de pólos, com as bobinas conectadas em série para formar o enrolamento de fase. Se a máquina estiver operando na velo-



**FIGURA 4.43** Problema 4.8: (a) bobina de passo pleno e (b) bobina de passo encurtado.

cidade nominal e sob as condições de operação do Problema 4.9, calcule a tensão eficaz gerada por fase.

- 4.11** A máquina síncrona do Problema 4.9 tem um enrolamento trifásico com 45 espiras em série por fase e um fator de enrolamento de  $k_{enr} = 0,928$ . Para as condições de fluxo e velocidade nominal do Problema 4.9, calcule a tensão eficaz gerada por fase.
- 4.12** A máquina síncrona trifásica do Problema 4.9 deve ser transferida para uma aplicação onde é necessário que a frequência de operação seja reduzida de 60 para 50 Hz. Essa aplicação requer que, para as condições de operação consideradas no Problema 4.9, a tensão eficaz de linha gerada seja de 13,0 kV. Como resultado, os enrolamentos da armadura da máquina devem ser refeitos com um número diferente de espiras. Supondo um fator de enrolamento de  $k_{enr} = 0,928$ , calcule o número necessário de espiras em série por fase.
- 4.13** A Fig. 4.44 mostra um rotor de dois pólos que gira dentro de um estator uniforme que aloja uma bobina de 110 espiras. O rotor produz uma distribuição senoidal espacial de fluxo na superfície do estator, sendo que o valor de pico da onda de densidade de fluxo é igual a 0,85 T quando a corrente do rotor é 15 A. O circuito magnético é linear. O diâmetro interno do estator é 11 cm e seu comprimento axial é 0,17 m. O rotor é acionado a uma velocidade de 50 rotações por segundo.
- O rotor é excitado por uma corrente de 15 A. Tomando o tempo zero como sendo o instante em que o eixo do rotor está na vertical, encontre a expressão da tensão instantânea gerada na bobina, em circuito aberto, do estator.
  - O rotor é excitado agora por uma corrente alternada senoidal de 50 Hz cujo valor de pico é 15 A. Conseqüentemente, a corrente no rotor é invertida a cada meia revolução. Ela é sincronizada para estar em seu máximo quando o eixo do rotor está na vertical (isto é, quando fica alinhado com o eixo da bobina do estator). Tomando o tempo zero como sendo o instante em que o eixo do rotor está na vertical, encontre a expressão para a tensão instantânea gerada na bobina, em circuito aberto, do estator. Esse esquema é sugerido algumas vezes como sendo um gerador CC sem comutador. A idéia é de que se os semiciclos alternados da tensão alternada gerada na parte (a) forem invertidos pela inversão de polaridade do enrolamento de campo (rotor), então uma tensão pulsada CC será gerada no estator. Discuta se esse esquema irá ou não funcionar.
- 4.14** Um enrolamento trifásico de dois pólos é excitado por correntes trifásicas equilibradas de 60 Hz, descritas pelas Equações 4.23 a 4.25. Embora a distribuição de enrolamentos

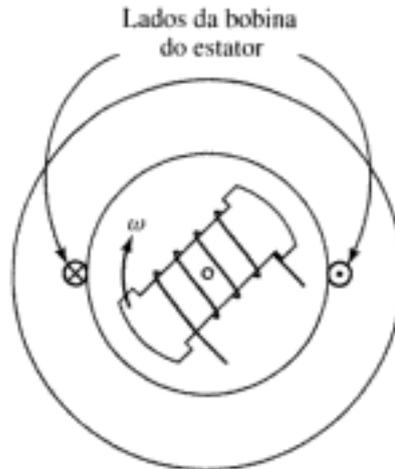


FIGURA 4.44 Gerador elementar do Problema 4.13.

tenha sido projetada para minimizar as harmônicas, ainda há uma certa quantidade de terceira e quinta harmônicas espaciais. Assim, a FMM da fase  $a$  pode ser escrita como

$$\mathcal{F}_a = i_a(A_1 \cos \theta_a + A_3 \cos 3\theta_a + A_5 \cos 5\theta_a)$$

Expressões similares podem ser escritas para as fases  $b$  (substituir  $\theta_a$  por  $\theta_a - 120^\circ$ ) e  $c$  (substituir  $\theta_a$  por  $\theta_a + 120^\circ$ ). Calcule a FMM total das três fases. Qual é a velocidade angular e o sentido de rotação de cada componente da FMM?

- 4.15** A placa de um gerador CC indica que ele irá produzir uma tensão de saída de 24 V CC quando for operado a uma velocidade de 1200 rpm. De quanto o número de espiras da armadura deve ser alterado de modo que, para o mesmo fluxo de campo por pólo, o gerador produza uma tensão de saída de 18 V CC a uma velocidade de 1400 rpm?
- 4.16** A armadura de um gerador CC de dois pólos tem um total de 320 espiras em série. Quando operado a uma velocidade de 1800 rpm, a tensão gerada, em circuito aberto, é 240 V. Calcule  $\Phi_p$ , o fluxo de entreferro por pólo.
- 4.17** O projeto de um motor de indução trifásico de quatro pólos, 230 V e 60 Hz, deve se basear em um núcleo de estator de 21 cm de comprimento e 9,52 cm de diâmetro interno. A distribuição de enrolamento escolhida para o estator tem um fator de enrolamento de  $k_{enr} = 0,925$ . A armadura deve ser ligada em Y e, portanto, a tensão nominal de fase será  $230/\sqrt{3}$  V.
- O projetista deve selecionar o número de espiras da armadura de modo que a densidade de fluxo na máquina seja elevada o suficiente para fazer uso eficiente do material magnético sem ser demasiadamente elevada resultando uma saturação excessiva. Para atingir esse objetivo, a máquina deve ser projetada com um componente fundamental de densidade de fluxo de pico de 1,25 T no entreferro. Calcule o número necessário de espiras em série por fase.
  - Para um entreferro de 0,3 mm de comprimento, calcule a indutância própria de uma fase de armadura baseando-se no resultado da parte (a) e usando as fórmulas de indutância do Apêndice B. Despreze a relutância do ferro do rotor e do estator e a indutância de dispersão da armadura.
- 4.18** Um gerador síncrono trifásico de dois pólos e 60 Hz, para ser usado em laboratório, tem um raio de rotor de 5,71 cm, um comprimento de rotor de 18,0 cm e um comprimento de entreferro de 0,25 mm. O enrolamento de campo do rotor consiste em 264 espiras com um fator de enrolamento de  $k_r = 0,95$ . O enrolamento de armadura, ligado em Y, consiste em 45 espiras por fase, com um fator de enrolamento de  $k_{enr} = 0,93$ .

- Calcule o fluxo por pólo e a componente fundamental da densidade de fluxo de pico no entreferro do qual resultará uma tensão de armadura, em circuito aberto, de 60 Hz e uma tensão eficaz de fase de 120 V por fase.
- Calcule a corrente CC de campo necessária para se obter as condições de operação da parte (a).
- Calcule o valor de pico da indutância mútua entre o enrolamento de campo e o enrolamento de fase da armadura.



**4.19** Escreva um *script* de MATLAB que calcula o número total de espiras em série dos enrolamentos de campo e de armadura necessárias para um motor síncrono trifásico, ligado em Y. As seguintes informações são dadas:

Raio do rotor, $R$ (metros)	Comprimento do rotor, $l$ (metros)
Comprimento do entreferro, $g$ (metros)	Número de pólos, pólos
Frequência elétrica, $f_c$	Fundamental da densidade de fluxo de pico no entreferro, $B_{\text{pico}}$
Fator de enrolamento do campo, $k_f$	Fator de enrolamento da armadura, $k_{\text{car}}$
Tensão de linha eficaz nominal de terminal e em circuito aberto, $V_{\text{nominal}}$	
Corrente de campo com tensão nominal de terminal, em circuito aberto, $I_f$	

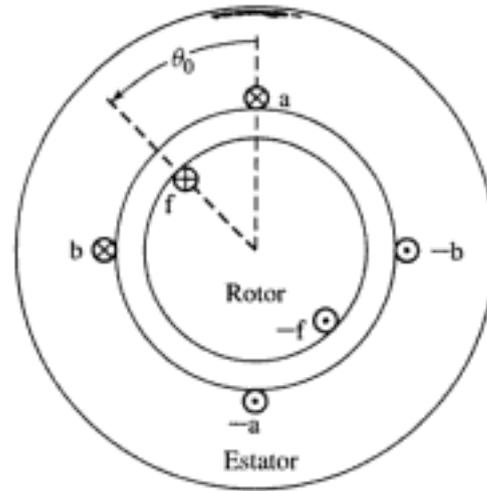
- 4.20** Um gerador síncrono de quatro pólos e 60 Hz tem um comprimento de rotor de 5,2 m, um diâmetro de 1,24 m e um comprimento de entreferro de 5,9 cm. O enrolamento do rotor consiste em uma conexão em série de 63 espiras por pólo com um fator de enrolamento de  $k_f = 0,91$ . O valor de pico da fundamental da densidade de fluxo no entreferro está limitada a 1,1 T e a corrente de enrolamento do rotor, a 2700 A. Calcule os valores máximos do conjugado (N.m) e da saída de potência (MW) que podem ser fornecidos por essa máquina.
- 4.21** Razões de ordem térmica limitam a corrente de campo do gerador síncrono do Problema 4.18, usado em laboratório, a um valor máximo de 2,4 A. Se a componente fundamental de densidade de fluxo de pico no entreferro estiver limitada a um máximo de 1,3 T, calcule os valores máximos do conjugado (N.m) e da potência (kW) que podem ser produzidos por esse gerador.
- 4.22** A Fig. 4.45 mostra em seção transversal uma máquina que tem um enrolamento de rotor  $f$  e dois enrolamentos idênticos de estator  $a$  e  $b$  cujos eixos estão em quadratura. A indutância própria de cada enrolamento de estator é  $L_{aa}$  e do rotor é  $L_{ff}$ . O entreferro é uniforme. A indutância mútua entre um par de enrolamentos do estator depende da posição angular do rotor e pode-se assumir como sendo da forma

$$M_{af} = M \cos \theta_0 \quad M_{bf} = M \sin \theta_0$$

onde  $M$  é o valor máximo da indutância mútua. A resistência de cada enrolamento de estator é  $R_s$ .

- Deduza uma expressão geral para o conjugado  $T$  em termos do ângulo  $\theta_0$ , dos parâmetros de indutância e das correntes instantâneas  $i_a$ ,  $i_b$  e  $i_f$ . Essa expressão aplica-se quando o rotor está em repouso? Quando ele está girando?
- Suponha que o rotor esteja estacionário e correntes contínuas constantes  $I_a = I_0$ ,  $I_b = I_0$  e  $I_f = 2I_0$  sejam aplicadas aos enrolamentos nos sentidos indicados pelos pontos e cruzeiros na Fig. 4.45. Se for permitido que o rotor entre em movimento, irá ele girar continuamente ou tenderá a entrar em repouso? Neste último caso, em que valor de  $\theta_0$ ?
- O enrolamento de rotor é excitado agora por uma corrente contínua constante  $I_f$  ao passo que os enrolamentos do estator conduzem correntes bifásicas equilibradas

$$i_a = \sqrt{2}I_a \cos \omega t \quad i_b = \sqrt{2}I_a \sin \omega t$$



**FIGURA 4.45** Máquina síncrona elementar bifásica de rotor cilíndrico do Problema 4.22.

O rotor está girando na velocidade síncrona de modo que sua posição angular instantânea é dada por  $\theta_0 = \omega t - \delta$ , onde  $\delta$  é o ângulo de fase que descreve a posição do rotor em  $t = 0$ . Trata-se de uma máquina elementar síncrona bifásica. Deduza uma expressão para o conjugado sob essas condições.

d. Para as condições da parte (c), deduza uma expressão para as tensões instantâneas de terminal das fases a e b do estator.

**4.23** Considere a máquina síncrona bifásica do Problema 4.22. Deduza uma expressão para o conjugado que atua sobre o rotor se esse estiver girando a uma velocidade angular constante, tal que  $\theta_0 = \omega t + \delta$ , e as correntes tornam-se desequilibradas de modo que

$$i_a = \sqrt{2}I_a \cos \omega t \quad i_b = \sqrt{2}(I_a + I') \sin \omega t$$

Quais são os conjugados instantâneo e médio, no tempo, sob essas condições?

**4.24** A Fig. 4.46 mostra, em seção transversal esquemática, uma máquina síncrona de pólos salientes que tem dois enrolamentos de estator idênticos a e b sobre um núcleo de chapas de aço. O rotor de pólos salientes é feito de aço e tem um enrolamento de campo f conectado aos anéis coletores.

Devido ao entreferro não uniforme, as indutâncias próprias e mútua são funções da posição angular  $\theta_0$  do rotor. Sua variação com  $\theta_0$  pode ser aproximada por:

$$L_{aa} = L_0 + L_2 \cos 2\theta_0 \quad L_{bb} = L_0 - L_2 \cos 2\theta_0 \quad M_{ab} = L_2 \sin 2\theta_0$$

onde  $L_0$  e  $L_2$  são constantes positivas. A indutância mútua entre os enrolamentos do rotor e do estator são funções de  $\theta_0$

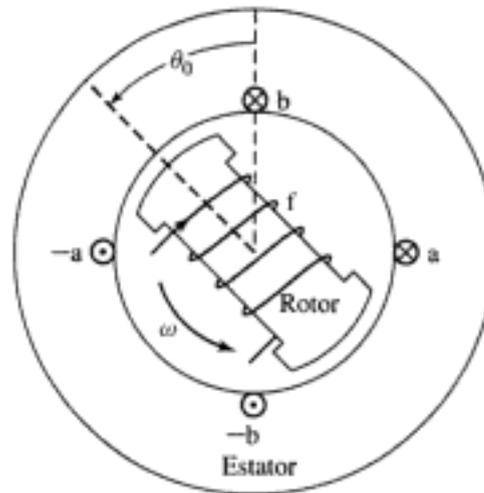
$$M_{af} = M \cos \theta_0 \quad M_{bf} = M \sin \theta_0$$

onde  $M$  é também uma constante positiva. A indutância própria do enrolamento de campo,  $L_{ff}$ , é constante, independente de  $\theta_0$ .

Considere a condição de operação em que o enrolamento de campo é excitado por corrente contínua  $I_f$  e os enrolamentos do estator são conectados a uma fonte de tensão bifásica equilibrada de frequência  $\omega$ . Com o rotor girando na velocidade síncrona, sua posição será dada por  $\theta_0 = \omega t$ .

Com essa condição de operação, as correntes do estator serão da forma

$$i_a = \sqrt{2}I_a \cos (\omega t + \delta) \quad i_b = \sqrt{2}I_a \sin (\omega t + \delta)$$



**FIGURA 4.46** Máquina síncrona esquemática bifásica de pólos salientes do Problema 4.24.

- a. Deduza uma expressão para o conjugado eletromagnético que atua sobre o rotor.
  - b. A máquina pode ser operada como um motor e/ou um gerador? Explique.
  - c. A máquina continuará a funcionar se a corrente de campo  $I_f$  for reduzida a zero? Fundamente sua resposta com uma expressão para o conjugado e uma explicação de por que tal operação é ou não possível.
- 4.25** Um motor trifásico CA linear tem um enrolamento de armadura de comprimento de onda igual a 25 cm. Um conjunto equilibrado trifásico de correntes à frequência de 100 Hz é aplicado à armadura.
- a. Calcule a velocidade linear da onda de FMM de armadura.
  - b. Para o caso de um motor síncrono, calcule a velocidade linear do rotor.
  - c. Para o caso de um motor de indução operando com um escorregamento de 0,045, calcule a velocidade linear do rotor.
- 4.26** A armadura do motor linear do Problema 4.25 tem um comprimento ativo total de 7 comprimentos de onda, com um total de 280 espiras por fase e um fator de enrolamento  $k_{enr} = 0,91$ . Para um comprimento de entreferro de 0,93 cm, calcule o valor eficaz das correntes trifásicas equilibradas, que devem ser fornecidas à armadura, para se obter uma componente fundamental espacial de densidade de fluxo de pico de 1,45 T.
- 4.27** Um motor síncrono linear bifásico de imã permanente tem um comprimento de entreferro de 1,0 mm, um comprimento de onda de 12 cm e uma largura de pólo de 4 cm. O rotor tem uma extensão de 5 comprimentos de onda. Os imãs permanentes no rotor estão dispostos de modo a produzir uma distribuição de fluxo magnético no entreferro que é uniforme sobre a largura do pólo mas que varia senoidalmente no espaço segundo a direção do movimento do rotor. A densidade de fluxo desse fluxo de entreferro é 0,97 T.
- a. Calcule o fluxo líquido por pólo.
  - b. Cada fase da armadura consiste em 10 espiras por pólo, com todos os pólos ligados em série. Supondo que o enrolamento da armadura se estenda por muitos comprimentos de onda além de ambas as extremidades do rotor, calcule o fluxo concatenado do enrolamento da armadura.
  - c. Se o rotor estiver se deslocando a uma velocidade de 6,3 m/s, calcule a tensão eficaz induzida no enrolamento da armadura.

## Máquinas Síncronas

Como vimos na Seção 4.2.1, uma máquina síncrona, em condições de regime permanente, é uma máquina CA cuja velocidade é proporcional à frequência da corrente de sua armadura. O rotor, juntamente com o campo magnético criado pela corrente CC do campo do rotor, gira na mesma velocidade ou em sincronismo com o campo magnético girante, produzido pelas correntes de armadura, resultando um conjugado constante. Uma imagem elementar de como uma máquina síncrona funciona foi dada na Seção 4.2.1, com ênfase na produção de conjugado em termos das interações entre os campos magnéticos da máquina.

Métodos analíticos para examinar o desempenho, em regime permanente, das máquinas síncronas polifásicas serão desenvolvidos neste capítulo. Uma consideração inicial será dada às máquinas de rotor cilíndrico; os efeitos dos pólos salientes serão discutidos nas Seções 5.6 e 5.7.

### 5.1 INTRODUÇÃO ÀS MÁQUINAS SÍNCRONAS POLIFÁSICAS

Como indicado na Seção 4.2.1, uma máquina síncrona é aquela na qual uma corrente alternada flui no enrolamento de armadura e uma excitação CC é fornecida ao enrolamento de campo. O enrolamento de campo está quase invariavelmente no estator e usualmente é trifásico, como foi discutido no Capítulo 4. O enrolamento de campo está no rotor. A construção de um rotor cilíndrico, mostrada nas Figs. 4.10 e 4.11, é usada para turbogeradores de dois e quatro pólos. A construção com pólos salientes, mostrada na Fig. 4.9, é melhor adaptada aos geradores multipolares hidrelétricos de baixa velocidade, e à maioria dos motores síncronos. A potência CC necessária à excitação – aproximadamente um a alguns poucos por cento dos valores nominais da máquina síncrona – é fornecida pelo *sistema de excitação*.

Em máquinas mais antigas, a corrente de excitação era fornecida tipicamente por meio de *anéis coletores* (ou *deslizantes*) a partir de uma máquina CC, conhecida como *excitatriz* que freqüentemente era montada no mesmo eixo que a máquina síncrona. Em sistemas mais modernos, a excitação é fornecida a partir de excitatrizes CA e retificadores de estado sólido (tanto pontes simples a diodos como retificadores de fase controlada). Em alguns casos, a retificação ocorre na parte estacionária da máquina, e a corrente de excitação é fornecida ao rotor por meio de anéis coletores. Em outros sistemas, conhecidos como *sistemas de excitação sem escovas*, o alternador da excitatriz CA está no rotor, assim como o sistema de retificação, e a corrente é fornecida diretamente ao enrolamento de campo sem a necessidade de anéis coletores. Um sistema desse tipo está descrito no Apêndice D.

Como foi discutido no Capítulo 4, um gerador síncrono simples, quando fornece potência a uma impedância de carga, está atuando como uma fonte de tensão cuja frequência é determinada pela velocidade do seu acionador mecânico primário (ou *máquina motriz*), como pode ser visto na Equação 4.2. Das Equações 4.42, 4.44 e 4.50, a amplitude da tensão gerada é proporcional à frequência e à corrente de campo. A corrente e o fator de potência são então determinados pela excitação do campo do gerador e pelas impedâncias do gerador e da carga.

Os geradores síncronos podem facilmente operar em paralelo. De fato, os sistemas de fornecimento de energia elétrica dos países industrializados têm tipicamente dezenas, ou mesmo centenas, deles operando em paralelo. São interligados por milhares de quilômetros de linhas de transmissão e fornecem energia elétrica a cargas espalhadas por áreas de muitos milhares de quilômetros quadrados. Esses sistemas imensos cresceram mesmo que tenha sido necessário projetá-los de modo que o sincronismo seja mantido depois da ocorrência de perturbações ou problemas, sejam técnicos ou administrativos, os quais devem ser resolvidos para se poder coordenar a operação de tais sistemas complexos, constituídos por máquinas e pessoas. As principais razões, para o uso desses sistemas interligados, estão na confiabilidade de manutenção e na economia de investimentos, obtida na planta e nos custos de operação.

Quando um gerador síncrono é conectado a um sistema interligado de grande porte, contendo muitos outros geradores síncronos, a tensão e a frequência em seus terminais de armadura são fixadas de modo substancial pelo sistema. Como resultado, as correntes de armadura produzirão uma componente do campo magnético de entreferro, que gira na velocidade síncrona (Equação 4.41), determinada pela frequência elétrica  $f_c$  do sistema. Como foi discutido no Capítulo 4, para produzir um conjugado eletromecânico unidirecional e constante, os campos do estator e do rotor devem girar na mesma velocidade e, portanto, o rotor deve estar girando precisamente na velocidade síncrona. Como um gerador qualquer individual representa uma pequena fração da geração total de todo o sistema, ele não pode afetar de forma significativa a tensão ou a frequência do sistema. Assim, freqüentemente é útil, ao se estudar o comportamento de um gerador ou de um grupo deles, representar o restante do sistema como sendo uma fonte de frequência e tensão constantes, comumente referida como *barramento infinito*.

Muitas características importantes do comportamento da máquina síncrona podem ser compreendidas a partir da análise de uma única máquina conectada a um barramento infinito. O comportamento em regime permanente de uma máquina síncrona pode ser visualizado em termos da equação de conjugado. Da Equação 4.81, fazendo alterações de notação apropriadas à teoria das máquinas síncronas, vem

$$T = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\text{pólos}}{2} \right)^2 \Phi_R F_f \text{sen } \delta_{RF} \quad (5.1)$$

onde

$\Phi_R$  = fluxo resultante por pólo no entreferro

$F_f$  = FMM do enrolamento CC de campo\*

$\delta_{RF}$  = ângulo de fase elétrica entre os eixos magnéticos de  $\Phi_R$  e  $F_f$

O sinal negativo da Equação 4.81 foi omitido, mas fica subentendido que o conjugado eletromecânico atua segundo um sentido tal que os campos interativos são alinhados entre si. Em uma operação normal, em regime permanente, o conjugado eletromecânico contrabalança o conjugado mecânico aplicado ao eixo. Em um gerador, o conjugado da força motriz do aciona-

\* N. de T.: Lembrando, nas equações, os subscritos referentes ao campo serão indicados pela letra *f* de *field* (campo, em inglês), e os referentes ao fluxo de dispersão, pela letra *l* de *leakage* (dispersão, em inglês).

dor mecânico primário atua no sentido de rotação do rotor, impulsionando a onda de FMM do rotor à frente do fluxo de entreferro resultante. O conjugado eletromecânico opõe-se então à rotação. A situação oposta ocorre em um motor síncrono, em que o conjugado eletromecânico atua no sentido da rotação, opondo-se ao conjugado resistente da carga mecânica sobre o eixo.

Variações no conjugado eletromecânico resultam em variações correspondentes no *ângulo de conjugado*,  $\delta_{RF}$ , como se vê na Equação 5.1. Essa relação está mostrada na forma de uma *curva conjugado X ângulo* na Fig. 5.1, onde a corrente de campo (FMM de rotor) e o fluxo resultante no entreferro são considerados constantes. Valores positivos de conjugado representam ação geradora, correspondendo a valores positivos de  $\delta_{RF}$  para os quais a onda de FMM do rotor está adiantada em relação ao fluxo resultante de entreferro.

À medida que aumenta o conjugado da força motriz do acionador mecânico, o valor de  $\delta_{RF}$  deve crescer até que o conjugado eletromecânico contrabalance o conjugado do eixo. Na verdade, o processo de ajustamento é dinâmico exigindo uma variação na velocidade mecânica do rotor, que tipicamente se faz acompanhar de uma oscilação mecânica amortecida do rotor em torno de seu novo ângulo de conjugado de regime permanente. Essa oscilação é referida como *transitório de ajustamento*.\* Em uma máquina real submetida a esse transitório, podem ocorrer também algumas alterações na amplitude da densidade do fluxo resultante e na amplitude da onda de FMM do enrolamento de campo. Elas são devidas a diversos fatores tais como os efeitos de saturação, o efeito da impedância de dispersão da máquina, a resposta do sistema de excitação da máquina, e assim por diante. Para enfatizar os princípios fundamentais da operação das máquinas síncronas, tais efeitos serão desprezados na presente discussão.

No laboratório, após uma alteração de carga, o ajustamento do rotor a uma nova posição angular pode ser observado experimentalmente quando o rotor da máquina é examinado com uma luz estroboscópica, disparada a partir da tensão aplicada à armadura (tendo-se assim uma frequência de lampejo que faz com que o rotor dê a impressão de estar estacionário, quando de fato ele está girando com sua frequência síncrona normal). Alternativamente, sensores eletrônicos podem ser usados para determinar a posição do eixo em relação ao quadro de referência síncrono, associado com a tensão do estator. O sinal resultante pode ser exibido em um osciloscópio ou armazenado em um sistema de aquisição de dados.

Como pode ser visto na Fig. 5.1, um aumento no conjugado da força motriz resultará em um aumento correspondente no ângulo do conjugado. Quando  $\delta_{RF}$  torna-se igual a  $90^\circ$ , o conjugado eletromecânico alcança o seu valor máximo, sendo conhecido como *conjugado*

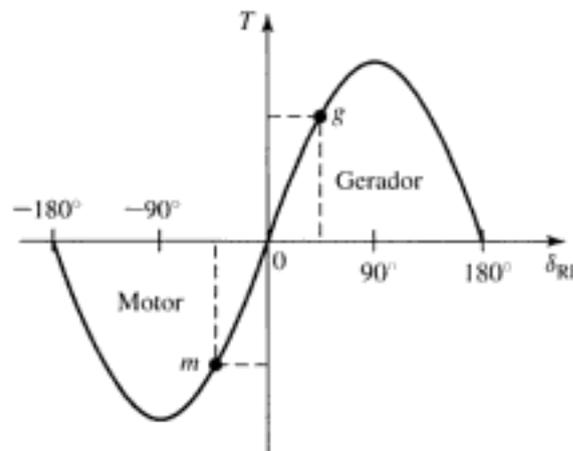


FIGURA 5.1 Característica de conjugado x ângulo.

\* N. de T.: *Hunting transient*, em inglês.

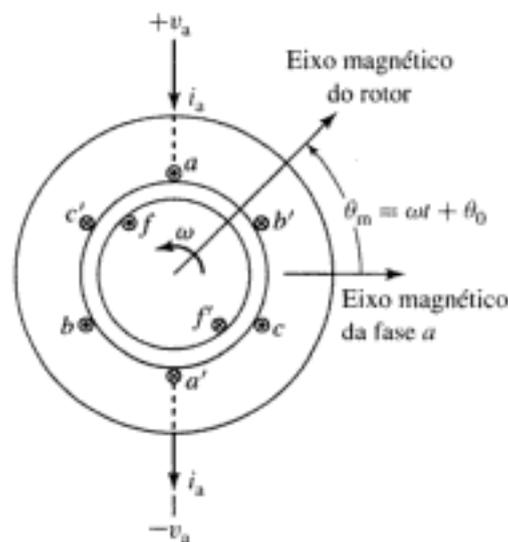
*máximo em sincronismo.*\* Qualquer aumento adicional de conjugado da força motriz não pode ser contrabalançado por um aumento correspondente no conjugado eletromecânico síncrono. Com isso, resulta que o sincronismo não é mais mantido e o rotor é acelerado. Esse fenômeno é conhecido como *perda de sincronismo*. Nessas condições, usualmente o gerador é desligado do sistema elétrico externo pela operação automática de disjuntores e rapidamente a força motriz é desativada para evitar velocidades perigosamente elevadas. Observe, a partir da Equação 5.1, que o valor do conjugado máximo em sincronismo pode ser aumentado elevando-se tanto a corrente de campo como o fluxo resultante de entreferro. No entanto, isso não pode ser feito de forma ilimitada. A corrente de campo é limitada pela capacidade de refrigeração do enrolamento de campo, e o fluxo de entreferro é limitado pela saturação do ferro da máquina.

Como vimos na Fig. 5.1, uma situação similar ocorre em um motor síncrono para o qual um aumento de conjugado de carga no eixo, além do conjugado máximo em sincronismo, fará com que o rotor perca o sincronismo e, dessa forma, desacelere. Como um motor síncrono desenvolve conjugado apenas na velocidade síncrona, a sua partida não pode ser feita simplesmente aplicando tensões de armadura com a frequência nominal. Em alguns casos, uma estrutura de gaiola de esquilo é incluída no rotor. Dessa forma, o motor pode arrancar como se fosse um motor de indução e ser sincronizado quando estiver próximo da velocidade síncrona.

## 5.2 INDUTÂNCIAS DAS MÁQUINAS SÍNCRONAS; CIRCUITOS EQUIVALENTES

Na Seção 5.1, as características do ângulo de conjugado das máquinas síncronas foram descritas em termos dos fluxos que interagem no entreferro e das ondas de FMM. O nosso propósito agora é deduzir um circuito equivalente que represente as características de volts-ampères dos terminais em regime permanente.

O esboço de um corte de uma máquina síncrona trifásica de rotor cilíndrico está mostrado esquematicamente na Fig. 5.2. A figura mostra uma máquina de dois pólos os quais,



**FIGURA 5.2** Diagrama esquemático de uma máquina síncrona trifásica de rotor cilíndrico e dois pólos.

\* N. de T.: *Pull-out torque*, em inglês.

alternativamente, podem ser considerados como sendo os dois pólos de uma máquina de múltiplos pólos. O enrolamento trifásico da armadura no estator é do mesmo tipo que foi usado na discussão dos campos magnéticos girantes da Seção 4.5. As bobinas  $aa'$ ,  $bb'$  e  $cc'$  representam enrolamentos distribuídos que produzem ondas senoidais de FMM e de densidade de fluxo, no entreferro. Os sentidos de referência das correntes são mostrados por pontos e cruces. O enrolamento de campo  $ff$  no rotor representa também um enrolamento distribuído que produz uma onda senoidal de FMM e de densidade de fluxo centrada em seu eixo magnético girando com o rotor.

Quando os fluxos concatenados das fases de armadura  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e do enrolamento de campo  $f$  são expressos em termos de indutâncias e correntes como segue,

$$\lambda_a = \mathcal{L}_{aa}i_a + \mathcal{L}_{ab}i_b + \mathcal{L}_{ac}i_c + \mathcal{L}_{af}i_f \quad (5.2)$$

$$\lambda_b = \mathcal{L}_{ba}i_a + \mathcal{L}_{bb}i_b + \mathcal{L}_{bc}i_c + \mathcal{L}_{bf}i_f \quad (5.3)$$

$$\lambda_c = \mathcal{L}_{ca}i_a + \mathcal{L}_{cb}i_b + \mathcal{L}_{cc}i_c + \mathcal{L}_{cf}i_f \quad (5.4)$$

$$\lambda_f = \mathcal{L}_{fa}i_a + \mathcal{L}_{fb}i_b + \mathcal{L}_{fc}i_c + \mathcal{L}_{ff}i_f \quad (5.5)$$

então as tensões induzidas podem ser obtidas da lei de Faraday. Aqui, dois subscritos iguais indicam uma indutância própria e dois subscritos distintos representam uma indutância mútua entre os dois enrolamentos. A letra  $\mathcal{L}$  é usada para indicar que, em geral, ambas as indutâncias próprias e mútuas de uma máquina trifásica podem variar com o ângulo do rotor. Isso é visto, por exemplo, no Apêndice C.2, onde os efeitos dos pólos salientes são analisados.

Antes de prosseguirmos, é útil investigar a natureza das várias indutâncias. Cada uma dessas indutâncias pode ser expressa em termos de constantes que podem ser calculadas a partir dos dados de projeto ou medidos por meio de ensaios feitos em uma máquina real.

### 5.2.1 Indutância Própria do Rotor

Com um estator cilíndrico, a indutância própria do enrolamento de campo não depende da posição do rotor  $\theta_m$ . Nesse caso, os efeitos das harmônicas devidos às aberturas das ranhuras do estator são desprezados.

Assim,

$$\mathcal{L}_{ff} = L_{ff} = L_{f\phi} + L_{\sigma} \quad (5.6)$$

onde o  $L$  em itálico é usado para indicar uma indutância que não depende de  $\theta_m$ . A componente  $L_{f\phi}$  corresponde àquela porção de  $\mathcal{L}_{ff}$  devida à componente fundamental espacial de fluxo de entreferro. Essa componente pode ser calculada a partir das dimensões do entreferro e dos dados de enrolamento, como se mostra no Apêndice B. A componente adicional  $L_{\sigma}$  é responsável pelo fluxo de dispersão do enrolamento de campo.

Sob condições de transitórios ou de desequilíbrio, os fluxos concatenados dos enrolamentos, Equação 5.5, variam com o tempo e as tensões induzidas nos circuitos do rotor têm um efeito importante sobre o desempenho da máquina. No entanto, com correntes trifásicas de armadura, o campo magnético de amplitude constante das correntes de armadura giram em sincronismo com o rotor. Assim, os fluxos concatenados produzidos pelas correntes de armadura não variam com o tempo e, portanto, a tensão induzida no enrolamento de campo é zero. Com uma tensão CC constante  $V_f$  aplicada aos terminais do enrolamento de campo, a corrente contínua de campo  $I_f$  é dada pela lei de Ohm,  $I_f = V_f/R_f$ .

### 5.2.2 Indutâncias Mútuas entre Estator e Rotor

As indutâncias mútuas entre estator e rotor variam periodicamente com  $\theta_m$ , que é o ângulo elétrico entre o eixo magnético do enrolamento de campo e o da fase  $a$ , como está mostrado na Fig. 5.2 e como foi definido pela Equação 4.54. Supondo que a FMM espacial e a distribuição de fluxo no entreferro sejam senoidais, a indutância mútua entre o enrolamento de campo  $f$  e a fase  $a$  varia proporcionalmente a  $\theta_{me}$ . Assim,

$$\mathcal{L}_{af} = \mathcal{L}_{fa} = L_{af} \cos \theta_{me} \quad (5.7)$$

Expressões similares aplicam-se às fases  $b$  e  $c$ , com  $\theta_{me}$  substituído por  $\theta_{me} - 120^\circ$  e  $\theta_{me} + 120^\circ$ , respectivamente. Aqui, a atenção será dada à fase  $a$ . A indutância  $L_{af}$  pode ser calculada como se discute no Apêndice B.

Com o rotor girando na velocidade síncrona  $\omega_s$  (Equação 4.40), o ângulo do rotor irá variar segundo

$$\theta_m = \omega_s t + \delta_0 \quad (5.8)$$

onde  $\delta_0$  é o ângulo do rotor no tempo  $t = 0$ . Da Equação 4.54, tem-se

$$\theta_{me} = \left( \frac{\text{pólos}}{2} \right) \theta_m = \omega_e t + \delta_{e0} \quad (5.9)$$

Aqui,  $\omega_e = (\text{pólos}/2)\omega_s$  é a frequência elétrica e  $\delta_{e0}$  é o ângulo elétrico do rotor no tempo  $t = 0$ .

Assim, substituindo na Equação 5.7, obtém-se

$$\mathcal{L}_{af} = \mathcal{L}_{fa} = L_{af} \cos (\omega_e t + \delta_{e0}) \quad (5.10)$$

### 5.2.3 Indutâncias do Estator; Indutância Síncrona

Em um rotor cilíndrico, a geometria do entreferro não dependerá de  $\theta_m$  se os efeitos das ranhuras do rotor forem desprezados. Então, as indutâncias próprias do estator serão constantes. Assim,

$$\mathcal{L}_{aa} = \mathcal{L}_{bb} = \mathcal{L}_{cc} = L_{aa} = L_{aa0} + L_{al} \quad (5.11)$$

onde  $L_{aa0}$  é a componente de indutância própria devida ao fluxo fundamental espacial de entreferro (Apêndice B) e  $L_{al}$  é a componente adicional devida ao fluxo dispersivo de armadura (veja a Seção 4.10).

As indutâncias mútuas de armadura, fase-fase, podem ser encontradas supondo-se que a indutância mútua dependa exclusivamente do fluxo fundamental espacial de entreferro.<sup>1</sup> Da Equação B.28 do Apêndice B, vemos que a indutância mútua no entreferro de dois enrolamentos idênticos deslocados de  $\alpha$  graus elétricos é igual à componente de entreferro de suas indutâncias próprias multiplicadas por  $\cos \alpha$ . Assim, como as fases de armadura estão deslocadas de  $120^\circ$  graus elétricos e como  $(\pm 120^\circ) = -\frac{1}{2}$ , as indutâncias mútuas entre as fases de armadura são iguais e dadas por

$$\mathcal{L}_{ab} = \mathcal{L}_{ba} = \mathcal{L}_{ac} = \mathcal{L}_{ca} = \mathcal{L}_{bc} = \mathcal{L}_{cb} = -\frac{1}{2} L_{aa0} \quad (5.12)$$

<sup>1</sup> Como geralmente os enrolamentos de armadura das máquinas reais são construídos com sobreposição de fases (isto é, porções de enrolamentos adjacentes compartilham as mesmas ranhuras), há uma componente adicional de indutância mútua entre as fases que é devida ao fluxo de dispersão na ranhura. Essa componente é relativamente pequena e é desprezada na maioria das análises.

Substituindo as Equações 5.11 e 5.12, das indutâncias próprias e mútuas, na expressão do fluxo concatenado da fase  $a$  (Equação 5.2), obtém-se

$$\lambda_a = (L_{aa0} + L_{al})i_a - \frac{1}{2}L_{aa0}(i_b + i_c) + \mathcal{L}_{af}i_f \quad (5.13)$$

Com correntes de armadura trifásicas em equilíbrio (veja a Fig. 4.30 e as Equações 4.23 a 4.25), tem-se

$$i_a + i_b + i_c = 0 \quad (5.14)$$

$$i_b + i_c = -i_a \quad (5.15)$$

A substituição da Equação 5.15 na Equação 5.13 dá

$$\begin{aligned} \lambda_a &= (L_{aa0} + L_{al})i_a + \frac{1}{2}L_{aa0}i_a + \mathcal{L}_{af}i_f \\ &= \left(\frac{3}{2}L_{aa0} + L_{al}\right)i_a + \mathcal{L}_{af}i_f \end{aligned} \quad (5.16)$$

É útil definir a *indutância síncrona*  $L_s$  como

$$L_s = \frac{3}{2}L_{aa0} + L_{al} \quad (5.17)$$

e, assim,

$$\lambda_a = L_s i_a + \mathcal{L}_{af} i_f \quad (5.18)$$

Observe que a indutância síncrona  $L_s$  é a *indutância efetiva vista pela fase  $a$  quando a máquina está funcionando em regime permanente e condições trifásicas equilibradas*. Ela é constituída por três componentes. A primeira,  $L_{aa0}$ , é devida à componente fundamental espacial do fluxo concatenado próprio da fase  $a$  no entreferro. A segunda,  $L_{al}$ , conhecida como *indutância de dispersão*, é devida à componente de dispersão do fluxo concatenado da fase  $a$ . A terceira componente,  $\frac{1}{2}L_{aa0}$ , é devida aos fluxos concatenados da componente fundamental espacial do fluxo de entreferro produzido pelas correntes nas fases  $b$  e  $c$ . Sob condições trifásicas equilibradas, as correntes das fases  $b$  e  $c$  estão relacionadas com a corrente da fase  $a$  segundo a Equação 5.15. Assim, a indutância síncrona é uma indutância aparente no sentido de que ela leva em consideração o fluxo concatenado da fase  $a$  em termos da corrente da fase  $a$ , mesmo que uma parte desse fluxo concatenado seja devido às correntes das fases  $b$  e  $c$ . Assim, embora a indutância síncrona apareça como indutância própria na Equação 5.18, ela não se limita apenas à indutância própria da fase  $a$ .

O significado da indutância síncrona pode ser apreciado mais profundamente referindo-se à discussão sobre campos magnéticos girantes da Seção 4.5.2, onde foi mostrado que, sob condições de equilíbrio trifásico, as correntes de armadura criam uma onda de fluxo magnético girante no entreferro com módulo igual a  $\frac{3}{2}$  vezes o módulo do fluxo devido apenas à fase  $a$ , sendo que a componente adicional é devida às correntes das fases  $b$  e  $c$ . Isso corresponde diretamente à componente  $\frac{3}{2}L_{aa0}$  da indutância síncrona da Equação 5.17. Essa componente da indutância síncrona leva em consideração a componente fundamental espacial total do fluxo concatenado da fase  $a$  no entreferro. Esse fluxo é produzido pelas três correntes de armadura em condições trifásicas equilibradas.

## 5.2.4 Circuito Equivalente

A tensão nos terminais da fase  $a$  é a soma da queda de tensão  $R_a i_a$  na resistência da armadura e da tensão induzida. A tensão  $e_{af}$  induzida pelo fluxo do enrolamento de campo (frequentemente referida como a *tensão gerada* ou *tensão interna*) pode ser obtida da derivada, em re-

lação ao tempo, da Equação 5.18 na qual a corrente de armadura  $i_a$  é igual a zero. Com  $I_f$  sendo a excitação CC do enrolamento de campo, a substituição da Equação 5.10 dá

$$e_{af} = \frac{d}{dt} (\mathcal{L}_{af} i_f) = -\omega_e L_{af} I_f \text{sen}(\omega_e t + \delta_{e0}) \quad (5.19)$$

Usando a Equação 5.18, a tensão de terminal pode ser expressa como

$$\begin{aligned} v_a &= R_a i_a + \frac{d\lambda_a}{dt} \\ &= R_a i_a + L_s \frac{di_a}{dt} + e_{af} \end{aligned} \quad (5.20)$$

A tensão gerada  $e_{af}$  da Equação 5.19 tem frequência  $\omega_e$ , que é igual à frequência elétrica da tensão de terminal do gerador. Sua amplitude eficaz é dada por

$$E_{af} = \frac{\omega_e L_{af} I_f}{\sqrt{2}} \quad (5.21)$$

Sob essa condição de operação síncrona, todas as grandezas de armadura da máquina (corrente e fluxo concatenado) também irão variar de forma senoidal no tempo com a frequência  $\omega_e$ . Desse modo, podemos escrever as equações acima em termos de suas amplitudes complexas eficazes. Da Equação 5.19, podemos escrever a amplitude complexa eficaz da tensão gerada como

$$\hat{E}_{af} = j \left( \frac{\omega_e L_{af} I_f}{\sqrt{2}} \right) e^{j\delta_{e0}} \quad (5.22)$$

Do mesmo modo, a equação de terminal, Equação 5.20, pode ser escrita em termos de amplitudes complexas eficazes como

$$\hat{V}_a = R_a \hat{I}_a + j X_s \hat{I}_a + \hat{E}_{af} \quad (5.23)$$

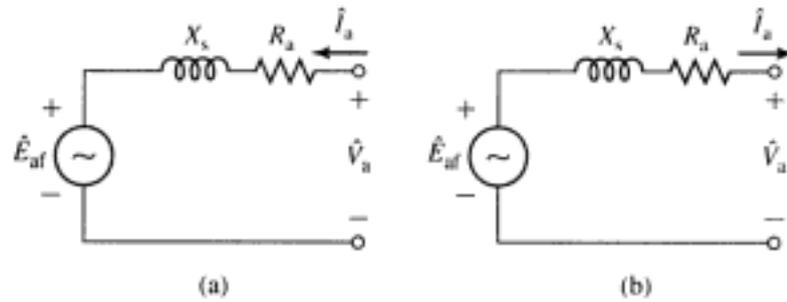
onde  $X_s = \omega_e L_s$  é conhecida como *reatância síncrona*.

Um circuito equivalente em notação complexa está mostrado na Fig. 5.3a. O leitor deve observar que a Equação 5.23 e a Fig. 5.3a foram escritas com o sentido de referência de  $\hat{I}_a$  tomado como positivo quando a corrente está entrando nos terminais da máquina. Isso é conhecido como *sentido de referência do tipo motor* para a corrente.

Alternativamente, o *sentido de referência do tipo gerador* é definido com sendo o sentido de referência de  $\hat{I}_a$ , tomado como positivo, quando a corrente está saindo dos terminais da máquina, como mostra a Fig. 5.3b. Com essa escolha de sentidos de referência para a corrente, a Equação 5.23 torna-se

$$\hat{V}_a = -R_a \hat{I}_a - j X_s \hat{I}_a + \hat{E}_{af} \quad (5.24)$$

Observe que essas duas representações são equivalentes; quando se analisa uma dada condição de operação em particular de uma máquina síncrona, a corrente real é a mesma. O sinal de  $I_a$  será determinado simplesmente pela escolha do sentido de referência. Ambas as opções são aceitáveis, não dependendo de se a máquina síncrona sob análise está operando como motor ou gerador. No entanto, na análise do funcionamento de um motor, como a potência tende a fluir para dentro dele, intuitivamente talvez seja mais satisfatório escolher o sentido de referência em que a corrente flui para dentro da máquina. O oposto é verdadeiro quando a máquina opera como gerador. Nesse caso, a potência tende a fluir para fora da máquina. Em sua maioria, as técnicas de análise de máquinas síncronas apresentadas aqui foram desenvolvidas inicialmente para analisar o desempenho dos geradores síncronos em sistemas elétricos de potência. Como resultado, o sentido de referência do tipo gerador é mais comum e, a partir deste ponto do texto, é o que em geral será usado.



**FIGURA 5.3** Circuitos equivalentes de máquinas síncronas: (a) sentido de referência do tipo motor e (b) sentido de referência do tipo gerador.

A Fig. 5.4 mostra uma forma alternativa do circuito equivalente em que a reatância síncrona é mostrada em termos de suas componentes. Da Equação 5.17,

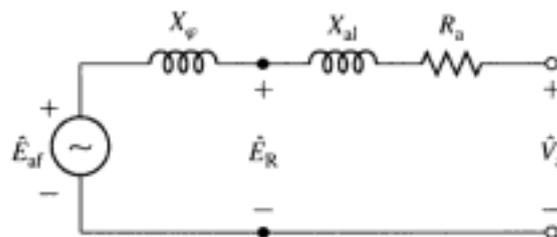
$$\begin{aligned} X_s &= \omega_c L_s = \omega_c L_{al} + \omega_c \left( \frac{3}{2} L_{ad0} \right) \\ &= X_{al} + X_\varphi \end{aligned} \quad (5.25)$$

onde  $X_{al} = \omega L_{al}$  é a *reatância de dispersão* da armadura e  $X_\varphi = \omega \left( \frac{3}{2} L_{ad0} \right)$  é a reatância correspondente à componente fundamental espacial do fluxo de entreferro produzido pelas três correntes de armadura. A reatância  $X_\varphi$  é a *reatância de magnetização* efetiva do enrolamento de armadura, em condições de equilíbrio trifásico. A tensão eficaz  $\hat{E}_R$  é a tensão interna gerada pelo fluxo resultante de entreferro e usualmente é referida como *tensão de entreferro* ou *tensão por "detrás" da reatância de dispersão*.

É importante verificar que os circuitos das Figs. 5.3 e 5.4 são *circuitos equivalentes monofásicos, entre a linha e o neutro, de uma máquina trifásica que opera em condições de equilíbrio trifásico*. Assim, logo que as tensões e correntes da fase *a* forem obtidas, as correntes e tensões das fases *b* e *c* podem ser obtidas tanto a partir do circuito equivalente como diretamente das equações (Equações 5.23 e 5.24). Para isso, as tensões e correntes da fase *a* são simplesmente deslocadas de  $-120^\circ$  e  $120^\circ$ , respectivamente. Do mesmo modo, a potência total trifásica da máquina pode ser encontrada simplesmente multiplicando a potência da fase *a* por três, a menos que a análise esteja sendo feita no sistema por unidade (veja a Seção 2.9). Nesse caso, a potência trifásica, por unidade, é igual à obtida para a fase *a* não sendo necessário o fator três.

#### EXEMPLO 5.1

Observa-se que um motor síncrono trifásico de 60 Hz tem uma tensão de linha de 460 V nos terminais e uma corrente de terminal de 120 A com um fator de potência de 0,95 indutivo. Nessas condições de operação, a corrente de campo é 47 A. A reatância síncrona da máquina



**FIGURA 5.4** Circuito equivalente de uma máquina síncrona mostrando as componentes de entreferro e de dispersão para a reatância síncrona e a tensão de entreferro.

é igual a  $1,68 \Omega$  (0,794 por unidade, em uma base trifásica de 460 V e 100 kVA). Suponha que a resistência de armadura seja desprezível.

Calcule (a) a tensão gerada  $E_{af}$  em volts, (b) o valor da indutância mútua  $L_{af}$  entre o campo e a armadura, e (c) a potência de entrada elétrica do motor em kW e em HP.

### ■ Solução

- a. Usando o sentido de referência do tipo motor para a corrente e desprezando a resistência de armadura, a tensão gerada pode ser obtida do circuito equivalente da Fig. 5.3a ou Equação 5.23 como

$$\hat{E}_{af} = \hat{V}_s - jX_s \hat{I}_s$$

Escolheremos a tensão de terminal como nossa referência de fase. Como trata-se de um equivalente entre linha e neutro, a tensão de terminal  $V_s$  deve ser expressa como uma tensão de fase

$$\hat{V}_s = \frac{460}{\sqrt{3}} = 265,6 \text{ V, tensão de fase}$$

Um fator de potência indutivo de 0,95 corresponde a um ângulo de fator de potência  $\arccos(0,95) = -18,2^\circ$ . Assim, a corrente de fase é

$$\hat{I}_s = 120 e^{-j18,2^\circ} \text{ A}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \hat{E}_{af} &= 265,6 - j1,68(120 e^{-j18,2^\circ}) \\ &= 278,8 e^{-j43,4^\circ} \text{ V, tensão de fase} \end{aligned}$$

e, desse modo, a tensão de fase gerada  $E_{af}$  é igual a 278,8 V eficazes.

- b. A indutância mútua entre o campo e a armadura pode ser encontrada com base na Equação 5.21. Com  $\omega_c = 120\pi$ , tem-se

$$L_{af} = \frac{\sqrt{2} E_{af}}{\omega_c I_f} = \frac{\sqrt{2} \times 279}{120\pi \times 47} = 22,3 \text{ mH}$$

- c. A potência trifásica de entrada  $P_{\text{entrada}}$  para o motor é três vezes a potência de entrada da fase  $a$ . Assim,

$$\begin{aligned} P_{\text{entrada}} &= 3V_s I_s (\text{fator de potência}) = 3 \times 265,6 \times 120 \times 0,95 \\ &= 90,8 \text{ kW} = 122 \text{ HP} \end{aligned}$$

### EXEMPLO 5.2

Supondo que a potência de entrada e a tensão de terminal do motor do Exemplo 5.1 permaneçam constantes, calcule (a) o ângulo de fase  $\delta$  da tensão gerada e (b) a corrente de campo necessária para conseguir um fator de potência unitário nos terminais do motor.

### ■ Solução

- a. Para se ter um fator de potência unitário nos terminais do motor, a corrente no terminal  $a$  deverá estar em fase com a tensão de fase  $\hat{V}_s$  da fase  $a$ . Assim,

$$\hat{I}_s = \frac{P_{\text{entrada}}}{3V_s} = \frac{90,6 \text{ kW}}{3 \times 265,6 \text{ V}} = 114 \text{ A}$$

Da Equação 5.23,

$$\begin{aligned}\hat{E}_{af} &= \hat{V}_s - jX_s \hat{I}_a \\ &= 265,6 - j1,68 \times 114 = 328 e^{-j35,8^\circ} \text{ V, tensão de fase}\end{aligned}$$

Portanto,  $E_{af} = 328$  V, tensão de fase, e  $\delta = -35,8^\circ$ .

- b. Tendo encontrado  $L_{af}$  no Exemplo 5.1, podemos obter a corrente de campo necessária a partir da Equação 5.21.

$$I_f = \frac{\sqrt{2} E_{af}}{\omega_c L_{af}} = \frac{\sqrt{2} \times 328}{377 \times 0,0223} = 55,2 \text{ A}$$

### PROBLEMA PRÁTICO 5.1

A máquina síncrona dos Exemplos 5.1 e 5.2 devem operar como gerador síncrono. Para uma operação em 60 Hz com uma tensão de terminal de 460 V, tensão de linha, calcule a corrente de campo necessária para abastecer uma carga com 85 kW e um fator de potência capacitivo de 0,95.

#### ■ Solução

46,3 A

É útil ter uma idéia aproximada da ordem de grandeza das componentes da impedância. Em máquinas com especificações nominais superiores a algumas centenas de kVA, a queda de tensão na resistência de armadura, para a corrente nominal, é usualmente inferior a 0,01 vezes a tensão nominal; isto é, a resistência de armadura é geralmente inferior a 0,01, por unidade, tomando como base as especificações nominais da máquina. (O sistema por unidade está descrito na Seção 2.9.) A reatância de dispersão da armadura está usualmente no intervalo de 0,1 a 0,2, por unidade, e a reatância síncrona está tipicamente no intervalo de 1,0 a 2,0, por unidade. Em geral, quando o tamanho da máquina diminui, a resistência de armadura, por unidade, cresce ao passo que a reatância síncrona, por unidade, decresce. Em máquinas de pequeno porte, como as encontradas em laboratórios de ensino, a resistência de armadura pode estar em torno de 0,05, por unidade, e a reatância síncrona, na vizinhança de 0,5, por unidade. Em todas as máquinas, com exceção das pequenas, usualmente pode-se desprezar a resistência de armadura, na maioria das análises, a não ser que seus efeitos sobre as perdas e o aquecimento sejam de interesse.

## 5.3 CARACTERÍSTICAS A VAZIO E DE CURTO-CIRCUITO

As características fundamentais de uma máquina síncrona podem ser determinadas por um par de ensaios, um feito com os terminais de armadura a vazio (em circuito aberto) e o segundo, com os terminais de armadura em curto-circuito. Esses ensaios são discutidos aqui. Exceto por umas poucas observações sobre o grau de validade de certas suposições, as discussões aplicam-se tanto às máquinas de rotor cilíndrico como às de pólos salientes.

### 5.3.1 Características de Saturação a Vazio e Perdas Rotacionais sem Carga

Como no caso da curva de magnetização de uma máquina CC, a *característica de circuito aberto* ou *a vazio* (também referida como *curva de saturação de circuito aberto* ou *a vazio*)

de uma máquina síncrona, quando ela está girando na velocidade síncrona, é a curva da tensão de terminal da armadura a vazio (em volts ou por unidade) em função da excitação de campo, como mostrado pela curva *cav* (característica a vazio) na Fig. 5.5. Tipicamente, a tensão de base é escolhida como sendo igual à tensão nominal da máquina.

Quando o enrolamento de campo constitui-se na única fonte de FMM, a característica a vazio representa a relação entre a componente fundamental espacial do fluxo de entreferro e a FMM que atua sobre o circuito magnético. Observe que os efeitos da saturação magnética podem ser vistos claramente. Com correntes de campo crescentes, a curva característica inclina-se para baixo à medida que a saturação do material magnético produz aumento de relutância nos caminhos de fluxo da máquina. Isso reduz a efetividade da corrente de campo para produzir fluxo magnético. Como pode ser visto na Fig. 5.5, quando a corrente de campo é aumentada desde zero, a característica de circuito aberto é linear no início. Essa porção da curva (e sua extensão linear para valores mais elevados de corrente de campo) é conhecida como *linha de entreferro*. Ela representa a característica de tensão a vazio correspondente à operação não saturada. Os desvios da característica real a vazio em relação a essa curva dão uma medida do grau de saturação na máquina.

Observe que, quando o enrolamento de armadura da máquina está em circuito aberto, a tensão de terminal é igual à tensão gerada  $E_{af}$ . Assim, a característica de circuito aberto é uma medida da relação entre a corrente de campo  $I_f$  e a tensão  $E_{af}$ . Portanto, é capaz de fornecer uma medida direta da indutância mútua  $L_{af}$  entre o campo e a armadura.

### EXEMPLO 5.3

Um ensaio a vazio, realizado em um gerador síncrono trifásico de 60 Hz, mostra que uma tensão nominal a vazio de 13,8 kV é produzida por uma corrente de campo de 318 A. Extrapolando a linha de entreferro a partir de um conjunto de medidas feitas na máquina, pode-se mostrar que a corrente de campo correspondente a 13,8 kV sobre a linha de entreferro é 263 A. Calcule os valores, saturado e não saturado, de  $L_{af}$ .

#### ■ Solução

Da Equação 5.21,  $L_{af}$  é obtido de

$$L_{af} = \frac{\sqrt{2} E_{af}}{\omega_c I_f}$$

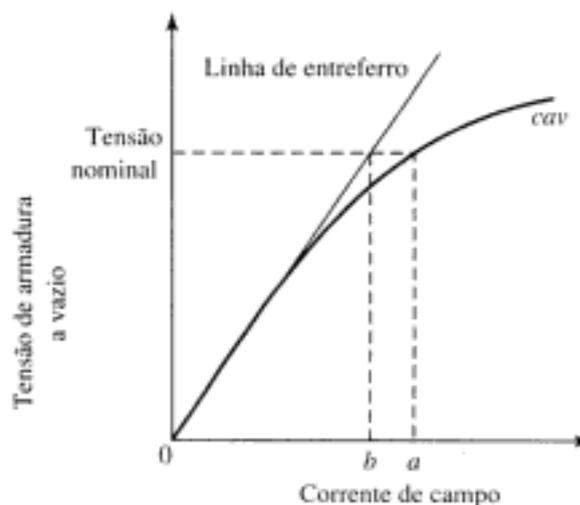


FIGURA 5.5 Característica a vazio de uma máquina síncrona.

Aqui,  $E_{af} = 13,8 \text{ kV} / \sqrt{3} = 7,97 \text{ kV}$ . Assim, o valor saturado de  $L_{af}$  é dado por

$$(L_{af})_{\text{sat}} = \frac{\sqrt{2}(7,97 \times 10^3)}{377 \times 318} = 94 \text{ mH}$$

e valor não saturado é

$$(L_{af}) = \frac{\sqrt{2}(7,97 \times 10^3)}{377 \times 263} = 114 \text{ mH}$$

Nesse caso, vemos que a saturação reduz o acoplamento magnético entre os enrolamentos de campo e de armadura em aproximadamente 18 por cento.

### PROBLEMA PRÁTICO 5.2

Se o gerador síncrono do Exemplo 5.3 funcionar com uma velocidade correspondente a uma tensão gerada de 50 Hz, calcule (a) a tensão de linha dos terminais a vazio correspondente a uma corrente de campo de 318 A e (b) a corrente de campo correspondente àquela mesma tensão na linha de entreferro de 50 Hz.

#### ■ Solução

- 11,5 kV
- 263 A

Em uma máquina real, a característica a vazio é usualmente determinada experimentalmente. Para isso, aciona-se a máquina mecanicamente, na velocidade síncrona, com seus terminais de armadura a vazio. A seguir, lê-se a tensão de terminal para uma série de valores de corrente de campo. Se a potência mecânica requerida para impulsionar a máquina síncrona durante o ensaio a vazio for medida, as *perdas rotacionais a vazio* podem ser obtidas. Essas perdas são constituídas por perdas associadas à rotação e ao atrito nos mancais e com a ventilação, e também por perdas no núcleo correspondentes ao fluxo presente na máquina na ausência de carga. Na velocidade síncrona, as perdas por atrito nos mancais e com o ar são constantes, ao passo que as perdas a vazio no núcleo são uma função do fluxo, que por sua vez é proporcional à tensão a vazio.

Na ausência de excitação, a potência mecânica necessária para acionar a máquina, na velocidade síncrona, corresponde às perdas por atrito. Quando o campo é excitado, a potência mecânica iguala-se, a vazio, à soma das perdas por atrito mais as do núcleo. Portanto, as perdas a vazio no núcleo podem ser obtidas a partir da diferença entre esses dois valores de potências mecânicas. Uma curva típica de perdas a vazio no núcleo, em função da tensão a vazio, assume a forma encontrada na Fig. 5.6.

## 5.3.2 Característica e Perdas de Curto-Circuito

A característica de curto-circuito pode ser obtida aplicando-se um curto-circuito trifásico através de sensores adequados de corrente aos terminais de armadura de uma máquina síncrona. Com a máquina acionada na velocidade síncrona, a corrente de campo pode ser aumentada e um gráfico da corrente de armadura *versus* a corrente de campo pode ser obtido. Essa relação é conhecida como *característica de curto-circuito*. Uma característica de circuito a vazio *cav* e uma característica de curto circuito *ccc* são mostradas na Fig. 5.7.



**FIGURA 5.6** Forma típica de uma curva de perdas no núcleo a vazio.

Com a armadura em curto-circuito,  $V_a = 0$  e usando a Equação 5.24 (usando o sentido de referência do tipo gerador para a corrente), obtém-se

$$\hat{E}_{af} = \hat{I}_a(R_a + jX_s) \quad (5.26)$$

O diagrama fasorial correspondente está mostrado na Fig. 5.8. Como a resistência é muito menor que a reatância síncrona, a corrente de armadura está atrasada em relação à tensão de excitação em  $90^\circ$ , muito aproximadamente. Conseqüentemente, a onda de FMM de reação da armadura alinha-se muito aproximadamente com o eixo dos pólos do campo e está em oposição à FMM de campo, como está mostrado pelos fasores  $\hat{A}$  e  $\hat{F}$ , os quais representam as ondas espaciais da reação da armadura e da FMM de campo, respectivamente.

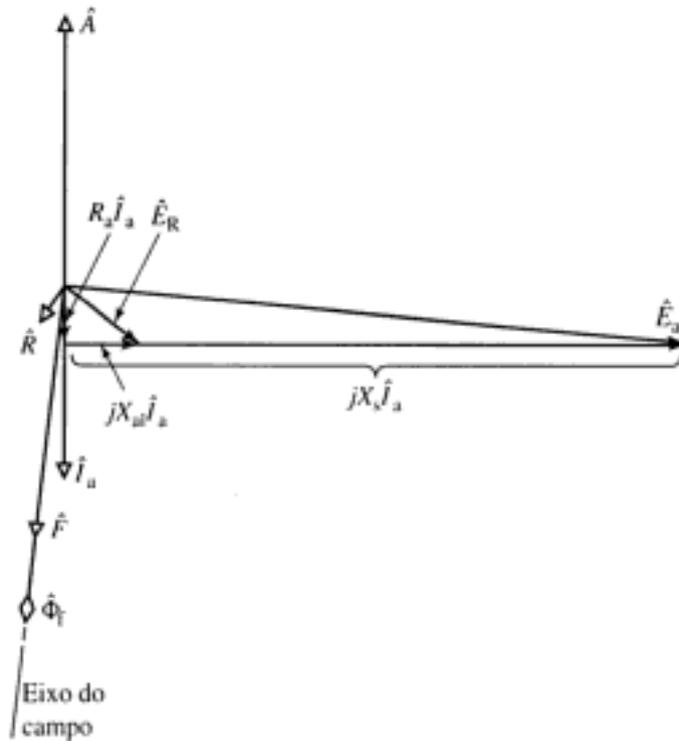
A FMM resultante cria a onda resultante de fluxo de entreferro, a qual gera a tensão de entreferro  $\hat{E}_R$  (veja Fig. 5.4). Essa tensão é igual à tensão presente na resistência de armadura  $R_a$  e na reatância de dispersão  $X_{al}$ , ou seja, como equação,

$$\hat{E}_R = \hat{I}_a(R_a + jX_{al}) \quad (5.27)$$

Em muitas máquinas síncronas, a resistência de armadura é desprezível e a reatância de dispersão varia entre 0,10 e 0,20 por unidade; um valor típico está em torno de 0,15 por unidade. Assim, para a corrente nominal de armadura, a queda de tensão na reatância de dispersão é de cerca de 0,15 por unidade. Desse modo, a partir da Equação 5.27 e para a corrente nominal de armadura de curto-circuito, a tensão de entreferro é de cerca de 0,15 por unidade; isto é, o fluxo de entreferro resultante é apenas 0,15 vezes o seu valor normal de tensão. Con-



**FIGURA 5.7** Características a vazio e de curto-circuito uma máquina síncrona.



**FIGURA 5.8** Diagrama fasorial para condições de curto-circuito.

seqüentemente, a máquina está operando em condições não saturadas. Portanto, a corrente de armadura de curto-circuito é diretamente proporcional à corrente de campo dentro de um intervalo que se estende de zero até bem acima da corrente nominal de armadura. Trata-se então de uma linha reta, como se pode ver na Fig. 5.7.

A *reatância síncrona não saturada* (correspondendo a condições não saturadas de operação da máquina) pode ser encontrada a partir das características a vazio (cav) e de curto-circuito (ccc). Na Fig. 5.7, para uma excitação conveniente de campo qualquer  $Of$ , a corrente de armadura de curto-circuito é  $O'b$  e, para a mesma corrente de campo, a tensão gerada não saturada é  $Oa$ , lida a partir da linha de entreferro. Observe que a tensão a ser usada é dada pela linha de entreferro, já que se assumiu que a máquina estaria operando em condições não saturadas. Se a tensão de fase, correspondente a  $Oa$ , for  $V_{a,g}$  e a corrente de armadura por fase, correspondente a  $O'b$ , for  $I_{a,cc}$ , então, a partir da Equação 5.26 e desprezando a resistência de armadura, a reatância síncrona não saturada  $X_s$  será

$$X_s = \frac{V_{a,g}}{I_{a,cc}} \quad (5.28)$$

onde o subscrito  $g$  indica entreferro e  $cc$  indica curto-circuito. Se  $V_{a,g}$  e  $I_{a,cc}$  forem expressos no sistema por unidade, a reatância síncrona será por unidade. Se  $V_{a,g}$  e  $I_{a,cc}$  forem expressos em volts eficazes de fase e em ampères eficazes por fase, respectivamente, então a reatância síncrona será dada em ohms por fase.

Observe que para calcular a reatância síncrona em ohms usa-se a tensão de fase. Frequentemente, a curva de saturação a vazio é dada em termos da tensão de linha. Nesse caso, para ser convertida para o valor de fase, a tensão deve ser dividida por  $\sqrt{3}$ .

Algumas vezes, quando se opera na tensão de terminal nominal ou próxima dela, assume-se que a máquina seja equivalente a uma máquina não saturada cuja curva de magnetização é uma linha reta que passa pela origem e pelo ponto de tensão nominal localizado sobre a curva característica a vazio (cav), como está mostrado pela linha tracejada  $Op$  na Fig. 5.9. De

acordo com essa aproximação, o valor de saturação da reatância síncrona, na tensão nominal  $V_{a,nominal}$ , é

$$X_s = \frac{V_{a,nominal}}{I'_a} \quad (5.29)$$

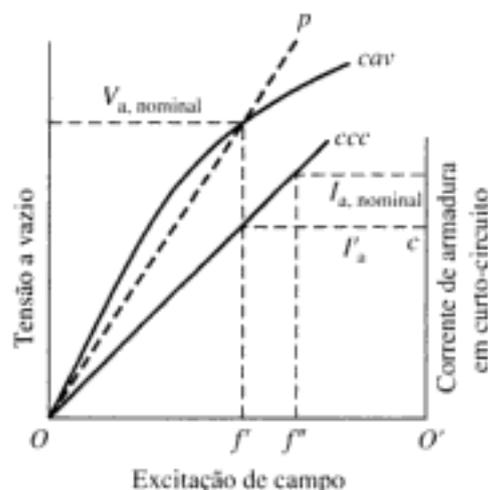
onde  $I'_a$  é a corrente de armadura  $O'c$ , lida sobre a curva característica de curto-circuito (ccc) no ponto dado pelo valor da corrente de campo  $Of'$  correspondente a  $V_{a,nominal}$  na curva característica a vazio (cav), como se mostra na Fig. 5.9. Como no caso da reatância síncrona não saturada, se  $V_{a,nominal}$  e  $I'_a$  forem expressos por unidade, a reatância síncrona será por unidade. Se  $V_{a,nominal}$  e  $I'_a$  forem expressos em volts eficazes de fase e em ampères eficazes de fase, respectivamente, então a reatância síncrona será dada em ohms por fase. Geralmente, esse método de tratar os efeitos de saturação, assumindo-se que esses efeitos possam ser descritos por um único valor de reatância saturada, dá resultados satisfatórios desde que uma exatidão elevada não seja necessária.

A relação de curto-circuito (RCC)\* é definida como sendo a razão entre a corrente de campo necessária para se gerar a tensão nominal a vazio e a corrente de campo necessária para se gerar a corrente de armadura nominal em curto-circuito. Isso é, com base na Fig. 5.9,

$$RCC = \frac{Of''}{Of'} \quad (5.30)$$

Pode-se mostrar que a RCC é o inverso do valor por unidade da reatância síncrona, em saturação, obtida na Equação 5.29. Costuma-se referir à corrente de campo  $Of'$  necessária para se obter a tensão nominal a vazio como CCAV (Corrente de Campo a Vazio)\*\* e a corrente de campo  $Of''$  necessária para se obter a corrente nominal de curto-circuito como CCCC (Corrente de Campo em Curto Circuito)\*\*\*. Assim, a relação de curto-circuito também pode ser escrita como

$$RCC = \frac{CCAV}{CCCC} \quad (5.31)$$



**FIGURA 5.9** Características a vazio e de curto-circuito mostrando a curva de magnetização em condições saturadas de operação.

\* N. de T.: Em inglês, *SCR – Short Circuit Ratio*.

\*\* N. de T.: Em inglês, *AFNL – Amperes Field No Load*.

\*\*\* N. de T.: Em inglês, *AFSC – Amperes Field Short Circuit*.

**EXEMPLO 5.4**

Os seguintes dados foram tomados das características a vazio e de curto-circuito de uma máquina síncrona trifásica ligada em Y de 45 kVA, 220 V (tensão de linha), seis pólos e 60 Hz. Da característica a vazio:

$$\text{Tensão de linha} = 220 \text{ V} \quad \text{Corrente de campo} = 2,84 \text{ A}$$

Da característica de curto-circuito:

<b>Corrente de armadura, A</b>	118	152
<b>Corrente de campo, A</b>	2,20	2,84

Da linha de entreferro:

$$\text{Corrente de campo} = 2,20 \text{ A} \quad \text{Tensão de linha} = 202 \text{ V}$$

Calcule o valor não saturado da reatância síncrona, o seu valor saturado na tensão nominal de acordo com a Equação 5.29, e a relação de curto-circuito. Expresse a reatância síncrona em ohms por fase e por unidade, tomando as especificações nominais da máquina como base.

**■ Solução**

Com uma corrente de campo de 2,20 A, a tensão de fase na linha de entreferro é

$$V_{a,z} = \frac{202}{\sqrt{3}} = 116,7 \text{ V}$$

e, para a mesma corrente de campo, a corrente de armadura em curto-circuito, é

$$I_{a,cc} = 118 \text{ A}$$

Da Equação 5.28,

$$X_s = \frac{116,7}{118} = 0,987 \text{ } \Omega/\text{fase}$$

Observe que a corrente de armadura nominal é

$$I_{a,nominal} = \frac{45.000}{\sqrt{3} \times 220} = 118 \text{ A}$$

Portanto,  $I_{a,cc} = 1,00$  por unidade. A tensão correspondente na linha de entreferro é

$$V_{a,z} = \frac{202}{220} = 0,92 \text{ por unidade}$$

Da Equação 5.28, por unidade, vem

$$X_s = \frac{0,92}{1,00} = 0,92 \text{ por unidade}$$

A reatância síncrona saturada pode ser obtida das características a vazio e de curto-circuito e da Equação 5.29, obtendo-se

$$X_s = \frac{V_{a,nominal}}{I'_s} = \frac{(220/\sqrt{3})}{152} = 0,836 \text{ } \Omega/\text{fase}$$

Por unidade,  $I'_s = \frac{152}{118} = 1,29$ , e da Equação 5.29,

$$X_s = \frac{1,00}{1,29} = 0,775 \text{ por unidade}$$

Finalmente, das características a vazio e de curto-circuito e da Equação 5.30, a relação de curto-circuito é dada por

$$\text{RCC} = \frac{2,84}{2,20} = 1,29$$

Observe que, como foi indicado após a Equação 5.30, o inverso da razão de curto-circuito é igual à reatância síncrona saturada, por unidade

$$X_s = \frac{1}{\text{RCC}} = \frac{1}{1,29} = 0,775 \text{ por unidade}$$

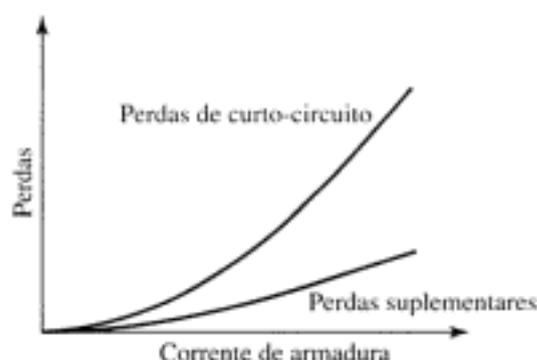
### PROBLEMA PRÁTICO 5.3

Calcule a reatância síncrona saturada (em  $\Omega$ /fase e por unidade) de uma máquina síncrona de 85 kVA que alcança a tensão nominal a vazio de 460 V com uma corrente de campo de 8,7 A e que atinge a corrente nominal de curto-circuito com uma corrente de campo de 11,2 A.

#### ■ Solução

$$X_s = 3,21 \Omega/\text{fase} = 1,29 \text{ por unidade}$$

Se a potência mecânica necessária para acionar a máquina for medida enquanto o ensaio de curto-circuito está sendo realizado, é possível obter informações a respeito das perdas causadas pela corrente de armadura. Como o nível de fluxo é baixo em condições de curto-circuito, considera-se em geral que as perdas no núcleo são desprezíveis nessas condições. A potência mecânica necessária para acionar a máquina síncrona durante o ensaio de curto-circuito é igual, então, à soma das perdas por atrito e ventilação (determinadas a partir do ensaio a vazio com uma corrente de campo nula) mais as perdas causadas pela corrente de armadura. Então, as perdas causadas pela corrente de armadura podem ser obtidas subtraindo-se as perdas por atrito e ventilação da potência de acionamento. As perdas causadas pela corrente de armadura em curto-circuito são conhecidas coletivamente como *perdas de curto-circuito\**. Uma curva que mostra a forma típica das perdas de curto-circuito *versus* a corrente de armadura está plotada na Fig. 5.10. Tipicamente, ela cresce de forma aproximadamente parabólica em função da corrente de armadura.



**FIGURA 5.10** Forma típica das curvas de perdas suplementares e de curto-circuito.

\* N. de T.: *Short-circuit load loss*, em inglês.

As perdas de curto-circuito consistem em perdas ôhmicas  $I^2R$  no enrolamento de armadura, perdas locais no núcleo, causadas pelo fluxo de dispersão de armadura, e perdas muito baixas no núcleo causadas pelo fluxo resultante. As perdas CC na resistência podem ser calculadas se, durante o ensaio de curto-circuito, a resistência for medida e, quando necessário, corrigida levando em consideração a temperatura dos enrolamentos. Para condutores de cobre,

$$\frac{R_T}{R_t} = \frac{234,5 + T}{234,5 + t} \quad (5.32)$$

onde  $R_T$  e  $R_t$  são as resistências nas temperaturas  $T$  e  $t$ , respectivamente, em graus Celsius. Se essas perdas CC na resistência forem subtraídas das perdas de curto-circuito, a diferença fornecerá as perdas devidas aos efeitos peliculares e às correntes parasitas nos condutores da armadura mais as perdas locais no núcleo causadas pelo fluxo de dispersão da armadura. Essa diferença entre as perdas de curto-circuito e as perdas CC na resistência são as perdas adicionais causadas pela corrente alternada na armadura. São as *perdas suplementares\** descritas no Apêndice D. Normalmente, são consideradas como tendo o mesmo valor, tanto em condições normais de carga como em curto-circuito. É função da corrente de armadura, como mostrado pela curva da Fig. 5.10.

Como ocorre com qualquer dispositivo de corrente alternada, a *resistência efetiva de armadura*  $R_{a,ef}$  pode ser calculada como sendo a perda de potência atribuível à corrente de armadura dividida pelo quadrado da corrente. Supondo que as perdas suplementares sejam função apenas da corrente de armadura, a resistência efetiva de armadura pode ser determinada a partir das perdas de curto-circuito:

$$R_{a,ef} = \frac{\text{perdas de curto-circuito}}{(\text{corrente de armadura de curto-circuito})^2} \quad (5.33)$$

Se as perdas de curto-circuito e a corrente de armadura forem dadas por unidade, a resistência efetiva também será por unidade. Se forem em watts por fase e ampères por fase, respectivamente, a resistência efetiva será em ohms por fase. Usualmente, para o valor nominal de corrente, obtém-se exatidão suficiente encontrando o valor de  $R_{a,ef}$  e então assumindo que seu valor seja constante.

### EXEMPLO 5.5

No caso da máquina síncrona trifásica do Exemplo 5.4 de 45 KVA, ligada em Y, as perdas de curto-circuito (total das três fases) é 1,80 kW para a corrente de armadura nominal (118 A) e a temperatura de 25° C. A resistência CC de armadura nessa temperatura é 0,0335 Ω /fase. Calcule a resistência de armadura efetiva por unidade e em ohms por fase a 25° C.

#### ■ Solução

As perdas de curto-circuito são  $1,80/45 = 0,040$  por unidade com  $I_a = 1,00$  por unidade. Portanto,

$$R_{a,ef} = \frac{0,040}{(1,00)^2} = 0,040 \text{ por unidade}$$

Para uma única fase, as perdas de curto-circuito são  $1800/3 = 600$  W/fase e conseqüentemente a resistência efetiva é

$$R_{a,ef} = \frac{600}{(118)^2} = 0,043 \text{ Ω/fase}$$

A razão entre as resistências CA e CC é

$$\frac{R_{a,ef}}{R_{a,CC}} = \frac{0,043}{0,0335} = 1,28$$

\* N. de T.: *Stray-load loss*, em inglês.

Como trata-se de uma máquina de pequeno porte, sua resistência por unidade é relativamente elevada. A resistência de armadura efetiva de máquinas com especificações nominais superiores a algumas poucas centenas de quilovolts-ampères é usualmente inferior a 0,01 por unidade.

#### PROBLEMA PRÁTICO 5.4

Considere um gerador síncrono trifásico de 13,8 kV e 25 MVA cujas perdas trifásicas de curto-circuito são 52,8 kW para a corrente de armadura nominal. Calcule (a) sua corrente de armadura nominal e (b) sua resistência de armadura efetiva em  $\Omega$  /fase e por unidade.

#### ■ Solução

a. 1046 A

b.  $R_{a,ef} = 0,0161 \Omega/\text{fase} = 0,0021$  por unidade

## 5.4 CARACTERÍSTICAS DE ÂNGULO DE CARGA EM REGIME PERMANENTE

A potência máxima que uma máquina síncrona pode fornecer é determinada pelo conjugado máximo que pode ser aplicado sem que ocorra perda de sincronismo com o sistema externo ao qual está conectada. O propósito desta seção é desenvolver expressões para os limites de potência, em regime permanente, de máquinas síncronas em situações simples em que o sistema externo pode ser representado por uma impedância em série com uma fonte de tensão.

Tendo em vista que tanto o sistema externo como a própria máquina podem ser representados como uma impedância em série com uma fonte de tensão, o estudo dos limites de potência torna-se simplesmente um caso especial do problema mais geral de limitar o fluxo de potência em uma impedância em série. A impedância será constituída pela impedância síncrona da máquina síncrona e também pela impedância equivalente do sistema externo (que pode consistir em linhas de transmissão e bancos de transformadores assim como em máquinas síncronas adicionais).

Considere o circuito simples da Fig. 5.11a, consistindo em duas tensões CA  $\hat{E}_1$  e  $\hat{E}_2$  conectadas por uma impedância  $Z = R + jX$  na qual a corrente é  $\hat{I}$ . O diagrama fasorial está mostrado na Fig. 5.11b. Observe que, nesse diagrama, o sentido de referência para ângulos positivos é o anti-horário. Assim, na Fig. 5.11b, o ângulo  $\delta$  é positivo ao passo que o ângulo  $\phi$  pode ser visto como sendo negativo.

A potência  $P_2$  entregue através da impedância à fonte de tensão  $\hat{E}_2$  do lado da carga é

$$P_2 = E_2 I \cos \phi \quad (5.34)$$

onde  $\phi$  é o ângulo de fase de  $\hat{I}$  em relação a  $\hat{E}_2$ . A corrente fasorial é

$$\hat{I} = \frac{\hat{E}_1 - \hat{E}_2}{Z} \quad (5.35)$$

Se as tensões fasoriais e a impedância forem expressas em forma polar,

$$\hat{E}_1 = E_1 e^{j\delta} \quad (5.36)$$

$$\hat{E}_2 = E_2 \quad (5.37)$$

$$Z = R + jX = |Z| e^{j\phi_z} \quad (5.38)$$

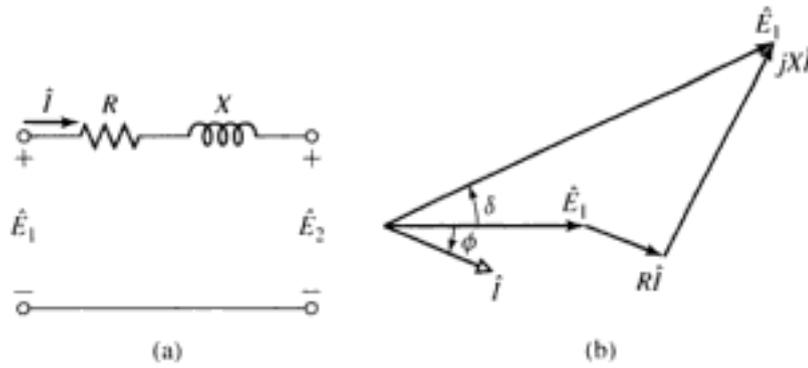


FIGURA 5.11 (a) impedância que interconecta duas tensões; (b) diagrama fasorial.

onde  $\delta$  é o ângulo de fase pelo qual  $\hat{E}_1$  está adiantada em relação a  $\hat{E}_2$  e  $\phi_Z = \arctg(X/R)$  é o ângulo de fase da impedância  $Z$ , então

$$\hat{I} = I e^{j\phi} = \frac{E_1 e^{j\delta} - E_2}{|Z| e^{j\phi_Z}} = \frac{E_1}{|Z|} e^{j(\delta - \phi_Z)} - \frac{E_2}{|Z|} e^{-j\phi_Z} \quad (5.39)$$

Tomando a parte real da Equação 5.39, obtém-se

$$I \cos \phi = \frac{E_1}{|Z|} \cos(\delta - \phi_Z) - \frac{E_2}{|Z|} \cos(-\phi_Z) \quad (5.40)$$

Observando que  $\cos(-\phi_Z) = \cos \phi_Z = R/|Z|$ , vemos que a substituição da Equação 5.40 na Equação 5.34 leva a

$$P_2 = \frac{E_1 E_2}{|Z|} \cos(\delta - \phi_Z) - \frac{E_2^2 R}{|Z|^2} \quad (5.41)$$

ou

$$P_2 = \frac{E_1 E_2}{|Z|} \sin(\delta + \alpha_Z) - \frac{E_2^2 R}{|Z|^2} \quad (5.42)$$

onde

$$\alpha_Z = 90^\circ - \phi_Z = \arctg\left(\frac{R}{X}\right) \quad (5.43)$$

De modo similar, a potência  $P_1$  no lado da fonte  $\hat{E}_1$  da impedância pode ser expressa como

$$P_1 = \frac{E_1 E_2}{|Z|} \sin(\delta - \alpha_Z) + \frac{E_1^2 R}{|Z|^2} \quad (5.44)$$

Se, como freqüentemente é o caso, a resistência for desprezível, então  $R \ll |Z|$ ,  $|Z| \approx X$  e  $\alpha_Z \approx 0$  e conseqüentemente

$$P_1 = P_2 = \frac{E_1 E_2}{X} \sin \delta \quad (5.45)$$

A Equação 5.45 é uma equação muito importante no estudo de máquinas síncronas e certamente no estudo de sistemas de potência CA em geral. Quando aplicada ao caso de uma máquina síncrona ligada a um sistema CA, a Equação 5.45 é referida comumente como *característica do ângulo de potência* de uma máquina síncrona, e o ângulo  $\delta$  é conhecido como

*ângulo de potência.* Se a resistência for desprezível e as tensões forem constantes, então, da Equação 5.45, a transferência máxima de potência

$$P_{1,\max} = P_{2,\max} = \frac{E_1 E_2}{X} \quad (5.46)$$

ocorrerá quando  $\delta = \pm 90^\circ$ . Observe que se  $\delta$  for positivo,  $\hat{E}_1$  estará adiantada em relação a  $\hat{E}_2$  e, da Equação 5.45, a potência irá fluir da fonte  $\hat{E}_1$  para  $\hat{E}_2$ . De modo semelhante, quando  $\delta$  for negativo,  $\hat{E}_1$  estará atrasada em relação a  $\hat{E}_2$  e a potência irá fluir da fonte  $\hat{E}_2$  para  $\hat{E}_1$ .

A Equação 5.45 é válida para quaisquer fontes de tensão  $\hat{E}_1$  e  $\hat{E}_2$  separadas por uma impedância reativa  $jX$ . Assim, como se mostra na Fig. 5.12, para o caso de uma máquina síncrona com uma tensão gerada  $\hat{E}_{af}$  e uma reatância síncrona  $X_s$  conectada a um sistema cujo equivalente Thévenin é uma fonte de tensão  $\hat{V}_{EQ}$  em série com uma impedância reativa  $jX_{EQ}$ , a equação característica do ângulo de potência pode ser escrita como

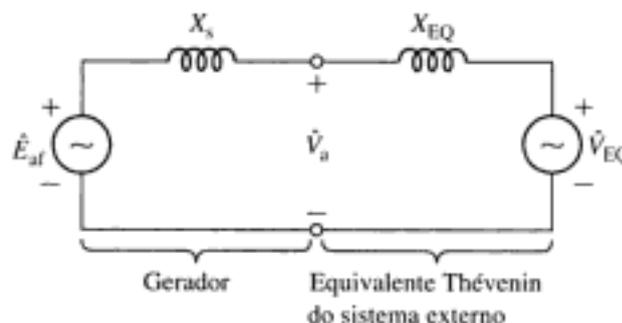
$$P = \frac{E_{af} V_{EQ}}{X_s + X_{EQ}} \text{sen } \delta \quad (5.47)$$

onde  $P$  é a potência transferida da máquina síncrona para o sistema e  $\delta$  é o ângulo de fase de  $\hat{E}_{af}$  em relação a  $\hat{V}_{EQ}$ .

De modo semelhante, é possível escrever uma equação para a característica do ângulo de potência em termos de  $X_s$ ,  $E_{af}$ , a tensão de terminal  $V_a$  e o ângulo relativo entre eles, ou alternativamente  $X_{EQ}$ ,  $V_a$ ,  $V_{EQ}$  e seu ângulo relativo. Embora essas diversas expressões sejam igualmente válidas, elas não são igualmente úteis. Por exemplo, ao passo que  $E_{af}$  e  $V_{EQ}$  irão permanecer constantes quando  $P$  for variado,  $V_a$  irá variar. Assim, ao passo que a Equação 5.47 propicia uma relação entre  $P$  e  $\delta$  de fácil solução, uma equação característica de ângulo de potência baseada em  $V_a$  não pode ser resolvida sem uma expressão adicional que relacione  $V_a$  com  $P$ .

Deve-se enfatizar que a dedução das Equações 5.34 a 5.47 baseia-se em um circuito CA monofásico. No caso de um sistema trifásico equilibrado, se  $E_1$  e  $E_2$  forem as tensões de fase, os resultados deverão ser multiplicados por três para se obter a potência trifásica total. Alternativamente,  $E_1$  e  $E_2$  podem ser expressas em termos da tensão de linha (igual a  $\sqrt{3}$  vezes a tensão de fase), caso em que as equações dão a potência trifásica diretamente.

Quando a expressão para a potência dada pela Equação 5.45 é comparada com a expressão dada pela Equação 5.1 para o conjugado em termos do fluxo interagente e das ondas de FMM, pode-se ver que elas apresentam a mesma forma. Isso não é coincidência. Lembre-se de que o conjugado e a potência são proporcionais quando, como aqui, a velocidade é constante. O que estamos realmente dizendo é que a Equação 5.1, aplicada especificamente a uma máquina idealizada de rotor cilíndrico e traduzida em termos de circuito, torna-se a Equação 5.45. Uma breve revisão mental do embasamento de cada equação deve mostrar agora que elas provêm das mesmas considerações fundamentais.



**FIGURA 5.12** Representação usando um circuito equivalente de uma máquina síncrona conectada a um sistema externo.

Da Equação 5.47, vemos que a transferência máxima de potência, associada com o funcionamento da máquina síncrona, é proporcional à magnitude da tensão do sistema, correspondendo a  $V_{EQ}$ , e também à da tensão interna  $E_{af}$  do gerador. Assim, para uma tensão de sistema constante, a transferência máxima de potência pode ser incrementada elevando-se a corrente de campo da máquina síncrona e desse modo a tensão interna. Naturalmente, isso não pode ser feito ilimitadamente. Nem a corrente do campo nem os fluxos da máquina podem ser elevados além do ponto em que deixam de ser atendidas as exigências de refrigeração.

Em geral, considerações de estabilidade ditam que o ponto de operação em regime permanente de uma máquina síncrona é alcançado com um ângulo de potência consideravelmente inferior a  $90^\circ$ . Assim, dada uma configuração de sistema, é necessário assegurar-se de que a máquina será capaz de alcançar seus valores nominais de funcionamento e que essa condição de operação estará dentro de limites aceitáveis de funcionamento, tanto para a máquina como para o sistema.

### EXEMPLO 5.6



Um gerador trifásico síncrono de 75 MVA e 13,8 kV, com uma reatância síncrona saturada de  $X_s = 1,35$  por unidade e uma não saturada de  $X_s = 1,56$  por unidade, é ligado a um sistema externo cuja reatância equivalente é  $X_{EQ} = 0,23$  por unidade e cuja tensão é  $V_{EQ} = 1,0$  por unidade, ambas tomando o gerador como base. Ele atinge a tensão nominal de circuito aberto para uma corrente de campo de 297 A.

- Encontre a potência máxima  $P_{max}$  (em MW e por unidade) que pode ser fornecida ao sistema externo se a tensão interna do gerador for mantida igual a 1,0 por unidade.
- Usando MATLAB\* plote a tensão de terminal do gerador quando a saída do gerador é variada desde zero até  $P_{max}$  com as condições da parte (a).
- Agora suponha que o gerador esteja equipado com um *regulador automático de tensão* que controla a corrente de campo mantendo constante a tensão de terminal. Se a carga submetida ao gerador for a nominal, calcule o correspondente ângulo de potência, a tensão por unidade e a corrente de campo. Usando MATLAB, plote  $E_{af}$  por unidade em função da potência por unidade.

#### ■ Solução

- Da Equação 5.47,

$$P_{max} = \frac{E_{af} V_{EQ}}{X_s + X_{EQ}}$$

Observe que, embora esse gerador seja trifásico, nenhum fator de 3 é necessário porque estamos trabalhando no sistema por unidade.

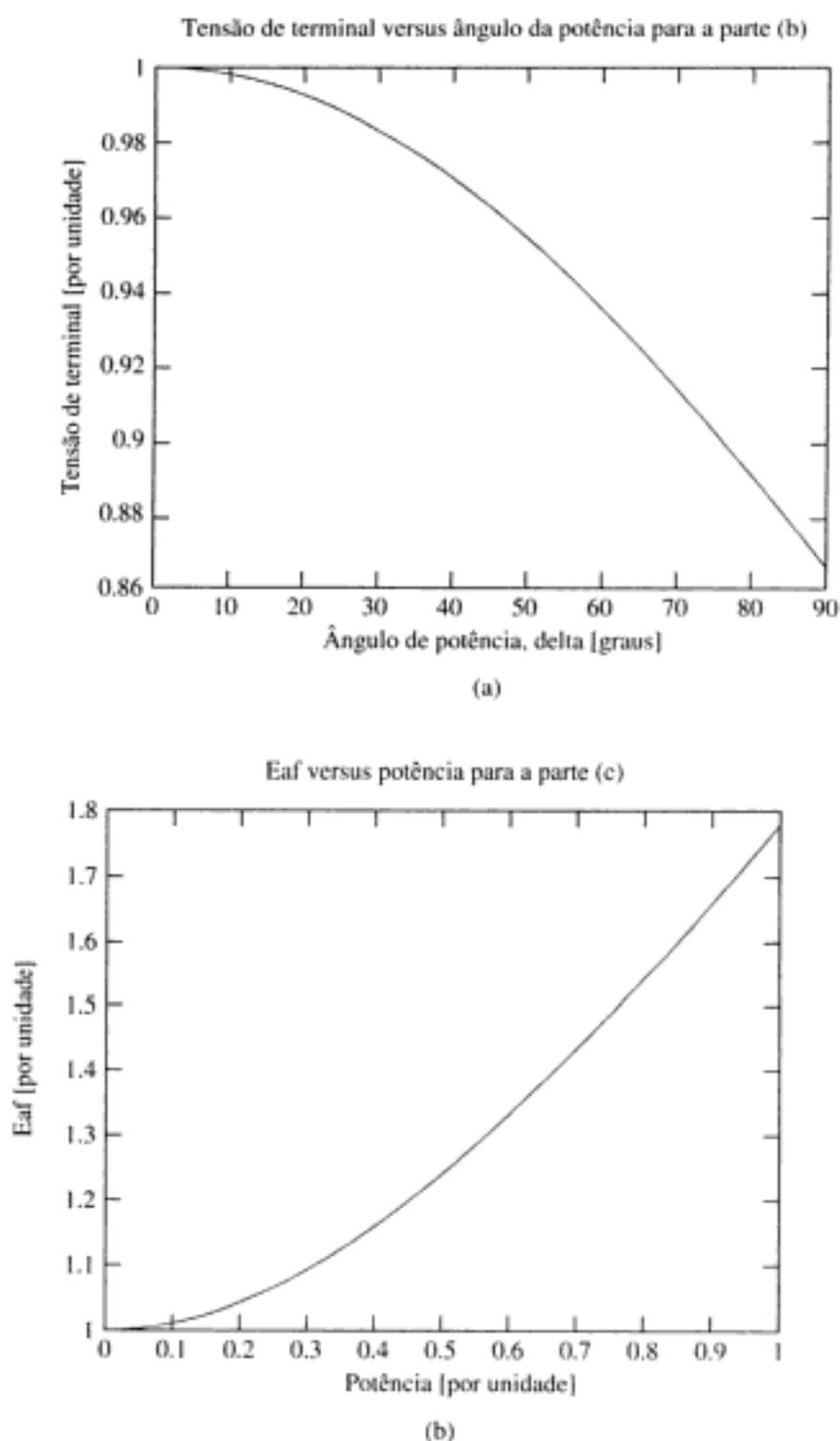
Como a máquina está operando com uma tensão de terminal próxima de seu valor nominal, devemos expressar  $P_{max}$  em termos da reatância síncrona saturada. Assim,

$$P_{max} = \frac{1}{1,35 + 0,23} = 0,633 \text{ por unidade} = 47,5 \text{ MW}$$

- Da Fig. 5.12, a corrente de terminal do gerador é dada por

$$\hat{I}_a = \frac{\hat{E}_{af} - \hat{V}_{EQ}}{j(X_s + X_{EQ})} = \frac{E_{af} e^{j\delta} - V_{EQ}}{j(X_s + X_{EQ})} = \frac{e^{j\delta} - 1,0}{j1,58}$$

\* MATLAB é uma marca registrada da The MathWorks, Inc.



**FIGURA 5.13** Exemplo 5.6. (a) Plotagem de MATLAB para a tensão de terminal *versus*  $E_{af}$  relativa à parte (b). (b) Plotagem de MATLAB para  $E_{af}$  *versus* a potência relativa à parte (c).

Então, a tensão de terminal do gerador é dada por

$$\hat{V}_a = \hat{V}_{tQ} + jX_{tQ}\hat{I}_a = 1,0 + \frac{0,23}{1,58}(e^{j\delta} - 1,0)$$

A Fig. 5.13a é a plotagem de MATLAB desejada. Pode-se ver que a tensão de terminal varia de 1,0 para  $\delta = 0^\circ$  até aproximadamente 0,87 para  $\delta = 90^\circ$ .

- c. Com a tensão de terminal mantida constante em  $V_s = 1,0$  por unidade, a potência pode ser expressa como

$$P = \frac{V_a V_{EQ}}{X_{EQ}} \sin \delta_t = \frac{1}{0,23} \sin \delta_t = 4,35 \sin \delta_t$$

onde  $\delta_t$  é o ângulo da tensão de terminal em relação a  $\hat{V}_{EQ}$ .

Para  $P = 1,0$  por unidade,  $\delta_t = 13,3^\circ$  e assim  $\hat{I}$  é igual a

$$\hat{I}_a = \frac{V_a e^{j\delta_t} - V_{EQ}}{jX_{EQ}} = 1,007 e^{j6,65^\circ}$$

c

$$\hat{E}_{af} = \hat{V}_{EQ} + j(X_{EQ} + X_s)\hat{I}_a = 1,78 e^{j62,7^\circ}$$

ou  $E_{af} = 1,78$  por unidade, correspondendo a uma corrente de campo de  $I_f = 1,78 \times 297 = 529$  ampères. O ângulo de potência correspondente é  $62,7^\circ$ .

A Fig. 5.13b é a plotagem de MATLAB desejada. Pode-se ver que  $E_{af}$  varia de 1,0 para  $P = 0$  até 1,78 para  $P = 1,0$ .

Aqui está o *script* de MATLAB:

```

clc
clear
% Solução para a parte (b)
%Parâmetros de sistema
Veq = 1.0;
Eaf = 1.0;
Xeq = .23;
Xs = 1.35;
% Calcule Va para delta variando de 0 a 90 graus
for n = 1:101
delta(n) = (pi/2.)* (n-1)/100;
Ia(n) = (Eaf *exp(j*delta(n)) - Veq)/ (j*(Xs + Xeq));
Va(n) = abs(Veq + j*Xeq*Ia(n));
degrees(n) = 180*delta(n)/pi;
end
%Agora plote os resultados
plot(degrees,Va)
xlabel('Ângulo de potência, delta [graus]')
ylabel('Tensão de terminal [por unidade]')
title('Tensão de terminal versus ângulo de potência para a parte (b)')
fprintf('\nAperte qualquer tecla para continuar\n')
pause
% Solução para a parte (c)
%Faça a tensão de terminal igual à unidade
Vterm = 1.0;
for n = 1:101
P(n) = (n-1)/100;
deltat(n) = asin(P(n)*Xeq/(Vterm*Veq));
Ia(n) = (Vterm *exp(j*deltat(n)) - Veq)/ (j*Xeq);
Eaf(n) = abs(Vterm + j*(Xs+Xeq)*Ia(n));
end

```

```

%Agora plote os resultados
plot(P, Eaf)
xlabel('Potência [por unidade]')
ylabel('Eaf [por unidade]')
title('Eaf versus potência para a parte(c)')

```

**PROBLEMA PRÁTICO 5.5**

Considere a máquina de 75 MVA e 13,8 kV do Exemplo 5.6. Observa-se que ela está operando com uma tensão de terminal de 13,7 kV e uma potência de saída de 53 MW com um fator de potência de 0,87 indutivo. Encontre (a) a corrente de fase em kA, (b) a tensão interna por unidade e (c) a corrente de campo correspondente em ampères.

**■ Solução**

a.  $I_a = 2,57$  kA    b.  $E_{af} = 1,81$  por unidade    c.  $I_f = 538$  ampères

**EXEMPLO 5.7**

Um motor síncrono trifásico de 2000 HP, 2300 V, fator de potência unitário, ligado em Y, 30 pólos e 60 Hz tem uma reatância síncrona de 1,95  $\Omega$ /fase. Nesse problema, todas as perdas podem ser desprezadas.

- Calcule a potência e conjugado máximos que esse motor poderá entregar se ele for alimentado com potência diretamente de um barramento infinito de 60 Hz e 2300 V. Suponha que a excitação de campo seja mantida constante com um valor tal que resulte um fator de potência unitário quando a carga é a nominal.
- Em vez do barramento infinito da parte (a), suponha que o motor seja abastecido com potência a partir de um turbogerador trifásico, ligado em Y, 2300 V, 1500 kVA, dois pólos e 3600 rpm cuja reatância síncrona seja 2,65  $\Omega$ /fase. O gerador é acionado com a velocidade nominal e as excitações de campo, do gerador e do motor, são ajustadas de modo que o motor opere com fator de potência unitário e tensão de terminal nominal à plena carga. Calcule a potência e o conjugado máximos, correspondentes a esses valores de excitação de campo, que podem ser fornecidos.

**■ Solução**

Embora certamente essa máquina seja do tipo de pólos salientes, resolveremos o problema usando a teoria simples do rotor cilíndrico. Desse modo, a solução não leva em consideração o conjugado de relutância. Na realidade, a máquina desenvolve um conjugado máximo um pouco maior do que o nosso valor calculado, como foi discutido na Seção 5.7.

- O circuito equivalente está mostrado na Fig. 5.14a e o diagrama fasorial à plena carga está na Fig. 5.14b, onde  $\hat{E}_{afm}$  é a tensão gerada do motor e  $X_{sm}$  é a sua reatância síncrona. A partir das especificações nominais do motor, desprezando as perdas, temos

$$\begin{aligned} \text{Potência aparente nominal} &= 2000 \times 0,746 = 1492 \text{ kVA, trifásico} \\ &= 497 \text{ kVA/fase} \end{aligned}$$

$$\text{Tensão nominal} = \frac{2300}{\sqrt{3}} = 1328 \text{ V, tensão de fase}$$

$$\text{Corrente nominal} = \frac{497.000}{1328} = 374 \text{ A/fase Y}$$

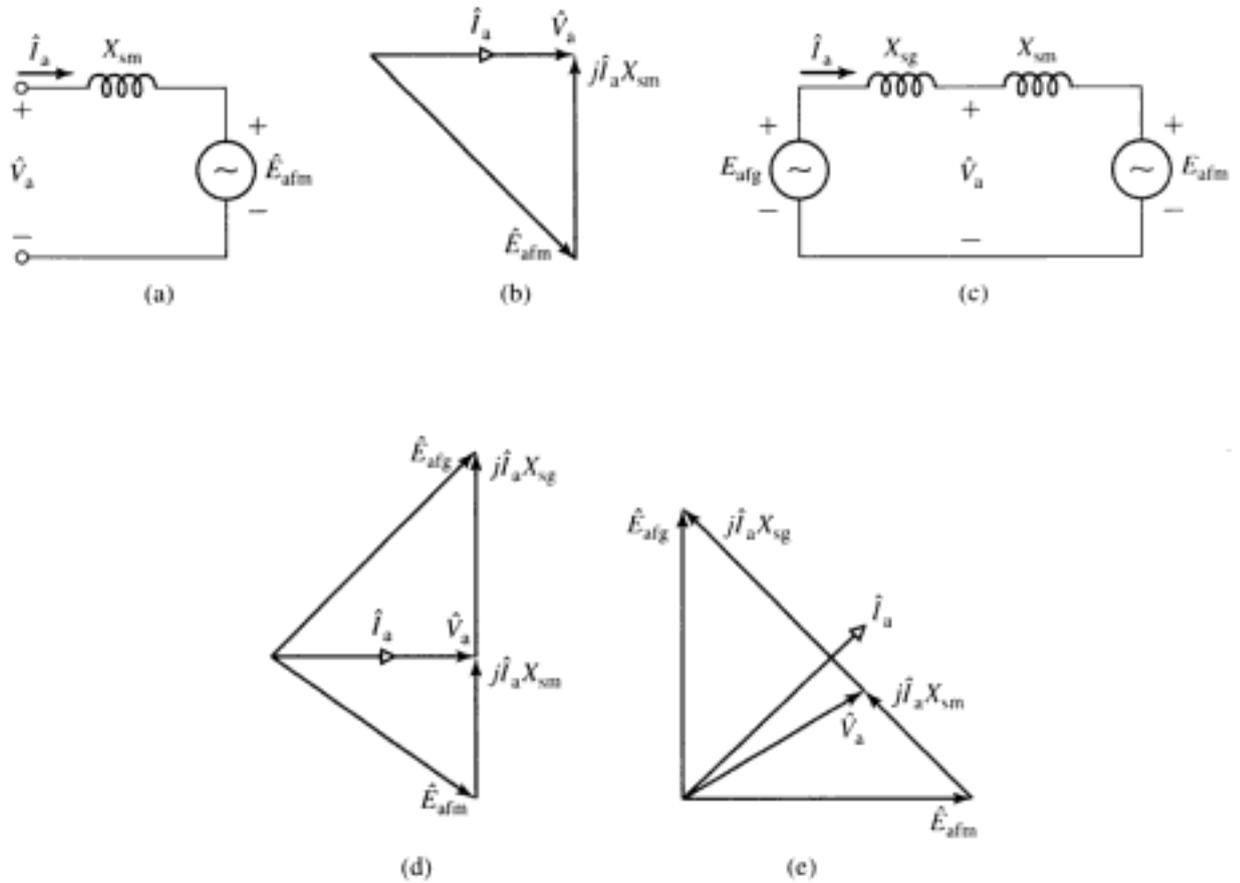


FIGURA 5.14 Circuitos equivalentes e diagramas fasoriais para o Exemplo 5.7.

Do diagrama fasorial, à plena carga, temos

$$E_{afm} = \sqrt{V_a^2 + (I_a X_{sm})^2} = 1515 \text{ V}$$

Quando a fonte de potência é um barramento infinito e a excitação de campo é constante,  $V_a$  e  $E_{afm}$  são constantes. Então, na Equação 5.46, substituindo  $E_1$  por  $V_a$ ,  $E_2$  por  $E_{afm}$  e  $X$  por  $X_{sm}$ , obtemos

$$\begin{aligned} P_{\max} &= \frac{V_a E_{afm}}{X_{sm}} = \frac{1328 \times 1515}{1,95} = 1032 \text{ kW/fase} \\ &= 3096 \text{ kW, trifásico} \end{aligned}$$

Por unidade, temos  $P_{\max} = 3096/1492 = 2,07$  por unidade. Como essa potência excede a especificação nominal do motor, ele não poderá entregar essa potência por longos períodos de tempo.

Com 30 pólos a 60 Hz, a velocidade angular síncrona pode ser encontrada a partir da Equação 4.40,

$$\omega_s = \left( \frac{2}{\text{pólos}} \right) \omega_c = \left( \frac{2}{30} \right) (2\pi 60) = 8\pi \text{ rad/s}$$

e, portanto,

$$T_{\max} = \frac{P_{\max}}{\omega_s} = \frac{3096 \times 10^3}{8\pi} = 123,2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- b. Quando a fonte de potência é um turbogerador, o circuito equivalente torna-se o mostrado na Fig. 5.14c, em que  $\hat{E}_{afg}$  é a tensão gerada do gerador e  $X_{sg}$  é a sua reatância síncrona. Aqui o gerador síncrono é equivalente a uma tensão externa  $\hat{V}_{EQ}$  e uma reatância  $X_{EQ}$  como na Fig. 5.12. O diagrama fasorial à plena carga do motor e fator de potência unitário está mostrado na Fig. 5.14d. Como antes,  $V_a = 1330$  V/fase à plena carga e  $E_{afm} = 1515$  V/fase.

Do diagrama fasorial,

$$E_{afg} = \sqrt{V_a^2 + (I_a X_{sg})^2} = 1657 \text{ V}$$

Como as excitações de campo e as velocidades de ambas as máquinas são constantes,  $E_{afg}$  e  $E_{afm}$  são constantes. Então, na Equação 5.46, substituindo  $E_1$  por  $E_{afg}$ ,  $E_2$  por  $E_{afm}$  e  $X$  por  $X_{sg} + X_{sm}$ , obtemos

$$\begin{aligned} P_{max} &= \frac{E_{afg} E_{afm}}{X_{sg} + X_{sm}} = \frac{1657 \times 1515}{4,60} = 546 \text{ kW/fase} \\ &= 1638 \text{ kW, trifásico} \end{aligned}$$

Por unidade, temos  $P_{max} = 1638/1492 = 1,10$  por unidade.

$$T_{max} = \frac{P_{max}}{\omega_s} = \frac{1635 \times 10^3}{8\pi} = 65,2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

O sincronismo seria perdido se um conjugado de carga superior a esse valor fosse aplicado ao eixo do motor. Naturalmente, como na parte (a), essa carga excede a especificação nominal do motor e não poderia ser sustentada em condições de funcionamento de regime permanente.

#### PROBLEMA PRÁTICO 5.6

Se o sistema de excitação do gerador do Exemplo 5.7 fosse danificado e devesse ser limitado a fornecer apenas a metade da excitação de campo da parte (b) do exemplo, calcule a potência máxima que poderia ser fornecida ao motor.

#### ■ Solução

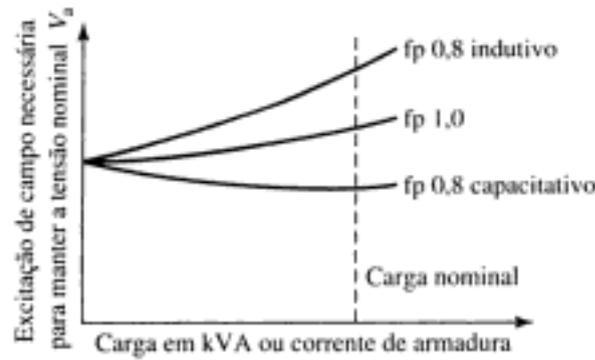
819 kW

## 5.5 CARACTERÍSTICAS DE OPERAÇÃO EM REGIME PERMANENTE

As principais características de funcionamento de uma máquina síncrona em regime permanente são descritas pelas inter-relações existentes entre a tensão de terminal, a corrente de campo, a corrente de armadura, o fator de potência e o rendimento. Uma seleção de curvas importantes do desempenho de máquinas síncronas em aplicações práticas será apresentada aqui.

Considere um gerador síncrono que esteja entregando potência com uma frequência e uma tensão de terminal nominal constantes para uma carga cujo fator de potência é constante. A curva que mostra a corrente de campo necessária para manter constante a tensão nominal de terminal, quando a carga de fator de potência constante é variada, é conhecida como *curva composta*. As formas características de três curvas compostas, para vários fatores de potência constantes, estão mostradas na Fig. 5.15.

Usualmente os valores nominais dos geradores síncronos são fornecidos em termos de carga especificada pela potência aparente máxima (kVA ou MVA) que pode ser fornecida



**FIGURA 5.15** Forma característica das curvas compostas de um gerador síncrono.

continuamente sem superaquecimento, para valores específicos de tensão e fator de potência (frequentemente 80, 85 ou 90 por cento, indutivo). Em geral, a capacidade do acionador mecânico primário limita a potência ativa de saída do gerador a um valor dentro da especificação de potência nominal. Devido a seu *sistema regulador de tensão* (que controla a corrente de campo em resposta ao valor medido da tensão de terminal), a máquina opera normalmente com uma tensão de terminal constante cujo valor está dentro de  $\pm 5$  por cento em torno da tensão nominal. Quando a potência ativa de carga e a tensão são fixadas, a potência de carga reativa permitida é limitada pelo aquecimento dos enrolamentos da armadura ou do campo. A Fig. 5.16 mostra um conjunto típico de *curvas de capacidade* para um turbogerador de grande porte refrigerado com hidrogênio. Elas fornecem as cargas máximas de potência reativa correspondentes a diversas cargas ativas que operam na tensão nominal de terminal. Observe que as três curvas vistas na figura correspondem a pressões diferentes do gás hidrogênio de refrigeração. Como pode-se ver, o aumento da pressão de hidrogênio melhora o resfriamento e permite uma carga global maior para a máquina.

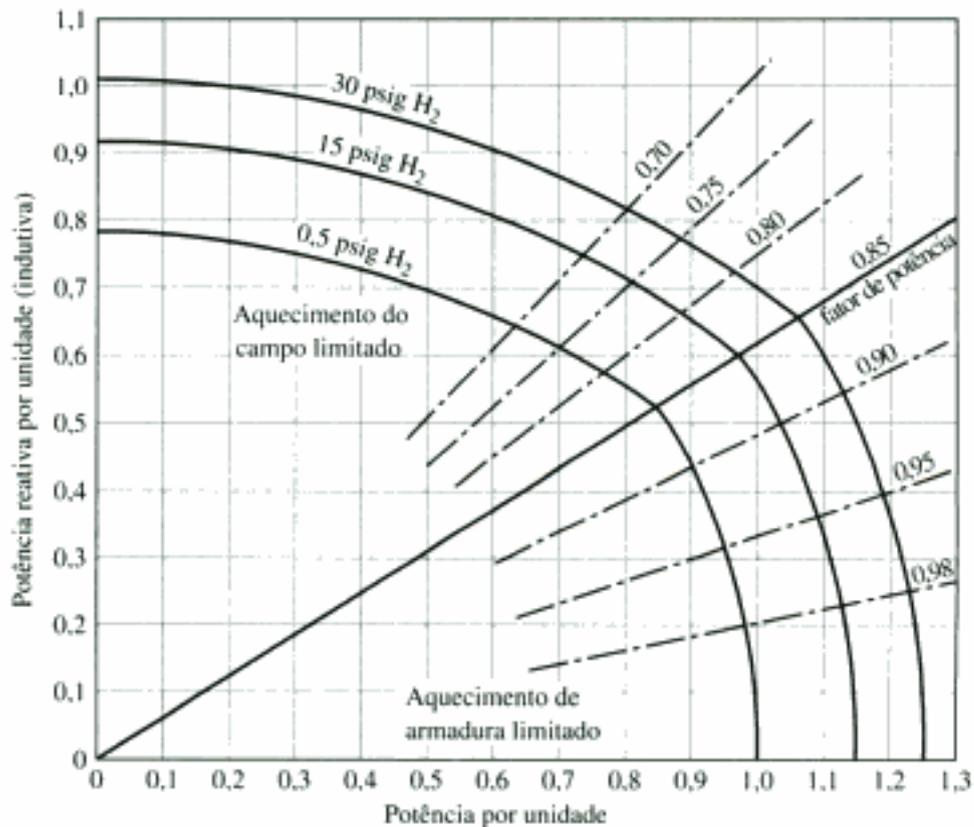
O aquecimento do enrolamento de armadura é o fator limitante dentro da região que está compreendida entre os valores unitário e nominal do fator de potência (0,85, indutivo, na Fig. 5.16). Por exemplo, para uma dada potência de carga ativa, quando se aumenta a potência reativa, além dos limites da porção de aquecimento de armadura da curva de capacidade, resulta uma corrente de armadura que é superior a possível de ser refrigerada com sucesso, resultando temperaturas de enrolamento de armadura que danificam o seu isolamento e degradam a sua vida útil. De modo semelhante, para fatores de potência baixos, o aquecimento do enrolamento de campo é o fator limitante.

As curvas de capacidade fornecem uma orientação valiosa tanto para os planejadores de sistemas de potência como para os operadores. Quando os planejadores de sistema estão analisando modificações e acréscimos a um sistema de potência, eles podem rapidamente verificar se os diversos geradores existentes ou propostos podem abastecer com segurança as cargas demandadas. De modo semelhante, os operadores de sistema podem ver rapidamente se geradores individuais podem responder com segurança às alterações de carga que normalmente ocorrem durante a operação do sistema.

A seguir, será vista a obtenção das curvas de capacidade, como as da Fig. 5.16. A operação, sob condições de tensão de terminal e corrente de armadura constantes (no valor máximo permitido pelas limitações de aquecimento), corresponde a um valor constante de potência aparente de saída que é determinada pelo produto da tensão de terminal pela corrente. Como a potência aparente por unidade é dada por

$$\text{Potência aparente} = \sqrt{P^2 + Q^2} = V_a I_a \quad (5.48)$$

onde  $P$  representa a potência ativa por unidade e  $Q$  representa a potência reativa por unidade, é possível ver que uma potência aparente constante corresponde a um círculo cujo centro es-



**FIGURA 5.16** Curvas de capacidade de um turbogerador, refrigerado com hidrogênio, fator de potência de 0,85 e relação de curto-circuito de 0,80. A potência de base em MVA é a nominal na pressão de 0,5 psig de hidrogênio.

tá na origem do gráfico da potência aparente *versus* a potência ativa. Da Equação 5.48 e para uma tensão de terminal constante, observe também que a potência aparente constante corresponde a uma corrente de enrolamento de armadura constante e, conseqüentemente, a um aquecimento constante do enrolamento de armadura. Esse círculo, que corresponde ao nível máximo aceitável de aquecimento da armadura, está mostrado na Fig. 5.17.

De modo semelhante, considere o funcionamento quando a tensão de terminal é constante e a corrente de campo (e conseqüentemente  $E_{af}$ ) está limitada a um valor máximo, também determinado por limitações de aquecimento.

Por unidade, tem-se

$$P - jQ = \hat{V}_a \hat{I}_a \quad (5.49)$$

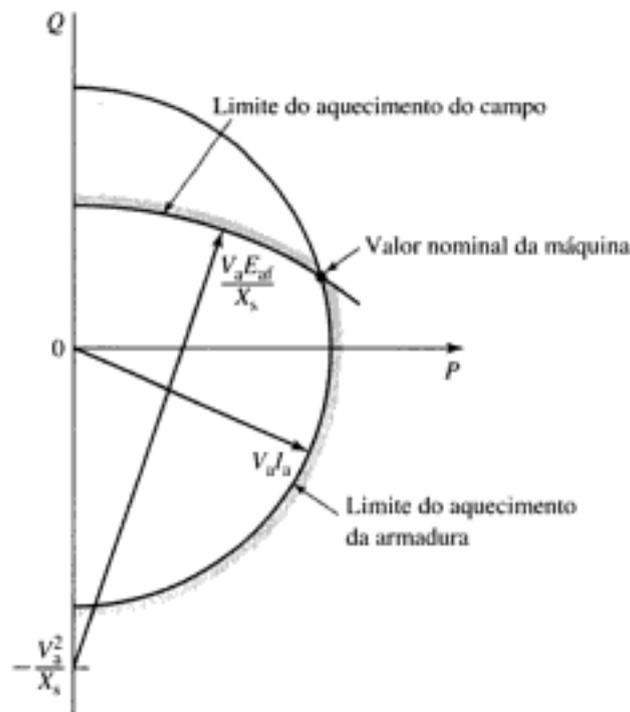
Da Equação 5.24 (com  $R_a = 0$ ),

$$\hat{E}_{af} = \hat{V}_a + jX_s \hat{I}_a \quad (5.50)$$

As Equações 5.49 e 5.50 podem ser resolvidas resultando

$$P^2 + \left(Q + \frac{V_a^2}{X_s}\right)^2 = \left(\frac{V_a E_{af}}{X_s}\right)^2 \quad (5.51)$$

Essa equação corresponde ao círculo centrado em  $Q = -V_a^2/X_s$  na Fig. 5.17 e determina o limite de aquecimento do campo sobre a operação da máquina na Fig. 5.16. É comum especificar os valores nominais da máquina (potência aparente e fator de potência) como sendo o ponto de interseção das curvas limites de aquecimento da armadura e do campo.



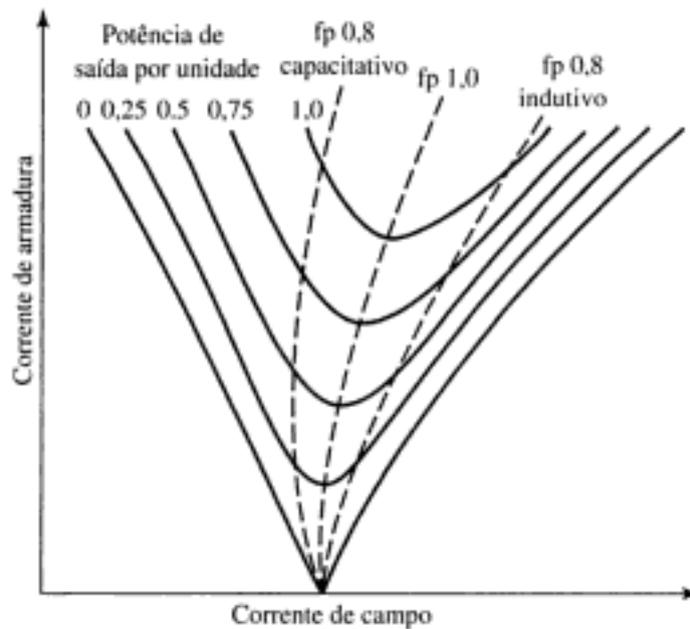
**FIGURA 5.17** Construção usada na obtenção da curva de capacidade de um gerador síncrono.

Para uma dada potência ativa de carga, o fator de potência, com o qual uma máquina síncrona opera e conseqüentemente a sua corrente de armadura, pode ser controlado ajustando a excitação de campo. A curva que mostra a relação entre as correntes de armadura e campo, para uma tensão de terminal e uma potência ativa constantes, é conhecida como *curva V*, devido a sua forma característica. Uma família de curvas V para um gerador síncrono tem a forma mostrada na Fig. 5.18.

Para uma potência de saída constante, a corrente de armadura é mínima quando o fator de potência é unitário, e aumenta à medida que o fator de potência diminui. As linhas tracejadas representam os pontos de fator de potência constante; elas são as curvas compostas do gerador síncrono (veja a Fig. 5.15) as quais mostram como a corrente de campo deve ser variada à medida que a carga é alterada de modo a manter constante o fator de potência. Pontos à direita da curva composta, para fator de potência unitário, correspondem a uma sobreexcitação e a um fator de potência indutivo; pontos à esquerda correspondem a uma subexcitação e a um fator de potência capacitivo. As curvas V e as curvas compostas de um motor síncrono são muito semelhantes às dos geradores síncronos. De fato, se não fosse pelos pequenos efeitos da resistência de armadura, as curvas compostas de motores e geradores seriam idênticas exceto que as curvas com fatores de potência indutivo e capacitivo seriam permutadas.

Como ocorre com todas as máquinas eletromecânicas, o rendimento de uma máquina síncrona, que esteja operando em um ponto qualquer em particular, é determinado pelas perdas. Essas consistem em perdas ôhmicas  $I^2R$  nos enrolamentos, perdas no núcleo, perdas suplementares e perdas mecânicas. Como essas perdas se alteram de acordo com as condições de operação e são um tanto difíceis de serem medidas com exatidão, vários procedimentos padronizados foram desenvolvidos para se calcular o rendimento das máquinas síncronas.<sup>2</sup> Os princípios gerais desses cálculos estão descritos no Apêndice D.

<sup>2</sup> Veja, por exemplo, IEEE Std. 115-1995, "IEEE Guide: Test Procedures for Synchronous Machines," Institute of Electrical and Electronic Engineers, Inc., 345 East 47th Street, New York, New York, 10017 e NEMA Standards Publication No. MG-1-1998, "Motors and Generators," National Electrical Manufacturers Association, 1300 North 17th Street, Suite 1847, Rosslyn, Virginia, 22209.



**FIGURA 5.18** Forma típica das curvas V de um gerador síncrono.

#### EXEMPLO 5.8

Na Fig. 5.19, são mostrados dados relativos às perdas da máquina síncrona de 45 kVA dos Exemplos 5.4 e 5.5. Calcule o seu rendimento quando ela está funcionando como motor síncrono, com uma tensão de terminal de 220 V e uma potência de entrada de 45 kVA na sua armadura com um fator de potência 0,80 indutivo. A corrente de campo, medida em um ensaio de carga realizado sob essas condições, é  $I_f(\text{ensaio}) = 5,50$  A. Suponha que os enrolamentos de armadura e de campo estejam a uma temperatura de  $75^\circ\text{C}$ .

#### ■ Solução

Para as condições de operação especificadas, a corrente de armadura é

$$I_a = \frac{45 \times 10^3}{\sqrt{3} \times 230} = 113 \text{ A}$$

As perdas ôhmicas  $I^2R$  devem ser calculadas com base nas resistências CC dos enrolamentos a  $75^\circ\text{C}$ . Corrigindo as resistências de enrolamento por meio da Equação 5.32, obtém-se

$$\text{Resistência do enrolamento de campo } R_f \text{ a } 75^\circ\text{C} = 35,5 \ \Omega$$

$$\text{Resistência CC de armadura } R_a \text{ a } 75^\circ\text{C} = 0,0399 \ \Omega / \text{ fase}$$

As perdas ôhmicas  $I^2R$  de campo são, portanto,

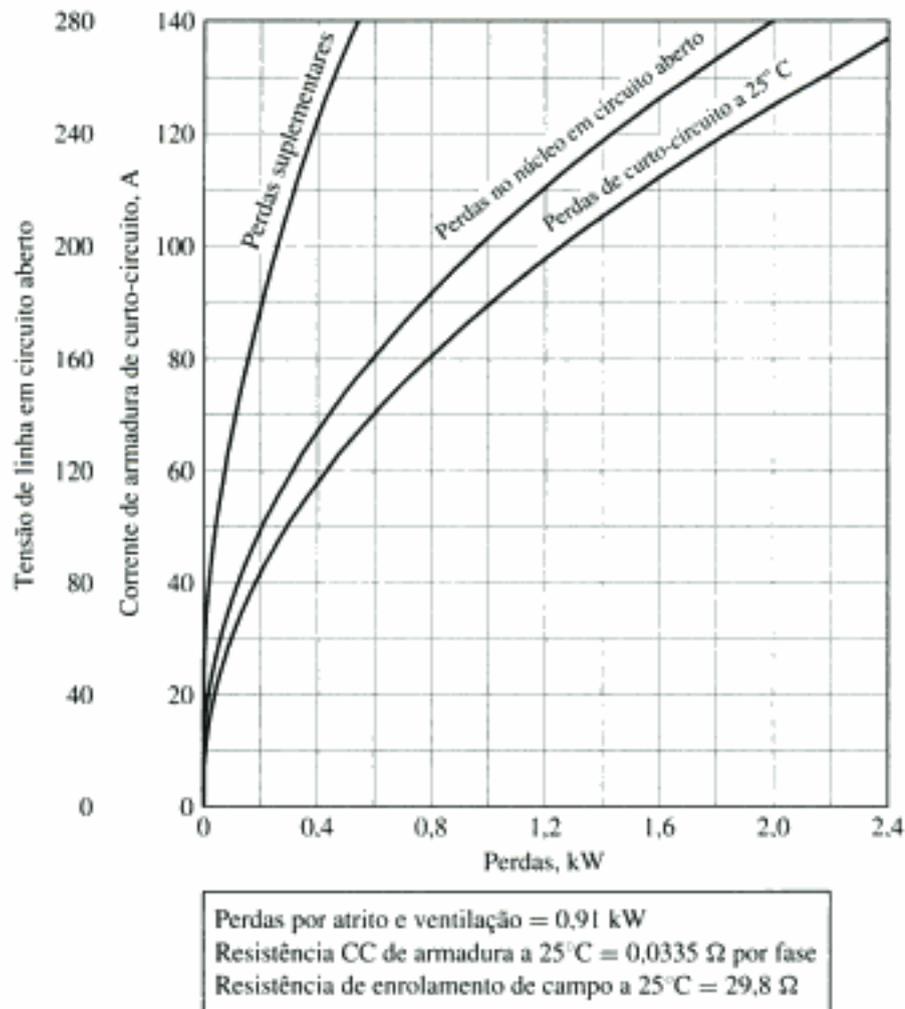
$$I_f^2 R_f = 5,50^2 \times 35,5 = 1,07 \text{ kW}$$

De acordo com as normas ANSI, as perdas no sistema de excitação, inclusive as de qualquer reostato de campo, não são incluídas.

As perdas ôhmicas  $I^2R$  são

$$3I_a^2 R_a = 3 \times 113^2 \times 0,0399 = 1,53 \text{ kW}$$

e, da Equação 5.19, para  $I_a = 113$  A, as perdas suplementares são iguais a 0,37 kW. As perdas suplementares são consideradas responsáveis pelo fluxo de dispersão da armadura. De acordo com as normas ANSI, nenhuma correção de temperatura é aplicada às perdas suplementares.



**FIGURA 5.19** Perdas em uma máquina síncrona trifásica, ligada em Y, de 45 kVA, 220 V, 60 Hz e seis pólos (Exemplo 5.8).

As perdas no núcleo sob carga são basicamente uma função do fluxo principal presente no núcleo do motor. Como foi discutido no Capítulo 2, a tensão no ramo de magnetização de um transformador (correspondendo ao fluxo no núcleo do transformador) é calculada subtraindo, da tensão de terminal, a queda de tensão presente na impedância de dispersão. Fazendo uma analogia, o fluxo principal no núcleo de uma máquina síncrona (isto é, o fluxo de entreferro) pode ser calculado como se fosse a tensão presente na impedância de dispersão da máquina. Tipicamente, como a resistência de armadura é pequena, é comum ignorar a resistência e calcular a tensão na reatância de dispersão. Então, as perdas no núcleo podem ser estimadas a partir da curva de perdas no núcleo em circuito aberto, usando-se o valor de tensão presente na reatância de dispersão.

Neste exemplo, desconhecemos a reatância de dispersão da máquina. Assim, uma abordagem consiste em simplesmente supor que a tensão de entreferro seja igual à tensão de terminal e determinar as perdas no núcleo sob carga a partir da curva de perdas no núcleo, correspondentes à tensão de terminal.<sup>3</sup> Neste caso, a tensão de terminal é de 230 V, tensão de linha, e assim, da Fig. 5.19, as perdas no núcleo em circuito aberto são de 1,30 kW.

<sup>3</sup> Mesmo não sendo rigorosamente correta, tornou-se comum a prática de ignorar a queda de tensão na impedância de dispersão quando as perdas no núcleo sob carga são determinadas.

Para estimar o efeito de se ter ignorado a queda de tensão na reatância de dispersão, vamos assumir que a reatância de dispersão deste motor seja 0,20 por unidade ou

$$X_{st} = 0,2 \left( \frac{220^2}{45 \times 10^3} \right) = 0,215 \, \Omega$$

Com essa suposição, a tensão de entreferro é igual a

$$\begin{aligned} \hat{V}_2 - jX_{st}\hat{I}_s &= \frac{230}{\sqrt{3}} - j0,215 \times 141(0,8 + j0,6) \\ &= 151 - j24,2 = 153 e^{-j9,1^\circ} \text{ V, tensão de fase} \end{aligned}$$

o que corresponde a uma tensão de linha de  $\sqrt{3} (153) = 265$  V. Da Fig. 5.19, as perdas correspondentes no núcleo são de 1,8 kW, ou seja, 500 W, superiores ao valor obtido quando se usa a tensão de terminal. Para os objetivos deste exemplo, usaremos esse valor.

Incluindo 0,91 kW de perdas por atrito e ventilação, agora todas as perdas estão determinadas:

$$\text{Perdas totais} = 1,07 + 1,53 + 0,37 + 1,80 + 0,91 = 5,68 \text{ kW}$$

A potência total de entrada do motor é a potência de entrada da armadura mais a do campo.

$$\text{Potência de entrada} = 0,8 \times 45 + 1,07 = 37,1 \text{ kW}$$

e a potência de saída é igual à potência total de entrada menos as perdas totais

$$\text{Potência de saída} = 37,1 - 5,68 = 31,4 \text{ kW}$$

Portanto,

$$\text{Rendimento} = \frac{\text{Potência de saída}}{\text{Potência de entrada}} = 1 - \frac{31,4}{37,1} = 0,846 = 84,6\%$$

### PROBLEMA PRÁTICO 5.7

Calcule o rendimento do motor do Exemplo 5.8 se estiver operando com uma potência de entrada de 45 kW e um fator de potência unitário. Você pode assumir que as perdas suplementares permanecem inalteradas e que a corrente de campo do motor é 4,40 A.

#### ■ Solução

Rendimento = 88,4%

## 5.6 EFEITOS DOS PÓLOS SALIENTES; INTRODUÇÃO À TEORIA DOS EIXOS DIRETO E EM QUADRATURA

As características essenciais das máquinas de pólos salientes são desenvolvidas nesta seção com base em raciocínio físico. Um tratamento matemático, baseado na indutância para o equacionamento, como o apresentado na Seção 5.2, é dado no Apêndice C, onde a transformação dq0 é desenvolvida.

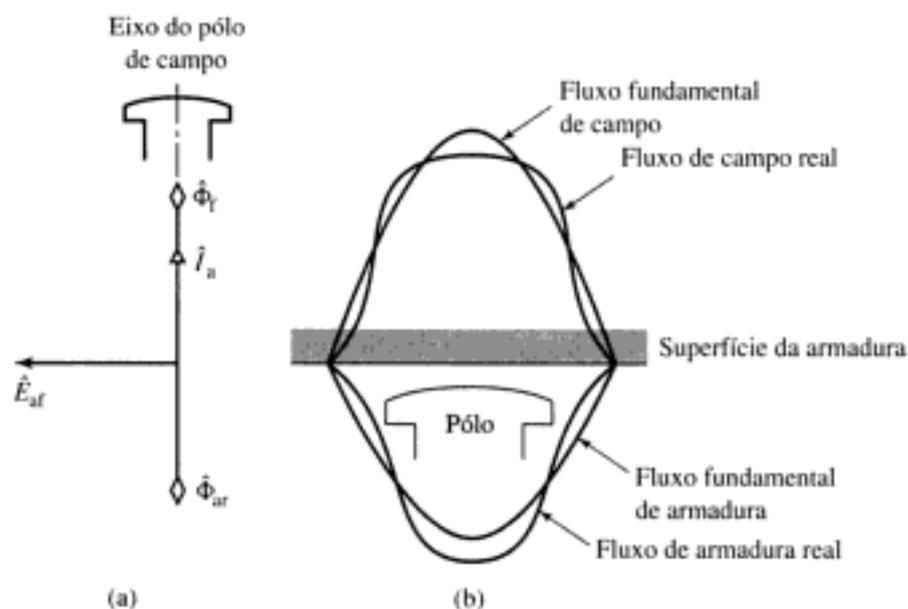
### 5.6.1 Ondas de Fluxo e de FMM

O fluxo produzido por uma onda de FMM, em um entreferro uniforme de uma máquina, não depende do alinhamento espacial da onda em relação aos pólos do campo. Entretanto, em uma máquina de pólos salientes, como a mostrada esquematicamente na Fig. 5.20, a direção preferencial de magnetização é determinada pelas protuberâncias dos pólos do campo. A permeância ao longo do eixo polar, referido comumente como *eixo direto* do rotor, é apreciavelmente maior do que a presente ao longo do eixo interpolar, referido comumente como *eixo de quadratura*.

Por definição, observe que o enrolamento de campo produz um fluxo que está orientado segundo o eixo direto do rotor. Assim, quando diagramas fasoriais são desenhados, a FMM do enrolamento de campo e o fluxo correspondente  $\hat{\Phi}_f$  estão localizados ao longo do eixo direto do rotor. A tensão interna gerada é proporcional à derivada, em relação ao tempo, do fluxo de enrolamento de campo e, assim, o seu fasor  $\hat{E}_{af}$ , em relação ao fluxo  $\hat{\Phi}_f$ , está adiantado de  $90^\circ$ . Como, por convenção, o eixo em quadratura está adiantado em relação ao eixo direto de  $90^\circ$ , vemos que *o fasor da tensão gerada  $\hat{E}_{af}$  está localizado ao longo do eixo em quadratura*. Desse modo, um ponto chave da análise dos diagramas fasoriais de uma máquina síncrona é que, após localizar o fasor  $\hat{E}_{af}$ , as localizações de ambos os eixos direto e em quadratura podem ser determinadas imediatamente. Isso forma a base da formulação, em termos de eixos direto e em quadratura, que é usada na análise das máquinas de pólos salientes em que todas as tensões e correntes podem ser decompostas em suas *componentes segundo os eixos direto e em quadratura*.

A onda do fluxo de reação da armadura  $\hat{\Phi}_{ar}$  está atrasada em relação à onda do fluxo de campo por um ângulo espacial de  $90^\circ + \phi_{ar}$ , em que  $\phi_{ar}$  é o ângulo de fase temporal pelo qual a corrente de armadura está atrasada em relação à tensão gerada. Se a corrente de armadura  $\hat{I}_a$  estiver atrasada em relação à tensão gerada  $\hat{E}_{af}$  por  $90^\circ$ , a onda do fluxo de reação da armadura estará diretamente em frente aos pólos de campo e com um sentido oposto ao do fluxo de campo  $\hat{\Phi}_f$ , como se mostra no diagrama fasorial da Fig. 5.20a.

As componentes correspondentes às ondas de densidade de fluxo na superfície da armadura, produzidas pela corrente de campo e pela componente fundamental espacial síncrona girante da FMM da reação da armadura, estão mostradas na Fig. 5.20b, na qual foram descon-



**FIGURA 5.20** Fluxos de entreferro ao longo do eixo direto de uma máquina síncrona de pólos salientes.

siderados os efeitos das ranhuras. As ondas consistem em uma componente fundamental espacial e uma família de componentes harmônicas ímpares. Em uma máquina bem projetada, usualmente os efeitos das harmônicas são pequenos. Desse modo, apenas as componentes espaciais fundamentais serão consideradas. As componentes fundamentais são as representadas pelos fasores de fluxo por pólo  $\hat{\Phi}_f$  e  $\hat{\Phi}_a$  na Fig. 5.20a.

As condições são muito diferentes quando a corrente de armadura está em fase com a tensão gerada, como está ilustrado no diagrama fasorial da Fig. 5.21a. Então, o eixo da onda de reação da armadura está em frente a um espaço interpolar, como mostrado na Fig. 5.21b. A onda de fluxo da reação da armadura está bastante distorcida, consistindo principalmente em uma fundamental e uma terceira harmônica espacial proeminente. A onda de fluxo de terceira harmônica gera FEMs de terceira harmônica nas tensões de fase da armadura. Elas serão da forma

$$E_{3,a} = \sqrt{2}V_3 \cos(3\omega_e t + \phi_3) \tag{5.52}$$

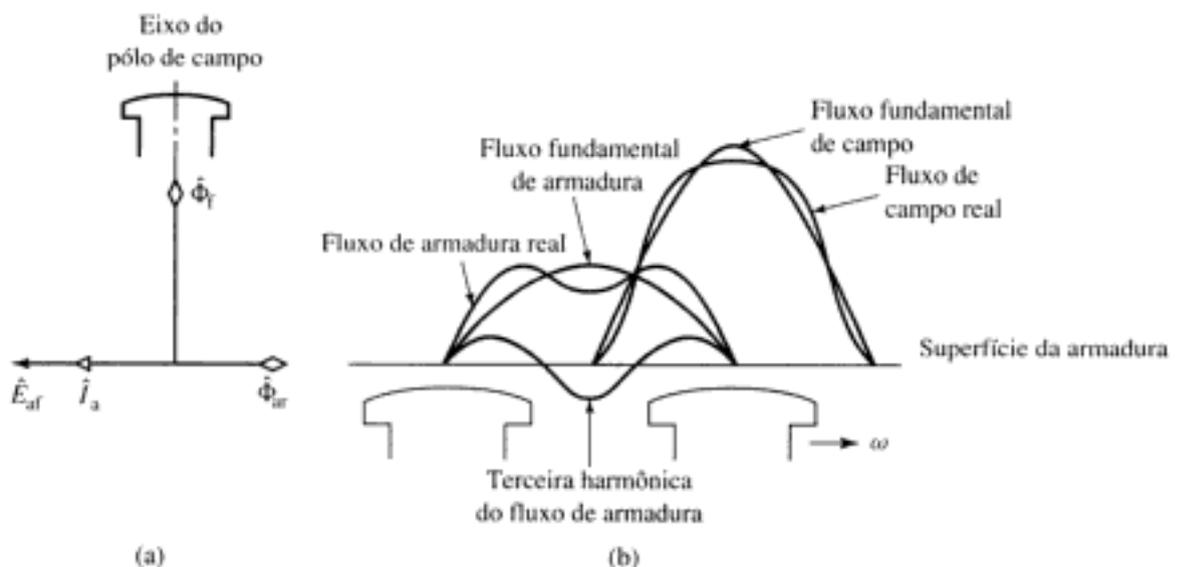
$$E_{3,b} = \sqrt{2}V_3 \cos(3(\omega_e t - 120^\circ) + \phi_3) = \sqrt{2}V_3 \cos(3\omega_e t + \phi_3) \tag{5.53}$$

$$E_{3,c} = \sqrt{2}V_3 \cos(3(\omega_e t - 120^\circ) + \phi_3) = \sqrt{2}V_3 \cos(3\omega_e t + \phi_3) \tag{5.54}$$

Observe que essas tensões de fase de terceira harmônica são iguais em módulo e fase. Conseqüentemente, elas não aparecem como componentes das tensões de linha, que são iguais às diferenças entre as diversas tensões de fase.

Devido ao comprimento de entreferro maior entre os pólos e à relutância proporcionalmente maior, a componente fundamental espacial do fluxo de reação da armadura, quando a reação da armadura está situada ao longo do eixo de quadratura (Fig. 5.21), é inferior à fundamental espacial do fluxo de reação da armadura que é criado pela mesma corrente de armadura quando a onda de fluxo da armadura está precisamente sobre o eixo direto (Fig. 5.20). Dessa forma, a reatância de magnetização relativa ao eixo em quadratura é inferior à relativa ao eixo direto.

Focalizando a nossa atenção nas componentes espaciais da FMM e do fluxo de entreferro, os efeitos dos pólos salientes podem ser levados em consideração decompondo a corrente de armadura  $\hat{I}_a$  em duas componentes, uma ao longo do eixo direto e outra ao longo do eixo em quadratura, como mostra o diagrama fasorial da Fig. 5.22. Esse diagrama está desenhado



**FIGURA 5.21** Fluxos de entreferro ao longo do eixo em quadratura de uma máquina síncrona de pólos salientes.

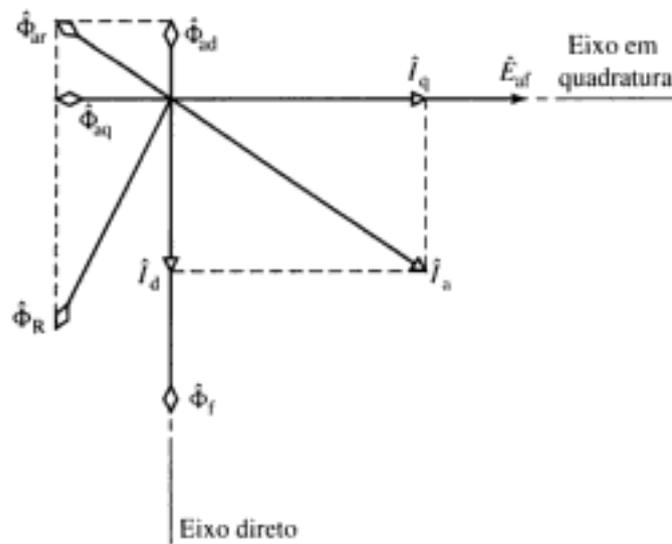


FIGURA 5.22 Diagrama fasorial de uma máquina síncrona de pólos salientes.

para o caso de um gerador, de pólos salientes não saturados, que opera com um fator de potência indutivo. A componente no eixo direto  $\hat{I}_d$  da corrente de armadura, em quadratura no tempo com a tensão gerada  $\hat{E}_{af}$ , produz no eixo dos pólos do campo (eixo direto) a componente  $\hat{\Phi}_{ad}$  da fundamental espacial do fluxo de reação da armadura, como na Fig. 5.20. A componente  $\hat{I}_q$  do eixo em quadratura, em fase com a tensão gerada, produz a componente  $\hat{\Phi}_{aq}$  da fundamental espacial do fluxo de reação da armadura, em quadratura espacial com os pólos do campo, como na Fig. 5.21. Observe que os subscritos d (“direto”) e q (“quadratura”) nos fluxos de reação da armadura referem-se à sua fase espacial e não à fase temporal das correntes componentes que os produzem.

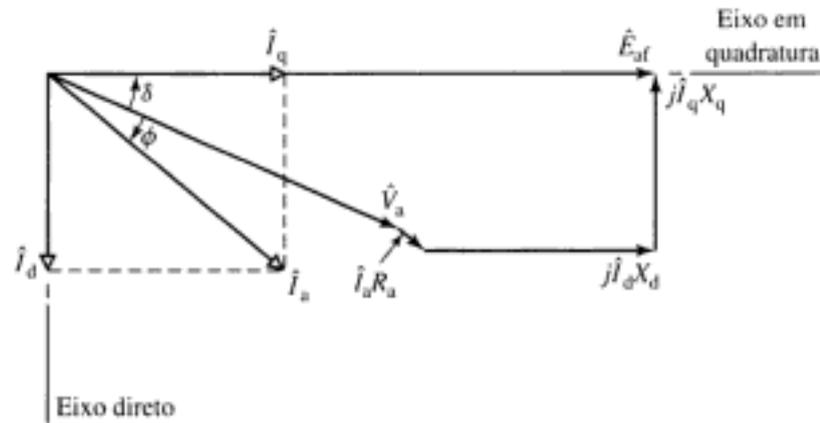
Assim, uma *grandeza de eixo direto* é uma cujo efeito magnético está alinhado com os eixos dos pólos do campo; as FMMs de eixo direto produzem fluxos nesses eixos. Uma *grandeza de eixo em quadratura* é uma cujo efeito magnético está centrado no espaço interpolar. No caso de uma máquina não saturada, o fluxo de reação da armadura  $\hat{\Phi}_{ar}$  é a soma das componentes  $\hat{\Phi}_{ad}$  e  $\hat{\Phi}_{aq}$ . O fluxo resultante  $\hat{\Phi}_R$  é a soma de  $\hat{\Phi}_{ar}$  e do fluxo de campo  $\hat{\Phi}_f$ .

## 5.6.2 Diagramas Fasoriais para Máquinas de Pólos Salientes

Para cada uma das componentes de corrente  $\hat{I}_d$  e  $\hat{I}_q$ , há associada uma componente de queda de tensão nas reatâncias síncronas,  $j\hat{I}_d X_d$  e  $j\hat{I}_q X_q$ , respectivamente. As reatâncias  $X_d$  e  $X_q$  são, respectivamente, as *reatâncias síncronas de eixo direto e em quadratura*. A essas reatâncias são atribuídos todos os efeitos indutivos de todas as componentes espaciais fundamentais dos fluxos que são criados pelas correntes de armadura nos eixos direto e em quadratura, incluindo-se os fluxos de dispersão e de reação da armadura. Assim, os efeitos indutivos das ondas de fluxo da reação de armadura, nos eixos direto e em quadratura, podem ser calculados a partir das *reatâncias de magnetização de eixo direto e em quadratura*,  $X_{\varphi d}$  e  $X_{\varphi q}$ , respectivamente, de modo semelhante à reatância de magnetização  $X_\varphi$  da teoria do rotor cilíndrico. As reatâncias síncronas de eixo direto e em quadratura são dadas então por

$$X_d = X_{al} + X_{\varphi d} \quad (5.55)$$

$$X_q = X_{al} + X_{\varphi q} \quad (5.56)$$



**FIGURA 5.23** Diagrama fasorial de um gerador síncrono mostrando as relações entre as tensões e as correntes.

onde  $X_d$  é a reatância de dispersão da armadura, considerada a mesma para as correntes de eixo direto e em quadratura. Compare as Equações 5.55 e 5.56 com a Equação 5.25, do caso de pólo não saliente. Como mostrado na Fig. 5.23, para o diagrama fasorial do gerador, a tensão gerada  $\hat{E}_{gf}$  é igual à soma fasorial da tensão de terminal  $\hat{V}_a$  mais a queda  $\hat{I}_a R_a$ , na resistência de armadura, e as quedas  $j\hat{I}_d X_d + j\hat{I}_q X_q$ , nas componentes de reatância síncrona.

Como já discutimos, a reatância síncrona do eixo em quadratura  $X_q$  é menor do que a do eixo direto  $X_d$  devido à relutância de entreferro ser mais elevada no eixo em quadratura. Tipicamente,  $X_q$  está entre  $0,6X_d$  e  $0,7X_d$ . Mesmo sendo máquinas de rotor cilíndrico, observe que um pequeno efeito de pólos salientes também está presente em turboalternadores, devido ao efeito das ranhuras do rotor sobre a relutância no eixo em quadratura.

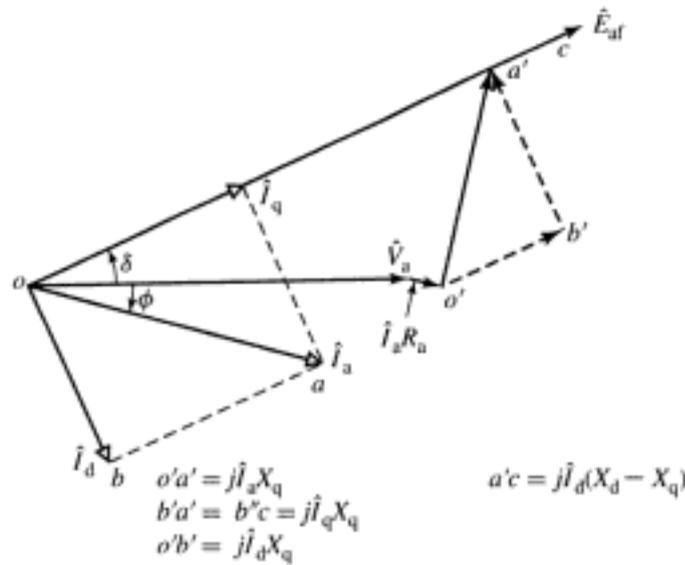
Como no caso da reatância síncrona  $X_s$  de uma máquina de rotor cilíndrico, essas reatâncias não são constantes em relação à densidade de fluxo, mas saturam à medida que a densidade de fluxo da máquina cresce. É comum encontrar especificados os valores desses parâmetros tanto para o caso de saturação como o de não saturação.<sup>4</sup> Os valores de saturação aplicam-se a condições típicas de operação da máquina em que a tensão de terminal está próxima de seu valor nominal. Para os nossos propósitos neste capítulo e em outros locais do livro, não daremos atenção a essa questão e, a não ser que especificamente expresso, o leitor pode assumir que os valores de  $X_d$  e  $X_q$  dados são os de saturação.

Ao usar o diagrama fasorial da Fig. 5.23, a corrente de armadura deve ser decomposta em suas componentes de eixo direto e em quadratura. Essa decomposição supõe que o ângulo de fase  $\phi + \delta$  da corrente de armadura, em relação à tensão gerada, seja conhecido. Frequentemente, o ângulo de fator de potência  $\phi$  nos terminais da máquina é conhecido explicitamente, ao invés do ângulo  $\phi + \delta$ . Torna-se necessário, então, localizar o eixo em quadratura e calcular o ângulo de potência  $\delta$ . Isso pode ser feito com ajuda da construção mostrada na Fig. 5.24.

O diagrama fasorial da Fig. 5.23 é repetido na Fig. 5.24 na forma de fasores desenhados em linha cheia. O estudo desse diagrama fasorial mostra que o fasor tracejado  $o'a'$ , perpendicular a  $\hat{I}_a$ , é igual a  $j\hat{I}_q X_q$ . Esse resultado procede geometricamente do fato de que os triângulos  $o'a'b'$  e  $oab$  são semelhantes porque os lados correspondentes são perpendiculares. Portanto,

$$\frac{o'a'}{oa} = \frac{b'a'}{ba} \quad (5.57)$$

<sup>4</sup> Veja, por exemplo, IEEE Std. 115-1995, "IEEE Guide: Test Procedures for Synchronous Machines," Institute of Electrical and Electronic Engineers, Inc., 345 East 47th Street, New York, New York, 10017.



**FIGURA 5.24** Relações entre as tensões componentes de um diagrama fasorial.

ou

$$o'a' = \left( \frac{b'a'}{ba} \right) oa = \frac{|\hat{I}_q| X_q}{|\hat{I}_a|} |\hat{I}_a| = X_q |\hat{I}_a| \quad (5.58)$$

Assim, o lado  $o'a'$  é o fasor  $jX_q \hat{I}_a$ , e a soma fasorial  $\hat{V}_a + \hat{I}_a R_a + j\hat{I}_d X_d$  fornece a posição angular da tensão gerada  $\hat{E}_{af}$  (a qual, por sua vez, está sobre o eixo em quadratura). Desse modo, também ficam localizados os eixos direto e em quadratura. Fisicamente, isso deve ser assim porque, em uma máquina normal, toda a excitação de campo está no eixo direto. Após encontrar o eixo em quadratura (e também  $\delta$ ),  $\hat{E}_{af}$  pode ser obtido como se mostra na Fig. 5.23, ou seja,

$$\hat{E}_{af} = \hat{V}_a + R_a \hat{I}_a + jX_d \hat{I}_d + jX_q \hat{I}_q \quad (5.59)$$

Um uso dessas relações para se determinar as necessidades de excitação nos terminais de uma máquina de pólos salientes, em condições especificadas de operação, está ilustrado no Exemplo 5.9.

#### EXEMPLO 5.9

As reatâncias  $X_d$  e  $X_q$  de um gerador síncrono de pólos salientes são 1,00 e 0,60 por unidade, respectivamente. A resistência de armadura pode ser considerada desprezível. Calcule a tensão gerada quando o gerador fornece sua potência aparente nominal em kVA, com fator de potência indutivo e tensão nominal de terminal.

#### ■ Solução

Primeiro, a fase de  $\hat{E}_{af}$  deve ser encontrada de modo que  $\hat{I}_a$  possa ser decomposta em suas componentes de eixo direto e em quadratura. O diagrama fasorial está mostrado na Fig. 5.25. Como se faz comumente em tais problemas, a tensão de terminal  $\hat{V}_a$  será usada como o fasor de referência, isto é,  $\hat{V}_a = V_a e^{j0^\circ} = V_a$ .

Por unidade,

$$\hat{I}_a = I_a e^{j\phi} = 0,80 - j0,60 = 1,0 e^{-j36,9^\circ}$$

A posição do eixo em quadratura é dada pelo fasor

$$\hat{E}' = \hat{V}_s + jX_q \hat{I}_s = 1,0 + j0,60(1,0 e^{-j36,9^\circ}) = 1,44 e^{j19,4^\circ}$$

Assim,  $\delta = 19,4^\circ$  e o ângulo de fase entre  $\hat{E}'_{af}$  e  $\hat{I}_s$  é  $\delta - \phi = 19,4^\circ - (-36,9^\circ) = 56,3^\circ$ . Observe que, embora possa parecer a partir da Fig. 5.25 que o ângulo apropriado seja  $\delta + \phi$ , isso não é correto porque o ângulo  $\phi$ , como foi desenhado na Fig. 5.25, é negativo. Em geral, o ângulo desajado é igual à diferença entre o ângulo de potência e o ângulo de fase da corrente de terminal.

Agora, a corrente de armadura pode ser decomposta em suas componentes de eixo direto e em quadratura. Seus módulos são

$$I_d = |\hat{I}_s| \sin(\delta - \phi) = 1,00 \sin(56,3^\circ) = 0,832$$

e

$$I_q = |\hat{I}_s| \cos(\delta - \phi) = 1,00 \cos(56,3^\circ) = 0,555$$

Na forma de fasor,

$$\hat{I}_d = 0,832 e^{j(-90^\circ + 19,4^\circ)} = 0,832 e^{j70,6^\circ}$$

e

$$\hat{I}_q = 0,555 e^{j19,4^\circ}$$

Agora podemos obter  $E'_{af}$  da Equação 5.59,

$$\begin{aligned} \hat{E}'_{af} &= \hat{V}_s + jX_d \hat{I}_d + jX_q j \hat{I}_q \\ &= 1,0 + j1,0(0,832 e^{j70,6^\circ}) + j0,6(0,555 e^{j19,4^\circ}) \\ &= 1,77 e^{j19,4^\circ} \end{aligned}$$

e vemos que  $E'_{af} = 1,77$ , por unidade. Como esperado, observe que  $\angle \hat{E}'_{af} = 19,4^\circ = \delta$ , confirmando assim que  $\hat{E}'_{af}$  está localizado sobre o eixo em quadratura.

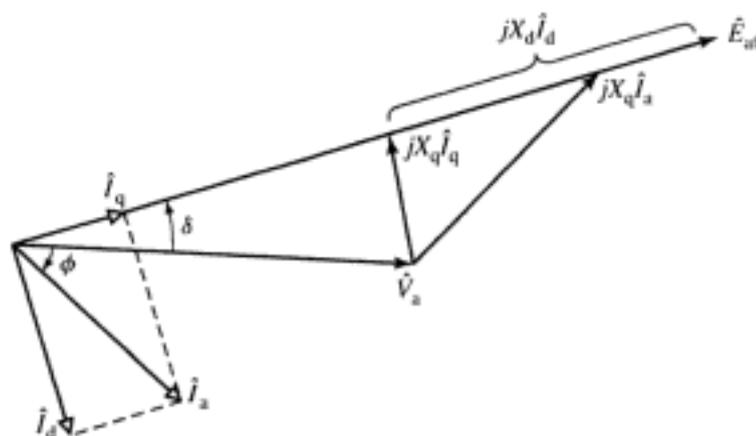


FIGURA 5.25 Diagrama fasorial do gerador do Exemplo 5.9.

### PROBLEMA PRÁTICO 5.8

Encontre a tensão gerada no gerador do Exemplo 5.9 quando se aplica uma carga com (a) potência aparente de 0,73 por unidade, fator de potência unitário e tensão de terminal de 0,98 por unidade, e (b) potência aparente de 0,99 por unidade, fator de potência de 0,94 capacitivo e tensão nominal de terminal.

■ **Solução**

- a.  $\hat{E}_{af} = 1,20e^{j24,5^\circ}$  por unidade    b.  $\hat{E}_{af} = 1,08e^{j35,0^\circ}$  por unidade

**EXEMPLO 5.10**

Na teoria simplificada da Seção 5.2, assumiu-se que a máquina síncrona pudesse ser representada por uma única reatância, a reatância síncrona  $X_s$  da Equação 5.25. Naturalmente, surge a questão: Quão boa é uma aproximação quando se trata uma máquina de pólos salientes desse modo simplificado? Pode-se supor que uma máquina de pólos salientes possa ser analisada pela teoria do rotor cilíndrico, como se ela tivesse uma única reatância síncrona igual ao seu valor de eixo direto  $X_d$ . Para investigar essa questão, vamos repetir o Exemplo 5.9 fazendo tal suposição.

■ **Solução**

Neste caso, assumindo que

$$X_q = X_d = X_s = 1,0 \text{ por unidade}$$

pode-se obter a tensão gerada simplesmente como

$$\begin{aligned}\hat{E}_{af} &= V_s + jX_s \hat{I}_a \\ &= 1,0 + j1,0(1,0 e^{-j36,9^\circ}) = 1,79 e^{j26,6^\circ} \text{ por unidade}\end{aligned}$$

Comparando esse resultado com o do Exemplo 5.9 (em que encontramos  $E_{af} = 1,77e^{j19,4^\circ}$ ), vemos que o módulo da tensão gerada prevista está relativamente próximo do valor correto. Como resultado, vemos que o cálculo da corrente de campo necessária para essa condição de operação será relativamente exato desde que se faça a suposição simplificadora de que os efeitos das saliências possam ser desprezados.

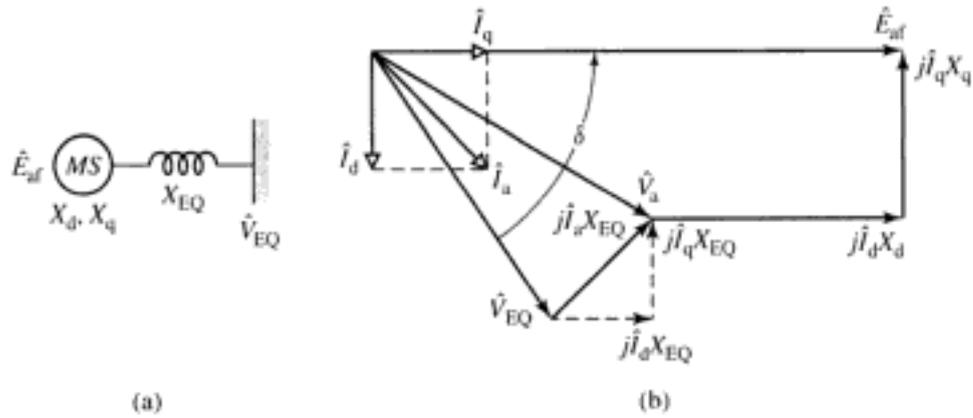
Entretanto, o cálculo do ângulo de potência  $\delta$  ( $19,4^\circ$  versus um valor de  $26,6^\circ$ , quando as saliências são desconsideradas) mostra um erro consideravelmente maior. Em geral, tais erros de cálculo dos ângulos de potência, em regime permanente, podem ser significativos quando se estuda o comportamento transitório de um sistema que inclua diversas máquinas síncronas. Assim, embora as saliências possam ser ignoradas eventualmente quando os cálculos feitos para um sistema são simplificados, elas raramente são ignoradas em estudos baseados em computador de sistemas de grande escala.

## 5.7 CARACTERÍSTICAS DE ÂNGULO DE CARGA DAS MÁQUINAS DE PÓLOS SALIENTES

Para os propósitos desta seção, é suficiente limitar a nossa discussão ao sistema simples mostrado no diagrama esquemático da Fig. 5.26a, consistindo em uma máquina síncrona  $MS$  de pólos salientes, conectada a um barramento infinito de tensão  $\hat{V}_{EQ}$  por meio de uma impedância em série de reatância  $X_{EQ}$ . A resistência será desprezada porque usualmente é pequena. Assuma que a máquina síncrona esteja atuando como gerador. O diagrama fasorial está representado pelos fasores em linha cheia da Fig. 5.26b. Os fasores tracejados mostram a queda de tensão, na reatância externa, decomposta segundo  $\hat{I}_d$  e  $\hat{I}_q$ . O efeito da impedância externa é simplesmente o de acrescentar sua reatância às reatâncias da máquina; os valores totais de reatância entre a tensão de excitação  $\hat{E}_{af}$  e a tensão de barramento  $\hat{V}_{EQ}$  é, portanto,

$$X_{dT} = X_d + X_{EQ} \quad (5.60)$$

$$X_{qT} = X_q + X_{EQ} \quad (5.61)$$



**FIGURA 5.26** Máquina síncrona de pólos salientes e impedância em série: (a) diagrama unifilar e (b) diagrama fasorial.

Se a tensão de barramento  $\hat{V}_{EQ}$  for decomposta em uma componente de eixo direto  $V_d = V_{EQ} \sin \delta$  e uma de eixo em quadratura  $V_q = V_{EQ} \cos \delta$ , em fase com  $\hat{I}_d$  e  $\hat{I}_q$ , respectivamente, então a potência  $P$  entregue por fase (ou por unidade) será

$$P = I_d V_d + I_q V_q = I_d V_{EQ} \sin \delta + I_q V_{EQ} \cos \delta \tag{5.62}$$

Também, da Fig. 5.26b,

$$I_d = \frac{E_{af} - V_{EQ} \cos \delta}{X_{dT}} \tag{5.63}$$

e

$$I_q = \frac{V_{EQ} \sin \delta}{X_{qT}} \tag{5.64}$$

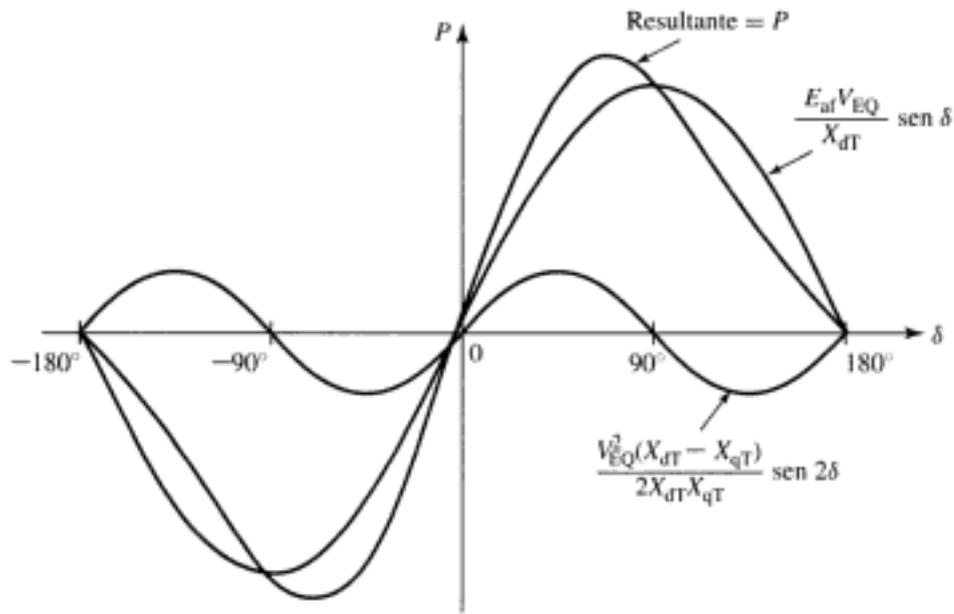
A substituição das Equações 5.63 e 5.64 na Equação 5.62 dá

$$P = \frac{E_{af} V_{EQ}}{X_{dT}} \sin \delta + \frac{V_{EQ}^2 (X_{dT} - X_{qT})}{2X_{dT} X_{qT}} \sin 2\delta \tag{5.65}$$

A Equação 5.65 é análoga à Equação 5.47, que é aplicada ao caso de uma máquina de pólos não salientes. Ela fornece a potência por fase quando  $E_{af}$  e  $V_{EQ}$  são expressas como tensões de fase e as reatâncias, como  $\Omega$ /fase. Nesse caso, o resultado deve ser multiplicado por três para se obter a potência trifásica. Alternativamente, se  $E_{af}$  e  $V_{EQ}$  forem expressas como tensões de linha, a potência trifásica será obtida diretamente. De modo semelhante, a Equação 5.65 pode ser aplicada diretamente se as diversas grandezas forem expressas por unidade.

A forma geral dessa característica de ângulo de potência está mostrada na Fig. 5.27. O primeiro termo é o mesmo da expressão obtida para a máquina de rotor cilíndrico (Equação 5.47). O segundo termo inclui o efeito dos pólos salientes. Representa o fato de que a onda de fluxo de entreferro cria conjugado, tendendo a alinhar os pólos de campo na posição de relutância mínima. Esse termo representa a potência correspondente ao *conjugado de relutância*, e apresenta a mesma natureza geral que o conjugado de relutância discutido na Seção 3.5. Observe que o conjugado de relutância não depende da excitação de campo. Observe também que, se  $X_{dT} = X_{qT}$ , como na máquina de entreferro uniforme, então não haverá direção preferencial de magnetização, o conjugado de relutância será zero e a Equação 5.65 ficará reduzida à equação do ângulo de potência da máquina de rotor cilíndrico (Equação 5.47).

Observe que a característica para valores negativos de  $\delta$  é a mesma, exceto por uma troca de sinal em  $P$ . Isto é, as regiões de funcionamento como gerador e motor são parecidas

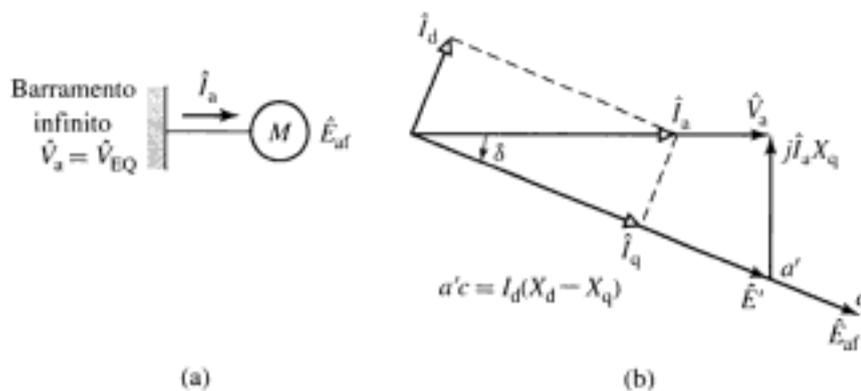


**FIGURA 5.27** Característica de ângulo de potência de uma máquina síncrona de pólos salientes mostrando a componente fundamental, devida à excitação de campo, e a componente de segunda harmônica, devida ao conjugado de relutância.

quando os efeitos da resistência são desprezíveis. Na operação como gerador,  $\hat{E}_{af}$  está adiantada em relação a  $\hat{V}_{EQ}$  e, na operação como motor,  $\hat{E}_{af}$  está atrasada em relação a  $\hat{V}_{EQ}$ . A operação em regime permanente é estável dentro do intervalo em que a inclinação da característica do ângulo de potência é positiva. Devido ao conjugado de relutância, uma máquina de pólos salientes é mais “dura” do que uma outra de rotor cilíndrico; isto é, para tensões iguais e os mesmos valores de  $X_{dT}$ , uma máquina de pólos salientes desenvolve um dado conjugado com um valor menor de  $\delta$ , e o conjugado máximo que pode ser desenvolvido é levemente maior.

**EXEMPLO 5.11**

No motor síncrono do Exemplo 5.7 de 2000 HP e 2300 V, assume-se que a reatância síncrona seja  $X_s = 1,95 \Omega/\text{fase}$ . Na realidade, trata-se de uma máquina de pólos salientes com reatâncias  $X_d = 1,95 \Omega/\text{fase}$  e  $X_q = 1,40 \Omega/\text{fase}$ . Desprezando todas as perdas, calcule a potência mecânica máxima, em kW, que esse motor pode entregar se ele for alimentado com potência elétrica a partir de um barramento infinito (Fig. 5.28a), na tensão e frequência nominais, e se sua excitação de campo for mantida constante com o valor do qual resulta um funcionamento com fator de potência unitário para a carga nominal. Supõe-se que a carga no eixo seja incremen-



**FIGURA 5.28** (a) Diagrama unifilar e (b) diagrama fasorial para o motor do Exemplo 5.11.

tada gradualmente, de modo que as oscilações transitórias são desprezíveis, e que o limite de potência em regime permanente seja aplicável. Calcule também o valor de  $\delta$  correspondente a esse funcionamento em potência máxima.

### ■ Solução

O primeiro passo é calcular a excitação do motor síncrono na tensão nominal, a plena carga e com fator de potência unitário. Como no Exemplo 5.7, a tensão de terminal e a corrente a plena carga são 1300 V, tensão de fase, e 374 A/fase, respectivamente. O diagrama fasorial, para as condições especificadas de plena carga, está mostrado na Fig. 5.28b. A única diferença essencial entre esse diagrama fasorial e o do gerador da Fig. 5.25 é que  $\hat{I}_a$  na Fig. 5.28 representa uma corrente que entra no motor; isto é, nós trocamos  $\hat{I}_a$  do sentido de referência de gerador para motor. Assim, trocamos o sinal da corrente para levar em conta a troca do sentido de referência. Desprezando os efeitos da resistência de armadura, a Equação 5.59 torna-se

$$\hat{E}_{af} = \hat{V}_a - j\hat{I}_d X_d - j\hat{I}_q X_q$$

Como na Fig. 5.28b, agora o eixo em quadratura pode ser posicionado pelo fasor

$$\hat{E}' = \hat{V}_a - j\hat{I}_q X_q = 1330 - j374(1,40) = 1429 e^{-21,5^\circ}$$

Isto é,  $\delta = -21,5^\circ$ , com  $\hat{E}_{af}$  atrasado em relação a  $\hat{V}_a$ . O módulo de  $\hat{I}_d$  é

$$I_d = I_a \sin |\delta| = 374 \sin (21,5^\circ) = 137 \text{ A}$$

Com relação ao elemento fasorial indicado por  $a'c$  na Fig. 5.28b, o módulo de  $\hat{E}_{af}$  pode ser encontrado somando o comprimento  $a'c = I_d(X_d - X_q)$  numericamente ao módulo de  $\hat{E}'$ . Assim,

$$E_{af} = E' + I_d(X_d - X_q) = 1429 + 137(0,55) = 1504 \text{ V, tensão de fase}$$

(De outro modo,  $E_{af}$  também poderia ter sido determinado fazendo  $\hat{E}_{af} = \hat{V}_a - j\hat{I}_d X_d - j\hat{I}_q X_q$ .)

Da Equação 5.65, a característica de ângulo de potência desse motor é

$$\begin{aligned} P &= \frac{E_{af} V_{BQ}}{X_d} \sin |\delta| + V_{BQ}^2 \frac{X_d - X_q}{2X_d X_q} \sin (2|\delta|) \\ &= 1030 \sin |\delta| + 178 \sin (2|\delta|) \quad \text{kW/fase} \end{aligned}$$

Observe que usamos  $|\delta|$  nessa equação. A razão é que a Equação 5.65, tal como está escrita, aplica-se a um gerador e permite o cálculo da potência elétrica de saída. Para o nosso motor,  $\delta$  é negativo e o uso direto da Equação 5.65 dará um valor de potência  $P < 0$  que naturalmente é o correto para operação como motor. Como sabemos que se trata de um motor e que estamos calculando uma potência elétrica que entra nos terminais do motor, nós ignoramos aqui inteiramente a questão do sinal e calculamos diretamente a potência do motor como número positivo.

A potência máxima de entrada no motor ocorre quando  $dP/d\delta = 0$ , ou

$$\frac{dP}{d\delta} = 1030 \cos \delta + 356 \cos 2\delta$$

Igualando a zero e usando a identidade trigonométrica

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

podemos resolver em relação ao ângulo  $\delta$  no qual ocorre a potência máxima:

$$\delta = 73,2^\circ$$

Portanto, a potência máxima é

$$P_{\max} = 1080 \text{ kW/fase} = 3240 \text{ kW, trifásico}$$

Podemos agora comparar esse resultado com  $P_{\max} = 3090 \text{ kW}$  encontrado na parte (a) do Exemplo 5.7, onde os efeitos dos pólos salientes forem desprezados. Vemos que o erro causado por desconsiderar as saliências é ligeiramente inferior a 5%, neste caso.

### PROBLEMA PRÁTICO 5.9

Observa-se que um gerador síncrono trifásico de pólos salientes, 325 MVA, 26 kV e 60 Hz está operando com uma potência de saída de 250 MW e um fator de potência indutivo de 0,89 na tensão de terminal de 26 kV. As reatâncias síncronas do gerador são  $X_d = 1,95$  e  $X_q = 1,18$ , ambas por unidade. O gerador atinge a tensão nominal a vazio com uma corrente de campo  $CCAV = 342 \text{ A}$ .

Calcule (a) o ângulo  $\delta$  entre a tensão de terminal do gerador e a tensão gerada, (b) o módulo da tensão gerada  $E_{af}$  por unidade, e (c) a corrente de campo necessária em ampères.

#### ■ Solução

- $31,8^\circ$
- $E_{af} = 2,29$  por unidade
- $I_f = 783 \text{ A}$

Como visto no Exemplo 5.11, o efeito dos pólos salientes sobre a capacidade de máxima potência em uma máquina síncrona aumenta à medida que a tensão de excitação é diminuída, como pode ser visto na Equação 5.65. Em condições típicas de operação, o efeito dos pólos salientes não passa de uns poucos por cento no máximo. Apenas com excitações baixas, o conjugado de relutância torna-se de fato importante. Assim, exceto para pequenas excitações ou quando resultados muito exatos são necessários, uma máquina de pólos salientes usualmente pode ser tratada de forma adequada utilizando a teoria mais simples do rotor cilíndrico.

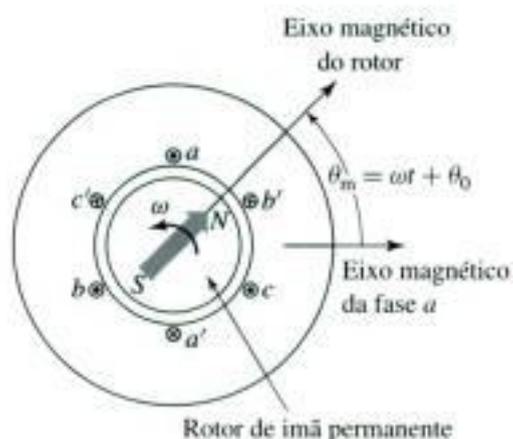
## 5.8 MOTORES CA DE IMÃ PERMANENTE

Os motores CA de imã permanente são motores síncronos polifásicos com rotores de imã permanente. Assim, são semelhantes às máquinas síncronas discutidas até aqui, neste capítulo, com a exceção de que os enrolamentos de campo são substituídos por imãs permanentes.

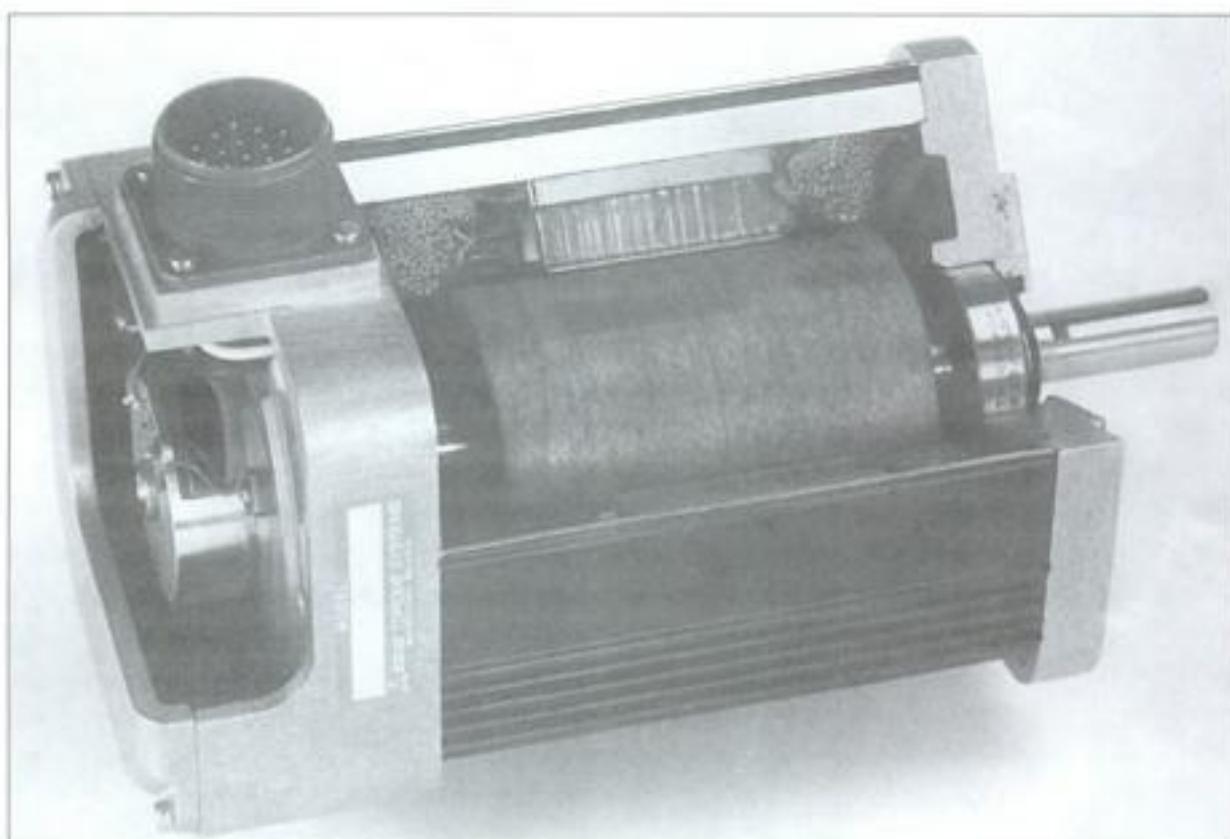
A Fig. 5.29 mostra um diagrama esquemático de uma máquina síncrona CA de imã permanente. A comparação dessa figura com a Fig. 5.2 destaca as semelhanças entre a máquina CA de imã permanente e a máquina síncrona convencional. De fato, a máquina síncrona de imã permanente pode ser prontamente analisada com as técnicas deste capítulo, assumindo-se simplesmente que a máquina seja excitada por uma corrente de campo de valor constante, e assegurando-se de que as diversas indutâncias da máquina sejam calculadas com base na permeabilidade efetiva do rotor de imã permanente.

A Fig. 5.30 mostra uma vista longitudinal de um motor CA típico de imã permanente. Essa figura mostra também um sensor de velocidade e posição montado sobre o eixo do rotor. Esse sensor é usado para controlar o motor, como será discutido na Seção 11.2. Diversas técnicas podem ser usadas para sensoriar a posição do eixo, incluindo-se dispositivos de efeito Hall, diodos emissores de luz (LEDs), fototransistores combinados com roda dentada e sensores indutivos.

Tipicamente, os motores CA trifásicos de imã permanente são operados com acionadores de motor de frequência variável. Sob condições de frequência constante e excitação poli-



**FIGURA 5.29** Diagrama esquemático de uma máquina CA trifásica de ímã permanente. A seta indica o sentido de magnetização do rotor.



**FIGURA 5.30** Vista em corte longitudinal de um motor CA trifásico de ímã permanente. Também está mostrado o sensor de velocidade e posição usado para controlar o motor. (EG&G Torque Systems)

fásica senoidal, um motor CA de ímã permanente comporta-se de modo semelhante a uma máquina síncrona CA convencional com excitação de campo constante.

Um ponto de vista alternativo de um motor CA de ímã permanente é considerá-lo como sendo um tipo de motor de passo de ímã permanente com um estator não saliente (veja a Seção 8.5). Sob esse ponto de vista, a única diferença entre os dois é que haverá, se houver, pouco conjugado associado às saliências no motor CA de ímã permanente. No funcionamento mais simples, as fases simplesmente podem ser excitadas com formas de onda em

degrau de modo tal que o rotor avança seqüencialmente em passos de uma posição de repouso para a próxima. Alternativamente, usando realimentação com base na posição do rotor, dada por um sensor de posição do eixo, os enrolamentos de fase do motor podem ser excitados continuamente de modo a controlar o conjugado e a velocidade do motor. Como no motor de passo, a frequência de excitação determina a velocidade do motor, e o conjugado produzido é determinado pela posição angular entre o eixo magnético do rotor e uma dada fase, juntamente com o nível de excitação daquela fase.

Os motores CA de imã permanente são referidos freqüentemente como *motores sem escovas* ou *motores CC sem escovas*. Essa terminologia surge devido à similaridade, quando combinada com um sistema de acionamento de frequência e tensão variáveis, entre suas características de velocidade *versus* conjugado e as dos motores CC, e também devido ao fato de que é possível ver esses motores como sendo motores CC às avessas, em que o enrolamento de campo está no rotor e a armadura é comutada eletronicamente pelo sensor de posição e por interruptores conectados aos seus enrolamentos.

## 5.9 RESUMO

Sob condições de operação em regime permanente, a imagem física do funcionamento de uma máquina síncrona polifásica é vista simplesmente em termos da interação de dois campos magnéticos, como foi discutido na Seção 4.7.2. As correntes polifásicas do estator produzem uma onda de fluxo magnético girante, ao passo que as correntes CC no rotor produzem uma onda de fluxo que é estacionária em relação ao rotor. Um conjugado constante é produzido apenas quando o rotor gira em sincronismo com a onda de fluxo do estator. Sob essas condições, há um deslocamento angular constante entre as ondas de fluxo do rotor e do estator. O resultado é um conjugado proporcional ao seno do ângulo de deslocamento.

Vimos que um conjunto simples de ensaios pode ser usado para determinar os parâmetros significativos de uma máquina síncrona, incluindo-se a reatância síncrona  $X_s$  ou  $X_d$ . Dois desses ensaios são o ensaio a vazio, em que a tensão de terminal da máquina é medida em função da corrente de campo, e o ensaio de curto-circuito, em que a armadura é curto-circuitada e a corrente de armadura de curto-circuito é medida em função da corrente de campo. Esses métodos de ensaio são uma variação de uma técnica de teste, aplicável não só às máquinas síncronas mas também a qualquer sistema elétrico cujo comportamento possa ser aproximado por um circuito equivalente linear, ao qual aplica-se o teorema de Thévenin. Do ponto de vista do teorema de Thévenin, um ensaio a vazio fornece a tensão interna, e um ensaio de curto-circuito dá informações sobre a impedância interna. Do ponto de vista mais específico das máquinas elétricas, um ensaio a vazio fornece informações em relação às exigências de excitação, as perdas no núcleo e (para máquinas rotativas) as perdas por atrito e ventilação, ao passo que um ensaio de curto-circuito fornece informações sobre as reações magnéticas da corrente de carga, as impedâncias de dispersão e as perdas associadas com as correntes de carga, tais como as ôhmicas  $I^2R$  e as suplementares. A única complicação real surge dos efeitos da não-linearidade magnética, efeitos que podem ser levados aproximadamente em consideração tratando-se a máquina como equivalente de uma outra não saturada cuja curva de magnetização é a linha reta  $Op$  da Fig. 5.9 e cuja reatância síncrona é ajustada empiricamente em relação à saturação como na Equação 5.29.

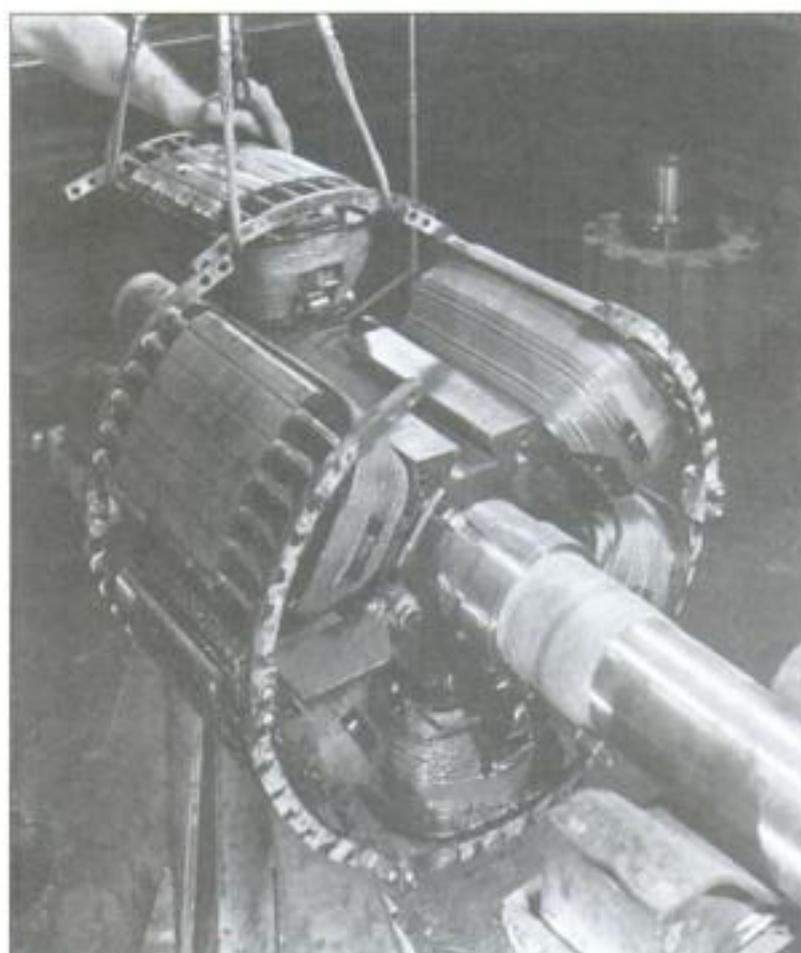
Em muitos casos, as máquinas síncronas são operadas em conjunto com um sistema externo. Esse sistema pode ser representado por uma fonte de frequência e tensão constantes, sendo conhecida como *barramento infinito*. Sob essas condições, a velocidade síncrona é determinada pela frequência do barramento infinito, e a potência de saída da máquina é proporcional ao produto da tensão de barramento pela tensão interna da máquina (proporcional, por

sua vez, à excitação de campo) e pelo seno do ângulo de fase entre eles (o ângulo de potência). Essa potência é inversamente proporcional à reatância líquida entre eles.

Ao passo que a potência ativa nos terminais da máquina é determinada pela potência de entrada no eixo da máquina (se estiver atuando como gerador) ou pela carga no eixo (se for um motor), a variação da excitação de campo altera a potência reativa. Para valores baixos de corrente de campo, a máquina absorverá potência reativa do sistema e o ângulo de potência será grande. O aumento da corrente de campo reduz a potência reativa absorvida pela máquina assim como o ângulo de potência. Para algum valor da corrente de campo, o fator de potência será unitário e qualquer aumento adicional de corrente de campo fará com que a máquina forneça potência reativa para o sistema.

Uma vez levados até a velocidade síncrona, os motores síncronos podem ser operados bem eficientemente quando conectados a uma fonte de frequência constante. No entanto, como já vimos, um motor síncrono desenvolve conjugado apenas na velocidade síncrona e, assim, não tem conjugado de partida. Para fazer com que um motor síncrono tenha partida própria, um enrolamento do tipo gaiola de esquilo, chamado *amortecedor* ou *enrolamento amortecedor*, pode ser inserido nas faces polares do rotor, como mostrado na Fig. 5.31. Então, o rotor atinge quase que totalmente a velocidade síncrona, por ação tipo motor de indução, sem ter excitação no enrolamento de campo. Se a carga e a inércia não forem muito elevadas, o motor entrará em sincronismo quando o enrolamento de campo for energizado a partir de uma fonte CC.

Alternativamente, como veremos no Capítulo 11, os motores síncronos podem ser operados por sistemas de acionamento polifásico de frequência variável. Neste caso, eles podem



**FIGURA 5.31** Rotor de um motor síncrono de 6 pólos e 1200 rpm mostrando as bobinas de campo, o enrolamento amortecedor nas faces polares e a construção. (General Electric Company)

arrancar facilmente e ser operados com bastante flexibilidade. Máquinas síncronas de imã permanente e de pequeno porte, quando operadas sob essas condições, são freqüentemente referidas como *motores sem escovas* ou *motores CC sem escovas*. Isso deve-se à similaridade de suas características de velocidade *versus* conjugado com as dos motores CC, e também devido ao fato de que esses motores podem ser vistos como sendo motores CC às avessas, nos quais a comutação dos enrolamentos do estator é produzida eletronicamente pela eletrônica de potência.

## 5.10 PROBLEMAS

- 5.1 O ângulo de conjugado, a plena carga, de um motor síncrono operando na tensão e freqüência nominais é de 35 graus elétricos. Despreze os efeitos da resistência de armadura e da reatância de dispersão. Se a corrente de campo for mantida constante a plena carga, de quanto o ângulo de conjugado será afetado pelas seguintes alterações das condições de operação?
- Freqüência reduzida em 10 por cento, conjugado de carga e tensão aplicada constantes.
  - Freqüência reduzida em 10 por cento, potência de carga e tensão aplicada constantes.
  - Ambas freqüência e tensão aplicada reduzidas em 10 por cento, conjugado de carga constante.
  - Ambas freqüência e tensão aplicada reduzidas em 10 por cento, potência de carga constante.
- 5.2 Os enrolamentos de fase da armadura de uma máquina síncrona bifásica estão afastados de 90 graus elétricos no espaço.
- Qual é a indutância mútua entre esses dois enrolamentos?
  - Repita a dedução da Equação 5.17 e mostre que a indutância síncrona é simplesmente igual à indutância de armadura de fase; isto é,  $L_s = L_{aa0} + L_{al}$ , onde  $L_{aa0}$  é a componente da indutância de armadura de fase devida à componente fundamental espacial do fluxo de entreferro e  $L_{al}$  é a indutância de dispersão da armadura.
- 5.3 Cálculos de projeto mostram os seguintes parâmetros para um gerador síncrono trifásico de rotor cilíndrico:

Indutância própria  $L_{aa}$  da fase  $a = 4,83$  mH

Indutância de dispersão de armadura  $L_{al} = 0,33$  mH

Calcule a indutância mútua de fase a fase e a indutância síncrona da máquina.

- 5.4 A tensão eficaz a vazio nos terminais de um gerador síncrono trifásico de 60 Hz é medida como sendo uma tensão de linha de 15,4 kV, quando a corrente de campo é 420 A.
- Calcule a indutância mútua  $L_{ar}$  entre o estator e o rotor.
  - Calcule a tensão de terminal a vazio se a corrente de campo for mantida constante enquanto a velocidade do gerador é reduzida de modo que a freqüência da tensão gerada seja 50 Hz.
- 5.5 Um motor síncrono trifásico de 460 V, 50 kW e 60 Hz tem uma reatância síncrona de  $X_s = 4,15 \Omega$  e uma indutância mútua entre armadura e campo de  $L_{ar} = 83$  mH. O motor está operando na tensão nominal de terminal com uma potência de entrada de 40 kW. Calcule o módulo e o ângulo de fase da tensão de fase gerada  $\hat{E}_{af}$ , e a corrente de campo  $I_f$  se o motor estiver funcionando com um (a) fator de potência de 0,85 indutivo, (b) fator de potência unitário e (c) fator de potência de 0,85 capacitivo.



- 5.6 O motor do Problema 5.5 é abastecido a partir de uma fonte trifásica de 460 V por meio de um alimentador cuja impedância é  $Z_f = 0,084 + j0,82 \Omega$ . Assumindo que o sistema (medido na fonte) esteja operando com uma potência de entrada de 40 kW, calcule o módulo e o ângulo de fase da tensão de fase gerada  $\hat{E}_a$  e a corrente de campo  $I_f$  para os fatores de potência de (a) 0,85 indutivo, (b) unitário e (c) 0,85 capacitivo.
- 5.7 Uma máquina síncrona trifásica de dois pólos, 50 Hz, 750 kVA e 2300 V tem uma reatância síncrona de  $7,75 \Omega$  e atinge a tensão nominal de terminal a vazio com uma corrente de campo de 120 A.
- Calcule a indutância mútua entre a armadura e o campo.
  - A máquina deve operar como um motor que alimenta uma carga de 600 kW na sua tensão nominal de terminal. Calcule a tensão interna  $E_a$  e a corrente de campo correspondente se o motor estiver operando com um fator de potência unitário.
  - Para uma potência de carga constante de 600 kW, escreva um *script* de MATLAB que plote a corrente de terminal em função da corrente de campo. Na sua plotagem, faça com que a corrente de campo varie entre um valor mínimo, correspondente a uma carga de máquina de 750 kVA, com um fator de potência capacitivo, e um valor máximo, correspondente a uma carga de máquina de 750 kVA, com um fator de potência indutivo. Que valor de corrente de campo produz a corrente de terminal mínima? Por que?
- 5.8 As folhas de especificações do fabricante de um gerador síncrono trifásico de 26 kV, 750 MVA e 60 Hz indicam que ele apresenta uma reatância síncrona  $X_s = 2,04$  e uma reatância de dispersão  $X_d = 0,18$ , ambas por unidade na base do gerador. Calcule (a) a indutância síncrona em mH, (b) a indutância de dispersão da armadura em mH e (c) a indutância de armadura por fase  $L_{aa}$ , em mH e por unidade.
- 5.9 As seguintes leituras foram obtidas dos resultados de ensaios a vazio e em curto-circuito realizados em um turbogerador trifásico ligado em Y de dois pólos, 800 MVA, 26 kV e 60 Hz, operando com velocidade síncrona:

Corrente de campo, A	1540	2960
Corrente de armadura, ensaio de curto-circuito, kA	9,26	17,8
Tensão de linha, característica a vazio, kV	26,0	(31,8)
Tensão de linha, linha de entreferro, kV	29,6	(56,9)

Os números em parênteses são extrapolações baseadas nos dados medidos. Encontre (a) a relação de curto-circuito, (b) o valor não saturado da reatância síncrona em ohms por fase e por unidade e (c) a reatância síncrona saturada por unidade e em ohms por fase.

- 5.10 As seguintes leituras foram obtidas dos resultados de ensaios a vazio e em curto-circuito realizados em um motor síncrono trifásico de quatro pólos, 5000 kW, 4160 V e 1800 rpm, operando na velocidade nominal:

Corrente de campo, A	169	192
Corrente de armadura, ensaio de curto-circuito, A	694	790
Tensão de linha, característica a vazio, V	3920	4160
Tensão de linha, linha de entreferro, V	4640	5270

A resistência de armadura é  $11 \text{ m}\Omega/\text{fase}$ . A reatância de dispersão da armadura foi estimada em 0,12 por unidade, tendo como base as especificações nominais do motor. Encontre (a) a relação de curto-circuito, (b) o valor não saturado da reatância síncrona em ohms por fase e por unidade e (c) a reatância síncrona saturada por unidade e em ohms por fase.



**5.11** Escreva um *script* de MATLAB que automatize os cálculos dos Problemas 5.9 e 5.10. O seguinte conjunto mínimo de dados é necessário:

- CCAV: A corrente de campo requerida para atingir a tensão nominal de terminal a vazio.
- A tensão de terminal correspondente na linha de entreferro.
- CCCC: A corrente de campo requerida para atingir a corrente nominal de curto-circuito na característica de curto-circuito.

O seu *script* deve calcular (a) a relação de curto-circuito, (b) o valor não saturado da reatância síncrona em ohms por fase e por unidade e (c) a reatância síncrona saturada por unidade e em ohms por fase.

**5.12** Considere o motor do Problema 5.10.

- a. Calcule a corrente de campo requerida quando o motor está operando com a tensão nominal e 4200 kW de potência de entrada e um fator de potência de 0,87 capacitivo. Dê uma explicação para a saturação sob carga por meio do método descrito no parágrafo referente à Equação 5.29.
- b. Além dos dados fornecidos no Problema 5.10, pontos adicionais da característica a vazio são dados abaixo:

Corrente de campo, A	200	250	300	350
Tensão de linha, V	4250	4580	4820	5000

Se o disjuntor que alimenta o motor da parte (a) for desarmado, deixando o motor subitamente em circuito aberto, estime o valor da tensão de terminal do motor após o desarmamento (antes que o motor comece a perder velocidade e antes que qualquer circuito de proteção reduza a corrente de campo).



**5.13** Usando MATLAB, plote a corrente de campo requerida para que o motor do Problema 5.10 atinja o funcionamento com fator de potência unitário, à medida que a carga do motor varia de zero até plena carga. Assuma que o motor esteja funcionando na tensão nominal de terminal.

**5.14** Os dados seguintes referem-se às perdas do motor do Problema 5.10:

Perdas a vazio no núcleo e 4160 V = 37 kW

Perdas por atrito e ventilação = 46 kW

Resistência do enrolamento de campo a 75°C = 0,279 Ω

Calcule a potência de saída e o rendimento quando o motor está funcionando na potência de entrada nominal, fator de potência unitário e tensão nominal. Assuma que o enrolamento de campo esteja operando a uma temperatura de 125°C.



**5.15** Os seguintes dados foram obtidos de ensaios realizados em um gerador hidrelétrico trifásico de 72 pólos, 145 MVA, 13,8 kV e 60 Hz.

Característica a vazio:

$I_f$ , A	100	200	300	400	500	600	700	775	800
Tensão, kV	2,27	4,44	6,68	8,67	10,4	11,9	13,4	14,3	14,5

Ensaio de curto-circuito:

$$I_f = 710 \text{ A}, I_a = 6070 \text{ A}$$

- a. Desenhe (ou plote com MATLAB) a curva de saturação a vazio, a linha de entreferro e a característica de curto-circuito.

- b. Encontre CCAV e CCCC. (Observe que se você usar MATLAB na parte (a), você poderá usar a função “polyfit” do MATLAB para ajustar um polinômio de segundo grau à curva de saturação a vazio. Então, você poderá usar esse ajuste para obter CCAV.)
- c. Encontre (i) a relação de curto-circuito, (ii) o valor não saturado da reatância síncrona em ohms por fase e por unidade e (iii) a reatância síncrona saturada por unidade e em ohms por fase.

**5.16** Qual é a potência reativa máxima por unidade que pode ser fornecida por uma máquina síncrona cuja reatância síncrona é 1,6 por unidade e cuja corrente máxima de campo está limitada a 2,4 vezes a necessária para que a tensão nominal de terminal seja obtida sob condições de circuito aberto (a vazio)? Sabe-se que a máquina opera na tensão nominal de terminal.

**5.17** Uma máquina síncrona de 25 MVA e 11,5 kV está operando como um condensador síncrono, como está discutido no Apêndice D (Seção D.4.1). A relação de curto-circuito do gerador é 1,68 e a corrente de campo na tensão nominal a vazio é 420 A. Assuma que o gerador esteja ligado diretamente a uma fonte de 11,5 kV.

- a. Qual é, por unidade e em ohms por fase, a reatância síncrona saturada do gerador?

A corrente de campo do gerador é ajustada para 150 A.

- b. Desenhe um diagrama fasorial, indicando a tensão de terminal, a tensão interna e a corrente de armadura.
- c. Calcule o módulo da corrente de armadura (por unidade e em ampères) e o seu ângulo de fase relativo à tensão de terminal.
- d. Sob essas condições, o condensador síncrono parece indutivo ou capacitivo para o sistema de 11,5 kV?
- e. Repita as partes (b) até (d) para uma corrente de campo de 700 A.



**5.18** O condensador síncrono do Problema 5.17 é conectado a um sistema de 11,5 kV por meio de um alimentador cuja reatância em série é 0,12 por unidade com base nas especificações da máquina. Usando MATLAB, plote a tensão (kV) nos terminais do condensador síncrono quando a sua corrente de campo é variada entre 150 A e 700 A.

**5.19** Uma máquina síncrona com reatância síncrona de 1,28 por unidade está operando como um gerador cuja potência ativa de carga é de 0,6 por unidade e que foi ligado a um sistema por uma reatância em série de 0,07 por unidade. Observa-se que um aumento em sua corrente de campo causa uma diminuição na corrente de armadura.

- a. Antes do aumento, o gerador estava fornecendo ou absorvendo potência reativa do sistema de potência?
- b. Como resultado desse aumento de excitação, a tensão de terminal do gerador aumentou ou diminuiu?
- c. Repita as partes (a) e (b) considerando que a máquina síncrona está operando como um motor.

**5.20** As máquinas síncronas supercondutoras são projetadas com enrolamentos de campo supercondutores que podem suportar elevadas densidades de corrente e criar altas densidades de fluxo. Como as densidades de fluxo, típicas de funcionamento, excedem as densidades de fluxo de saturação do ferro, geralmente essas máquinas são projetadas para operar com circuitos magnéticos desprovidos de ferro. Como resultado, elas não exibem nenhum efeito de saturação e têm baixas reatâncias síncronas.

Considere um gerador supercondutor de dois pólos, 60 Hz, 13,8 kV e 10 MVA que atinge a tensão nominal de armadura a vazio com uma corrente de campo de 842 A. A corrente nominal de armadura é obtida com um curto-circuito trifásico dos terminais com um corrente de campo de 226 A.

a. Calcule a reatância síncrona por unidade.

Considere a situação em que esse gerador está conectado a um alimentador de distribuição de 13,8 kV de impedância desprezível e que está operando com uma potência de saída de 8,75 MW e um fator de potência de 0,9 indutivo. Calcule:

b. a corrente de campo em ampères, a saída de potência reativa em MVA e o ângulo de rotor para essas condições de operação.

c. o ângulo de rotor resultante e a saída de potência reativa em MVA se a corrente de campo for reduzida a 842 A enquanto a potência fornecida no eixo pela máquina motriz primária ao gerador permanece constante.

**5.21** Para uma máquina síncrona de reatância síncrona constante  $X_s$ , operando com uma tensão de terminal constante  $V_t$  e uma tensão de excitação constante  $E_{af}$ , mostre que o lugar da extremidade do fasor da corrente de armadura é um círculo. Em um diagrama fasorial, usando a tensão de terminal como fasor de referência, indique a posição do centro desse círculo e o seu raio. Expresse as coordenadas do centro e do raio do círculo em termos de  $V_t$ ,  $E_{af}$  e  $X_s$ .

**5.22** Um gerador síncrono de quatro pólos, 60 Hz, 24 kV, 650 MVA e uma reatância síncrona de 1,82 por unidade está operando em um sistema de potência que pode ser representado por um barramento infinito de 24 kV em série com uma impedância reativa de  $j0,21 \Omega$ . O gerador está equipado com um regulador de tensão que ajusta a excitação de campo de modo que a tensão de terminal do gerador permanece em 24 kV independentemente da carga do gerador.

a. A potência de saída do gerador é ajustada para 375 MW.

(xxx) Desenhe um diagrama fasorial para essa condição de operação.

(ii) Encontre o módulo (em kA) e o ângulo de fase (em relação à tensão de terminal do gerador) da corrente de terminal.

(iii) Determine o fator de potência nos terminais do gerador.

(iv) Encontre o módulo (por unidade e em kV) da tensão de excitação do gerador  $E_{af}$ .

b. Repita a parte (a) se a potência de saída do gerador é aumentada para 600 MW.

**5.23** O gerador do Problema 5.22 atinge a tensão nominal de armadura a vazio com uma corrente de campo de 850 A. Ele está operando no sistema do Problema 5.22 com o seu regulador de tensão ajustado para manter a tensão de terminal em 0,99 por unidade (23,8 kV).

a. Use MATLAB para plotar a corrente de campo do gerador (em A) em função da carga (em MW) quando a carga da saída de potência do gerador é variada de zero até a carga total.

b. Plote a saída de potência reativa correspondente em Mvar em função da carga de saída.

c. Repita as plotagens das partes (a) e (b) se o regulador de tensão for ajustado para regular a tensão de terminal em 1,01 por unidade (24,2 kV).

**5.24** O gerador hidrelétrico de 145 MW do Problema 5.15 está operando em um sistema de potência de 13,8 kV. Em condições normais de operação, o gerador funciona submetido a uma regulação automática de tensão para manter constante sua tensão de terminal

em 13,8 kV. Neste problema, você irá investigar quais seriam as possíveis conseqüências caso o operador esquecesse de passar para o modo de regulação automática de tensão e, ao invés disso, deixasse constante a excitação de campo no valor de CCAV, o valor correspondente à tensão nominal a vazio. Para os propósitos deste problema, despreze os efeitos das saliências e assuma que o gerador possa ser representado pela reatância síncrona saturada encontrada no Problema 5.15.

- a. Se o sistema de potência for representado simplesmente por um barramento infinito de 13,8 kV (ignorando os efeitos de qualquer impedância equivalente), a carga do gerador pode ser aumentada até atingir a carga total? Se sim, qual é o ângulo de potência  $\delta$  correspondente à carga total? Se não, qual é a carga máxima que pode ser conseguida?
  - b. Repita a parte (a) com o sistema de potência representado agora por um barramento infinito de 13,8 kV em série com uma impedância reativa de  $j0,14 \Omega$ .
- 5.25** Repita o Exemplo 5.9 assumindo que o gerador esteja operando com a metade da potência nominal (em kVA) com um fator de potência de 0,8 indutivo e a tensão nominal de terminal.
- 5.26** Repita o Problema 5.24 assumindo que a indutância síncrona saturada, de eixo direto,  $X_d$  seja igual à encontrada no Problema 5.15 e que a reatância síncrona saturada, de eixo em quadratura,  $X_q$  seja igual a 75 por cento desse valor.
-  **5.27** Escreva um *script* de MATLAB para plotar um conjunto de curvas de ângulo de potência, por unidade, para um gerador síncrono de pólos salientes conectado a um barramento infinito ( $V_{\text{bar}} = 1,0$  por unidade). As reatâncias do gerador são  $X_d = 1,27$  por unidade e  $X_q = 0,95$  por unidade. Assumindo  $E_{af} = 1,0$  por unidade, plote as seguintes curvas:
- a. Gerador ligado diretamente ao barramento infinito.
  - b. Gerador ligado ao barramento infinito por uma reatância  $X_{\text{bar}} = 0,1$  por unidade.
  - c. Gerador ligado diretamente ao barramento infinito. Despreze os efeitos das saliências, fazendo  $X_q = X_d$ .
  - d. Gerador ligado ao barramento infinito por uma reatância  $X_{\text{bar}} = 0,1$  por unidade. Despreze os efeitos das saliências, fazendo  $X_q = X_d$ .
- 5.28** Desenhe o diagrama fasorial em regime permanente, com eixos direto e em quadratura, de um motor síncrono de pólos salientes com as reatâncias  $X_d$  e  $X_q$  e a resistência de armadura  $R_a$ . Desse diagrama fasorial, mostre que o ângulo de conjugado  $\delta$ , entre a tensão gerada  $\hat{E}_{af}$  (que está ao longo do eixo em quadratura) e a tensão de terminal  $\hat{V}_t$ , é dado por

$$\text{tg } \delta = \frac{I_a X_q \cos \phi + I_a R_a \sin \phi}{V_t + I_a X_q \sin \phi - I_a R_a \cos \phi}$$

Aqui  $\phi$  é o ângulo de fase entre a corrente de armadura  $\hat{I}_a$  e  $V_t$ , sendo considerado negativo quando  $\hat{I}_a$  está atrasada em relação a  $\hat{V}_t$ .

- 5.29** Repita o Problema 5.28 para operação como gerador síncrono, caso em que a equação de  $\delta$  torna-se

$$\text{tg } \delta = \frac{I_a X_q \cos \phi + I_a R_a \sin \phi}{V_t - I_a X_q \sin \phi + I_a R_a \cos \phi}$$

- 5.30** Qual é a porcentagem máxima da potência de saída nominal que um motor de pólos salientes irá entregar sem perda de sincronismo, quando estiver operando com tensão nominal de terminal e excitação de campo nula ( $E_{af} = 0$ ), se  $X_d = 0,90$  por unidade e  $X_q = 0,65$

- por unidade? Calcule, por unidade, a corrente de armadura e a potência reativa nessas condições de operação.
- 5.31** Se o motor síncrono do Problema 5.30 for operado agora como um gerador síncrono conectado a um barramento infinito de tensão nominal, encontre a excitação de campo mínima por unidade (em que 1,0 por unidade é a corrente de campo requerida para obter a tensão nominal a vazio) para a qual o gerador permanecerá sincronizado com (a) metade da carga e (b) carga total.
- 5.32** Um gerador síncrono de pólos salientes, com reatâncias síncronas saturadas  $X_d = 1,57$  por unidade e  $X_q = 1,34$  por unidade, está conectado a um barramento infinito de tensão nominal por meio de uma impedância externa  $X_{bar} = 0,11$  por unidade. O gerador está fornecendo sua potência nominal (MVA) com um fator de potência de 0,95 indutivo, medida nos terminais do gerador.
- Desenhe um diagrama fasorial indicando a tensão do barramento infinito, a corrente de armadura, a tensão de terminal do gerador, a tensão de excitação e o ângulo de rotor (medido em relação ao barramento infinito).
  - Calcule, por unidade, as tensões de terminal e de excitação, e o ângulo de rotor em graus.
- 5.33** Um gerador síncrono de pólos salientes, com reatâncias síncronas saturadas  $X_d = 0,78$  por unidade e  $X_q = 0,63$  por unidade, está conectado a um barramento infinito de tensão nominal por meio de uma impedância externa  $X_{bar} = 0,09$  por unidade.
- Supondo que o gerador esteja fornecendo apenas potência reativa
    - Encontre as excitações de campo mínima e máxima, por unidade (onde 1,0 por unidade é a corrente de campo requerida para obter a tensão nominal a vazio), tais que o gerador não exceda à sua corrente nominal de terminal.
    - Usando MATLAB, plote a corrente de armadura em função da excitação de campo, quando essa é variada entre os limites determinados pela parte (i).
  - Supondo agora que o gerador esteja fornecendo uma potência ativa nominal de 0,25 por unidade, acrescente sobre o mesmo eixo uma plotagem da corrente de armadura, por unidade, em função da excitação de campo, quando a corrente de campo é variada dentro do intervalo para o qual a corrente de armadura por unidade é inferior a 1,0 por unidade.
  - Repita a parte (b) para potências de saída do gerador de 0,50 e 0,75 por unidade. O resultado final será uma plotagem de curvas V para esse gerador, nessa configuração.
- 5.34** Um motor CA de ímã permanente e dois pólos tem uma velocidade nominal de 3000 rpm e um rotor de seis pólos. Calcule a frequência (em Hz) da tensão de armadura requerida para operar nessa velocidade.
- 5.35** Um gerador síncrono trifásico de ímã permanente e 5 kW produz uma tensão de linha a vazio de 208 V e 60 Hz, quando está sendo acionado a uma velocidade de 1800 rpm. Quando está operando na velocidade nominal e alimentando uma carga resistiva, observa-se que a sua tensão de linha de terminal é 192 V, para uma potência de saída de 4,5 kW.
- Calcule a corrente por fase do gerador sob essas condições de funcionamento.
  - Supondo que a resistência de armadura do gerador seja desprezível, calcule a reatância síncrona do gerador a 60 Hz.
  - Calcule a tensão de terminal do gerador que é obtida se a carga do gerador for aumentada para 5 kW (puramente resistiva, de novo) enquanto a velocidade é mantida a 1800 rpm.

**5.36** Pequenos geradores CA monofásicos de imã permanente são usados freqüentemente na geração de potência elétrica para faróis de bicicletas. Nessa aplicação, os geradores são projetados normalmente para ter uma quantidade significativa de indutância de dispersão em seu enrolamento de armadura. Um modelo simples desses geradores é uma fonte CA de tensão  $e_s(t) = \omega K_a \cos \omega t$  em série com a indutância de dispersão  $L_a$  e a resistência  $R_a$ , ambas de armadura. Aqui  $\omega$  é a freqüência elétrica da tensão gerada que é determinada pela velocidade do gerador quando ele está apoiado contra a roda da bicicleta.

Supondo que o gerador esteja alimentando uma lâmpada que pode ser modelada como uma resistência  $R_l$ , escreva uma expressão para a freqüência mínima  $\omega_{\min}$  que deve ser alcançada para assegurar que a lâmpada fique acesa com brilho constante, independentemente da velocidade da bicicleta.

## Máquinas Polifásicas de Indução

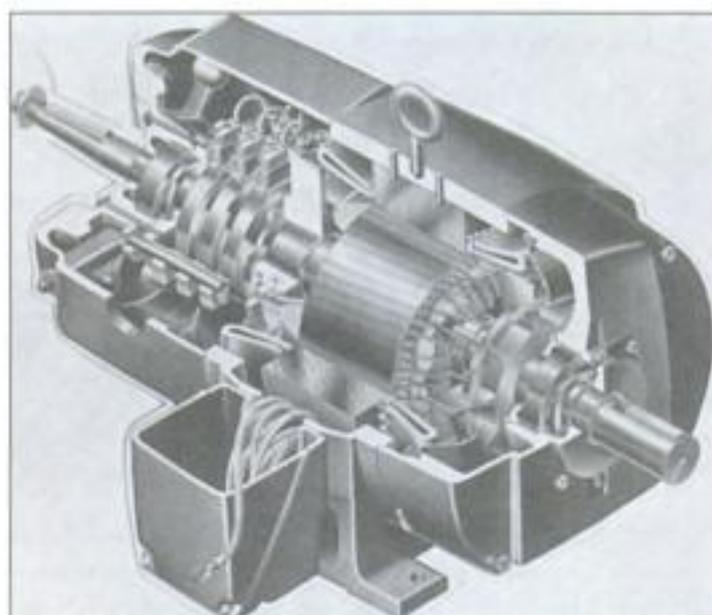
O objetivo deste capítulo é estudar o comportamento das máquinas de indução polifásicas. Nossa análise começará com o desenvolvimento de circuitos equivalentes monofásicos, cuja estrutura genérica é sugerida pela semelhança existente entre uma máquina de indução e um transformador. Esses circuitos equivalentes podem ser usados para estudar as características eletromecânicas da máquina de indução e o efeito de carga apresentado pela máquina para a fonte de energia, seja ela uma fonte de frequência fixa, como um sistema de potência, seja um acionador de motor com frequência e tensão variáveis.

### 6.1 INTRODUÇÃO ÀS MÁQUINAS DE INDUÇÃO POLIFÁSICAS

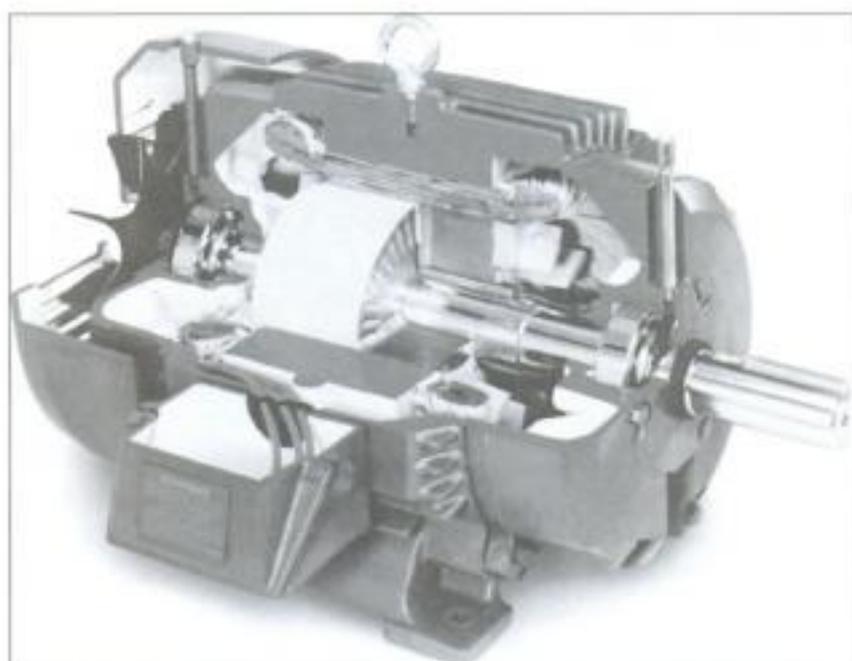
Como foi mostrado na Seção 4.2.1, no *motor de indução* a corrente alternada é fornecida diretamente ao estator, ao passo que o rotor recebe a corrente por indução, como em um transformador, a partir do estator. O enrolamento de estator é do tipo discutido na Seção 4.5, como na máquina síncrona. Quando a excitação é feita por uma fonte polifásica equilibrada, um campo magnético é produzido no entreferro girando na velocidade síncrona. Essa velocidade é determinada pelo número de pólos do estator e pela frequência  $f_e$  aplicada ao estator (Equação 4.41).

O rotor de uma máquina de indução polifásica pode ser de dois tipos. O *rotor enrolado ou bobinado* é construído na forma de um enrolamento polifásico semelhante ao estator tendo o mesmo número de pólos. Os terminais do enrolamento do rotor são conectados a anéis deslizantes isolados montados sobre o eixo. Escovas de carvão apoiadas sobre esses anéis permitem que os terminais do rotor tornem-se disponíveis externamente ao motor, como mostrado na vista longitudinal da Fig. 6.1. As máquinas de indução de rotor bobinado são relativamente incomuns, sendo encontradas apenas em um número limitado de aplicações especializadas.

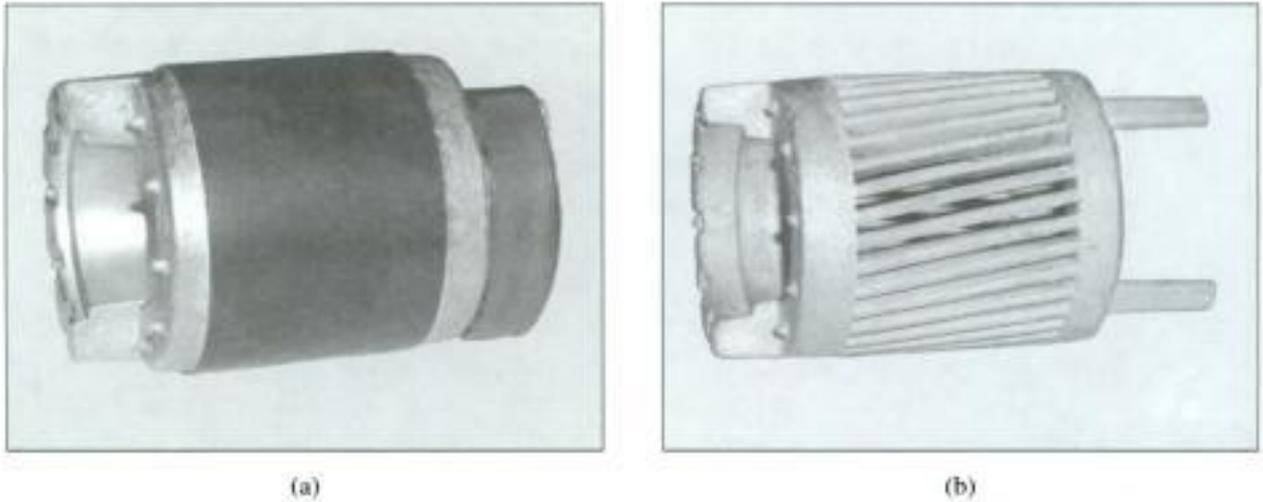
Por outro lado, o motor de indução polifásico, mostrado em vista longitudinal na Fig. 6.2, tem o chamado *rotor de gaiola de esquilo* no qual o enrolamento consiste em barras condutoras encaixadas em ranhuras no ferro do rotor e curto-circuitadas em cada lado por anéis condutores. A extrema simplicidade e a robustez da construção em gaiola de esquilo representam vantagens notáveis para esse tipo de motor de indução e, de longe, fazem dele o tipo de motor mais comumente usado, indo desde motores fracionários até os de grande porte. A Fig. 6.3a mostra o rotor de um pequeno motor do tipo gaiola de esquilo, ao passo que a Fig. 6.3b mostra a própria gaiola de esquilo depois que as lâminas do rotor foram removidas quimicamente por corrosão.



**FIGURA 6.1** Vista em corte longitudinal de um motor de indução trifásico com um rotor bobinado e anéis deslizantes conectados ao enrolamento trifásico do rotor. (*General Electric Company*)



**FIGURA 6.2** Vista em corte longitudinal de um motor trifásico do tipo gaiola de esquilo. As lâminas da gaiola de esquilo podem ser vistas no rotor em corte. (*Rockwell Automation/Reliance Electric*)



**FIGURA 6.3** (a) O rotor de um pequeno motor do tipo gaiola de esquilo. (b) A estrutura da gaiola de esquilo depois que as lâminas do rotor foram submetidas à corrosão. (*Athens Products*)

Vamos supor que o rotor esteja girando na velocidade constante de  $n$  rpm no mesmo sentido que o campo girante do estator. Seja  $n_s$  rpm a velocidade síncrona do campo de estator, dada pela Equação 4.41. A diferença entre a velocidade síncrona e a do rotor é referida comumente como o *escorregamento\** do rotor. Neste caso, o escorregamento do rotor é  $n_s - n$ , medido em rotações por minuto (rpm). O escorregamento é expresso mais usualmente como sendo uma fração da velocidade síncrona. O *escorregamento fracionário*  $s$  é

$$s = \frac{n_s - n}{n_s} \quad (6.1)$$

O escorregamento é expresso freqüentemente em porcentagem, igual simplesmente a 100 por cento vezes o escorregamento fracionário da Equação 6.1.

A velocidade do rotor em rpm pode ser expressa em termos do escorregamento e da velocidade síncrona como

$$n = (1 - s)n_s \quad (6.2)$$

De modo semelhante, a velocidade angular mecânica  $\omega_m$  pode ser expressa em termos da velocidade síncrona angular  $\omega_s$  e do escorregamento como

$$\omega_m = (1 - s)\omega_s \quad (6.3)$$

O movimento relativo entre o fluxo do estator e os condutores do rotor induz tensões de freqüência  $f_r$  dada por

$$f_r = sf_c \quad (6.4)$$

sendo chamada de *freqüência de escorregamento*, no rotor. Assim, o comportamento elétrico de uma máquina de indução é similar ao de um transformador, mas apresentando a característica adicional da transformação de freqüência produzida pelo movimento relativo entre os enrolamentos do estator e do rotor. Na realidade, uma máquina de indução de rotor bobinado pode ser usada para realizar conversão de freqüência.

\* N. de T.: *Slip*, em inglês.

Os terminais do rotor de um motor de indução podem ser curto-circuitados por construção, no caso da gaiola de esquilo, e externamente, no caso do motor de rotor bobinado. O fluxo girante de entreferro induz tensões com a frequência de escorregamento nos enrolamentos do rotor. As correntes do rotor são determinadas então pelas magnitudes das tensões induzidas e pela impedância apresentada pelo rotor na frequência de escorregamento. Na partida, o rotor está parado ( $n = 0$ ), o escorregamento é unitário ( $s = 1$ ), e a frequência do rotor é igual à frequência do estator  $f_c$ . Portanto, o campo produzido pelas correntes do rotor gira com a mesma velocidade que o campo do estator, resultando um conjugado de partida que faz com que o rotor tenda a girar no sentido de rotação do campo de indução do estator. Se esse conjugado for suficiente para superar a oposição à rotação criada pela carga no eixo, então o motor atingirá a sua velocidade de operação. No entanto, essa velocidade não pode nunca se igualar à velocidade síncrona, porque então os condutores do rotor estariam estacionários em relação ao campo do estator; nenhuma corrente seria induzida neles e, conseqüentemente, nenhum conjugado seria produzido.

Com o rotor girando no mesmo sentido de rotação que o campo do estator, a frequência das correntes do rotor será  $sf_c$  e elas produzirão uma onda girante de fluxo que irá girar com  $sn_s$  rpm em relação ao rotor no sentido para frente. Entretanto, superposta à essa rotação, está a rotação mecânica do rotor a  $n$  rpm. Assim, em relação ao estator, a velocidade da onda de fluxo produzida pelas correntes do rotor é a soma dessas duas velocidades sendo igual a

$$sn_s + n = sn_s + n_s(1 - s) = n_s \quad (6.5)$$

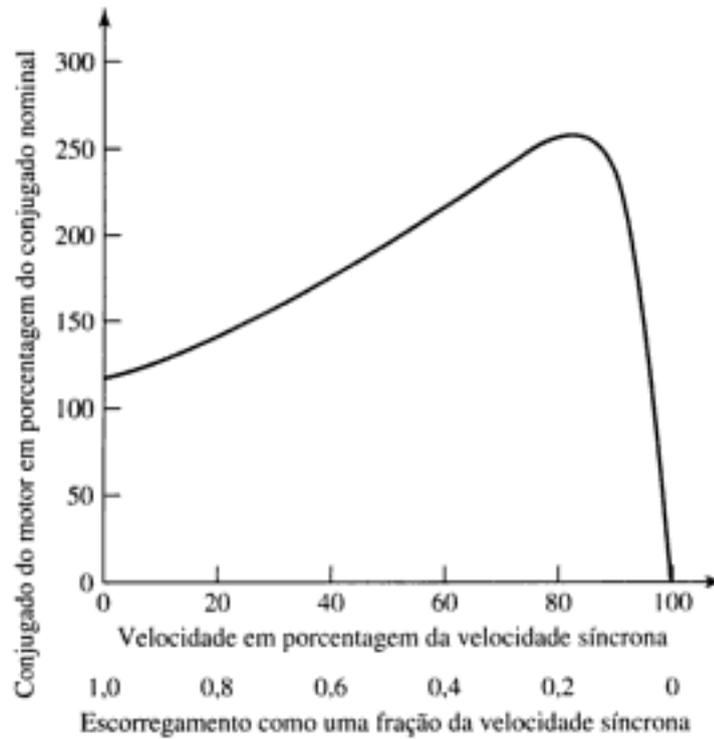
Da Equação 6.5, vemos que as correntes do rotor produzem uma onda de fluxo no entreferro que gira na velocidade síncrona e, portanto, em sincronismo com a onda produzida pelas correntes do estator. Como os campos do estator e do rotor giram sincronicamente cada um, eles estão estacionários entre si, produzindo um conjugado constante que assim mantém a rotação do rotor. Esse conjugado, que existe em qualquer velocidade mecânica  $n$  do rotor que seja diferente da velocidade síncrona, é chamado de *conjugado assíncrono*.

A Fig. 6.4 mostra uma curva típica de conjugado  $\times$  velocidade para um motor de indução polifásico de gaiola de esquilo. Os fatores que influenciam a forma dessa curva podem ser apreciados em termos da equação de conjugado, a Equação 4.81. Observe que, quando a tensão aplicada ao estator e a frequência são constantes, o fluxo de entreferro resultante  $\Phi_m$  nessa equação é aproximadamente constante. Lembre-se também que a FMM  $F_r$  do rotor é proporcional à corrente do rotor  $I_r$ . A Equação 4.81 pode ser expressa então na forma

$$T = -K I_r \text{sen } \delta_r \quad (6.6)$$

onde  $K$  é uma constante e  $\delta_r$  é o ângulo que indica de quanto a onda de FMM do rotor está adiantada em relação à onda resultante de FMM no entreferro.

A corrente do rotor é igual ao negativo da tensão induzida pelo fluxo de entreferro dividida pela impedância do rotor, ambas na frequência de escorregamento. O sinal negativo é necessário porque a corrente induzida no rotor tem o sentido que desmagnetiza o fluxo de entreferro, ao passo que a corrente do rotor foi definida no Capítulo 4 como tendo o sentido de magnetização do entreferro. Sob condições normais de funcionamento, o escorregamento é pequeno, tendo 2 a 10 por cento a plena carga na maioria dos motores de gaiola de esquilo. A frequência do rotor ( $f_r = sf_c$ ) portanto é muito pequena (da ordem de 1 a 6 Hz em motores de 60 Hz). Nesse intervalo, a impedância do rotor é grandemente resistiva e portanto independente do escorregamento. A tensão induzida no rotor, por outro lado, é proporcional ao escorregamento e adianta-se de  $90^\circ$  em relação ao fluxo de entreferro resultante. Assim, a corrente do rotor é proporcional muito aproximadamente ao escorregamento e também é proporcional à tensão do rotor, estando defasada desta em  $180^\circ$ . Como resultado, a onda de FMM do rotor está atrasada de aproximadamente  $90$  graus elétricos em relação ao fluxo de entreferro resultante, e assim  $\text{sen } \delta_r \approx -1$ .



**FIGURA 6.4** Curva típica de conjugado x velocidade de um motor de indução operando com tensão e frequência constantes.

Portanto, é de se esperar uma proporcionalidade do conjugado em relação ao escorregamento que é aproximada dentro do intervalo em que o escorregamento é pequeno. À medida que o escorregamento aumenta, a impedância do rotor cresce devido à contribuição crescente da indutância de dispersão do rotor. Assim, a corrente do rotor é menos do que proporcional ao escorregamento. A corrente do rotor também fica mais atrasada em relação à tensão induzida e o valor de  $\sin \delta_r$  diminui.

O resultado é que o conjugado aumenta com escorregamento crescente até um valor máximo e então decresce, como está mostrado na Fig. 6.4. O *conjugado máximo*, que tipicamente é o dobro do conjugado nominal do motor, limita a capacidade de sobrecarga de curta duração do motor.

Veremos que o escorregamento, para o qual ocorre o conjugado de pico, é proporcional à resistência do rotor. Para motores de gaiola de esquilo, esse escorregamento de conjugado de pico é relativamente pequeno, tal como está mostrado na Fig. 6.4. Assim, o motor de gaiola de esquilo é substancialmente um motor de velocidade constante tendo uma queda de velocidade de uns poucos por cento quando passa da condição de ausência de carga para plena carga. No caso de um motor de rotor bobinado, a resistência do rotor pode ser aumentada inserindo-se uma resistência externa, aumentando assim o escorregamento de conjugado de pico e diminuindo, portanto, a velocidade do motor para um valor especificado de conjugado. Como as máquinas de indução de rotor bobinado são maiores e mais caras, requerendo uma manutenção significativamente mais dispendiosa do que as máquinas de gaiola de esquilo, esse método de controle de velocidade raramente é usado. A tendência das máquinas de indução acionadas com fontes de frequência constante é estarem essencialmente limitadas a aplicações de velocidade constante. Como veremos no Capítulo 11, o uso de sistemas de acionamento de estado sólido, de tensão e frequência variáveis, torna possível controlar facilmente a velocidade das máquinas de indução de gaiola e, como resultado, são amplamente usadas atualmente em uma larga faixa de aplicações que exigem velocidade variável.

## 6.2 CORRENTES E FLUXOS EM MÁQUINAS DE INDUÇÃO POLIFÁSICAS

Em um rotor bobinado, a distribuição de fluxo e FMM pode ser vista com ajuda da Fig. 6.5. Esse esquema mostra a planificação de um enrolamento simples de rotor trifásico e dois pólos, dentro de um campo de dois pólos. Pode-se ver que atende à restrição de que um rotor bobinado deve ter o mesmo número de pólos que o estator (embora o número de fases não precise ser o mesmo). A onda de densidade de fluxo do rotor está se movendo para a direita com velocidade angular  $\omega_r$  e com a velocidade angular de escorregamento  $s\omega_s$ , em relação ao enrolamento do rotor, o qual por sua vez está girando à direita com velocidade angular  $(1-s)\omega_s$ . Ela está mostrada na Fig. 6.5 na posição de tensão instantânea máxima da fase  $a$ .

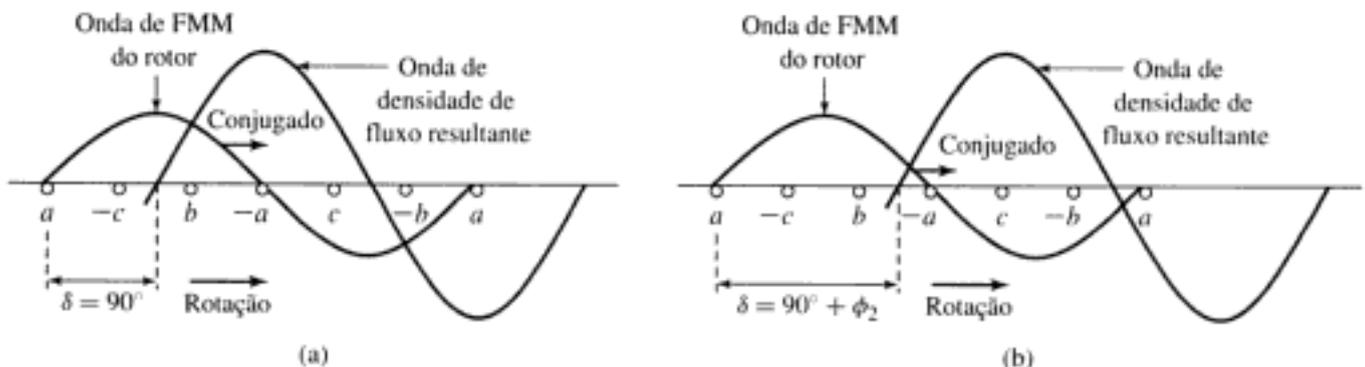
Se a reatância de dispersão, que é igual a  $s\omega_r$  vezes a indutância de dispersão do rotor, for muito pequena em comparação com a resistência do rotor (o que tipicamente é o caso para os pequenos escorregamentos que ocorrem em funcionamento normal), a corrente da fase  $a$  também será máxima. Como mostrado na Seção 4.5, a onda de FMM do rotor estará então centrada na fase  $a$ , como se vê na Fig. 6.5a. Sob essas condições, o ângulo de deslocamento, ou ângulo de conjugado,  $\delta_r$  estará em seu valor ótimo de  $-90^\circ$ .

Entretanto, se a reatância de dispersão do rotor for apreciável, a corrente da fase  $a$  estará atrasada, em relação à tensão induzida, de um ângulo igual ao ângulo de fator de potência  $\phi_2$  da impedância de dispersão do rotor. A corrente da fase  $a$  não estará em seu valor máximo até um instante correspondentemente mais atrasado. A onda de FMM do rotor estará centrada na fase  $a$  somente após a onda de fluxo ter se deslocado mais  $\phi_2$  graus no entreferro, como mostrado na Fig. 6.5b. O ângulo  $\delta_r$  é agora  $-(90^\circ + \phi_2)$ . Dessa forma, o ângulo de conjugado de um motor de indução é dado em geral por

$$\delta_r = -(90^\circ + \phi_2) \quad (6.7)$$

O seu afastamento do valor ótimo de  $-90^\circ$  é dado pelo ângulo do fator de potência para a impedância de dispersão do rotor, na frequência de escorregamento. Na Fig. 6.5, o conjugado eletromagnético do rotor está dirigido para a direita, ou seja, no sentido de deslocamento da onda de fluxo.

A situação comparativa para o caso de um rotor de gaiola de esquilo está ilustrada na Fig. 6.6. Um rotor de 16 barras colocado em um campo de dois pólos está mostrado em forma planificada. Para simplificar o desenho, apenas um número relativamente pequeno de barras do rotor foi escolhido, sendo que esse número é um múltiplo inteiro do número de pólos.



**FIGURA 6.5** Enrolamento planificado do rotor de um motor de indução com suas ondas de densidade de fluxo e ondas de FMM em suas posições relativas para reatância de dispersão (a) igual a zero e (b) diferente de zero.

Normalmente, não se adota essa escolha para evitar efeitos danosos devidos às componentes harmônicas. Na Fig. 6.6a, a onda senoidal de densidade de fluxo induz uma tensão em cada barra, sendo que os valores instantâneos são indicados pelas linhas cheias verticais.

Um pouco depois, as correntes nas barras assumem os valores instantâneos indicados pelas linhas cheias verticais da Fig. 6.6b, o atraso de tempo corresponde ao ângulo do fator de potência do rotor  $\phi_2$ . Nesse intervalo de tempo, a onda de densidade de fluxo desloca-se, segundo seu sentido de rotação em relação ao rotor, por um ângulo espacial  $\phi_2$  e chega então à posição mostrada na Fig. 6.6b. A onda de FMM correspondente do rotor está mostrada pela onda em degraus na Fig. 6.6c. A componente fundamental está mostrada na forma de uma senóide em linha tracejada, e a onda de densidade de fluxo, pela senóide em linha cheia. O estudo dessas figuras confirma o princípio geral de que o número de pólos do rotor, em um rotor de gaiola de esquilo, é determinado pela onda de fluxo indutivo.

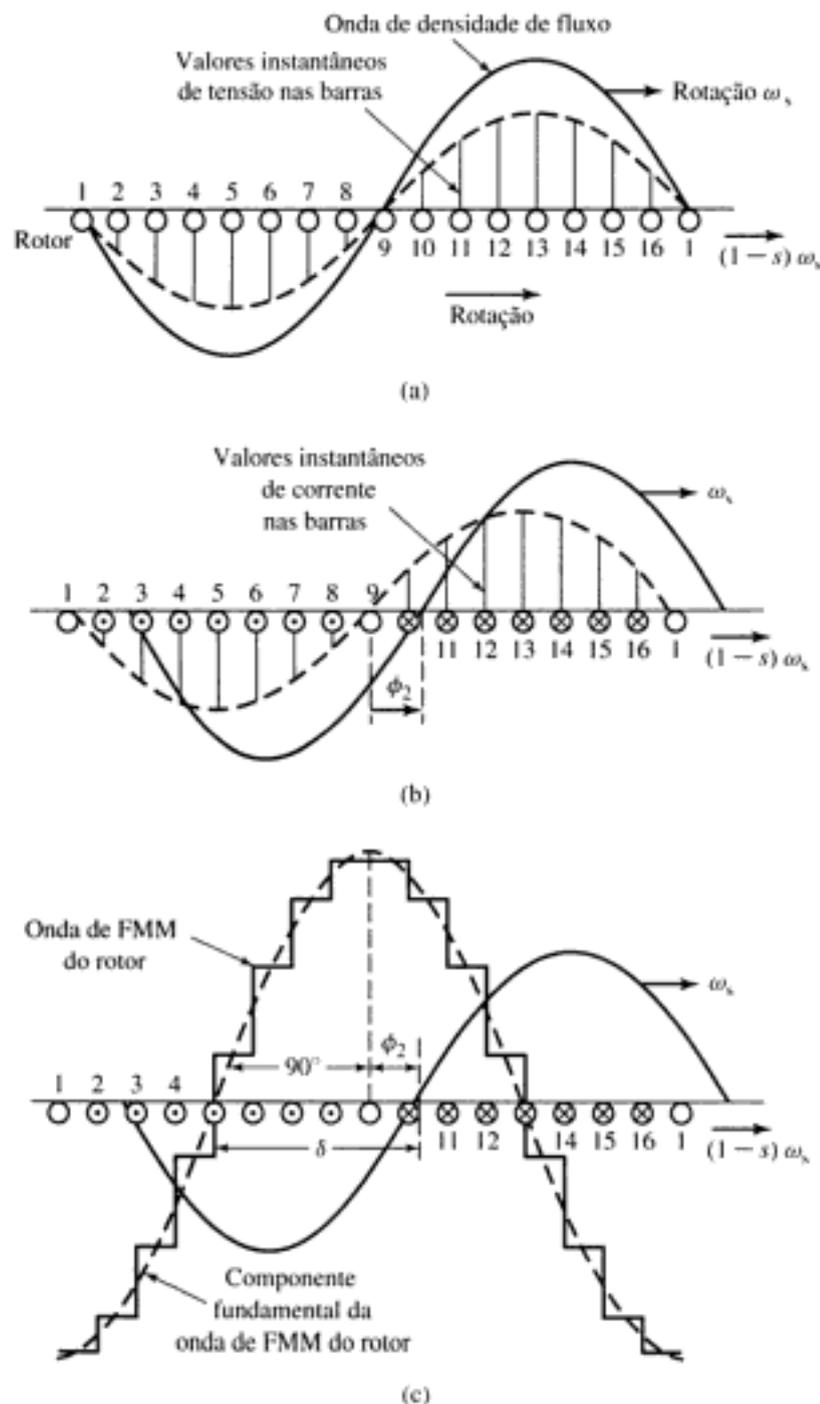


FIGURA 6.6 Reações de um rotor de gaiola em um campo de dois pólos.

### 6.3 CIRCUITO EQUIVALENTE DO MOTOR DE INDUÇÃO

As considerações anteriores sobre fluxo e ondas de FMM podem ser expressas prontamente na forma de um circuito equivalente para a máquina de indução polifásica, em regime permanente. Nesse desenvolvimento, apenas máquinas com enrolamentos polifásicos simétricos, excitados por tensões polifásicas equilibradas, são consideradas. Como em muitas outras discussões de dispositivos polifásicos, é útil pensar que as máquinas trifásicas estão ligadas em Y, de modo que as correntes e tensões sejam sempre expressas por valores de fase. Nesse caso, podemos deduzir o circuito equivalente para uma fase, ficando subentendido que as tensões e correntes nas demais fases podem ser obtidas por meio de um simples deslocamento adequado da fase que está sendo estudada ( $\pm 120^\circ$  no caso de uma máquina trifásica).

Primeiro, considere as condições no estator. A onda de fluxo de entreferro, girando sincronicamente, gera forças contra-eletromotrizes (FCEMs) polifásicas equilibradas nas fases do estator. A tensão de terminal do estator difere da FCEM pela queda de tensão na impedância de dispersão do estator  $Z_1 = R_1 + jX_1$ . Assim,

$$\hat{V}_1 = \hat{E}_2 + \hat{I}_1(R_1 + jX_1) \quad (6.8)$$

onde

$\hat{V}_1$  = Tensão de fase de terminal do estator

$\hat{E}_2$  = FCEM (de fase) gerada pelo fluxo de entreferro resultante

$\hat{I}_1$  = Corrente do estator

$R_1$  = Resistência efetiva do estator

$X_1$  = Reatância de dispersão do estator

As polaridades das tensões e correntes estão mostradas no circuito equivalente da Fig. 6.7.

O fluxo de entreferro resultante é criado pelas FMMs combinadas das correntes de estator e rotor. Exatamente como no caso de um transformador, a corrente de estator pode ser decomposta em duas componentes: uma componente de carga e uma componente de excitação (magnetização). A componente de carga  $\hat{I}_2$  produz uma FMM que corresponde à FMM da corrente do rotor. A componente de excitação  $\hat{I}_\varphi$  é a corrente de estator adicional que é necessária para criar o fluxo de entreferro e é uma função da FEM  $\hat{E}_2$ . A corrente de excitação pode ser decomposta em uma componente de perdas no núcleo  $\hat{I}_c$ , em fase com  $\hat{E}_2$ , e uma componente de magnetização  $\hat{I}_m$ , atrasada em relação a  $\hat{E}_2$  de  $90^\circ$ . No circuito equivalente, a corrente de excitação pode ser levada em consideração incluindo-se um ramo em derivação, formado por uma *resistência de perdas no núcleo*  $R_c$  em paralelo com uma *reatância de magnetização*  $X_m$ , ligado a  $\hat{E}_2$ , como na Fig. 6.7. Usualmente, ambas  $R_c$  e  $X_m$  são determinadas para a frequência nominal do estator e para um valor de  $E_2$  próximo do valor esperado de operação; assume-se então que esses valores permanecem constantes quando pequenos desvios em  $E_2$  ocorrerem durante o funcionamento normal do motor.

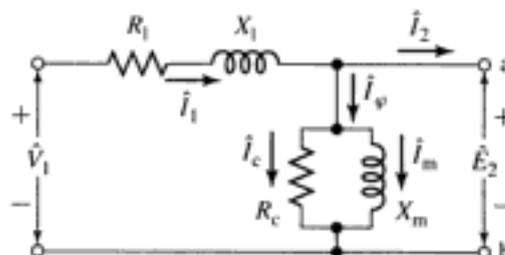


FIGURA 6.7 Circuito equivalente do estator de um motor de indução polifásico.

O circuito equivalente que representa o estator é exatamente igual ao usado para representar o primário de um transformador. Para completar o nosso modelo, os efeitos do rotor devem ser incluídos. Do ponto de vista do circuito equivalente do estator da Fig. 6.7, o rotor pode ser representado por uma impedância equivalente  $Z_2$

$$Z_2 = \frac{\hat{E}_2}{\hat{I}_2} \quad (6.9)$$

que corresponde à impedância de dispersão de um secundário equivalente estacionário. Para completar o circuito equivalente, devemos determinar o valor de  $Z_2$  que represente as tensões e correntes, em termos das grandezas do rotor referidas ao estator.

Como vimos na Seção 2.3, do ponto de vista do primário, o enrolamento do secundário de um transformador pode ser substituído por um circuito equivalente que tem o mesmo número de espiras que o enrolamento do primário. Em um transformador, no qual a relação de espiras e os parâmetros do secundário são conhecidos, isso pode ser feito referindo a impedância do secundário ao primário. Para tanto, essa impedância é multiplicada pelo quadrado da relação de espiras entre o primário e o secundário. O circuito equivalente resultante é perfeitamente geral do ponto de vista das grandezas do primário.

De modo semelhante, no caso de uma máquina de indução polifásica, quando o rotor é substituído por um rotor equivalente, tendo um enrolamento polifásico com os mesmos números de fases e espiras que o estator mas produzindo a mesma FMM e fluxo de entreferro que o rotor real, o desempenho não será alterado quando for observado do ponto de vista dos terminais do estator. Esse conceito, adotado aqui, é especialmente útil no modelamento de rotores de gaiola nos quais a identificação dos “enrolamentos de fase” não é óbvia de modo algum.

O rotor de uma máquina de indução é curto-circuitado e, desse modo, a impedância vista pela tensão induzida é simplesmente a impedância de curto-circuito do rotor. Conseqüentemente, a expressão que fornece a relação entre a impedância de dispersão  $Z_2$ , do rotor equivalente, na frequência de escorregamento, e a impedância de dispersão  $Z_{\text{rotor}}$ , na frequência de escorregamento, do rotor real deve ser

$$Z_{2s} = \frac{\hat{E}_{2s}}{\hat{I}_{2s}} = N_{\text{ef}}^2 \left( \frac{\hat{E}_{\text{rotor}}}{\hat{I}_{\text{rotor}}} \right) = N_{\text{ef}}^2 Z_{\text{rotor}} \quad (6.10)$$

onde  $N_{\text{ef}}$  é relação de espiras efetiva entre o enrolamento do estator e o enrolamento do rotor real. Aqui o subscrito 2s refere-se às grandezas associadas ao rotor referido. Assim,  $\hat{E}_{2s}$  é a tensão induzida pelo fluxo de entreferro resultante no rotor equivalente e  $\hat{I}_{2s}$  é a correspondente corrente induzida.

Quando se está interessado nas correntes e tensões do rotor real, a relação de espiras  $N_{\text{ef}}$  deve ser conhecida para que se possa converter as grandezas do rotor equivalente de volta para o rotor real. Entretanto, para os propósitos de estudo do desempenho do motor de indução, visto dos terminais do estator, não há nenhuma necessidade dessa conversão e uma representação em termos das grandezas do rotor equivalente é perfeitamente adequada. Assim, um circuito equivalente, baseado nas grandezas do rotor equivalente, pode ser usado para representar ambos os rotores bobinado e de gaiola de esquilo.

Depois de termos examinado os efeitos da relação de espiras entre o estator e o rotor, devemos levar em consideração agora o movimento relativo entre o estator e o rotor com o objetivo de substituir o rotor real, com tensões e correntes na frequência de escorregamento, por um rotor equivalente estacionário, com tensões e correntes na frequência do estator. Considere primeiro a impedância de dispersão do rotor referido, na frequência de escorregamento.

$$Z_{2s} = \frac{\hat{E}_{2s}}{\hat{I}_{2s}} = R_2 + jsX_2 \quad (6.11)$$

onde

$R_2$  = Resistência do rotor referido

$sX_2$  = Reatância de dispersão do rotor referido, na frequência de escorregamento

Observe que aqui  $X_2$  foi definida como sendo a reatância de dispersão do rotor referido ao estator, na frequência do estator  $f_c$ . Como a frequência do rotor real é  $f_r = sf_c$ , ela foi convertida para a reatância, na frequência de escorregamento, simplesmente multiplicando pelo escorregamento  $s$ . O circuito equivalente de uma fase do rotor referido, na frequência de escorregamento, está mostrado na Fig. 6.8. Esse é o circuito equivalente do rotor visto, na frequência de escorregamento, no quadro de referência do rotor.

A seguir, observamos que a onda de FMM resultante no entreferro é produzida pelos efeitos combinados da corrente do estator  $\hat{I}_1$  e da corrente de carga equivalente  $\hat{I}_2$ . De modo semelhante, ela pode ser expressa em termos da corrente de estator e da corrente de rotor equivalente  $\hat{I}_{2s}$ . Essas duas correntes são iguais em magnitude pois  $\hat{I}_{2s}$  é definida como sendo a corrente em um rotor equivalente, com o mesmo número de espiras por fase que o estator. Como a onda de FMM resultante no entreferro é determinada pela soma fasorial da corrente do estator e da corrente do rotor, real ou equivalente, então  $\hat{I}_2$  e  $\hat{I}_{2s}$  devem ser iguais também em fase (nas suas frequências elétricas respectivas) e, assim, podemos escrever

$$\hat{I}_{2s} = \hat{I}_2 \quad (6.12)$$

Finalmente, considere que a onda de fluxo resultante induz a FEM no rotor referido  $\hat{E}_{2s}$ , na frequência de escorregamento, e também a FCEM no estator  $\hat{E}_2$ . Se não fosse pelo efeito da velocidade, essas tensões teriam a mesma magnitude porque o enrolamento do rotor referido tem o mesmo número de espiras por fase que o enrolamento do estator. No entanto, como a velocidade relativa da onda de fluxo em relação ao rotor é  $s$  vezes a sua velocidade em relação ao estator, a relação entre essas FEMs é

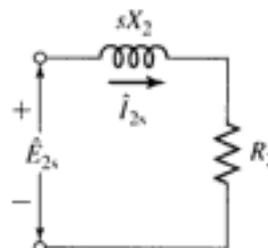
$$E_{2s} = sE_2 \quad (6.13)$$

Podemos ainda argumentar que, como o ângulo de fase entre cada uma dessas tensões e a onda de fluxo resultante é  $90^\circ$ , essas duas tensões devem ser iguais também em sentido fasorial nas suas respectivas frequências elétricas. Portanto,

$$\hat{E}_{2s} = s\hat{E}_2 \quad (6.14)$$

Dividindo a Equação 6.14 pela Equação 6.12 e usando a Equação 6.11, temos

$$\frac{\hat{E}_{2s}}{\hat{I}_{2s}} = \frac{s\hat{E}_2}{\hat{I}_2} = Z_{2s} = R_2 + jsX_2 \quad (6.15)$$



**FIGURA 6.8** Circuito equivalente de um rotor de motor de indução polifásico na frequência de escorregamento.

Então, dividindo pelo escorregamento  $s$ , obtemos

$$Z_2 = \frac{\hat{E}_2}{\hat{I}_2} = \frac{R_2}{s} + jX_2 \quad (6.16)$$

Assim, alcançamos o nosso objetivo.  $Z_2$  é a impedância de rotor equivalente estacionário que aparece nos terminais de carga do circuito equivalente do estator mostrado na Fig. 6.7. O resultado final é o circuito equivalente monofásico da Fig. 6.9. Os efeitos combinados da carga no eixo e da resistência do rotor aparecem na forma de uma resistência refletida  $R_2/s$ , que é uma função do escorregamento  $e$ , portanto, da carga mecânica. A corrente na impedância do rotor refletido é igual à componente de carga  $\hat{I}_2$  da corrente do estator. A tensão sobre essa impedância é igual à tensão de estator  $\hat{E}_2$ . Observe que, quando as correntes e tensões do rotor são refletidas no estator, sua frequência também é alterada para a frequência do estator. Todos os fenômenos elétricos do rotor, quando vistos a partir do estator, tornam-se fenômenos que têm a frequência do estator, porque simplesmente o enrolamento do estator vê as ondas de FMM e fluxo deslocando-se na velocidade síncrona.

## 6.4 ANÁLISE DO CIRCUITO EQUIVALENTE

O circuito equivalente monofásico da Fig. 6.9 pode ser usado para determinar uma ampla variedade de características de desempenho das máquinas de indução polifásicas em regime permanente. Estão incluídas as variações de corrente, velocidade e perdas que ocorrem quando as exigências de carga e conjugado são alteradas. Incluem-se também o conjugado máximo e o de partida.

O circuito equivalente mostra que a potência total  $P_g$  transferida através do entreferro desde o estator é

$$P_g = n_{\text{fases}} I_2^2 \left( \frac{R_2}{s} \right) \quad (6.17)$$

onde  $n_{\text{fases}}$  é o número de fases do estator.

As perdas totais  $I^2 R$  do rotor,  $P_{\text{rotor}}$ , podem ser calculadas a partir das perdas  $I^2 R$  no rotor equivalente como

$$P_{\text{rotor}} = n_{\text{fases}} I_{2s}^2 R_2 \quad (6.18)$$

Como  $I_{2s} = I_2$ , podemos escrever a Equação 6.18 como

$$P_{\text{rotor}} = n_{\text{fases}} I_2^2 R_2 \quad (6.19)$$

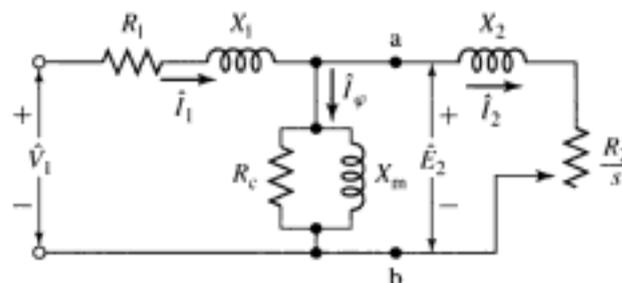


FIGURA 6.9 Circuito equivalente monofásico de um motor de indução polifásico.

Agora, a potência eletromagnética  $P_{mec}$  desenvolvida pelo motor pode ser determinada subtraindo a dissipação de potência do rotor (Equação 6.19) da potência de entreferro (Equação 6.17), obtendo-se

$$P_{mec} = P_g - P_{rotor} = n_{fases} I_2^2 \left( \frac{R_2}{s} \right) - n_{fases} I_2^2 R_2 \quad (6.20)$$

ou, de forma equivalente,

$$P_{mec} = n_{fases} I_2^2 R_2 \left( \frac{1-s}{s} \right) \quad (6.21)$$

Comparando a Equação 6.17 com a Equação 6.21, obtém-se

$$P_{mec} = (1-s) P_g \quad (6.22)$$

e

$$P_{rotor} = s P_g \quad (6.23)$$

Vemos então que, da potência total fornecida através do entreferro para o rotor, a fração  $1-s$  é convertida em potência mecânica e a fração  $s$  é dissipada como perdas  $I^2 R$  nos condutores do rotor. Assim, é evidente que um motor de indução que está operando com um escorregamento elevado não é um dispositivo eficiente. Quando os aspectos de potência devem ser destacados, o circuito equivalente pode ser redesenhado como na Fig. 6.10. A potência eletromecânica por fase do estator é igual à potência entregue à resistência  $R_2(1-s)/s$ .

### EXEMPLO 6.1

Observa-se que um motor de indução trifásico de dois pólos e 60 Hz está operando com uma velocidade de 3502 rpm com uma potência de entrada de 15,7 kW e uma corrente de terminal de 22,6 A. A resistência de enrolamento do estator é 0,20  $\Omega$ /fase. Calcule a potência  $I^2 R$  dissipada no rotor.

#### ■ Solução

A potência dissipada no enrolamento do estator é dada por

$$P_{estator} = 3 I_1^2 R_1 = 3(22,6)^2 0,2 = 306 \text{ W}$$

Assim, a potência no entreferro é

$$P_g = P_{entrada} - P_{estator} = 15,7 - 0,3 = 15,4 \text{ kW}$$

A velocidade síncrona dessa máquina pode ser obtida a partir da Equação 4.41

$$n_s = \left( \frac{120}{\text{pólos}} \right) f_c = \left( \frac{120}{2} \right) 60 = 3600 \text{ rpm}$$

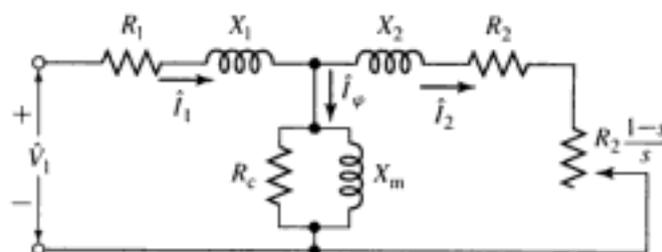


FIGURA 6.10 Forma alternativa do circuito equivalente.

e, portanto, da Equação 6.1, o escorregamento é  $s = (3600 - 3502)/3600 = 0,0272$ . Assim, da Equação 6.23,

$$P_{\text{rotor}} = s P_g = 0,0272 \times 15,4 \text{ kW} = 419 \text{ W}$$

### PROBLEMA PRÁTICO 6.1

Calcule a potência de dissipação do rotor de um motor trifásico de quatro pólos, 460 V e 60 Hz com uma resistência de armadura de  $0,056 \Omega$  operando na velocidade de 1738 rpm, com uma potência de entrada de 47,4 kW e uma corrente de terminal de 76,2 A.

#### ■ Solução

1,6 kW

O conjugado eletromecânico  $T_{\text{mec}}$  correspondente à potência  $P_{\text{mec}}$  pode ser obtido lembrando que a potência mecânica é igual ao conjugado vezes a velocidade angular. Assim,

$$P_{\text{mec}} = \omega_m T_{\text{mec}} = (1 - s) \omega_s T_{\text{mec}} \quad (6.24)$$

Para  $P_{\text{mec}}$  em watts e  $\omega_s$  em rad/s,  $T_{\text{mec}}$  será em newtons-metros.

O uso das Equações 6.21 e 6.22 conduz a

$$T_{\text{mec}} = \frac{P_{\text{mec}}}{\omega_m} = \frac{P_g}{\omega_s} = \frac{n_{\text{fases}} I_2^2 (R_2/s)}{\omega_s} \quad (6.25)$$

com a velocidade angular mecânica síncrona  $\omega_s$ , sendo dada por

$$\omega_s = \frac{4\pi f_e}{\text{pólos}} = \left( \frac{2}{\text{pólos}} \right) \omega_e \quad (6.26)$$

O conjugado mecânico  $T_{\text{mec}}$  e a  $P_{\text{mec}}$  não são os valores de saída disponíveis no eixo porque o atrito, a ventilação e as perdas suplementares não foram levados em consideração. Obviamente é correto subtrair o atrito, a ventilação e outras perdas rotacionais de  $T_{\text{mec}}$  ou  $P_{\text{mec}}$ . Assume-se geralmente que os efeitos das perdas suplementares podem ser subtraídos do mesmo modo. O restante está disponível como potência de saída no eixo em forma de trabalho útil. Assim,

$$P_{\text{eixo}} = P_{\text{mec}} - P_{\text{rot}} \quad (6.27)$$

e

$$T_{\text{eixo}} = \frac{P_{\text{eixo}}}{\omega_m} = T_{\text{mec}} - T_{\text{rot}} \quad (6.28)$$

em que  $P_{\text{rot}}$  e  $T_{\text{rot}}$  são a potência e o conjugado associados ao atrito, à ventilação e às demais perdas rotacionais.

Freqüentemente a análise do circuito equivalente do transformador é simplificada, desprezando-se inteiramente o ramo de magnetização ou adotando-se uma aproximação que consiste em movê-lo diretamente até os terminais do primário. No caso das máquinas de indução, em condições normais de funcionamento, tais aproximações não são usadas porque com a presença do entreferro resulta uma impedância de magnetização relativamente mais baixa, e correspondentemente uma corrente de excitação relativamente mais elevada — 30 a 50 por cento da corrente a plena carga — e também porque as reatâncias de dispersão são mais elevadas. Algumas simplificações no circuito equivalente da máquina de indução ocorrem quando a resistência  $R_c$  de perdas no núcleo é omitida e quando o efeito correspondente das perdas

no núcleo é deduzido de  $T_{mec}$  ou  $P_{mec}$ , ao mesmo tempo que os efeitos das perdas rotacionais e suplementares são subtraídos. O circuito equivalente torna-se então o da Fig. 6.11a ou b, e freqüentemente o erro introduzido é relativamente insignificante. Durante os ensaios de motores, tal procedimento apresenta também uma vantagem, porque então as perdas a vazio no núcleo não precisam ser separadas do atrito e da ventilação. Esses últimos circuitos serão usados nas discussões subseqüentes.

### EXEMPLO 6.2

Um motor de indução trifásico, ligado em Y, de seis pólos, 220 V (tensão de linha), 7,5 kW e 60 Hz tem os seguintes valores de parâmetros, em  $\Omega$ /fase, referidos ao estator:

$$R_1 = 0,294 \quad R_2 = 0,144$$

$$X_1 = 0,503 \quad X_2 = 0,209 \quad X_m = 13,25$$

Pode-se assumir que as perdas totais de atrito, ventilação e no núcleo sejam de 403 W constantes, independentemente da carga.

Para um escorregamento de 2 por cento, calcule a velocidade, o conjugado e a potência de saída, a corrente de estator, o fator de potência e o rendimento, quando o motor é operado em tensão e freqüência constantes.

#### ■ Solução

Seja  $Z_r$  (Fig. 6.11a) a impedância por fase apresentada ao estator pela reatância de magnetização e o rotor. Assim, da Fig. 6.11a,

$$Z_r = R_r + jX_r = \left( \frac{R_2}{s} + jX_2 \right) \text{ em paralelo com } jX_m$$

A substituição dos valores numéricos dados, para  $s = 0,02$ , resulta em

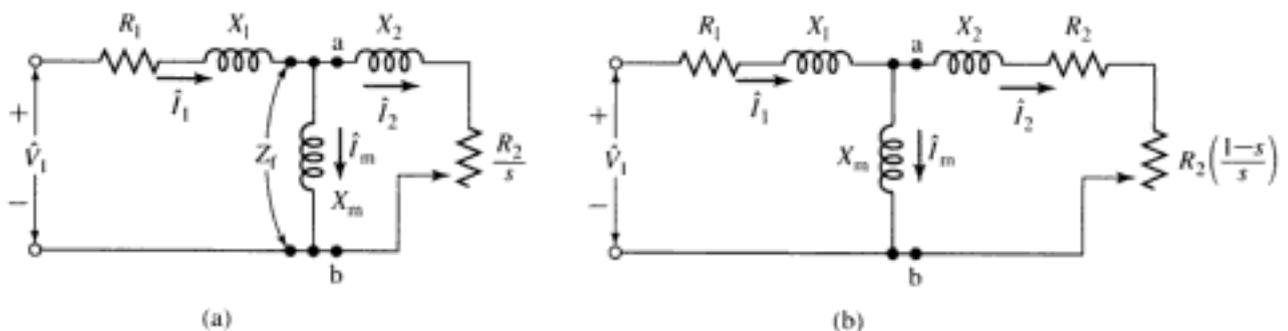
$$R_r + jX_r = 5,41 + j3,11 \Omega$$

Agora, a impedância de entrada do estator pode ser calculada como

$$Z_{entrada} = R_1 + jX_1 + Z_r = 5,70 + j3,61 = 6,75 \angle 32,3^\circ \Omega$$

A tensão de fase de terminal é igual a

$$V_1 = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127 \text{ V}$$



**FIGURA 6.11** Circuitos equivalentes, com a resistência de perdas no núcleo desprezada, correspondentes a (a) Fig. 6.9 e (b) Fig. 6.10.

e, desse modo, a corrente de estator pode ser calculada como

$$\hat{I}_1 = \frac{V_1}{Z_{\text{entrada}}} = \frac{127}{6,75 \angle 32,3^\circ} = 18,8 \angle -32,3^\circ \text{ A}$$

A corrente de estator é assim 18,8 A e o fator de potência é igual a  $\cos(-32,3^\circ) = 0,845$  indutivo.

A velocidade síncrona pode ser obtida da Equação 4.41

$$n_s = \left( \frac{120}{\text{pólos}} \right) f_c = \left( \frac{120}{6} \right) 60 = 1200 \text{ rpm}$$

ou, da Equação 6.26,

$$\omega_s = \frac{4\pi f_c}{\text{pólos}} = 125,7 \text{ rad/s}$$

A velocidade do rotor é

$$n = (1 - s)n_s = (0,98)1200 = 1176 \text{ rpm}$$

ou

$$\omega_m = (1 - s)\omega_s = (0,98)125,7 = 123,2 \text{ rad/s}$$

Da Equação 6.17,

$$P_g = n_{\text{fases}} I_2^2 \left( \frac{R_2}{s} \right)$$

No entanto, observe que, como a única resistência incluída em  $Z_f$  é  $R_2/s$ , a potência dissipada em  $Z_f$  é igual à potência dissipada em  $R_2/s$  e, assim, podemos escrever

$$P_g = n_{\text{fases}} I_1^2 R_f = 3(18,8)^2(5,41) = 5740 \text{ W}$$

Agora, podemos calcular o valor de  $P_{\text{mec}}$  dado pela Equação 6.22 e a potência de saída no eixo dada pela Equação 6.27. Assim,

$$\begin{aligned} P_{\text{eixo}} &= P_{\text{mec}} - P_{\text{rot}} = (1 - s)P_g - P_{\text{rot}} \\ &= (0,98)5740 - 403 = 5220 \text{ W} \end{aligned}$$

e o conjugado de saída no eixo pode ser encontrado a partir da Equação 6.28 como

$$T_{\text{eixo}} = \frac{P_{\text{eixo}}}{\omega_m} = \frac{5220}{123,2} = 42,4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

O rendimento é calculado como sendo a razão entre a potência de saída no eixo e a potência de entrada no estator. A potência de entrada é dada por

$$\begin{aligned} P_{\text{entrada}} &= n_{\text{fases}} \text{Re}[\hat{V}_1 \hat{I}_1^*] = 3 \text{Re}[127(18,8 \angle 32,3^\circ)] \\ &= 3 \times 127 \times 18,8 \cos(32,2^\circ) = 6060 \text{ W} \end{aligned}$$

Assim, o rendimento  $\eta$  é igual a

$$\eta = \frac{P_{\text{eixo}}}{P_{\text{entrada}}} = \frac{5220}{6060} = 0,861 = 86,1\%$$

As características completas de desempenho do motor podem ser determinadas repetindo-se esses cálculos para outros valores de escorregamento que forem adotados.

## PROBLEMA PRÁTICO 6.2

Encontre a velocidade, a potência de saída e o rendimento do motor do Exemplo 6.2 quando está operando na tensão e frequência nominais, para um escorregamento de 1,5 por cento.

## ■ Solução

$$\text{Velocidade} = 1182 \text{ rpm}$$

$$P_{\text{eixo}} = 3932 \text{ W}$$

$$\text{Rendimento} = 85,3\%$$

## 6.5 CONJUGADO E POTÊNCIA USANDO O TEOREMA DE THÉVENIN

Quando se deseja enfatizar as relações de conjugado e potência, uma considerável simplificação resulta quando o teorema de Thévenin da teoria de circuitos é aplicado ao circuito equivalente do motor de indução. Em sua forma geral, o teorema de Thévenin permite a substituição de qualquer rede, vista em dois terminais  $a$  e  $b$  (Fig. 6.12a) e constituída de elementos de circuitos lineares e fontes de tensão complexa, por uma única fonte de tensão complexa  $\hat{V}_{\text{eq}}$  em série com uma única impedância  $Z_{\text{eq}}$  (Fig. 6.12b). A tensão equivalente de Thévenin  $\hat{V}_{\text{eq}}$  é a que aparece nos terminais  $a$  e  $b$  da rede original quando esses terminais estão em circuito aberto. A impedância equivalente de Thévenin  $Z_{\text{eq}}$  é aquela que aparece nos mesmos terminais quando todas as fontes de tensão dentro da rede são zeradas. Em aplicações que envolvem o circuito equivalente do motor de indução, os pontos  $a$  e  $b$  são os indicados na Fig. 6.11a e b. Então, o circuito equivalente toma a forma dada na Fig. 6.13, onde o teorema de Thévenin foi usado para transformar a rede localizada à esquerda dos pontos  $a$  e  $b$  em uma fonte de tensão equivalente  $\hat{V}_{1,\text{eq}}$  em série com uma impedância equivalente  $Z_{1,\text{eq}} = R_{1,\text{eq}} + jX_{1,\text{eq}}$ .

De acordo com o teorema de Thévenin, a tensão da fonte equivalente  $\hat{V}_{1,\text{eq}}$  é a tensão que aparece nos terminais  $a$  e  $b$  da Fig. 6.11 quando os circuitos de rotor são removidos. O resultado é um divisor de tensão simples e, assim,

$$\hat{V}_{1,\text{eq}} = \hat{V}_1 \left( \frac{jX_m}{R_1 + j(X_1 + X_m)} \right) \quad (6.29)$$

Para a maioria dos motores de indução, erros desprezíveis surgirão se a resistência de estator da Equação 6.29 for desprezada. A impedância de estator  $Z_{1,\text{eq}}$ , dada pelo equivalente Thé-

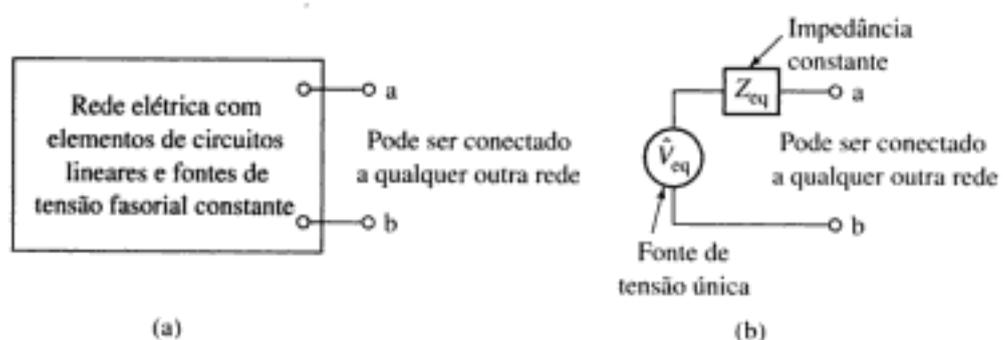
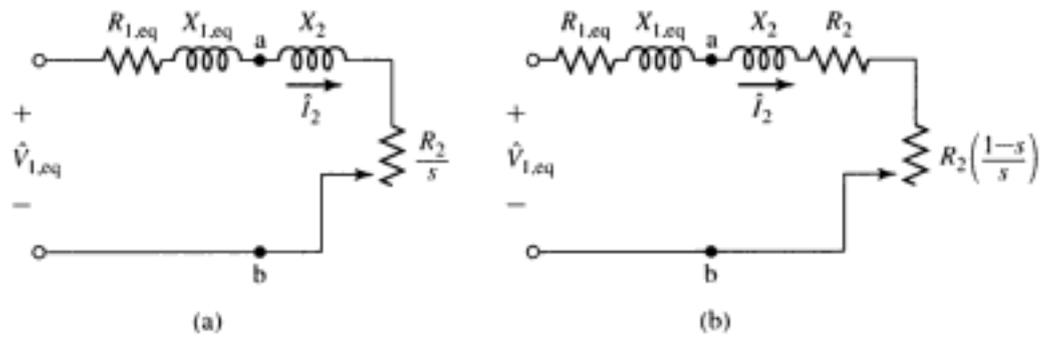


FIGURA 6.12 (a) Rede linear genérica e (b) seu equivalente nos terminais  $ab$  de acordo com o teorema de Thévenin.



**FIGURA 6.13** Circuitos equivalentes do motor de indução, simplificados pelo teorema de Thévenin.

venin, é a impedância entre os terminais  $a$  e  $b$  da Fig. 6.11, vista em direção à fonte cuja tensão foi zerada (ou, o que é equivalente, substituída por um curto-circuito). Portanto, obtém-se

$$Z_{1,eq} = R_{1,eq} + jX_{1,eq} = (R_1 + jX_1) \text{ em paralelo com } jX_m \quad (6.30)$$

ou

$$Z_{1,eq} = \frac{jX_m(R_1 + jX_1)}{R_1 + j(X_1 + X_m)} \quad (6.31)$$

Observe que a resistência das perdas no núcleo  $R_c$  foi desprezada na dedução das Equações 6.29 a 6.31. Embora trate-se de uma aproximação muito usada, o seu efeito pode ser incorporado facilmente às deduções apresentadas aqui substituindo-se a reatância de magnetização  $jX_m$  pela impedância de magnetização  $Z_m$ , igual à combinação da resistência de perdas no núcleo  $R_c$  em paralelo com a reatância de magnetização  $jX_m$ .

Do circuito equivalente de Thévenin (Fig. 6.13), tem-se

$$\hat{I}_2 = \frac{\hat{V}_{1,eq}}{Z_{1,eq} + jX_2 + R_2/s} \quad (6.32)$$

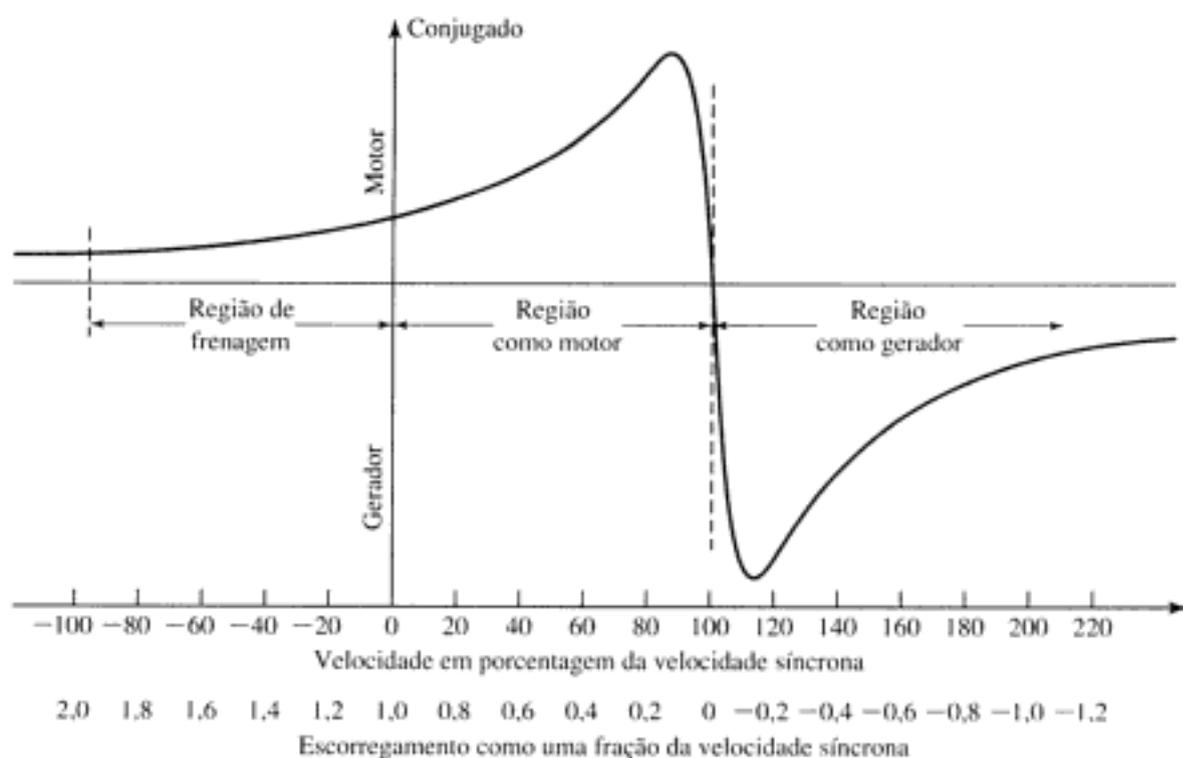
e, desse modo, da expressão do conjugado (Equação 6.25), obtém-se

$$T_{mec} = \frac{1}{\omega_s} \left[ \frac{n_{fases} V_{1,eq}^2 (R_2/s)}{(R_{1,eq} + (R_2/s))^2 + (X_{1,eq} + X_2)^2} \right] \quad (6.33)$$

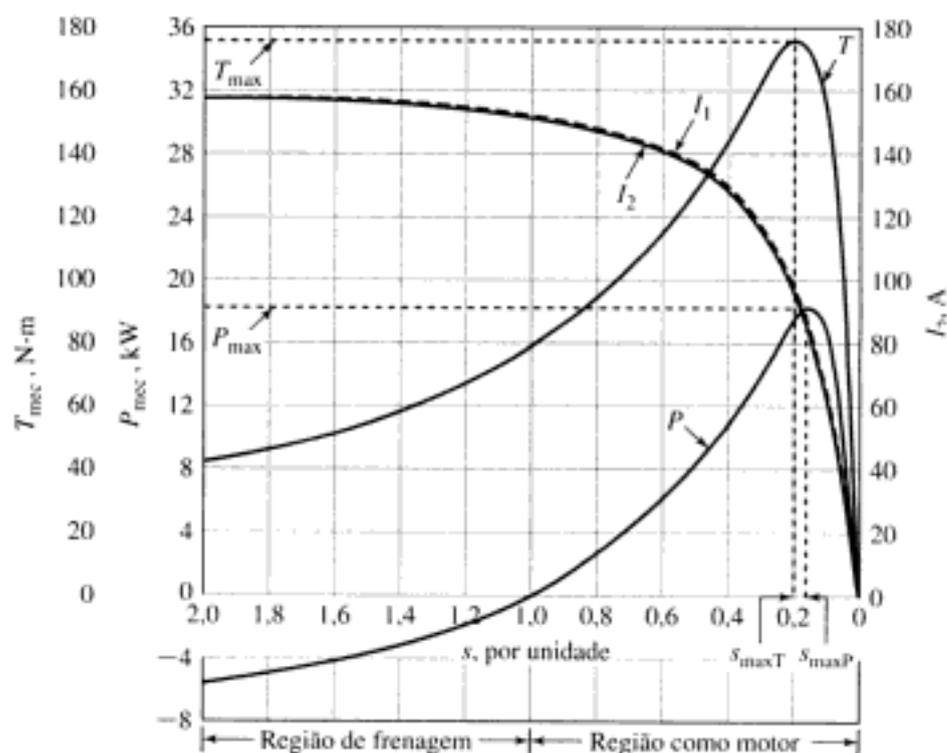
onde  $\omega_s$  é a velocidade mecânica angular síncrona, dada pela Equação 6.26. A forma geral da curva de conjugado  $\times$  velocidade ou conjugado  $\times$  escorregamento, para o caso em que o motor está conectado a uma fonte de tensão e frequência constantes, está mostrada nas Figs. 6.14 e 6.15.

Durante o funcionamento normal do motor, o rotor gira no sentido de rotação do campo magnético produzido pelas correntes de estator, a velocidade está entre zero e a velocidade síncrona, e o correspondente escorregamento está entre 1,0 e 0 (indicado por “Região como motor” na Fig. 6.14). As condições de partida do motor correspondem a  $s = 1,0$ .

Para operar na região de  $s$  maior do que 1 (correspondendo a uma velocidade negativa do motor), o motor deve ser acionado em sentido contrário, contra o sentido de rotação do seu campo magnético, por uma fonte de potência mecânica capaz de contrabalançar o conjugado  $T_{mec}$ . A principal utilização prática dessa região está em trazer rapidamente o motor até uma parada por um método chamado *frenagem por inversão de fases*. Permutando dois terminais do estator de um motor trifásico, a seqüência de fases e, portanto, o sentido de rotação do campo magnético são invertidos subitamente e o que era um pequeno escorregamento, antes da inversão de fases, torna-se um escorregamento próximo de 2,0 após a inversão; o motor pára sob a



**FIGURA 6.14** Curva de conjugado x escorregamento de uma máquina de indução, mostrando as regiões de frenagem e de funcionamento como motor e gerador.



**FIGURA 6.15** Curvas de conjugado, potência e corrente calculadas para o motor de 7,5 kW dos Exemplos 6.2 e 6.3.

influência do conjugado  $T_{mec}$  e é desligado da linha antes que comece a girar no sentido oposto. Dessa forma, a região de  $s = 1,0$  a  $s = 2,0$  é indicada por “Região de frenagem” na Fig. 6.14.

A máquina de indução irá funcionar como gerador se seus terminais de estator forem conectados a uma fonte de tensão polifásica e seu rotor for acionado por um acionador mecânico primário acima da velocidade síncrona (resultando em um escorregamento negativo), como mostrado na Fig. 6.14. A fonte determina a velocidade síncrona e fornece a entrada de potência reativa necessária para excitar o campo magnético de entreferro. Uma aplicação desse tipo consiste em um gerador de indução conectado a um sistema de potência acionado por uma turbina eólica.

Uma expressão para o *conjugado eletromecânico máximo*,  $T_{max}$ , indicado na Fig. 6.15, pode ser obtido facilmente a partir de considerações sobre o circuito. Como se pode ver na Fig. 6.25, o conjugado eletromecânico é máximo quando a potência entregue para  $R_2/s$ , na Fig. 6.13a, é máximo. Pode-se demonstrar que essa potência será máxima quando a impedância de  $R_2/s$  for igual ao módulo da impedância  $R_{1,eq} + j(X_{1,eq} + X_2)$  que está entre ela e a tensão equivalente constante  $\hat{V}_{1,eq}$ . Assim, o conjugado eletromecânico máximo irá ocorrer com um valor de escorregamento ( $s_{maxT}$ ) para o qual tem-se

$$\frac{R_2}{s_{maxT}} = \sqrt{R_{1,eq}^2 + (X_{1,eq} + X_2)^2} \quad (6.34)$$

Portanto, o escorregamento  $s_{maxT}$ , para o conjugado máximo, é

$$s_{maxT} = \frac{R_2}{\sqrt{R_{1,eq}^2 + (X_{1,eq} + X_2)^2}} \quad (6.35)$$

e o conjugado correspondente é, da Equação 6.33,

$$T_{max} = \frac{1}{\omega_s} \left[ \frac{0,5n_{fases}V_{1,eq}^2}{R_{1,eq} + \sqrt{R_{1,eq}^2 + (X_{1,eq} + X_2)^2}} \right] \quad (6.36)$$

em que  $\omega_s$  é a velocidade mecânica angular síncrona, dada pela Equação 6.26.

### EXEMPLO 6.3

Para o motor do Exemplo 6.2, determine (a) a componente de carga  $I_2$  da corrente de estator, o conjugado eletromecânico  $T_{mec}$  e a potência eletromecânica  $P_{mec}$  para um escorregamento  $s = 0,03$ ; (b) o conjugado eletromecânico máximo e a correspondente velocidade; e (c) o conjugado eletromecânico de partida  $T_{partida}$  e a correspondente corrente de carga do estator  $T_{2,partida}$ .

#### ■ Solução

Primeiro, reduza o circuito à sua forma em equivalente Thévenin. Da Equação 6.29,  $V_{1,eq} = 122,3$  V e, da Equação 6.31,  $R_{1,eq} + jX_{1,eq} = 0,273 + j0,490 \Omega$ .

a. Para  $s = 0,03$ ,  $R_2/s = 4,80$ . Então, da Fig. 6.13a,

$$I_2 = \frac{V_{1,eq}}{\sqrt{(R_{1,eq} + R_2/s)^2 + (X_{1,eq} + X_2)^2}} = \frac{122,3}{\sqrt{(5,07)^2 + (0,699)^2}} = 23,9 \text{ A}$$

Da Equação 6.25,

$$T_{mec} = \frac{n_{fases}I_2^2(R_2/s)}{\omega_s} = \frac{3 \times 23,9^2 \times 4,80}{125,7} = 65,4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

e, da Equação 6.21,

$$P_{mec} = n_{fases}I_2^2(R_2/s)(1 - s) = 3 \times 23,9^2 \times 4,80 \times 0,97 = 7980 \text{ W}$$

As curvas da Fig. 6.15 foram obtidas repetindo esses cálculos para uma série de valores adotados para  $s$ .

b. No ponto de conjugado máximo, da Equação 6.35,

$$\begin{aligned} s_{\max T} &= \frac{R_2}{\sqrt{R_{1,\text{eq}}^2 + (X_{1,\text{eq}} + X_2)^2}} \\ &= \frac{0,144}{\sqrt{0,273^2 + 0,699^2}} = 0,192 \end{aligned}$$

e, assim, a velocidade em  $T_{\max}$  é igual a  $(1 - s_{\max T})n_s = (1 - 0,192) \times 1200 = 970$  rpm.

Da Equação 6.36,

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \frac{1}{\omega_s} \left[ \frac{0,5n_{\text{fases}}V_{1,\text{eq}}^2}{R_{1,\text{eq}} + \sqrt{R_{1,\text{eq}}^2 + (X_{1,\text{eq}} + X_2)^2}} \right] \\ &= \frac{1}{125,7} \left[ \frac{0,5 \times 3 \times 122,3^2}{0,273 + \sqrt{0,273^2 + 0,699^2}} \right] = 175 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

c. Na partida,  $s = 1$ . Portanto,

$$\begin{aligned} I_{2,\text{partida}} &= \frac{V_{1,\text{eq}}}{\sqrt{(R_{1,\text{eq}} + R_2)^2 + (X_{1,\text{eq}} + X_2)^2}} \\ &= \frac{122,3}{\sqrt{0,417^2 + 0,699^2}} = 150 \text{ A} \end{aligned}$$

Da Equação 6.25,

$$T_{\text{partida}} = \frac{n_{\text{fases}}I_2^2R_2}{\omega_s} = \frac{3 \times 150^2 \times 0,144}{125,7} = 77,3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

### PROBLEMA PRÁTICO 6.3

O rotor de um motor de indução do Exemplo 6.3 é substituído por um rotor com o dobro da resistência de rotor mas que, de outro modo, é idêntico ao rotor original. Repita os cálculos do Exemplo 6.2.

#### ■ Solução

- $I_2 = 12,4 \text{ A}$ ,  $T_{\text{mec}} = 35,0 \text{ N} \cdot \text{m}$ ,  $P_{\text{mec}} = 4270 \text{ W}$
- $T_{\max} = 175 \text{ N} \cdot \text{m}$  na velocidade de 740 rpm
- Na partida,  $T_{\text{partida}} = 128 \text{ N} \cdot \text{m}$ ,  $I_{2,\text{partida}} = 136 \text{ A}$

### PROBLEMA PRÁTICO 6.4

Para o motor de indução do Exemplo 6.3, encontre (a) a resistência de rotor requerida para produzir o conjugado eletromecânico de pico com velocidade zero (isto é,  $s_{\max T} = 1,0$ ) a (b) o correspondente  $T_{\max}$ .

#### ■ Solução

- $R_2 = 0,751 \Omega$
- $T_{\max} = 175 \text{ N} \cdot \text{m}$

Em condições de funcionamento com frequência constante, um motor de indução convencional típico com rotor de gaiola é essencialmente um motor de velocidade constante, apresentando uma queda de velocidade de cerca de 10 por cento ou menos quando se passa da ausência de carga para a plena carga. No caso de um motor de indução de rotor bobinado, a variação de velocidade pode ser obtida inserindo-se uma resistência externa no circuito do rotor. A influência do aumento da resistência do rotor sobre a curva característica de conjugado  $\times$  velocidade está mostrada pelas curvas tracejadas da Fig. 6.16. Para esse motor, variações significativas de velocidade podem ser obtidas quando a resistência do rotor é variada. De modo semelhante, as variações de conjugado com velocidade nula, vistas na Fig. 6.16, ilustram como o conjugado de partida de um motor de indução de rotor bobinado pode ser variado alterando-se a resistência do rotor.

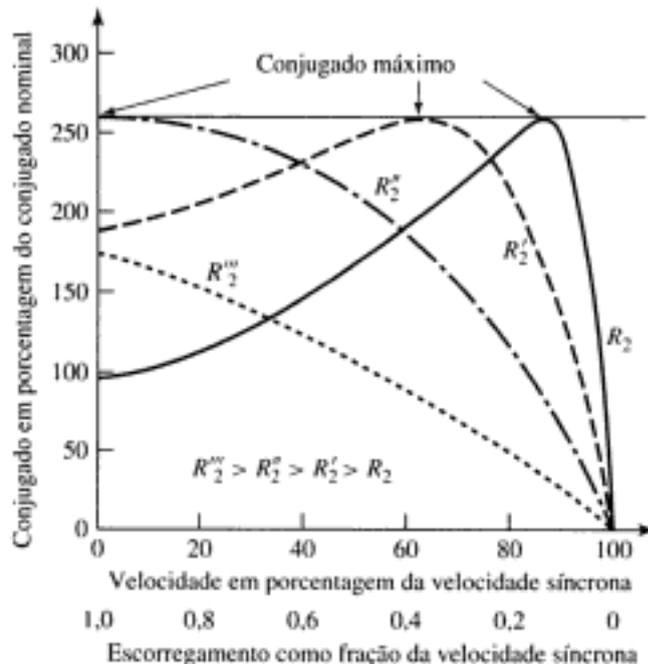
Observe, a partir das Equações 6.35 e 6.36, que o escorregamento para conjugado máximo é diretamente proporcional à resistência do rotor  $R_2$  mas o valor do conjugado máximo não depende de  $R_2$ . Quando o valor de  $R_2$  é incrementado, inserindo-se uma resistência externa no rotor de um motor de rotor bobinado, o conjugado eletromecânico máximo não é afetado, mas a velocidade na qual isso ocorre pode ser controlada diretamente. Esse resultado também pode ser visto observando que o conjugado eletromecânico, expresso pela Equação 6.33, é uma função da razão  $R_2/s$ . Assim, o conjugado não se altera desde que a razão  $R_2/s$  permaneça constante.

#### EXEMPLO 6.4

Um motor de indução trifásico de rotor bobinado, quatro pólos, 230 V, 60 Hz e 12 kW tem os seguintes parâmetros, expressos em  $\Omega$ /fase.

$$R_1 = 0,095 \quad X_1 = 0,680 \quad X_2 = 0,672 \quad X_m = 18,7$$

Usando MATLAB\*, plote o conjugado mecânico eletromecânico  $T_{mec}$  em função da velocidade do rotor em rpm para as resistências de rotor  $R_2 = 0,1, 0,2, 0,5, 1,0$  e  $1,5 \Omega$ .



**FIGURA 6.16** Curvas de conjugado  $\times$  escorregamento de um motor de indução mostrando o efeito da variação de resistência do circuito do rotor.

\* MATLAB é uma marca registrada da The MathWorks, Inc.

### ■ Solução

A plotagem desejada está na Fig. 6.17.

O *script* de MATLAB está abaixo:

```

clc
clear

%Aqui estão os parâmetros do motor
V1 = 230/sqrt(3);
nph = 3;
poles = 4;
fe = 60;

R1 = 0.095;
X1 = 0.680;
X2 = 0.672;
Xm = 18.7;

%Calcule a velocidade síncrona
omegas = 4*pi*fe/poles;
ns = 120*fe/poles;

%Calcule o equivalente Thévenin do estator
Z1eq = j*Xm*(R1+j*X1)/(R1 + j*(X1+Xm));
R1eq = real(Z1eq);
X1eq = imag(Z1eq);
V1eq = abs(V1*j*Xm/(R1 + j*(X1+Xm)));

%Aqui está o laço da resistência do rotor
for m = 1:5
    if m == 1
        R2 = 0.1;
    elseif m==2
        R2 = 0.2;

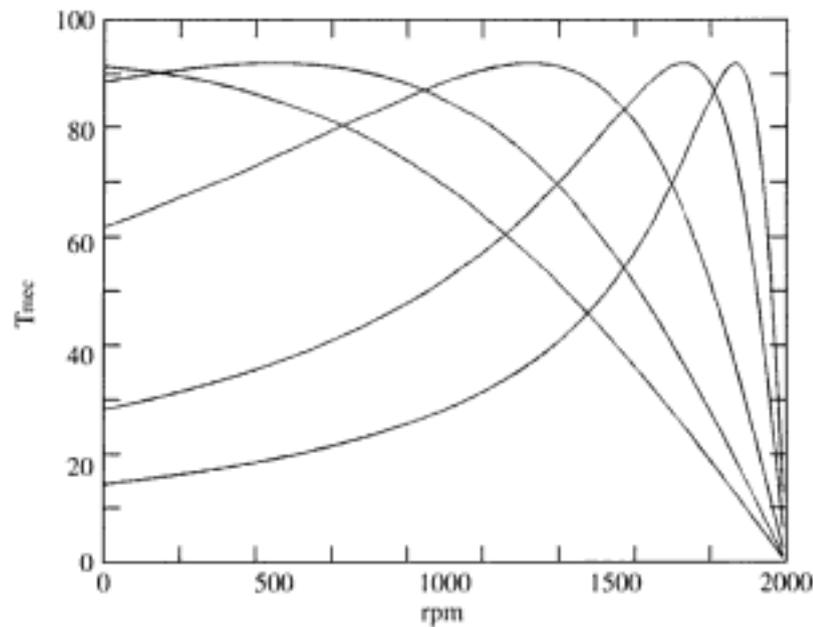
    elseif m==3
        R2 = 0.5;
    elseif m==4
        R2 = 1.0;
    else
        R2 = 1.5;
    end

    %Aqui está o laço do escorregamento
    for n = 1:200
        s(n) = n/200; %escorregamento
        rpm(n) = ns*(1-s(n)); %rpm
        I2 = abs(V1eq/(Z1eq + j*X2 + R2/s(n))); %I2
        Tmech(n) = nph*I2^2*R2/(s(n)*omegas); %Conjugado eletromecânico
    end %Fim do laço do escorregamento

    %Agora plote
    plot(rpm,Tmech)
    if m ==1
    hold
    end

end %Fim do laço da resistência
hold
xlabel('rpm')
ylabel('Tmec')

```



**FIGURA 6.17** Conjugado eletromecânico  $\times$  velocidade para o motor de indução de rotor bobinado do Exemplo 6.4, para diversos valores da resistência  $R_2$  de rotor.

#### PROBLEMA PRÁTICO 6.5

Calcule o conjugado mecânico eletromecânico para o motor do Exemplo 6.4, assumindo uma resistência de rotor de  $0,3 \Omega$  e uma velocidade de motor de 1719 rpm.

#### ■ Solução

36,8 N · m

Quando o circuito equivalente do motor de indução é aplicado, deve-se ter em mente as idealizações em que foi baseado. Isso é particularmente necessário quando as análises são desenvolvidas para um largo intervalo de velocidades, tal como é o caso na análise da partida de um motor. A saturação, sob as intensas correntes transitórias iniciais, associadas às condições de partida, tem um efeito significativo sobre as reatâncias do motor. Além disso, a frequência das correntes do rotor é a de escorregamento, variando desde a frequência de estator, para a velocidade nula, até um valor baixo, para a velocidade de plena carga. A distribuição das correntes nas barras do rotor dos motores de gaiola pode variar significativamente em função da frequência, dando origem a variações importantes de resistência no rotor. De fato, como foi discutido nas Seções 6.7.2 e 6.7.3, os projetistas de motores podem adequar a forma das barras do rotor dos motores de gaiola de modo a obter características variadas de conjugado  $\times$  velocidade. Erros devidos a essas causas podem ser mantidos em um mínimo quando são usados parâmetros de circuito equivalente que correspondem tão de perto quanto possível aos das condições de funcionamento propostas.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Veja, por exemplo, R. F. Horrel and W. E. Wood, "A Method of Determining Induction Motor Speed-Torque-Current Curves from Reduced Voltage Tests," *Trans. AIEE*, 73(3):670-674 (1954).

## 6.6 DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS A PARTIR DE ENSAIOS A VAZIO E COM ROTOR BLOQUEADO

Os parâmetros de circuito equivalente, necessários para o cálculo do desempenho de um motor de indução polifásico submetido a uma carga, podem ser obtidos dos resultados de um ensaio a vazio, de um ensaio de rotor bloqueado e das medidas das resistências CC dos enrolamentos do estator. As perdas suplementares, que devem ser levadas em consideração quando valores exatos de rendimento devem ser calculados, também podem ser medidas por ensaios a vazio com o motor. No entanto, os ensaios de perdas suplementares não são descritos aqui.<sup>2</sup>

### 6.6.1 Ensaio a Vazio

Como no caso do ensaio em circuito aberto de um transformador, o *ensaio a vazio* de um motor de indução fornece informações em relação à corrente de excitação e às perdas a vazio. Geralmente, esse ensaio é executado em frequência nominal e com tensões polifásicas equilibradas, aplicadas aos terminais do estator. Depois de o motor funcionar por um tempo suficiente para que os mancais tenham se lubrificado apropriadamente, as leituras são executadas em tensão nominal. Vamos supor que o ensaio a vazio tenha sido realizado com o motor operando em sua frequência elétrica nominal  $f_n$ , e que as seguintes medidas tenham sido obtidas no ensaio:

$V_{1,vz}$  = A tensão de fase [V]

$I_{1,vz}$  = A corrente de linha [A]

$P_{vz}$  = A potência elétrica polifásica total de entrada [W]

Em máquinas polifásicas, o mais comum é medir a tensão de linha. Desse modo, então, a tensão de fase deve ser calculada (dividindo por  $\sqrt{3}$  no caso de uma máquina trifásica).

A vazio, a corrente de rotor é apenas a mínima necessária para produzir conjugado suficiente para superar as perdas por atrito e ventilação, associadas à rotação. As perdas a vazio  $I^2R$  do rotor são, portanto, muito baixas e podem ser desprezadas. Diferentemente do núcleo magnético contínuo do transformador, o caminho de magnetização do motor de indução inclui um entreferro. Devido a isso, a corrente de excitação requerida aumenta de forma significativa. Assim, contrastando com o transformador, cujas perdas a vazio  $I^2R$  no primário são desprezíveis, no caso do estator do motor de indução, as perdas a vazio  $I^2R$  podem ser apreciáveis devido a essa corrente de excitação ser mais elevada.

Desprezando as perdas  $I^2R$  do rotor, as *perdas rotacionais*  $P_{gr}$ , em condições normais de funcionamento, podem ser encontradas subtraindo-se as perdas  $I^2R$  do estator da potência de entrada a vazio

$$P_{rot} = P_{vz} - n_{fases} I_{1,vz}^2 R_1 \quad (6.37)$$

As perdas rotacionais totais sob carga, em tensão e frequência nominais, é usualmente considerada constante e igual ao seu valor a vazio. Observe que a resistência de estator  $R_1$  varia segundo a temperatura do enrolamento do estator. Assim, ao aplicar-se a Equação 6.37, deve-se tomar cuidado para que seja usado o valor correspondente à temperatura do ensaio a vazio.

Observe que as deduções apresentadas aqui ignoram as perdas no núcleo e a respectiva resistência associada a essas perdas, atribuindo todas as perdas a vazio ao atrito e à ventilação. Vários ensaios podem ser realizados para separar as perdas por atrito e ventilação das perdas no núcleo. Por exemplo, se o motor não estiver energizado, um motor de acionamento externo poderá ser usado para impulsionar o rotor até atingir velocidade a vazio. As perdas rotacionais serão iguais à potência de saída que é requerida do motor de acionamento.

<sup>2</sup> Para informações relativas a métodos de ensaio, veja IEEE Std. 112-1996, "Test Procedures for Polyphase Induction Motors and Generators," Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 345 East 47th Street, New York, New York, 10017.

Alternativamente, se o motor for operado a vazio, em velocidade nominal, e se então for repentinamente desligado da fonte, o decaimento da velocidade do motor será determinado pelas perdas rotacionais como

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = -T_{\text{rot}} = -\frac{P_{\text{rot}}}{\omega_m} \quad (6.38)$$

Assim, se a inércia do rotor  $J$  for conhecida, as perdas rotacionais para qualquer velocidade  $\omega_m$  podem ser obtidas a partir do decaimento de velocidade resultante como

$$P_{\text{rot}}(\omega_m) = -\omega_m J \frac{d\omega_m}{dt} \quad (6.39)$$

Portanto, as perdas rotacionais em velocidade nominal podem ser determinadas aplicando-se a Equação 6.39 logo que o motor é desligado, depois que estiver funcionando em velocidade nominal de operação.

Se as perdas rotacionais forem determinadas desse modo, as perdas no núcleo podem ser obtidas como

$$P_{\text{núcleo}} = P_{vz} - P_{\text{rot}} - n_{\text{fases}} I_{1,vz}^2 R_1 \quad (6.40)$$

Aqui  $P_{\text{núcleo}}$  representa o total das perdas a vazio no núcleo correspondentes à tensão do ensaio a vazio (tipicamente a tensão nominal).

Em condições a vazio, a corrente de estator é relativamente baixa e, como primeira aproximação, pode-se desprezar a correspondente queda de tensão na resistência de estator e na reatância de dispersão. Nessa aproximação, a tensão sobre a resistência de perdas no núcleo ( $R_c$ ) será igual à tensão de fase a vazio. Essa resistência pode ser determinada como

$$R_c = \frac{n_{\text{fases}} V_{1,vz}^2}{P_{\text{núcleo}}} \quad (6.41)$$

Desde que a máquina esteja operando próximo da velocidade e da tensão nominais, esse refinamento de separar as perdas no núcleo e incorporá-las especificamente ao circuito equivalente, na forma de uma resistência de perdas no núcleo, não fará diferença significativa nos resultados da análise. Por essa razão, é comum ignorar a resistência de perdas no núcleo e simplesmente incluí-las nas perdas rotacionais. Por uma questão de simplicidade de análise, essa abordagem será adotada no restante do texto. Entretanto, se necessário, o leitor constatará que é relativamente simples modificar as seguintes deduções para incluir apropriadamente a resistência de perdas no núcleo.

Como o escorregamento a vazio,  $s_{vz}$ , é muito pequeno, a resistência de rotor  $R_2/s_{vz}$  refletida é muito elevada. A combinação em paralelo dos ramos da magnetização e do rotor torna-se, então,  $jX_m$  em paralelo com a combinação em série da reatância de dispersão do rotor  $X_2$  e de uma resistência muito elevada. A reatância dessa associação em paralelo estará então muito próxima de  $X_m$ . Conseqüentemente a reatância aparente  $X_{vz}$ , medida nos terminais do estator a vazio, estará muito próxima de  $X_1 + X_m$ , que é a reatância própria  $X_{11}$  do estator; isto é,

$$X_{vz} = X_{11} = X_1 + X_m \quad (6.42)$$

Portanto, a reatância própria do estator pode ser determinada das medidas a vazio. A potência reativa a vazio  $Q_{vz}$  pode então ser determinada como

$$Q_{vz} = \sqrt{S_{vz}^2 - P_{vz}^2} \quad (6.43)$$

em que

$$S_{vz} = n_{\text{fases}} V_{1,vz} I_{1,vz} \quad (6.44)$$

é a potência aparente total de entrada a vazio.

A reatância a vazio  $X_{vz}$  pode então ser calculada de  $Q_{vz}$  e  $I_{1,vz}$  como

$$X_{vz} = \frac{Q_{vz}}{n_{\text{fases}} I_{1,vz}^2} \quad (6.45)$$

Usualmente, o fator de potência a vazio é pequeno (isto é,  $Q_{vz} \gg P_{vz}$ ) de modo que a reatância a vazio está muito próxima da impedância a vazio, ou seja

$$X_{vz} \approx \frac{V_{1,vz}}{I_{1,vz}} \quad (6.46)$$

## 6.6.2 Ensaio de Rotor Bloqueado

Como no caso do ensaio em curto-circuito de um transformador, o *ensaio de rotor bloqueado* ou *travado* de um motor de indução fornece informações sobre as impedâncias de dispersão. O rotor é bloqueado, de modo que não possa girar (sendo o escorregamento, portanto, igual a unidade), e tensões polifásicas equilibradas são aplicadas aos terminais do estator. Vamos supor que as seguintes medidas foram obtidas em um ensaio de rotor bloqueado:

$V_{1,bt}$  = A tensão de fase [V]

$I_{1,bt}$  = A corrente de linha [A]

$P_{bt}$  = A potência elétrica polifásica total de entrada [W]

$f_{bt}$  = A frequência do ensaio de rotor bloqueado [Hz]

Um alguns casos, mede-se também o conjugado de rotor bloqueado.

Para as condições de rotor bloqueado, o circuito equivalente é idêntico ao de um transformador em curto-circuito. Entretanto, um motor de indução é mais complexo do que um transformador, porque a impedância de dispersão pode ser afetada pela saturação magnética dos caminhos de fluxo de dispersão e pela frequência do rotor. A impedância de rotor bloqueado também pode ser afetada pela posição do rotor, embora geralmente esse efeito seja pequeno em rotores de gaiola de esquilo.

O princípio guia é realizar o ensaio de rotor bloqueado sob condições em que a corrente e a frequência do rotor são aproximadamente as mesmas da máquina quando essa está operando em condições iguais àquelas para as quais o desempenho deverá ser calculado posteriormente. Por exemplo, se o interesse é nas características de escorregamentos próximos da unidade, como na partida, o ensaio de rotor bloqueado deve ser realizado em frequência normal, com as correntes próximas dos valores encontrados na partida. Se, entretanto, o interesse for nas características normais de funcionamento, o ensaio de rotor bloqueado deve ser feito com aquela tensão reduzida da qual resulta aproximadamente a sua corrente nominal. A frequência também deve ser reduzida, uma vez que os valores efetivos de resistência e de indutância de dispersão do rotor em frequências baixas, correspondentes a pequenos escorregamentos, podem diferir apreciavelmente de seus valores em frequência normal, particularmente com rotores de gaiola dupla ou de barras profundas, como será discutido na Seção 6.7.2.

A norma IEEE 112 sugere uma frequência de ensaio de rotor bloqueado de 25 por cento da frequência nominal. A reatância de dispersão total em frequência normal pode ser obtida do valor desse ensaio considerando que a reatância seja proporcional à frequência. Os efeitos da frequência são desprezados freqüentemente em motores abaixo de 25 HP nominais e então a impedância de rotor bloqueado pode ser medida diretamente em frequência normal. A impor-

tância de se manter as correntes de ensaio próximas de seus valores nominais origina-se no fato de que essas reatâncias de dispersão são afetadas de forma significativa pela saturação.

Com base nas medidas de rotor bloqueado, a reatância de rotor bloqueado pode ser encontrada da potência reativa de rotor bloqueado como

$$Q_{bl} = \sqrt{S_{bl}^2 - P_{bl}^2} \quad (6.47)$$

onde

$$S_{bl} = n_{fases} V_{l,bl} I_{l,bl} \quad (6.48)$$

é a potência aparente total de rotor bloqueado. A reatância de rotor bloqueado, corrigida para a frequência nominal, pode então ser calculada como

$$X_{bl} = \left( \frac{f_r}{f_{bl}} \right) \left( \frac{Q_{bl}}{n_{fases} I_{l,bl}^2} \right) \quad (6.49)$$

A resistência de rotor bloqueado pode ser calculada a partir da potência de entrada de rotor bloqueado como

$$R_{bl} = \frac{P_{bl}}{n_{fases} I_{l,bl}^2} \quad (6.50)$$

Depois de se obter esses parâmetros, os do circuito equivalente poderão ser determinados. Quando o rotor está bloqueado, pode-se obter uma expressão para a impedância de entrada a partir do exame da Fig. 6.11a (com  $s = 1$ ) como

$$\begin{aligned} Z_{bl} &= R_1 + jX_1 + (R_2 + jX_2) \text{ em paralelo com } jX_m \\ &= R_1 + R_2 \left( \frac{X_m^2}{R_2^2 + (X_m + X_2)^2} \right) \\ &\quad + j \left( X_1 + \frac{X_m(R_2^2 + X_2(X_m + X_2))}{R_2^2 + (X_m + X_2)^2} \right) \end{aligned} \quad (6.51)$$

Aqui, estamos supondo que as reatâncias estão dadas para seus valores de frequência nominal. Fazendo aproximações adequadas (por exemplo, supondo que  $R_2 \ll X_m$ ), a Equação 6.51 pode ser reduzida a

$$Z_{bl} = R_1 + R_2 \left( \frac{X_m}{X_2 + X_m} \right)^2 + j \left( X_1 + X_2 \left( \frac{X_m}{X_2 + X_m} \right) \right) \quad (6.52)$$

Assim, a resistência aparente, em condições de rotor bloqueado, é dada por

$$R_{bl} = R_1 + R_2 \left( \frac{X_m}{X_2 + X_m} \right)^2 \quad (6.53)$$

e a reatância aparente de rotor bloqueado, na frequência nominal, é

$$X_{bl} = X_1 + X_2 \left( \frac{X_m}{X_2 + X_m} \right) \quad (6.54)$$

Das Equações 6.54 e 6.53, a reatância de dispersão do rotor  $X_2$  e a resistência  $R_2$  podem ser encontradas como

$$X_2 = (X_{bl} - X_1) \left( \frac{X_m}{X_m + X_1 - X_{bl}} \right) \quad (6.55)$$

e

$$R_2 = (R_{bl} - R_1) \left( \frac{X_2 + X_m}{X_m} \right)^2 \quad (6.56)$$

**TABELA 6.1** Distribuição empírica de reatâncias de dispersão em motores de indução

Classe de motor	Descrição	Fração de $X_1 + X_2$	
		$X_1$	$X_2$
A	Conjugado de partida normal, corrente de partida normal	0,5	0,5
B	Conjugado de partida normal, corrente de partida baixa	0,4	0,6
C	Conjugado de partida elevado, corrente de partida baixa	0,3	0,7
D	Conjugado de partida elevado, escorregamento elevado	0,5	0,5
Rotor bobinado	Desempenho varia segundo a resistência do rotor	0,5	0,5

Fonte: Norma IEEE 112.

Para se obter a máxima exatidão no ensaio de rotor bloqueado, quando possível, a resistência de estator  $R_1$  usada na Equação 6.56 deve ser corrigida em função do valor correspondente da temperatura durante o ensaio de rotor bloqueado.

Usando a Equação 6.42 para substituir  $X_m$  na Equação 6.55, obtém-se

$$X_2 = (X_{bl} - X_1) \left( \frac{X_{vz} - X_1}{X_{vz} - X_{bl}} \right) \quad (6.57)$$

A Equação 6.57 expressa a reatância de dispersão do rotor  $X_2$  em termos das grandezas medidas  $X_{vz}$  e  $X_m$  e da reatância de dispersão desconhecida do estator  $X_1$ . Não é possível realizar uma medida adicional da qual  $X_1$  e  $X_2$  possam ser determinados de forma única. Felizmente, o desempenho do motor é relativamente pouco afetado pelo modo de distribuição da reatância de dispersão total entre o estator e o rotor. A norma IEEE 112 recomenda a distribuição empírica mostrada na Tabela 6.1\*. Se a classe do motor for desconhecida, costuma-se assumir que  $X_1$  e  $X_2$  sejam iguais.

Após determinar a relação fracionária entre  $X_1$  e  $X_2$ , ela pode ser substituída na Equação 6.57 e  $X_2$  (e conseqüentemente  $X_1$ ) pode ser encontrado em termos de  $X_{vz}$  e  $X_{bl}$ , resolvendo a equação quadrática resultante.

A reatância de magnetização  $X_m$  pode então ser determinada da Equação 6.42, obtendo-se

$$X_m = X_{vz} - X_1 \quad (6.58)$$

Finalmente, usando a resistência de estator conhecida e os valores de  $X_m$  e  $X_2$ , que agora também são conhecidos, a resistência de rotor  $R_2$  pode ser determinada da Equação 6.56.

**EXEMPLO 6.5**

Os seguintes dados de ensaio aplicam-se a um motor de indução trifásico de quatro pólos, 7,5 HP, 220 V, 19 A e 60 Hz com um rotor de dupla gaiola da classe C de projeto (tipo de conjugado de partida elevado e corrente de partida baixa):

Ensaio 1: Ensaio a vazio em 60 Hz

Tensão de linha aplicada:  $V = 219$  V

Corrente de fase média  $I_{1,vz} = 5,70$  A

Potência  $P_{vz} = 380$  W

\* N. de T.: No Brasil, em relação a essas recomendações e outras normas e procedimentos envolvendo máquinas elétricas, devem ser consultadas e utilizadas as especificações fornecidas pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT).

Ensaio 2: Ensaio de rotor bloqueado em 15 Hz

Tensão de linha aplicada:  $V = 26,5 \text{ V}$

Corrente de fase média  $I_{1,bl} = 18,57 \text{ A}$

Potência  $P_{bl} = 675 \text{ W}$

Ensaio 3: Resistência CC de estator média por fase (medida imediatamente após o ensaio 2)

$$R_1 = 0,262 \Omega$$

Ensaio 4: Ensaio de rotor bloqueado em 60 Hz

Tensão de linha aplicada:  $V = 212 \text{ V}$

Corrente de fase média  $I_{1,bl} = 83,3 \text{ A}$

Potência  $P_{bl} = 20,1 \text{ kW}$

Conjugado de partida medido  $T_{partida} = 74,2 \text{ N} \cdot \text{m}$

- Calcule as perdas rotacionais a vazio e os parâmetros de circuito equivalente que se aplicam às condições normais de funcionamento. Suponha que a temperatura seja a do ensaio 3. Despreze qualquer efeito de perdas no núcleo, assumindo que elas possam ser incluídas nas perdas rotacionais.
- Calcule o conjugado de partida eletromecânico com as medidas de entrada do ensaio 4. Assuma a mesma temperatura do ensaio 3.

#### ■ Solução

- Da Equação 6.37, as perdas rotacionais podem ser calculadas como

$$P_{rot} = P_{vz} - n_{fases} I_{1,vz}^2 R_1 = 380 - 3 \times 5,70^2 \times 0,262 = 354 \text{ W}$$

A tensão de fase a vazio é igual a  $V_{1,z} = 219/\sqrt{3} = 126,4 \text{ V}$  e assim, das Equações 6.43 e 6.44, tem-se

$$Q_{vz} = \sqrt{(n_{fases} V_{1,vz} I_{1,vz})^2 - P_{vz}^2} = \sqrt{(3 \times 126,4 \times 5,7)^2 - 380^2} = 2128 \text{ W}$$

e, portanto, da Equação 6.45,

$$X_{vz} = \frac{Q_{vz}}{n_{fases} I_{1,vz}^2} = \frac{2128}{3 \times 5,7^2} = 21,8 \Omega$$

Podemos supor que o ensaio de rotor bloqueado, realizado com a frequência reduzida de 15 Hz e a corrente nominal, reproduza aproximadamente as condições normais de funcionamento do motor. Assim, do ensaio 2 e das Equações 6.47 e 6.48 com  $V_{1,bl} = 26,5/\sqrt{3} = 15,3 \text{ V}$ ,

$$Q_{bl} = \sqrt{(n_{fases} V_{1,bl} I_{1,bl})^2 - P_{bl}^2} = \sqrt{(3 \times 15,3 \times 18,57)^2 - 675^2} = 520 \text{ VA}$$

e, portanto, da Equação 6.49,

$$X_{bl} = \left( \frac{f_r}{f_{bl}} \right) \left( \frac{Q_{bl}}{n_{fases} I_{1,bl}^2} \right) = \left( \frac{60}{15} \right) \left( \frac{520}{3 \times 18,57^2} \right) = 2,01 \Omega$$

Como foi afirmado que o motor é da classe C, podemos nos referir à Tabela 6.1 e supor que  $X_1 = 0,3(X_1 + X_2)$  ou  $X_1 = kX_2$ , em que  $k = 0,429$ . Substituindo na Equação 6.57 resulta em uma equação quadrática em  $X_2$

$$k^2 X_2^2 + (X_{bl}(1 - k) - X_{vz}(1 + k))X_2 + X_{vz}X_{bl} = 0$$

ou

$$(0,429)^2 X_2 + (2,01(1 - 0,429) - 22,0(1 + 0,429))X_2 + 22,0(2,01) \\ = 0,184X_2^2 - 30,29X_2 + 44,22 = 0$$

Resolvendo obtêm-se duas raízes: 1,48 e 163,1. Obviamente,  $X_2$  deve ser menor que  $X_{\nu}$  e, desse modo, é fácil identificar a solução apropriada como

$$X_2 = 1,48 \Omega$$

e, portanto,

$$X_1 = 0,633 \Omega$$

Da Equação 6.58,

$$X_m = X_{\nu} - X_1 = 21,2 \Omega$$

$R_{bl}$  pode ser encontrado a partir da Equação 6.50 como

$$R_{bl} = \frac{P_{bl}}{n_{fases} I_{l,bl}^2} = \frac{675}{3 \times 18,57^2} = 0,652 \Omega$$

e, assim, da Equação 6.56

$$R_2 = (R_{bl} - R_1) \left( \frac{X_2 + X_m}{X_m} \right)^2 \\ = (0,652 - 0,262) \left( \frac{22,68}{21,2} \right)^2 = 0,447 \Omega$$

Agora, os parâmetros do circuito equivalente para pequenos valores de escorregamento estão calculados.

- b. Poderíamos ter calculado o conjugado de partida eletromecânico a partir dos parâmetros de circuito equivalente obtidos na parte (a). Entretanto, trata-se de um motor de dupla gaiola de esquilo e, portanto, esses parâmetros (mais especificamente os do rotor) serão significativamente diferentes, nas condições de partida, de seus valores para os baixos escorregamentos calculados na parte (a). Portanto, iremos calcular o conjugado de partida eletromecânico com as medidas realizadas no ensaio 4 de rotor bloqueado, na frequência nominal.

Da potência de entrada e das perdas de estator  $I^2 R$ , a potência no entreferro  $P_g$  é

$$P_g = P_{bl} - n_{fases} I_{l,bl}^2 R_1 = 20,100 - 3 \times 83,3^2 \times 0,262 = 14.650 \text{ W}$$

Como essa é uma máquina de quatro pólos, a velocidade síncrona pode ser obtida da Equação 6.26 como  $\omega_s = 188,5 \text{ rad/s}$ . Assim, da Equação 6.25 com  $s = 1$ ,

$$T_{partida} = \frac{P_g}{\omega_s} = \frac{14.650}{188,5} = 77,7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

O valor de ensaio,  $T_{partida} = 74,2 \text{ N} \cdot \text{m}$ , é uns poucos por cento menor do que o valor calculado porque os cálculos não levaram em consideração a potência absorvida pelas perdas no núcleo do estator ou pelas perdas suplementares.

#### PROBLEMA PRÁTICO 6.6

Repita os cálculos dos parâmetros de circuito equivalente do Exemplo 6.5 supondo que as reatâncias de dispersão do rotor e do estator sejam iguais (isto é,  $X_1 = X_2$ ).

■ **Solução**

$$R_1 = 0,262 \, \Omega \quad R_2 = 0,430 \, \Omega$$

$$X_1 = 1,03 \, \Omega \quad X_m = 20,8 \, \Omega \quad X_2 = 1,03 \, \Omega$$

Os cálculos da reatância de rotor bloqueado podem ser simplificados se for admitido que  $X_m \gg X_2$ . Com essa condição, a Equação 6.54 reduz-se a

$$X_{bl} = X_1 + X_2$$

Então, é possível obter  $X_1$  e  $X_2$  da Equação 6.59 e uma estimativa da relação fracionária entre  $X_1$  e  $X_2$  (como a partir da Tabela 6.1).

Observe que, da mesma forma, pode-se ser tentado a fazer uma aproximação na Equação 6.56, que fornece  $R_2$ . Entretanto, como a razão  $(X_2 + X_m) / X_m$  é ao quadrado, a aproximação tende a produzir erros que são elevados demais, não podendo ser aceita.

**EXEMPLO 6.6**



(a) Determine os parâmetros do motor do Exemplo 6.5, resolvendo as reatâncias de dispersão por meio da Equação 6.59. (b) Supondo que o motor esteja operando com uma fonte de 220 V e 60 Hz na velocidade de 1746 rpm, use MATLAB para calcular a potência de saída para os dois conjuntos de parâmetros.

■ **Solução**

a. Como obtido no Exemplo 6.5,

$$X_{sz} = 21,8 \, \Omega \quad X_{bl} = 2,01 \, \Omega$$

$$R_1 = 0,262 \, \Omega \quad R_{bl} = 0,652 \, \Omega$$

Assim, da Equação 6.42,

$$X_1 + X_m = X_{sz} = 21,8 \, \Omega$$

e, da Equação 6.59,

$$X_1 + X_2 = X_{bl} = 2,01 \, \Omega$$

Da Tabela 6.1,  $X_1 = 0,3(X_1 + X_2) = 0,603 \, \Omega$  e, assim,  $X_2 = 1,41 \, \Omega$  e  $X_m = 21,2 \, \Omega$ .

Finalmente, da Equação 6.56,

$$R_2 = (R_{bl} - R_1) \left( \frac{X_2 + X_m}{X_m} \right)^2 = 0,444 \, \Omega$$

A comparação com o Exemplo 6.5 mostra o seguinte

Parâmetro	Exemplo 6.5	Exemplo 6.6
$R_1$	0,262 $\Omega$	0,262 $\Omega$
$R_2$	0,447 $\Omega$	0,444 $\Omega$
$X_1$	0,633 $\Omega$	0,603 $\Omega$
$X_2$	1,47 $\Omega$	1,41 $\Omega$
$X_m$	21,2 $\Omega$	21,2 $\Omega$

- b. Para os parâmetros do Exemplo 6.6,  $P_{\text{eixo}} = 2467$  [W] ao passo que, para os parâmetros da parte (a) desse exemplo,  $P_{\text{eixo}} = 2497$  [W]. Assim, a aproximação para a Equação 6.59 resulta em um erro da ordem de 1 por cento em relação à expressão mais exata dada pela Equação 6.54. Esse é um resultado típico e, portanto, essa aproximação parece ser justificável na maioria dos casos.

Aqui está o script de MATLAB:

```

clc
clear

% Aqui estão os dois conjuntos de parâmetros
% O conjunto 1 corresponde à solução exata
% O conjunto 2 corresponde à solução aproximada

R1(1) = 0.262;      R1(2) = 0.262;
R2(1) = 0.447;      R2(2) = 0.444;
X1(1) = 0.633;      X1(2) = 0.603;
X2(1) = 1.47;       X2(2) = 1.41;
Xm(1) = 21.2;       Xm(2) = 21.2;

nph = 3;
poles = 4;
Prot = 354;

%Aqui estão as condições de operação
V1 = 220/sqrt(3);
fe = 60;
rpm = 1746;

%Calcule a velocidade síncrona
ns = 120*fe/poles;
omegas = 4*pi*fe/poles;
slip = (ns-rpm)/ns;
omegam = omegas*(1-slip);

%Calcule o equivalente Thévenin do estator
%Laço dos dois motores
for m = 1:2

Zgap = j*Xm(m)*(j*X2(m)+R2(m)/slip)/(R2(m)/slip+j*(Xm(m)+X2(m)));
Zin = R1(m) + j*X1(m) + Zgap;
I1 = V1/Zin;
I2 = I1*(j*Xm(m))/(R2(m)/slip+j*(Xm(m)+X2(m)));
Tmech = nph*abs(I2)^2*R2(m)/(slip*omegas); %Conjugado eletromecânico
Pmech = omegam*Tmech; %Potência eletromecânica
Pshaft = Pmech - Prot;

if (m == 1)
fprintf('\nSolução exata:')
else
fprintf('\nSolução aproximada:')
end

fprintf('\n  Pmec = %.1f [W], Peixo = %.1f [W]',Pmech,Pshaft)
fprintf('\n  I1 = %.1f [A]\n',abs(I1));

end % fim do laço "for m = 1:2"

```

## 6.7 EFEITOS DA RESISTÊNCIA DO ROTOR; ROTORES BOBINADOS E DE DUPLA GAIOLA DE ESQUILO

Uma limitação básica dos motores de indução com resistência de rotor constante é que o projeto do rotor deve ser um compromisso entre fatores. Rendimento elevado em condições normais de funcionamento requer uma resistência de rotor baixa; mas uma resistência de rotor baixa resulta em conjugado de partida baixo e altas correntes de partida para fatores de potência baixo.

### 6.7.1 Motores de Rotor Bobinado

O uso do *rotor bobinado* é um modo efetivo de evitar a necessidade de compromisso. Os terminais do enrolamento do rotor são conectados a anéis deslizantes sobre os quais apoiam-se escovas. Na partida, resistores podem ser ligados em série com os enrolamentos do rotor. O resultado é conjugado de partida aumentado e corrente de partida reduzida com um fator de potência melhorado.

A natureza genérica dos efeitos causados por uma resistência variável de rotor sobre a curva característica de conjugado  $\times$  velocidade está mostrada na Fig. 6.16. Usando-se um valor adequado para a resistência do rotor, pode-se fazer com que o conjugado máximo ocorra com o rotor parado, se for necessário um elevado conjugado de partida. À medida que a velocidade aumenta, as resistências externas podem ser diminuídas, fazendo com que o conjugado máximo torne-se disponível dentro de todo o intervalo de aceleração. Como a maior parte das perdas  $I^2R$  do rotor é dissipada nos resistores externos, a elevação da temperatura do rotor durante a partida é menor do que se a resistência tivesse sido incorporada à resistência do rotor. Em funcionamento normal, o enrolamento do rotor pode ser curto-circuitado diretamente nas escovas. O enrolamento do rotor é projetado para ter uma resistência baixa, de modo que o rendimento de funcionamento é elevado e o escorregamento a plena carga é baixo. Além de ser usado quando as exigências de partida são severas, os motores de indução de rotor bobinado podem ser usados em acionamentos de velocidade variável. A sua principal desvantagem é custo e complexidade maiores, em comparação com os motores de gaiola de esquilo.

Os principais efeitos da variação da resistência de rotor sobre as características de partida e o funcionamento dos motores de indução podem ser mostrados quantitativamente pelo seguinte exemplo.

#### EXEMPLO 6.7

Um motor de indução trifásico de rotor bobinado, quatro pólos, 460 V, 60 Hz, 500 HP e com os anéis deslizantes curto-circuitados tem as seguintes propriedades:

Escorregamento a plena carga = 1,5 por cento

Perdas  $I^2R$  para o conjugado de plena carga = 5,69 kW

Escorregamento para o conjugado máximo = 6 por cento

Corrente de rotor para o conjugado máximo =  $2,82I_{2pc}$ , em que  $I_{2pc}$  é a corrente de rotor a plena carga

Conjugado com 20 por cento de escorregamento =  $1,20T_{pc}$ , em que  $T_{pc}$  é o conjugado a plena carga

Corrente de rotor com 20 por cento de escorregamento =  $3,95I_{2pc}$

Suponha que a resistência do circuito de rotor seja incrementada para  $5R_{rotor}$  conectando-se resistências não indutivas em série com cada anel deslizante do rotor. Determine (a) pa-

ra qual escorregamento, o motor irá desenvolver o mesmo conjugado de plena carga, (b) as perdas  $I^2R$  totais do circuito do rotor para o conjugado de plena carga, (c) a saída em HPs para o conjugado de plena carga, (d) escorregamento para o conjugado máximo, (e) corrente de rotor para o conjugado máximo, (f) conjugado de partida e (g) corrente de rotor na partida. Expresse os conjugados e as correntes de rotor por unidade, com base nos valores de conjugado de plena carga.

### ■ Solução

A solução envolve a constatação de que os efeitos das alterações na resistência do rotor são vistas, pelo estator, em termos de variações na resistência referida  $R_2/s$ . O exame do circuito equivalente mostra que, para a tensão e a frequência especificadas aplicadas, tudo que se refere ao desempenho do estator será determinado pelo valor de  $R_2/s$ , desde que os demais elementos de impedância permaneçam constantes. Por exemplo, se o valor de  $R_2$  for dobrado e simultaneamente  $s$  também o for, não haverá nenhuma indicação de que algo alterou-se, do ponto de vista do estator. A corrente de estator, o fator de potência, a potência entregue ao entreferro e o conjugado permanecerão inalterados, desde que a razão  $R_2/s$  permaneça constante.

Pode-se acrescentar um significado físico a esse argumento examinando-se os efeitos de dobrar simultaneamente  $R_2$  e  $s$ , do ponto de vista do rotor. Um observador no rotor veria a onda de fluxo resultante no entreferro deslocando-se com o dobro da velocidade original de escorregamento, gerando o dobro da tensão original do rotor e com o dobro da velocidade de escorregamento original. Portanto, a reatância do rotor é dobrada e, tendo em vista a premissa original de que a resistência do rotor também foi duplicada, a impedância do rotor é dobrada ao passo que o fator de potência não se altera. Como ambas a tensão e a impedância do rotor foram dobradas, o valor efetivo da corrente de rotor permanece o mesmo; apenas a sua frequência é alterada. O entreferro ainda apresenta as mesmas ondas de fluxo e FMM, girando sincronicamente com o mesmo ângulo de conjugado. Um observador no rotor concordaria então com um outro postado no estator que o conjugado não se alterou.

Entretanto, um observador no rotor verificaria duas mudanças que não são aparentes no estator; (1) as perdas  $I^2R$  no rotor serão dobradas e (2) o rotor estará girando mais lentamente e, portanto, desenvolvendo menos potência mecânica, com o mesmo conjugado. Em outras palavras, uma quantidade maior de potência absorvida do estator irá se transformar em calor  $I^2R$  no rotor e menos estará disponível para potência mecânica.

Esses raciocínios podem ser prontamente aplicados à solução deste exemplo.

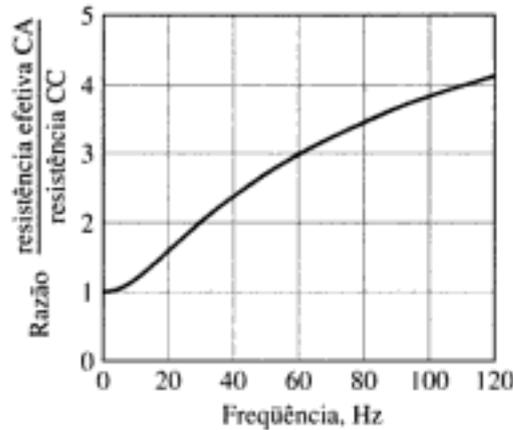
- Se a resistência do rotor for aumentada cinco vezes, o escorregamento também deverá aumentar cinco vezes para o mesmo valor de  $R_2/s$  e, portanto, para o mesmo conjugado. Como o escorregamento original de plena carga é 0,015, o novo escorregamento para o conjugado de plena carga será, portanto,  $5(0,015) = 0,075$ .
- O valor efetivo da corrente de rotor é o mesmo de seu valor a plena carga antes do acréscimo da resistência em série e, portanto, suas perdas  $R_2/s$  de rotor são cinco vezes o valor a plena carga de 5,69 kW, ou

$$\text{Perdas } I^2R \text{ do rotor} = 5 \times 5,69 = 28,4 \text{ kW}$$

- O escorregamento aumentado faz com que a velocidade por unidade, para o conjugado de plena carga, baixe de  $1 - s = 0,985$  para  $1 - s = 0,925$ . Como a razão  $R_2/s$  não se altera, o conjugado é o mesmo e, desse modo, a saída de potência diminui proporcionalmente, obtendo-se

$$P_{\text{mec}} = \frac{0,925}{0,985} (500) = 470 \text{ HP}$$

Como a potência no entreferro não se altera, a diminuição de potência mecânica eletromecânica no eixo deve se fazer acompanhar de um aumento correspondente de perdas  $I^2R$  no rotor.

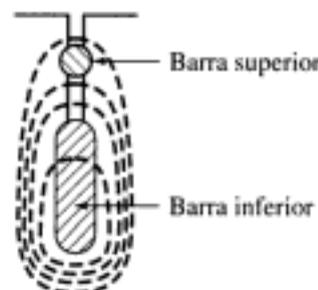


**FIGURA 6.19** Efeito pelicular em uma barra de rotor feita de cobre com 2,5 cm de profundidade.

Nesses casos e em condições de regime permanente, ainda é possível usar o circuito equivalente, desenvolvido na Seção 6.3, para representar as máquinas de indução. Entretanto,  $R_2$  e  $X_2$  devem ser variados de acordo com o escorregamento. Todas as relações básicas ainda podem ser aplicadas ao motor, desde que os valores de  $R_2$  e  $X_2$  sejam ajustados apropriadamente quando o escorregamento varia. Por exemplo, para calcular o desempenho de partida, os valores de  $R_2$  e  $X_2$  são os valores efetivos correspondentes à frequência do estator, ao passo que, para calcular o desempenho de funcionamento com escorregamentos pequenos,  $R_2$  é o valor efetivo correspondente a uma frequência baixa, e  $X_2$  é o valor de reatância, para uma frequência de estator, que corresponde ao valor efetivo da indutância de dispersão do rotor em baixa frequência. Para os valores de escorregamento em funcionamento normal, usualmente a resistência do rotor e a indutância de dispersão podem ser consideradas constantes correspondendo a valores CC de frequência nula.

### 6.7.3 Considerações sobre a Aplicação de Motores

Usando rotores de gaiola dupla e barras profundas, os motores de gaiola podem ser projetados para ter as boas características de partida que resultam de uma resistência de rotor elevada e, ao mesmo tempo, as boas características de funcionamento resultantes de uma resistência de rotor baixa. Entretanto, o projeto contém necessariamente alguma forma de compromisso, e a esses motores falta a flexibilidade de uma máquina de rotor bobinado com resistência de rotor externa. Como resultado, os motores de rotor bobinado eram comumente os preferidos quando as exigências de partida eram severas. No entanto, como foi discutido na Se-



**FIGURA 6.20** Barras do rotor de uma dupla gaiola de esquilo e fluxo de dispersão na ranhura.

Com motores abaixo de 7,5 HP, essas correntes de partida estão usualmente dentro dos limites da corrente transitória inicial suportada pelo sistema de distribuição que alimenta o motor. Nesse caso, pode-se então dar partida com plena tensão diretamente da linha. Em caso contrário, uma partida com tensão reduzida deve ser usada. A partida com tensão reduzida resulta em uma diminuição do conjugado de partida porque esse é proporcional ao quadrado da tensão aplicada aos terminais do motor. A tensão reduzida de partida é usualmente obtida de um autotransformador, chamado *compensador de partida*, que pode ser operado manual ou automaticamente por relés que aplicam a tensão plena depois de o motor ter atingido velocidade. O diagrama do circuito de um tipo de compensador está mostrado na Fig. 6.22. Se uma partida mais suave for necessária, uma resistência ou reatância em série pode ser usada no estator.

O motor de classe A é o tipo básico padrão para tamanhos abaixo de 7,5 HP e acima de 200 HP. É usado também em especificações intermediárias quando torna-se difícil atender às limitações da corrente de partida da classe B, devido a considerações de projeto. O seu campo de aplicação é aproximadamente o mesmo da classe B, descrita a seguir.

**Classe B: Conjugado de Partida Normal, Corrente de Partida Baixa, Escorregamento Baixo** Esse tipo tem aproximadamente o mesmo conjugado de partida da classe A mas com 75 por cento da corrente de partida. Portanto, para uma partida com tensão plena, pode ser usado com tamanhos maiores do que com os da classe A. A corrente de partida é reduzida, incluindo-se no projeto uma reatância de dispersão relativamente alta, e o conjugado de partida é mantido, usando-se um rotor de gaiola dupla ou barras profundas. Com plena carga, o escorregamento e o rendimento são bons, aproximadamente os mesmos da classe A. Entretanto, o uso de uma reatância elevada diminui ligeiramente o fator de potência e baixa em muito o conjugado máximo (usualmente, é possível obter um valor apenas ligeiramente superior a 200 por cento do conjugado de plena carga).

Esse tipo é o mais comum dentro da faixa de tamanhos de 7,5 a 200 HP. É usado essencialmente no acionamento de velocidade constante, em que as exigências de conjugado de partida não são severas, como no acionamento de ventiladores, sopradores, bombas e máquinas-ferramentas.

**Classe C: Conjugado de Partida Alto, Corrente de Partida Baixa** Esse tipo usa um rotor de gaiola dupla com uma resistência de rotor mais elevada do que a da classe B. O resultado é um conjugado de partida mais elevado, com baixa corrente de partida, mas com um rendimento de funcionamento um pouco inferior e um escorregamento mais alto do que com os motores das classes A e B. Aplicações típicas incluem compressores e transportadores.

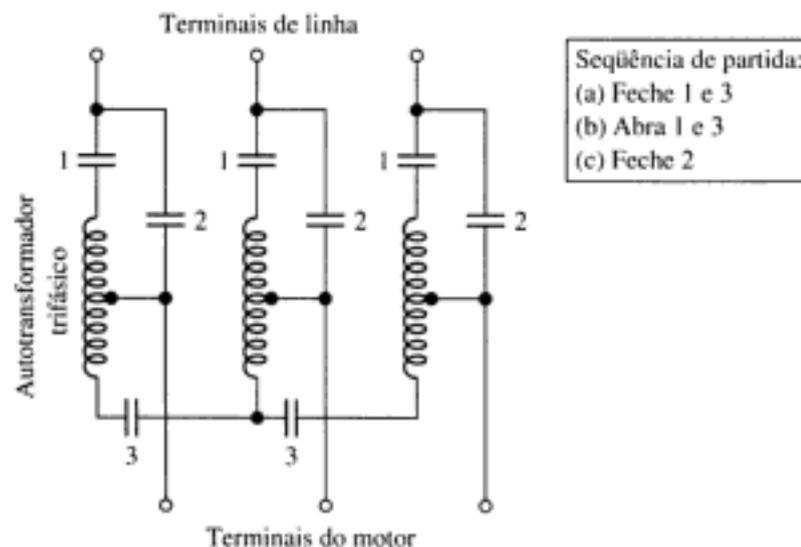


FIGURA 6.22 Conexões de um autotransformador de partida de um estágio.

**Classe D: Conjugado de Partida Alto, Escorregamento Alto** Usualmente, este tipo apresenta gaiola simples e rotor de alta resistência (barras de latão, freqüentemente). Produz conjugado de partida muito elevado com corrente de partida baixa, e um conjugado máximo elevado, com 50 a 100 por cento de escorregamento. No entanto, funciona com um escorregamento elevado em plena carga (7 a 11 por cento) e conseqüentemente tem um baixo rendimento de funcionamento. Seus principais usos estão no acionamento de cargas intermitentes, desenvolvendo trabalho com acelerações elevadas, e no acionamento de cargas de alto impacto, como em prensas perfuradoras e máquinas de cortar chapas. Quando está acionando cargas de alto impacto, o motor é geralmente acompanhado por um volante que auxilia a fornecer o impacto e a reduzir os pulsos de potência que são drenados do sistema de alimentação elétrica. Um motor, cuja velocidade caia apreciavelmente com o aumento de conjugado, torna-se necessário para que o volante possa baixar de velocidade e transferir uma parcela de sua energia cinética para o impacto.

## 6.8 RESUMO

Em um motor de indução polifásico, correntes com a freqüência de escorregamento são induzidas nos enrolamentos do rotor à medida que o rotor se desloca relativamente à onda de fluxo do estator, a qual gira sincronicamente. Por sua vez, essas correntes de rotor produzem uma onda de fluxo que gira em sincronismo com a onda de fluxo do estator. O conjugado é produzido quando essas duas ondas de fluxo interagem. Para um aumento de carga no motor, a velocidade do rotor diminui, resultando em aumento de escorregamento, aumento de correntes induzidas no rotor e elevação de conjugado.

Em um motor de indução polifásico, o exame das interações entre fluxos e FMM mostra que, eletricamente, a máquina é uma forma de transformador. A onda de fluxo no entreferro, girando sincronicamente na máquina de indução, é equivalente ao fluxo mútuo no núcleo de um transformador. Nos enrolamentos do estator, o campo girante induz FEMs com a freqüência do estator, e, com a freqüência de escorregamento, nos enrolamentos do rotor (para qualquer velocidade de rotor diferente da velocidade síncrona). Assim, a máquina de indução transforma as tensões e ao mesmo tempo altera a freqüência. Quando vistos do estator, todos os fenômenos elétricos e magnéticos do rotor são convertidos para a freqüência do estator. A FMM do rotor reage com os enrolamentos do estator da mesma forma que a FMM da corrente de secundário de um transformador reage com o primário. Seguindo nessa linha de raciocínio chega-se a um circuito equivalente monofásico, para máquinas de indução polifásicas, que é muito semelhante ao de um transformador.

Em aplicações que requerem uma velocidade bem constante, sem condições de partida excessivamente severas, o motor de gaiola de esquilo usualmente não tem rival devido a sua robustez, simplicidade e custo relativamente baixo. A sua única desvantagem está em seu fator de potência relativamente baixo (cerca de 0,85 a 0,90 a plena carga, para motores de quatro pólos e 60 Hz, e consideravelmente menor para cargas leves e para motores de velocidades mais baixas). O baixo fator de potência é uma conseqüência do fato que toda a excitação deve ser fornecida por potência reativa indutiva retirada da fonte CA.

Um dos fatos notáveis que afetam as aplicações do motor de indução é que o escorregamento, para o qual ocorre o conjugado máximo, pode ser controlado pela variação da resistência do rotor. Uma elevada resistência de rotor proporciona ótimas condições de partida mas um pobre desempenho de funcionamento. Entretanto, uma baixa resistência de rotor pode resultar em condições de partida não satisfatórias. Portanto, de qualquer modo, o projeto de um motor de indução será bem provavelmente um compromisso.

Uma melhoria notável no desempenho de partida, com um sacrifício relativamente pequeno de desempenho de funcionamento, pode ser incorporada a um motor de gaiola de esquilo, usando-se um rotor de barras profundas ou gaiola dupla cuja resistência efetiva aumenta com o escorregamento. Um motor de rotor bobinado pode ser usado em condições de partida muito severas, ou quando é necessário controlar a velocidade por meio de uma resistência de rotor. Sistemas de acionamento de estado sólido e frequência variável conferem uma flexibilidade considerável à utilização dos motores de indução em aplicações de velocidade variável. Essas questões serão discutidas no Capítulo 11.

## 6.9 PROBLEMAS

- 6.1** A placa de um motor de indução de quatro pólos, 460 V, 50 HP e 60 Hz indica que sua velocidade com carga nominal é 1755 rpm. Suponha que o motor esteja operando com a carga nominal.
- Qual é o escorregamento do motor?
  - Qual é a frequência das correntes do rotor?
  - Qual é a velocidade angular da onda de fluxo produzida pelo estator no entreferro em relação ao estator? Em relação ao rotor?
  - Qual é a velocidade angular da onda de fluxo produzida pelo rotor no entreferro em relação ao estator? Em relação ao rotor?
- 6.2** Campos de dispersão irão induzir tensões, com a frequência do rotor, em uma bobina de captação montada ao longo do eixo de um motor de indução. A medição da frequência dessas tensões induzidas pode ser usada para determinar a velocidade do rotor.
- Qual é a velocidade do rotor em rpm de um motor de indução de seis pólos e 50 Hz se a frequência da tensão induzida é 0,89 Hz?
  - Calcule a frequência da tensão induzida correspondente a um motor de indução de quatro pólos e 60 Hz operando na velocidade de 1740 rpm. Qual é o escorregamento correspondente?
- 6.3** Um motor de indução trifásico funciona na velocidade de quase 1198 rpm a vazio e 1112 rpm a plena carga, quando alimentado por uma fonte trifásica de 60 Hz.
- Quantos pólos este motor deve ter?
  - Qual é o escorregamento em porcentagem a plena carga?
  - Qual é correspondente frequência das correntes do rotor?
  - Qual é a correspondente velocidade do campo do rotor em relação ao rotor? Em relação ao estator?
- 6.4** Os motores de indução lineares têm sido propostos para uma variedade de aplicações, incluindo transporte terrestre a alta velocidade. Um motor linear baseia-se no princípio do motor de indução e consiste em um carro que se desloca sobre uma pista. Essa consiste em um enrolamento de gaiola de esquilo em forma plana, e o carro, de 4,5 m de comprimento e 1,25 m de largura, apresenta um enrolamento de armadura trifásico com 12 pares de pólos também em forma plana. A potência a 75 Hz é fornecida ao carro por meio de braços que se estendem através de ranhuras até trilhos situados abaixo do nível do solo.
- Qual é a velocidade síncrona em km/h?
  - O carro atingirá essa velocidade? Explique a sua resposta.
  - Qual é o escorregamento se o carro estiver se deslocando a 95 km/h? Nessas condições, qual é a frequência das correntes nos trilhos?

- 6.8** Um sistema como o mostrado na Fig. 6.23 é usado para converter tensões equilibradas de 50 Hz em outras frequências. O motor síncrono tem quatro pólos e aciona o eixo de acoplamento no sentido horário. A máquina de indução tem seis pólos e seus enrolamentos de estator são conectados à fonte de modo a produzir um campo que gira em sentido anti-horário (no sentido oposto à rotação do motor síncrono). A máquina tem um rotor bobinado cujos terminais são levados para fora por anéis deslizantes.
- Com que velocidade o motor funciona?
  - Qual é a frequência das tensões produzidas nos anéis deslizantes do motor de indução?
  - Qual será a frequência das tensões produzidas nos anéis deslizantes do motor de indução se dois terminais do estator do motor de indução forem trocados entre si, invertendo o sentido de rotação do campo girante resultante?
- 6.9** Um motor de indução trifásico de gaiola, oito pólos, 60 Hz, 4160 V e 1000 kW tem os seguintes parâmetros de circuito equivalente, por fase Y, referidos ao estator:

$$R_1 = 0,220 \quad R_2 = 0,207 \quad X_1 = 1,95 \quad X_2 = 2,42 \quad X_m = 45,7$$

Determine que mudanças ocorrerão nessas constantes como resultado das seguintes propostas de modificação. Considere cada modificação em separado.

- Substitua o enrolamento de estator por um outro idêntico com uma bitola de fio cuja área da seção reta seja incrementada em 4 por cento.
  - Diminua o diâmetro interno das lâminas do estator de modo que o entreferro seja diminuído em 15 por cento.
  - Substitua as barras de alumínio do rotor (condutividade  $3,5 \times 10^7$  S/m) por barras de cobre (condutividade  $5,8 \times 10^7$  S/m).
  - Refaça as conexões do enrolamento de estator mudando a ligação original em Y, operando em 4160 V, para  $\Delta$ , operando em 2,4 kV.
- 6.10** Um motor de indução trifásico, ligado em Y, quatro pólos, 460 V (tensão de linha), 25 kW e 60 Hz tem os seguintes parâmetros de circuito equivalente em ohms, por fase, referidos ao estator:

$$R_1 = 0,103 \quad R_2 = 0,225 \quad X_1 = 1,10 \quad X_2 = 1,13 \quad X_m = 59,4$$

As perdas totais por atrito e ventilação podem ser consideradas constantes sendo de 265 W, e as perdas no núcleo podem ser consideradas iguais a 220 W. Com o motor ligado diretamente a uma fonte de 460 V, calcule a velocidade, o conjugado e a potência de saída no eixo, a potência de entrada, o fator de potência e o rendimento para escorregamentos de 1, 2 e 3 por cento. Você pode escolher entre representar as perdas no núcleo por uma resistência ligada diretamente aos terminais do motor, ou pela resistência  $R_c$  ligada em paralelo com a reatância de magnetização  $X_m$ .



- 6.11** Considere o motor de indução do Problema 6.10.
- Encontre a velocidade do motor em rpm que corresponde à potência nominal de saída no eixo de 25 kW. (Sugestão: Isso pode ser feito facilmente escrevendo um *script* de MATLAB que faz uma pesquisa entre diversos valores de escorregamento.)
  - De modo semelhante, encontre a velocidade em rpm para a qual o motor funciona sem carga externa no eixo (supondo que a carga do motor nessa velocidade consista apenas em perdas por atrito e ventilação).
  - Escreva um *script* de MATLAB para plotar o rendimento do motor *versus* a potência de saída quando a potência de saída do motor varia de zero até a plena carga.

d. Faça uma segunda plotagem para o rendimento do motor *versus* a potência de saída quando a potência de saída do motor varia de aproximadamente 5 kW até a plena carga.



- 6.12** Escreva um *script* de MATLAB para analisar o desempenho de um motor de indução trifásico que opera com frequência e tensão nominais. As entradas devem ser os valores nominais de tensão, potência e frequência, além do número de pólos, os parâmetros do circuito equivalente e as perdas rotacionais. Dada uma velocidade específica, o programa deve calcular as potências de saída e entrada do motor, o fator de potência e o rendimento do motor. Use o seu programa com um motor de indução trifásico, quatro pólos, 500 kW, 4160 V e 60 Hz que funciona a 1725 rpm. As suas perdas rotacionais na velocidade nominal são de 3,5 kW e seus parâmetros de circuito equivalente são:

$$R_1 = 0,521 \quad R_2 = 1,32 \quad X_1 = 4,98 \quad X_2 = 5,32 \quad X_m = 136$$

- 6.13** Um motor de indução de gaiola de esquilo, trifásico, quatro pólos, 15 kW, 230 V, 60 Hz e ligado em Y desenvolve, a plena carga, um conjugado interno com escorregamento de 3,5 por cento, quando está funcionando em tensão e frequência nominais. Para os propósitos deste problema, as perdas no núcleo e as rotacionais podem ser desprezadas. Os seguintes parâmetros do motor, em ohms por fase, foram obtidos:

$$R_1 = 0,21 \quad X_1 = X_2 = 0,26 \quad X_m = 10,1$$

Determine o conjugado interno máximo na tensão e frequência nominais, o escorregamento para o conjugado máximo, e o conjugado interno de partida com tensão e frequência nominais.

- 6.14** O motor de indução do Problema 6.13 é energizado a partir de uma fonte de 230 V, por meio de um alimentador de impedância  $Z_f = 0,05 + j0,14$  ohms. Encontre o escorregamento do motor e a tensão de terminal, quando ele está fornecendo a carga nominal.
- 6.15** Um motor de indução trifásico, operando com tensão e frequência nominais, tem um conjugado de partida de 135 por cento e um conjugado máximo de 220 por cento, ambos relativos a seu conjugado de carga nominal. Desprezando os efeitos da resistência de estator e das perdas rotacionais, e assumindo uma resistência de rotor constante, determine:
- o escorregamento para o conjugado máximo.
  - o escorregamento para a carga nominal.
  - a corrente do rotor na partida (como porcentagem da corrente de rotor para carga nominal).
- 6.16** Quando está funcionando em tensão e frequência nominais, um motor trifásico de indução de gaiola de esquilo (classificado como sendo do tipo de escorregamento alto) apresenta, a plena carga, um escorregamento de 8,7 por cento, além de desenvolver um conjugado máximo de 230 por cento da carga plena com um escorregamento de 55 por cento. Despreze as perdas rotacionais e as de núcleo, assumindo que a resistência do rotor e a indutância permaneçam constantes, não dependendo do escorregamento. Determine, na tensão e frequência nominais, o conjugado de partida por unidade com base em seu valor a plena carga.
- 6.17** Uma máquina de indução de quatro pólos, 500 kW, 2400 V e 60 Hz tem os seguintes parâmetros de circuito equivalente, em ohms por fase, referidos ao estator:

$$R_1 = 0,122 \quad R_2 = 0,317 \quad X_1 = 1,364 \quad X_2 = 1,32 \quad X_m = 45,8$$

Ela atinge a saída nominal no eixo quando o escorregamento é de 3,35 por cento, com um rendimento de 94,0 por cento. A máquina deve ser usada como gerador, impulsionado por uma turbina eólica. Ela será ligada a um sistema de distribuição que pode ser representado por um barramento infinito de 2400 V.

Ensaio de rotor bloqueado em 15 Hz:

$$\text{Tensão de fase} = 268 \text{ V} \quad \text{Corrente de linha} = 50,3 \text{ A}$$

$$\text{Potência trifásica} = 18,2 \text{ kW}$$

- Calcule as perdas rotacionais.
  - Calcule os parâmetros do circuito equivalente em ohms. Assuma que  $X_1 = X_2$ .
  - Calcule a corrente de estator, a potência de entrada com o fator de potência, a potência de saída e o rendimento, quando esse motor está operando em tensão e frequência nominais, com um escorregamento de 2,95 por cento.
- 6.23** Dois motores de indução de gaiola, trifásicos, seis pólos, 50 kW, 440 V e 60 Hz têm estatores idênticos. A resistência CC medida entre qualquer par de terminais do estator é 0,204  $\Omega$ . Ensaio de rotor bloqueado, a 60 Hz, produzem os seguintes resultados:

Motor	Volts (tensão de linha)	Ampères	Potência trifásica, kW
1	74,7	72,9	4,40
2	99,4	72,9	11,6

Determine a razão do conjugado interno de partida desenvolvido pelo motor 2 em relação ao do motor 1 (a) para a mesma corrente e (b) para a mesma tensão. Faça suposições razoáveis.



- 6.24** Escreva um *script* de MATLAB para calcular os parâmetros de um motor de indução trifásico com dados obtidos de ensaios a vazio e de rotor bloqueado.

Entrada:

Frequência nominal

Ensaio a vazio: Tensão, corrente e potência

Ensaio de rotor bloqueado: Frequência, tensão, corrente e potência

Resistência de estator medida de fase a fase

Razão assumida  $X_1/X_2$

Saída

Perdas rotacionais

Parâmetros de circuito equivalente  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_m$ .

Exercite o seu programa com um motor de indução trifásico de 2300 V, 50 Hz e 250 kW cujos resultados obtidos em ensaios são:

$$\text{Resistência de estator entre os terminais de fase} = 0,636 \Omega$$

Ensaio a vazio em tensão e frequência nominais:

$$\text{Corrente de linha} = 20,2 \text{ A} \quad \text{Potência trifásica} = 3,51 \text{ kW}$$

Ensaio de rotor bloqueado em 12,5 Hz:

$$\text{Tensão de fase} = 142 \text{ V} \quad \text{Corrente de linha} = 62,8 \text{ A}$$

$$\text{Potência trifásica} = 6,55 \text{ kW}$$

Você pode assumir que  $X_1 = 0,4(X_1 + X_2)$ .

- 6.25** Um motor de indução de gaiola, trifásico, seis pólos, 230 V e 60 Hz desenvolve um conjugado interno máximo de 288 por cento, com um escorregamento de 15 por cento, quando está funcionando em tensão e frequência nominais. Se o efeito da resistência de estator for desprezado, determine o conjugado interno máximo que esse motor iria desenvolver se fosse operado a 190 V e 50 Hz. Sob essas condições, em que velocidade seria desenvolvido o conjugado máximo?

- 6.26** Um motor de indução de rotor bobinado, trifásico, quatro pólos, 75 kW, 50 Hz e 460 V desenvolve conjugado de plena carga a 1438 rpm, com o rotor curto-circuitado. Uma resistência externa não indutiva de  $1,1 \Omega$  é colocada em série com cada fase do rotor. A seguir, observa-se que o motor desenvolve o seu conjugado nominal para a velocidade de 1405 rpm. Calcule a resistência do rotor, por fase, do próprio motor.
- 6.27** Um motor de indução de rotor bobinado, trifásico, quatro pólos, 75 kW, 460 V e 60 Hz desenvolve um conjugado interno máximo de 225 por cento e um escorregamento de 16 por cento, quando está funcionando em tensão e frequência nominais com o rotor curto-circuitado diretamente nos anéis deslizantes. A resistência de estator e as perdas rotacionais podem ser desprezadas, e a resistência e a indutância do rotor podem ser consideradas constantes, independentes da frequência do rotor. Determine
- o escorregamento a plena carga em porcentagem,
  - as perdas  $I^2R$  do rotor a plena carga em watts,
  - o conjugado de partida na tensão e frequência nominais por unidade e em N.m.
- Se a resistência do rotor for dobrada (inserindo resistências externas em série nos anéis deslizantes) e a carga do motor for ajustada para que a corrente de linha seja igual ao valor corresponde à carga nominal sem resistência externa, determine
- o correspondente escorregamento em porcentagem e
  - o conjugado em N.m



- 6.28** Desprezando quaisquer efeitos de perdas rotacionais e de núcleo, use MATLAB para plotar a curva de conjugado interno *versus* velocidade do motor de indução do Problema 6.10, operando em tensão e frequência nominais. No mesmo gráfico, plote as curvas de conjugado interno *versus* velocidade do motor, assumindo que a resistência do rotor aumente por fatores de 2, 5 e 10.
- 6.29** Um motor de indução de rotor bobinado, trifásico, seis pólos, 100 kW, 60 Hz e 460 V desenvolve a potência de plena carga na velocidade de 1158 rpm, quando está funcionando em tensão e frequência nominais e com o rotor curto-circuitado diretamente nos seus anéis deslizantes. O conjugado máximo, que pode ser desenvolvido quando está funcionando em tensão e frequência nominais, é 310 por cento do conjugado de plena carga. A resistência do enrolamento do rotor é  $0,17 \Omega$  /fase Y. Despreze quaisquer efeitos de perdas rotacionais e suplementares, e da resistência do estator.
- Calcule as perdas  $I^2R$  do rotor a plena carga.
  - Calcule a velocidade no conjugado máximo em rpm.
  - Quanto de resistência deve ser inserido em série com os enrolamentos do rotor para produzir o conjugado máximo de partida?
- Com os enrolamentos de rotor curto-circuitados, o motor opera agora a partir de uma fonte de 50 Hz cuja tensão aplicada é ajustada de modo que a onda de fluxo no entreferro seja essencialmente igual à da operação em 60 Hz.
- Calcule a tensão aplicada de 50 Hz.
  - Calcule a velocidade na qual o motor irá desenvolver um conjugado igual ao de 60 Hz, com seus anéis deslizantes curto-circuitados.

- 6.30** Um motor de indução de rotor bobinado, trifásico, seis pólos, 460 V, 60 Hz e 150 kW desenvolve um conjugado interno de 190 por cento, com uma corrente de linha de 200 por cento (conjugado e corrente expressos em porcentagens de seus valores de plena carga) e escorregamento de 5,6 por cento, quando está funcionando em tensão e frequência nominais com os terminais do rotor curto-circuitados. A resistência do rotor é

## Máquinas CC

As máquinas CC caracterizam-se por sua versatilidade. Por meio das diversas combinações de enrolamentos de campo, excitados em derivação, série ou independentemente, elas podem ser projetadas de modo a apresentar uma ampla variedade de características de tensão *versus* corrente ou de velocidade *versus* conjugado, para operações dinâmicas e em regime permanente. Devido à facilidade com que podem ser controladas, sistemas de máquinas CC têm sido usados freqüentemente em aplicações que exigem uma ampla faixa de velocidades ou de controle preciso da saída do motor. Em anos recentes, a tecnologia de estado sólido que é usada nos sistemas de acionamento CA desenvolveu-se o suficiente para que esses sistemas estejam substituindo as máquinas CC em aplicações anteriormente associadas quase que exclusivamente às máquinas CC. Entretanto, a versatilidade das máquinas CC, em combinação com a relativa simplicidade dos seus sistemas de acionamento, irá assegurar o seu uso contínuo em uma ampla variedade de aplicações.

### 7.1 INTRODUÇÃO

As características essenciais de uma máquina CC estão mostradas esquematicamente na Fig. 7.1. O estator tem pólos salientes e é excitado por uma ou mais bobinas de campo. A distribuição do fluxo criado pelos enrolamentos de campo no entreferro é simétrica em relação à linha central dos pólos de campo. Esse eixo é chamado de *eixo de campo* ou *eixo direto*.

Como foi discutido em detalhes na Seção 4.6.2, a tensão CA, gerada em cada bobina de armadura rotativa, é convertida em CC nos terminais externos da armadura por meio de um comutador rotativo e de escovas estacionárias, às quais os condutores da armadura estão conectados. A combinação de comutador e escovas forma um retificador mecânico, resultando em uma tensão CC de armadura e uma onda de FMM de armadura que está fixa no espaço. A ação do comutador será discutida em detalhes na Seção 7.2.

As escovas estão posicionadas de modo que a comutação ocorra quando os lados da bobina estejam na zona neutra, a meio caminho entre os pólos de campo. O eixo da onda de FMM de armadura estará então distanciado 90 graus elétricos do eixo dos pólos de campo, isto é, no *eixo em quadratura*. Na representação esquemática da Fig. 7.1a, as escovas estão mostradas no eixo em quadratura porque essa é a posição das bobinas às quais elas estão conectadas. A onda de FMM de armadura estará então ao longo do eixo das escovas, como está mostrado. (A posição geométrica das escovas em uma máquina real localiza-se a aproximadamente 90 graus elétricos da posição mostrada no diagrama esquemático, devido à forma das conexões de terminação até o comutador. Por exemplo, veja a Fig. 7.7.) Uma representação mais simples usada em circuitos é a desenhada na Fig. 7.1b.

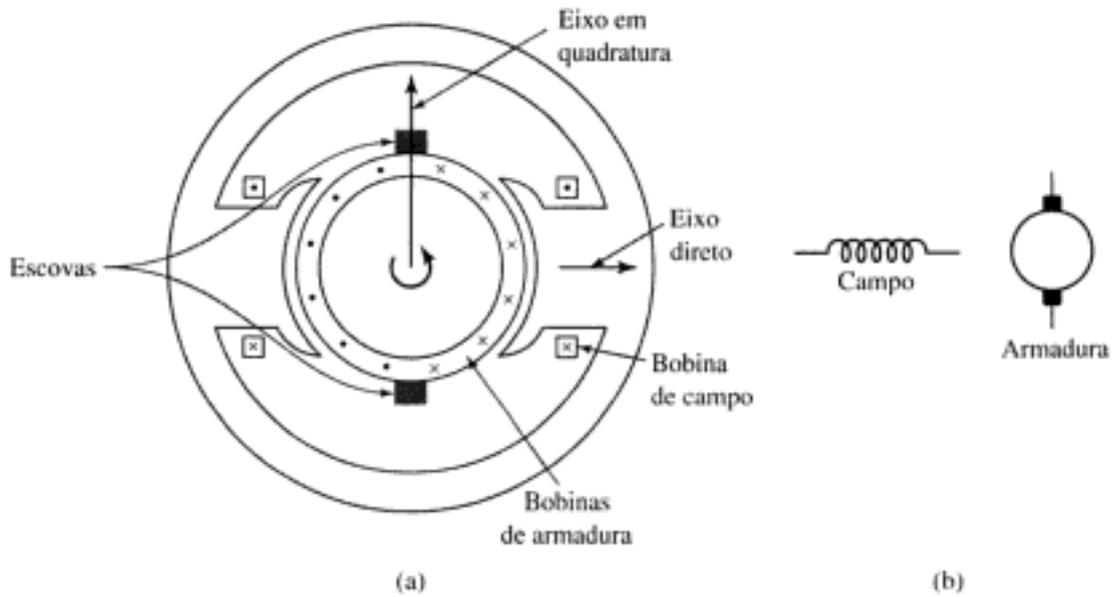


FIGURA 7.1 Representações esquemáticas de uma máquina CC.

Embora o conjugado magnético e a tensão de velocidade que aparecem nas escovas sejam um tanto dependentes da forma de onda espacial da distribuição de fluxo, continuaremos supondo por conveniência que a onda de densidade de fluxo no entreferro seja senoidal, como foi feito no Capítulo 4. Então, o conjugado poderá ser obtido a partir do ponto de vista do campo magnético como foi discutido na Seção 4.7.2.

O conjugado eletromagnético  $T_{mec}$  pode ser expresso em termos da interação entre o fluxo por pólo  $\Phi_d$  no entreferro sobre o eixo direto e a componente fundamental espacial  $F_{a1}$  da onda de FMM de armadura, de modo semelhante à Equação 4.81. Com as escovas no eixo em quadratura, o ângulo entre esses campos é de 90 graus elétricos, e o seu seno é igual à unidade. A substituição na Equação 4.81 dá então

$$T_{mec} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\text{pólos}}{2} \right)^2 \Phi_d F_{a1} \quad (7.1)$$

na qual o sinal menos foi desprezado porque o sentido positivo do conjugado pode ser determinado por um raciocínio físico. O valor de pico da onda dente de serra da FMM de armadura é dado pela Equação 4.9 e a sua fundamental espacial  $F_{a1}$  é  $8/\pi^2$  vezes o seu pico. A substituição na Equação 7.1 dá então

$$T_{mec} = \left( \frac{\text{pólos } C_a}{2\pi m} \right) \Phi_d i_a = K_a \Phi_d i_a \quad (7.2)$$

onde

$i_a$  = corrente no circuito externo de armadura

$C_a$  = número total de condutores no enrolamento de armadura

$m$  = número de caminhos em paralelo no enrolamento

e

$$K_a = \frac{\text{pólos } C_a}{2\pi m} \quad (7.3)$$

é uma constante determinada pelo projeto do enrolamento.

A tensão gerada e retificada de armadura já foi encontrada na Seção 4.6.2 para uma armadura elementar com uma única bobina, e sua forma de onda está mostrada na Fig. 4.33. O efeito de distribuir o enrolamento em diversas ranhuras está mostrado na Fig. 7.2, na qual cada uma das ondas senoidais retificadas é a tensão gerada em uma das bobinas. A comutação ocorre no momento em que os lados das bobinas estão na zona neutra.

A tensão gerada observada entre as escovas é a soma das tensões retificadas de todas as bobinas em série entre as escovas, e está mostrada pela linha ondulada  $e_a$  na Fig. 7.2. Com uma dúzia ou tanto de lâminas de comutador por pólo, a ondulação torna-se muito pequena, e a tensão média gerada observada nas escovas é igual à soma dos valores médios das tensões retificadas de bobina. Da Equação 4.53, obtém-se que a tensão retificada  $e_a$  entre as escovas, também conhecida como *tensão de velocidade*, é

$$e_a = \left( \frac{\text{pólos } C_a}{2\pi m} \right) \Phi_d \omega_m = K_a \Phi_d \omega_m \quad (7.4)$$

onde  $K_a$  é a constante de enrolamento definida pela Equação 7.3. A tensão retificada de um enrolamento distribuído tem o mesmo valor médio que uma bobina concentrada. A diferença é que a ondulação é grandemente reduzida.

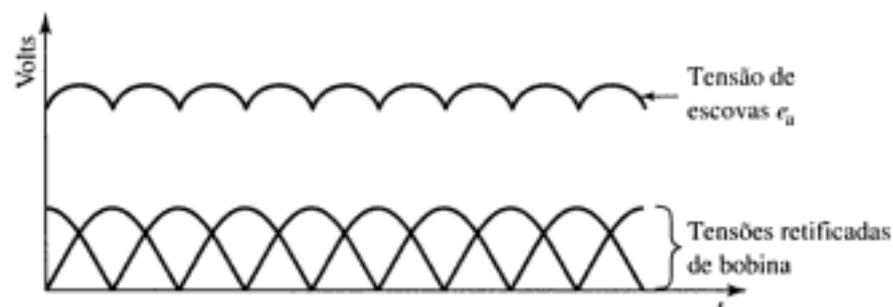
Das Equações 7.2 e 7.4, com todas as variáveis expressas em unidades do SI, obtém-se

$$e_a i_a = T_{mec} \omega_m \quad (7.5)$$

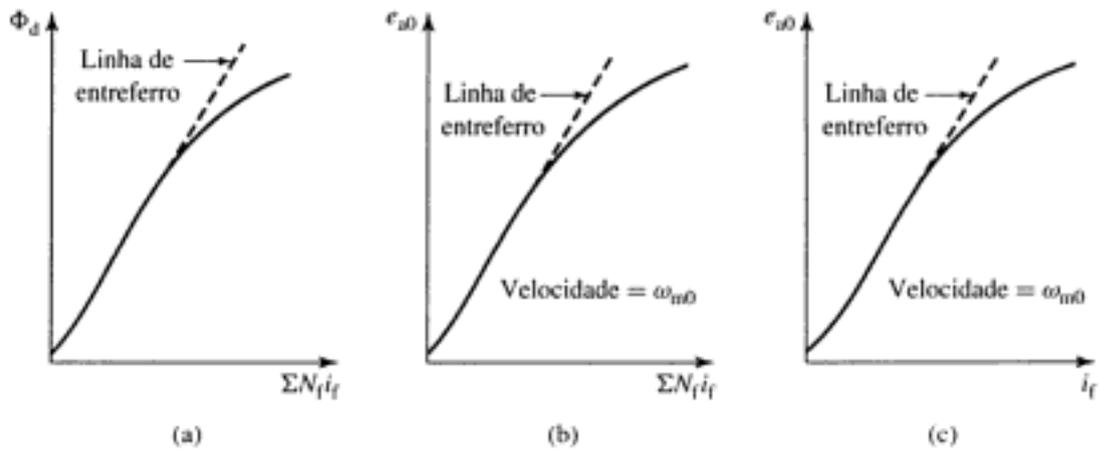
Observando que o produto do conjugado pela velocidade mecânica é a potência mecânica, essa equação afirma simplesmente que a potência elétrica instantânea, associada à tensão de velocidade, é igual à potência mecânica instantânea, associada ao conjugado magnético. O sentido do fluxo de potência depende se a máquina está atuando como motor ou gerador.

O fluxo de entreferro de eixo direto é produzido pelas FMMs combinadas  $\sum N_i i_i$  dos enrolamentos de campo. A característica de fluxo  $\times$  FMM é referida como *curva de magnetização* da máquina. A forma de uma curva de magnetização típica está mostrada na Fig. 7.3a, na qual supõe-se que a FMM de armadura não atua sobre o fluxo de eixo direto porque o eixo da onda de FMM de armadura está alinhada com o eixo em quadratura e, conseqüentemente, é perpendicular ao eixo de campo. Será necessário reexaminar essa suposição mais adiante, neste capítulo, onde os efeitos da saturação serão investigados com mais profundidade. Observe que a curva de magnetização da Fig. 7.3a não passa pela origem. Esse comportamento ocorre nos casos em que a estrutura do campo exibe *magnetismo residual*, isto é, onde o material magnético do campo não se desmagnetiza completamente quando a FMM líquida do campo é reduzida a zero.

Como a FEM de armadura é proporcional ao fluxo vezes a velocidade, usualmente é mais conveniente expressar a curva de magnetização em termos da FEM de armadura  $e_{a0}$ , para uma



**FIGURA 7.2** Tensões retificadas de bobina e tensão resultante entre escovas em uma máquina CC.



**FIGURA 7.3** Forma típica das curvas de magnetização de uma máquina de corrente contínua.

velocidade constante  $\omega_{m0}$ , como está mostrado na Fig. 7.3b. A tensão  $e_a$  para um dado fluxo, em qualquer outra velocidade  $\omega_m$ , é proporcional à velocidade; isto é, da Equação 7.4, obtém-se

$$\frac{e_a}{\omega_m} = K_a \Phi_d = \frac{e_{a0}}{\omega_{m0}} \quad (7.6)$$

Assim,

$$e_a = \left( \frac{\omega_m}{\omega_{m0}} \right) e_{a0} \quad (7.7)$$

ou, em termos da velocidade de rotação em rpm,

$$e_a = \left( \frac{n}{n_0} \right) e_{a0} \quad (7.8)$$

onde  $n_0$  é a velocidade de rotação correspondente à uma FEM de armadura de  $e_{a0}$ .

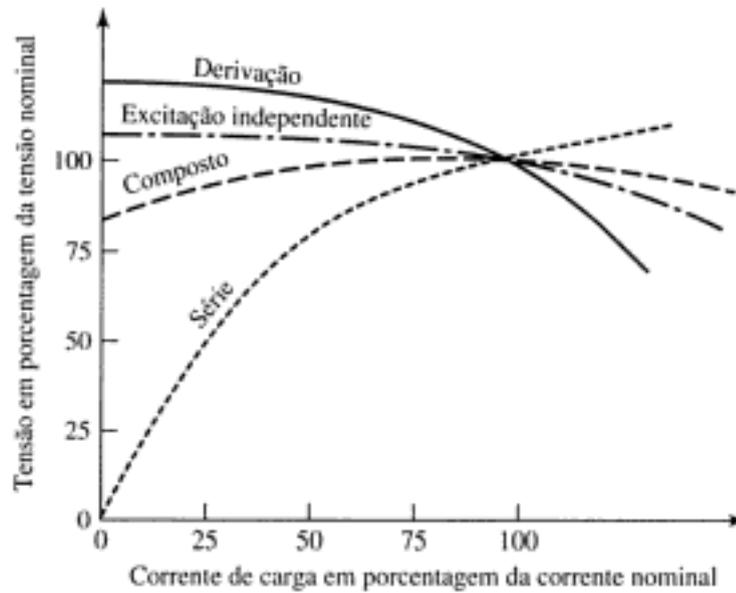
A Fig. 7.3c mostra a curva de magnetização com apenas um dos enrolamentos de campo excitado. Neste caso, a tensão de armadura foi plotada *versus* a corrente de campo, ao invés dos ampères-espiras de campo. Essa curva pode ser obtida facilmente usando métodos baseados em ensaios. Como a corrente de campo pode ser medida diretamente, não é necessário conhecer nenhum detalhe de projeto.

Dentro de uma faixa bem ampla de excitação, a relutância do aço elétrico da máquina é desprezível em comparação com a do entreferro. Nessa região, o fluxo é linearmente proporcional à FMM total dos enrolamentos de campo, sendo que a constante de proporcionalidade é a permeância de eixo direto  $\mathcal{P}_d$ ; assim,

$$\Phi_d = \mathcal{P}_d \sum N_f i_f \quad (7.9)$$

A linha reta tracejada, que passa pela origem e coincide com a porção reta das curvas de magnetização da Fig. 7.3, é chamada *linha de entreferro*. Essa nomenclatura refere-se ao fato de que essa característica linear de magnetização é a encontrada no caso em que a relutância da porção constituída de material magnético do caminho de fluxo, em comparação com a do entreferro, permanece desprezível independentemente do grau de saturação magnética do aço do motor.

As notáveis vantagens das máquinas CC provêm da grande variedade de características de operação que podem ser obtidas quando se escolhe o método de excitação dos enrolamentos de campo. Vários diagramas de ligações estão mostrados na Fig. 7.4. O método de excita-



**FIGURA 7.5** Características de tensão x corrente de geradores CC.

A tensão de terminal de um gerador com excitação independente decresce ligeiramente com o aumento da corrente de carga, principalmente devido à queda de tensão na resistência de armadura. A corrente de campo de um gerador série é a mesma que a corrente de carga, de modo que o fluxo de entreferro e, conseqüentemente, a tensão variem amplamente com a carga. Por essa razão, os geradores série não são muito usados. A tensão de um gerador em derivação cai um pouco com a carga, mas isso não o impede de ser usado para muitos propósitos. Os geradores compostos são ligados normalmente de modo que a FMM do enrolamento em série auxilie a do enrolamento em derivação. A vantagem é que, devido à ação do enrolamento em série, o fluxo por pólo pode aumentar com a carga, resultando uma tensão de saída que é aproximadamente constante ou que até cresce um pouco com o aumento da carga. O enrolamento em derivação usualmente contém muitas espiras de fio relativamente delgado. O enrolamento em série, disposto por fora, consiste em poucas espiras de um condutor relativamente espesso, porque toda a corrente de armadura da máquina passa por ele. A tensão de um gerador em derivação ou composto pode ser controlada dentro de limites razoáveis por meio de reostatos que atuam sobre o campo em derivação.

Todos os métodos de excitação usados nos geradores também podem ser usados nos motores. Curvas características típicas de velocidade  $\times$  conjugado para motores CC em regime permanente estão mostradas na Fig. 7.6, na qual assume-se que os terminais do motor são alimentados a partir de uma fonte de tensão constante. Em um motor, a relação entre a FEM  $E_a$  gerada na armadura e a tensão de terminal de armadura  $V_a$  é

$$V_a = E_a + I_a R_a \quad (7.11)$$

ou

$$I_a = \frac{V_a - E_a}{R_a} \quad (7.12)$$

onde  $I_a$  é agora a corrente de armadura de entrada da máquina. Agora, a FEM gerada  $E_a$  é menor do que a tensão de terminal  $V_a$ , pois a corrente de armadura tem sentido oposto à de um gerador, e o conjugado eletromagnético tem um sentido tal que mantém a rotação da armadura.

Nos *motores em derivação e de excitação independente*, o fluxo de campo é aproximadamente constante. Conseqüentemente, um aumento de conjugado deve se fazer acompanhar

e 2, e a escova do lado esquerdo está em contato com ambas as lâminas 7 e 8. Agora, as bobinas das ranhuras 1 e 7 estão sendo curto-circuitadas pelas escovas. As correntes nas outras bobinas estão indicadas por pontos e cruces, produzindo um campo magnético cujo eixo é novamente vertical.

Depois de nova rotação, as escovas estarão em contato com as lâminas 2 e 8, e as ranhuras 1 e 7 terão alcançado as posições que anteriormente eram ocupadas pelas ranhuras 12 e 6 da Fig. 7.7a. Os sentidos das correntes serão semelhantes aos da Fig. 7.7a, exceto que as correntes das bobinas das ranhuras 1 e 7 terão os sentidos invertidos. O eixo magnético da armadura ainda é vertical.

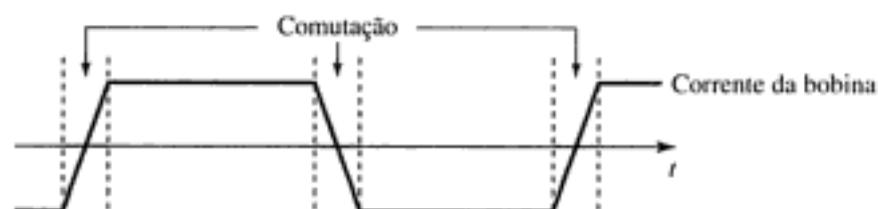
Durante o tempo em que cada escova está simultaneamente em contato com duas lâminas contíguas do comutador, as bobinas ligadas a essas lâminas são temporariamente removidas do circuito principal, que é o enrolamento de armadura, pelos curtos-circuitos criados pelas escovas. Em seguida, as correntes dessas bobinas invertem de sentido. Idealmente, a corrente presente nas bobinas que estão sendo comutadas deveria mudar de sentido de forma linear com o tempo, uma condição referida como *comutação linear*. Afastamentos significativos dessa condição de comutação linear resultam em faiscamento nas escovas. Métodos para se obter comutação sem faíscas serão discutidos na Seção 7.9. Em qualquer bobina, se a comutação for linear, a forma de onda da corrente em função do tempo será trapezoidal, como se mostra na Fig. 7.8.

O enrolamento da Fig. 7.7 é mais simples que o usado na maioria das máquinas CC. Normalmente, são usadas mais ranhuras e lâminas de comutador e, exceto em pequenas máquinas, é comum mais de dois pólos. No entanto, o enrolamento simplificado da Fig. 7.7 contém as características essenciais dos enrolamentos mais complicados.

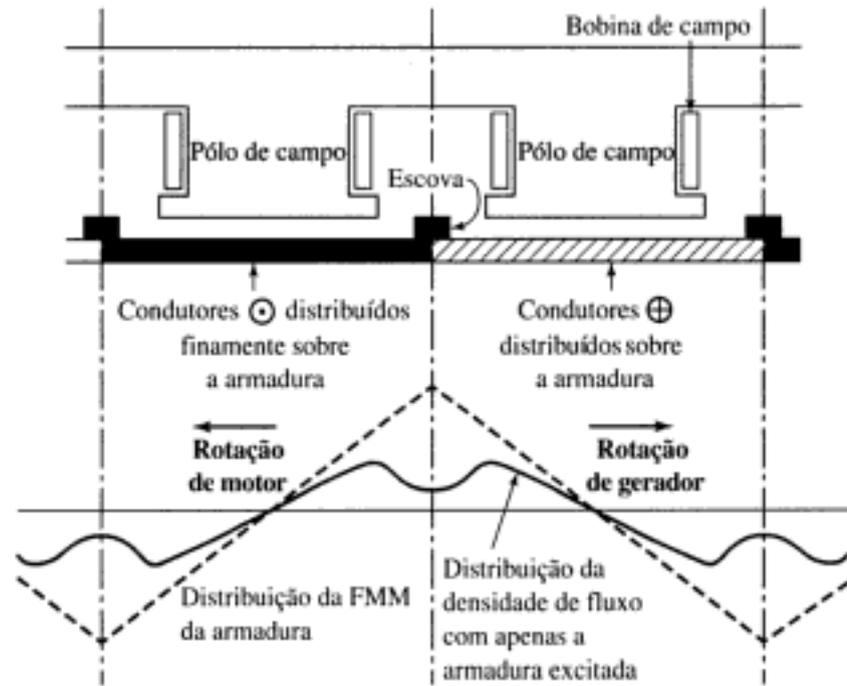
### 7.3 EFEITO DA FMM DA ARMADURA

A FMM da armadura causa efeitos bem definidos sobre a distribuição espacial do fluxo de entreferro e sobre a magnitude do fluxo líquido por pólo. O efeito sobre a distribuição de fluxo é importante porque influencia diretamente os limites de uma comutação bem sucedida, e o efeito sobre a magnitude de fluxo é importante porque desse modo influencia a tensão gerada e o conjugado por unidade de corrente de armadura. Esses efeitos e os problemas que surgem são descritos nesta seção.

Foi mostrado na Seção 4.3.2 e Fig. 4.23 que a onda da FMM da armadura pode ser bem aproximada por uma onda dente de serra, correspondendo à onda produzida por um enrolamento de armadura ou lâmina de corrente finamente distribuídos. Para o caso de uma máquina com as escovas na posição neutra, a onda idealizada de FMM está mostrada novamente pela onda dente de serra tracejada da Fig. 7.9, em que uma ordenada positiva de FMM denota linhas de fluxo que deixam a superfície da armadura. Os sentidos de corrente em todos os enrolamentos, exceto o do campo principal, são indicados por faixas pretas e hachuradas. Devido à estrutura do campo para pólos salientes, encontrada em quase todas as máquinas CC, a



**FIGURA 7.8** Forma de onda da corrente em uma bobina linear com comutação linear.

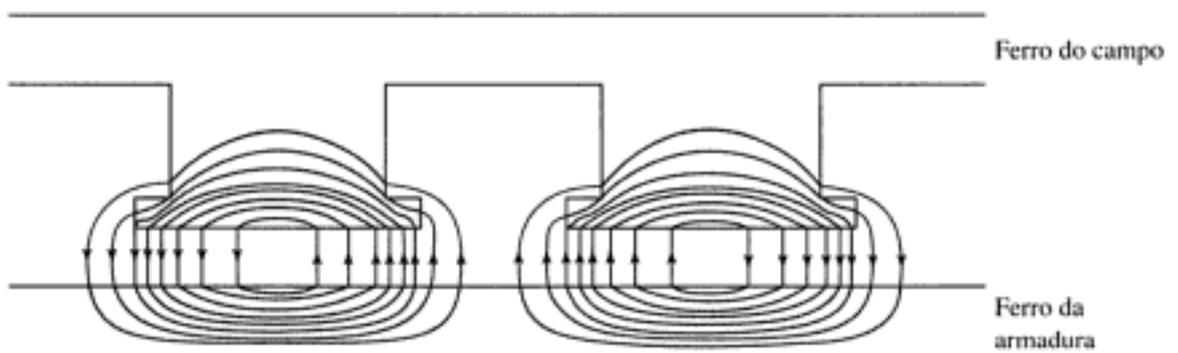


**FIGURA 7.9** A FMM da armadura e a distribuição de densidade de fluxo com as escovas na posição neutra e apenas a armadura excitada.

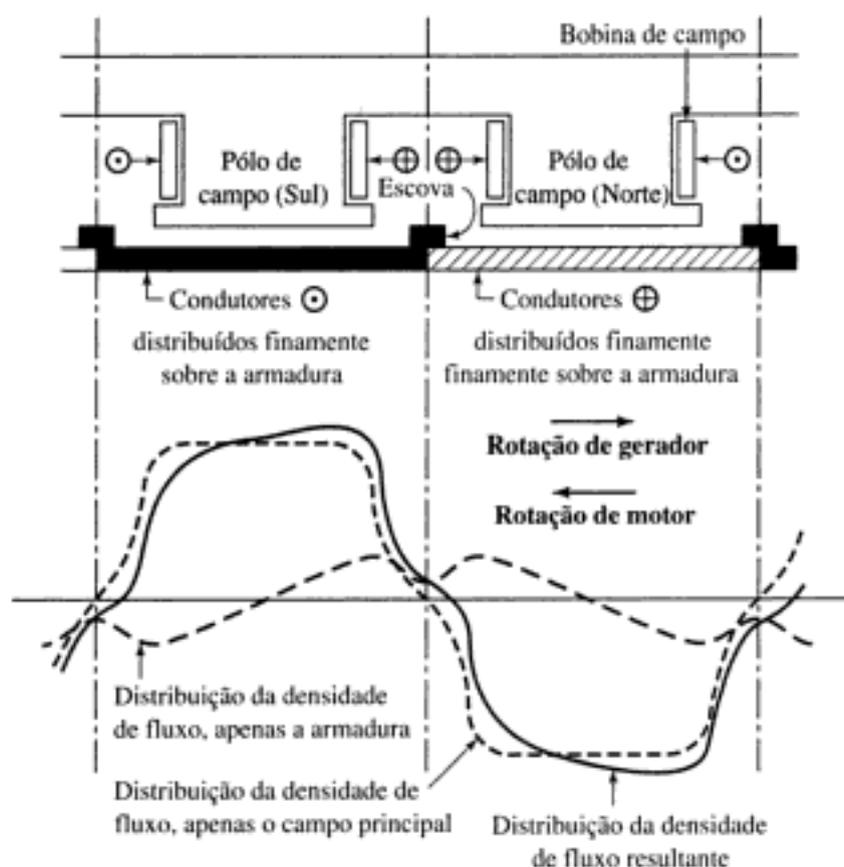
respectiva distribuição espacial do fluxo não será triangular. Quando apenas a armadura está excitada, a distribuição de densidade de fluxo no entreferro está mostrada pela linha espessa da Fig. 7.9. Como se pode ver facilmente, ela se reduz apreciavelmente devido ao longo caminho de ar do espaço interpolar.

A localização das escovas posiciona o eixo da FMM de armadura a 90 graus elétricos do eixo do campo principal. O fluxo correspondente segue os caminhos mostrados na Fig. 7.10. Pode-se ver que o efeito da FMM de armadura é o de criar um fluxo que cruza as faces polares. Assim, nas sapatas polares, o seu caminho cruza com o caminho de fluxo do campo principal. Por essa razão, esse tipo de reação da armadura é chamado de *reação de armadura de magnetização cruzada*. É evidente que, debaixo de uma das metades do pólo, essa reação causa uma redução na densidade do fluxo de entreferro resultante e, debaixo da outra metade, um aumento.

Quando os enrolamentos de armadura e de campo são ambos excitados, a distribuição da densidade de fluxo resultante no entreferro tem a forma dada pela linha espessa da Fig. 7.11. Superpostas a essa figura, estão as distribuições de fluxo quando apenas a armadura está excitada (curva de traços longos) e quando apenas o campo está excitado (curva de traços curtos). O efeito da reação de armadura de magnetização cruzada, de reduzir o fluxo em uma



**FIGURA 7.10** Fluxo com apenas a armadura excitada e as escovas na posição neutra.



**FIGURA 7.11** Distribuições da densidade da fluxo da armadura, do campo principal e da resultante com as escovas na posição neutra.

das extremidades do pólo e de aumentá-lo na outra, pode ser visto comparando-se as curvas de traços curtos e longos. Em geral, a curva espessa não é a soma algébrica das duas curvas tracejadas porque o circuito magnético no ferro não é linear. Devido à saturação do ferro, a densidade de fluxo é reduzida mais intensamente em uma das extremidades do pólo do que é aumentada na outra. Conseqüentemente, o fluxo resultante por pólo é inferior ao que seria produzido apenas pelo enrolamento de campo. Esse resultado é conhecido como o *efeito de desmagnetização da reação de armadura de magnetização cruzada*. Como é devido à saturação, a sua intensidade é uma função não linear de ambas as correntes de campo e de armadura. No caso do funcionamento normal das máquinas, com as densidades de fluxo usadas comercialmente, o efeito usualmente é significativo, especialmente com cargas elevadas, e freqüentemente deve ser levado em consideração nas análises de desempenho.

A distorção da distribuição de fluxo causada pela reação de armadura de magnetização cruzada pode ter uma influência prejudicial sobre a comutação da corrente de armadura, especialmente quando a distorção tornar-se excessiva. De fato, essa distorção é usualmente um importante fator limitante da capacidade de sobrecarga de curta duração de uma máquina CC. A tendência de distorção da distribuição de fluxo é mais pronunciada nas máquinas, como em um motor em derivação, onde a excitação de campo permanece bem constante enquanto a FMM de armadura, para cargas elevadas, pode atingir proporções muito significativas. A tendência é menos pronunciada em máquinas com excitação em série, como no motor série, pois ambas as FMMs de campo e de armadura podem crescer com a carga.

Durante o projeto e a construção da máquina, pode-se limitar o efeito da reação de armadura de magnetização cruzada. A FMM do campo principal deve controlar predominantemente o fluxo de entreferro, de modo que condições de campo fraco e FMM de armadura forte sejam evitadas. Pode-se aumentar a relutância do caminho de fluxo cruzado (essencialmen-

te os dentes da armadura, as sapatas polares e o entreferro, especialmente nas extremidades dos pólos) aumentando-se o grau de saturação dos dentes e das faces polares, evitando um entreferro muito pequeno, e usando uma face polar chanfrada ou excêntrica, o que aumenta o entreferro nas extremidades do pólo. Esses expedientes afetam também o caminho do fluxo principal, mas a influência sobre o fluxo cruzado é muito maior. A melhor medida curativa, mas também a mais dispendiosa, é compensar a FMM de armadura por meio de um enrolamento que é alojado nas faces polares, uma medida que será discutida na Seção 7.9.

Se as escovas não estiverem na posição neutra, o eixo da onda de FMM da armadura não estará a  $90^\circ$  do eixo do campo principal. Então, a FMM de armadura produzirá não apenas magnetização cruzada, mas também um efeito de magnetização ou desmagnetização sobre o eixo direto, de acordo com o sentido de deslocamento das escovas. O afastamento das escovas da posição neutra ocorre usualmente por descuido, devido ao posicionamento incorreto ou ao ajuste insatisfatório das escovas. Antes da invenção dos interpolos, no entanto, o deslocamento das escovas era um método comum para assegurar uma comutação satisfatória, sendo que o sentido do deslocamento era tal que produzisse uma ação de desmagnetização. Pode-se mostrar que deslocamentos no sentido de rotação, no caso de um gerador, ou contra a rotação, no caso de um motor, resultam em um funcionamento instável do motor ou em excessiva queda de tensão no gerador. Escovas incorretamente posicionadas podem ser detectadas por meio de um teste de carga. Se as escovas estiverem na posição neutra, a tensão de terminal de um gerador ou a velocidade de um motor devem permanecer as mesmas, quando o sentido de rotação é invertido, desde que as condições de excitação de campo e de corrente de armadura sejam idênticas.

## 7.4 FUNDAMENTOS ANALÍTICOS: ASPECTOS DO CIRCUITO ELÉTRICO

Das Equações 7.1 e 7.4, o conjugado eletromagnético e a tensão gerada de uma máquina CC são respectivamente,

$$T_{mec} = K_a \Phi_d I_a \quad (7.13)$$

e

$$E_a = K_a \Phi_d \omega_m \quad (7.14)$$

onde

$$K_a = \frac{\text{pólos } C_a}{2\pi m} \quad (7.15)$$

Aqui neste capítulo, símbolos em letras maiúsculas,  $E_a$  para a tensão gerada e  $I_a$  para a corrente de armadura, serão usados para enfatizar que a nossa principal preocupação serão as análises de regime permanente. Os demais símbolos são os definidos na Seção 7.1. As Equações 7.13 a 7.15 são equações básicas usadas na análise das máquinas. A quantidade  $E_a I_a$  é referida freqüentemente como sendo a *potência eletromagnética*. A partir das Equações 7.13 e 7.14, pode-se relacioná-la com o conjugado eletromagnético por meio de

$$T_{mec} = \frac{E_a I_a}{\omega_m} = K_a \Phi_d I_a \quad (7.16)$$

A potência eletromagnética distingue-se da potência mecânica, no eixo da máquina, pelas perdas rotacionais, e diferencia-se da potência elétrica, nos terminais da máquina, pelas perdas  $I^2 R$  do campo em derivação e de armadura. Depois que a potência eletromagnética  $E_a I_a$  ti-

### ■ Solução

A corrente de terminal pode ser encontrada da tensão de terminal e da potência como

$$I_a = \frac{\text{Potência de entrada}}{V_t} = \frac{21,9 \times 10^3}{123} = 178 \text{ A}$$

Assim, a tensão gerada é

$$E_a = V_t - I_a R_a = 119,4 \text{ V}$$

Da Equação 7.8, a velocidade de rotação pode ser obtida como

$$n = n_0 \left( \frac{E_a}{E_{a0}} \right) = 3000 \left( \frac{119,4}{125} \right) = 2866 \text{ rpm}$$

### PROBLEMA PRÁTICO 7.2

Repita o Exemplo 7.2 observando-se que a máquina está operando como gerador, com uma tensão de terminal de 124 V e uma potência de terminal de 24 kW.

### ■ Solução

3069 rpm

Nas máquinas compostas, pode ocorrer uma outra variação. A Fig. 7.12 mostra uma *ligação em derivação longa* em que o campo em derivação está conectado diretamente aos terminais de linha e o campo em série está localizado entre ele e a armadura. Uma possibilidade alternativa é a *ligação em derivação curta*, ilustrada na Fig. 7.13, em que o campo em derivação foi ligado diretamente à armadura, estando o campo em série localizado entre ele e os terminais de linha. A corrente do campo em série é então  $I_L$  em vez de  $I_a$  e as equações de tensão são adequadamente modificadas. Na prática, há tão pouca distinção entre essas duas ligações que usualmente ignora-se a diferença entre elas. A não ser que seja especificado de outro modo, as máquinas compostas serão tratadas como se as conexões fossem do tipo em derivação longa.

Embora, em operação normal, a diferença entre a tensão de terminal  $V_t$  e a tensão gerada de armadura  $E_a$  seja relativamente pequena, ela apresenta uma relação definida com as características de desempenho. Essa diferença de tensão dividida pela resistência de armadura determina o valor da corrente de armadura  $I_a$  e, conseqüentemente, a intensidade do fluxo de armadura. A determinação completa do comportamento da máquina requer uma investigação semelhante dos fatores que influenciam o fluxo de eixo direto ou, mais particularmente, o fluxo líquido por pólo  $\Phi_d$ .

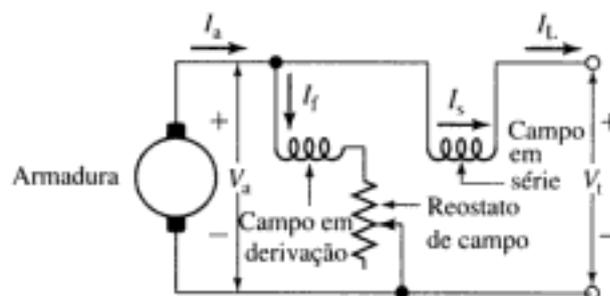


FIGURA 7.13 Ligação em derivação curta de um gerador composto.

## 7.5 FUNDAMENTOS ANALÍTICOS: ASPECTOS DO CIRCUITO MAGNÉTICO

O fluxo líquido por pólo é o que resulta da combinação das FMMs dos enrolamentos de campo e armadura. Em uma máquina CC ideal, com a excitação em derivação ou independente, a FMM de armadura produz fluxo magnético apenas no eixo em quadratura. Entretanto, em um dispositivo real, a corrente de armadura produz fluxo no eixo direto, diretamente, por exemplo, como o produzido por um enrolamento de campo em série, ou indiretamente por meio dos efeitos de saturação, como foi discutido na Seção 7.3. A interdependência entre a tensão de armadura gerada  $E_a$  e as condições do circuito magnético da máquina é, portanto, uma função da soma de todas as FMMs ao longo do caminho de fluxo do eixo polar ou direto. Primeiro, consideraremos a FMM que foi intencionalmente colocada sobre os pólos principais do estator para criar o fluxo de trabalho, isto é, a *FMM do campo principal* e, em seguida, incluiremos os efeitos da reação de armadura.

### 7.5.1 Reação de Armadura Desconsiderada

Com a máquina a vazio ou com os efeitos da reação de armadura ignorados, a FMM resultante é a soma algébrica das FMMs que atuam sobre o eixo principal ou direto. Para o motor ou o gerador composto usual, que tem  $N_f$  espiras de campo em derivação por pólo e  $N_s$  espiras de campo em série por pólo, tem-se

$$\text{FMM do campo principal} = N_f I_f + N_s I_s \quad (7.20)$$

Observe que a FMM do campo em série tanto pode ser somada como ser subtraída da FMM do campo em derivação. A convenção de sinais da Equação 7.20 é tal que as FMMs são somadas. Por exemplo, na ligação em derivação longa da Fig. 7.12, isso corresponderia a uma ligação em série aditiva na qual  $I_s = I_a$ . Se a ligação desse enrolamento de campo em série fosse invertida de modo que  $I_s = -I_a$ , formando uma ligação em série subtrativa, então a FMM do enrolamento em série seria subtraída da FMM do campo em derivação.

Termos adicionais surgirão na Equação 7.20, quando houver enrolamentos adicionais de campo nos pólos principais e quando, diferentemente dos enrolamentos de compensação da Seção 7.9, esses enrolamentos forem concêntricos, em relação aos enrolamentos de campo normais, permitindo um controle mais apurado. Naturalmente, se o campo em série ou o em derivação estiver ausente, o termo correspondente na Equação 7.20 será omitido.

A Equação 7.20 acrescenta ampères-espiras por pólo à FMM total dos enrolamentos do campo principal, os quais atuam sobre o circuito magnético principal. A curva de magnetização de uma máquina CC é dada geralmente em termos da corrente que circula apenas no enrolamento do campo principal, o qual quase sempre é o enrolamento do campo em derivação, quando há um presente. As unidades de FMM dessa curva de magnetização e da Equação 7.20 podem ser tornadas iguais por um de dois passos óbvios. A corrente de campo na curva de magnetização pode ser multiplicada pelas espiras por pólo daquele enrolamento, dando uma curva em termos de ampères-espiras por pólo. Pode-se também dividir os dois membros da Equação 7.20 por  $N_f$ , convertendo as unidades para a corrente equivalente que sozinha produziria a mesma FMM na bobina  $N_f$ . Assim,

$$\text{FMM total} = I_f + \left( \frac{N_s}{N_f} \right) I_s \quad \text{ampères equivalentes de campo em derivação} \quad (7.21)$$

Freqüentemente, esse último procedimento é o mais conveniente e é o mais comumente adotado. Como foi discutido em relação à Equação 7.20, a ligação em série do enrolamento de campo determinará se a FMM do campo em série será somada ou subtraída da FMM do enrolamento de campo principal.

ou, em termos da velocidade de rotação em rpm,

$$E_a = \left( \frac{n}{n_0} \right) E_{a0} \quad (7.23)$$

Nessas equações,  $\omega_{m0}$  e  $n_0$  são a velocidade da curva de magnetização em rad/s e rpm, respectivamente, e  $E_{a0}$  é a correspondente tensão gerada.

### EXEMPLO 7.3

Um gerador composto de 100 kW, 250 V e 400 A, com uma ligação em derivação longa, tem a resistência de armadura (incluindo as escovas) de 0,025  $\Omega$ , a resistência de campo em série de 0,005  $\Omega$  e a curva de magnetização da Fig. 7.14. Há um campo em derivação com 1000 espiras por pólo e um campo em série de três espiras por pólo. O campo em série é ligado de tal modo que uma corrente positiva de armadura produz uma FMM no eixo direto que se soma à do campo em derivação.

Calcule a tensão de terminal, para a corrente nominal de terminal, quando a corrente do campo em derivação é 4,7 A e a velocidade é 1150 rpm. Despreze os efeitos da reação de armadura.

#### ■ Solução

Como está mostrado na Fig. 7.12, para uma ligação em derivação longa, as correntes da armadura e do campo em série são iguais. Assim,

$$I_a = I_s = I_f + I_r = 400 + 4,7 = 405 \text{ A}$$

Da Equação 7.21, a FMM total do campo principal é

$$\begin{aligned} \text{FMM total} &= I_f + \left( \frac{N_s}{N_f} \right) I_s \\ &= 4,7 + \left( \frac{3}{1000} \right) 405 = 5,9 \text{ ampères equivalentes de campo em derivação} \end{aligned}$$

Examinado-se a curva  $I_a = 0$  na Fig. 7.14, para essa corrente equivalente de campo em derivação, lê-se uma tensão gerada de 274 V. Com esse valor, a partir da Equação 7.23, pode-se encontrar a FEM real na velocidade de 1150 rpm como sendo

$$E_a = \left( \frac{n}{n_0} \right) E_{a0} = \left( \frac{1150}{1200} \right) 274 = 263 \text{ V}$$

Então,

$$V_t = E_a - I_a(R_a + R_s) = 263 - 405(0,025 + 0,005) = 251 \text{ V}$$

### PROBLEMA PRÁTICO 7.3

Repita o Exemplo 7.3 para uma corrente de terminal de 375 A e uma velocidade de 1190 rpm.

#### ■ Solução

257 V

### 7.5.2 Efeitos da Reação de Armadura Incluídos

Como foi descrito na Seção 7.3, a corrente no enrolamento de armadura dá origem a um efeito de desmagnetização causado por uma reação de armadura de magnetização cruzada. A inclusão analítica desse efeito não é imediata devido às não linearidades envolvidas. Uma abordagem comum é basear as análises no desempenho medido da máquina em questão ou de outra, com projeto e tamanho semelhantes. Os dados são obtidos excitando-se o campo e a armadura, e os ensaios são conduzidos de modo que os efeitos sobre a FEM gerada possam ser observados variando-se a excitação do campo principal e a FMM de armadura.

Uma forma de se resumir e correlacionar os resultados está ilustrada na Fig. 7.14. As curvas são plotadas não apenas para a característica a vazio ( $I_a = 0$ ) mas também para uma família de valores de  $I_a$ . Então, na análise do desempenho da máquina, a inclusão da reação de armadura torna-se simplesmente uma questão de usar a curva de magnetização que corresponde à corrente de armadura envolvida. Observe que as ordenadas de todas essas curvas fornecem valores para a tensão de armadura gerada  $E_a$  e não para a tensão de terminal sob carga. Observe também que todas as curvas tendem a se sobrepor à linha de entreferro quando a saturação do ferro diminui.

As curvas de saturação sob carga são deslocadas para o lado, à direita da curva a vazio, por um valor que é função de  $I_a$ . O efeito da reação de armadura é então aproximadamente igual ao de uma FMM desmagnetizante  $F_{ra}$  que atua sobre o eixo principal. Esse termo adicional pode então ser incluído na Equação 7.20, com o resultado de que a FMM líquida sobre o eixo direto pode ser assumida como sendo

$$\text{FMM líquida} = \text{FMM total} - F_{ra} = N_f I_f + N_s I_s - F_{ra} \quad (7.24)$$

Assim, a curva de magnetização pode ser usada como sendo a relação entre a FEM gerada e a excitação líquida sob carga, tendo-se considerado que a reação de armadura é uma FMM de desmagnetização. Dentro do intervalo normal de operação (em torno de 240 até aproximadamente 300 V, para a máquina da Fig. 7.14), pode-se assumir que o efeito desmagnetizante da reação de armadura é aproximadamente proporcional à corrente de armadura.

O leitor deve ter em mente que a quantidade de reação de armadura presente na Fig. 7.14 foi escolhida para que alguns de seus efeitos inconvenientes aparecessem de forma pronunciada nos exemplos numéricos e nos problemas subsequentes, usados para ilustrar as características de desempenho dos motores e geradores. Definitivamente, está além do que se poderia esperar encontrar em uma máquina comum bem projetada operando com correntes normais.

#### EXEMPLO 7.4

Considere novamente o gerador CC composto com ligação em derivação longa do Exemplo 7.3. Como naquele exemplo, calcule a tensão de terminal para a corrente nominal de terminal quando a corrente do campo em derivação é 4,7 A e a velocidade é 1150 rpm. No entanto, inclua agora os efeitos da reação de armadura.

#### ■ Solução

Como foi calculado no Exemplo 7.3,  $I_s = I_a = 400$  A e a FMM total é igual a 5,9 ampères equivalentes de campo em derivação. Da curva indicada por  $I_a = 400$  na Fig. 7.14 (com base em uma corrente nominal de terminal de 400 A), obtém-se uma FEM gerada correspondente de 261 V (comparada aos 274 V com a reação de armadura desconsiderada). Assim, da Equação 7.23, a tensão gerada real, para uma velocidade de 1150 rpm, é igual a

$$E_s = \left(\frac{n}{n_0}\right) E_{s0} = \left(\frac{1150}{1200}\right) 261 = 250 \text{ V}$$

Então,

$$V_t = E_s - I_a(R_a + R_s) = 250 - 405(0,025 + 0,005) = 238 \text{ V}$$

#### EXEMPLO 7.5

Para contrabalançar os efeitos da reação de armadura, uma quarta espira é acrescentada ao enrolamento do campo em série do gerador CC dos Exemplos 7.3 e 7.4, aumentando sua resistência para  $0,007 \Omega$ . Repita os cálculos de tensão de terminal do Exemplo 7.4.

#### ■ Solução

Como nos Exemplos 7.3 e 7.4,  $I_s = I_a = 405 \text{ A}$ . A FMM do campo principal pode ser então calculada como sendo

$$\begin{aligned} \text{FMM total} &= I_f + \left( \frac{N_s}{N_f} \right) I_s = 4,7 + \left( \frac{4}{1000} \right) 405 \\ &= 6,3 \text{ ampères equivalentes de campo em derivação} \end{aligned}$$

Da curva de  $I_a = 400$  da Fig. 7.14, com uma corrente equivalente de campo em derivação de  $6,3 \text{ A}$ , lê-se uma tensão gerada de  $269 \text{ V}$ , a qual corresponde a uma FEM, para  $1150 \text{ rpm}$ , de

$$E_s = \left( \frac{1150}{1200} \right) 269 = 258 \text{ V}$$

Agora, a tensão de terminal pode ser calculada como

$$V_t = E_s - I_a(R_a + R_s) = 258 - 405(0,025 + 0,007) = 245 \text{ V}$$

#### PROBLEMA PRÁTICO 7.4

Repita o Exemplo 7.5 assumindo que uma quinta espira seja acrescentada ao enrolamento do campo em série, fazendo com que sua resistência total seja  $0,009 \Omega$ .

#### ■ Solução

$250 \text{ V}$

## 7.6 ANÁLISE DE DESEMPENHO EM ESTADO PERMANENTE

Embora exatamente os mesmos princípios sejam aplicados à análise de uma máquina CC que esteja atuando como gerador ou motor, a natureza dos problemas comumente encontrados em geral é um tanto diferente nos dois modos de operação. Em um gerador, a velocidade é determinada usualmente pelo acionador mecânico primário, e os problemas freqüentemente encontrados são os de determinar a tensão de terminal correspondente com uma carga e excitação especificadas, ou encontrar a excitação requerida para se obter uma carga e tensão de terminal especificadas. Entretanto, no caso de um motor, os problemas freqüentemente encontrados são os de determinar a velocidade correspondente a um carga e excitação específicas ou encontrar a excitação necessária para as condições especificadas de carga e velocidade; sendo que a tensão de terminal é fixada freqüentemente pelo valor da fonte disponível. Portanto, as técnicas rotineiras, usadas para se aplicar os princípios básicos comuns, são diferentes uma vez que os problemas são diferentes.

Com base nessa equação, é evidente que enquanto a tensão líquida nas indutâncias dos enrolamentos  $e_a - i_f(R_a + R_f)$  for positiva, a corrente de campo e a tensão gerada correspondente irão crescer. O crescimento continua até que as relações de tensão e corrente, representadas pela curva de magnetização e a linha de resistência de campo, sejam simultaneamente satisfeitas, o que ocorre em sua interseção  $e_a = (R_a + R_f)i_f$ ; neste caso, em  $e_a = 250$  V na linha  $0a$  da Fig. 7.14. Da Equação 7.25, é claro que a linha de resistência de campo também deve incluir a resistência de armadura. Entretanto, essa resistência é em geral muito menor do que a de campo, sendo usualmente desprezada.

Observe que se a resistência de campo fosse muito elevada, como está mostrado pela linha  $0b$  para  $R_f = 100 \Omega$  na Fig. 7.14, a interseção ocorreria em uma tensão muito baixa e o escorvamento não seria obtido. Observe também que, se a linha de resistência de campo for basicamente tangente à parte inferior da curva de magnetização, correspondendo a uma resistência de campo de  $57 \Omega$  na Fig. 7.14, a interseção poderá ocorrer em qualquer ponto entre 60 e 170 V, resultando em condições muito instáveis. A resistência correspondente é a *resistência de campo crítica*, acima da qual não se obtém escorvamento. O mesmo processo de escorvamento e as mesmas conclusões aplicam-se aos geradores compostos. Em um gerador composto com excitação em derivação longa, a FMM no campo em série criada pela corrente do campo em derivação é totalmente desprezível.

Para um gerador em derivação, a curva de magnetização para o valor adequado de  $I_a$  é o lugar de  $E_a$  versus  $I_f$ . A linha de resistência de campo é o lugar de  $V_t$  versus  $I_f$ . Em condições de operação em regime permanente, para qualquer valor de  $I_f$ , a distância vertical entre a linha e a curva deve ser a queda  $I_a R_a$  na carga correspondente àquela condição. A determinação da tensão de terminal para uma corrente de armadura especificada é então simplesmente uma questão de se determinar onde a linha e a curva estão distanciadas verticalmente pelo valor apropriado. A ordenada da linha de resistência de campo, para aquela corrente de campo, é então a tensão de terminal. Para um gerador composto, entretanto, a FMM do campo em série faz com que os pontos correspondentes na linha e na curva sejam deslocados horizontal e também verticalmente. O deslocamento horizontal é igual à FMM do campo em série, medida em ampères equivalentes de campo em derivação, e o deslocamento vertical permanece sendo a queda  $I_a R_a$ .

Evidentemente, uma grande precisão não pode ser obtida com tais processos de cálculo. As incertezas causadas pela histerese magnética das máquinas CC fazem com que não seja possível atingir uma alta precisão para qualquer caso. Em geral, a curva de magnetização, com a qual a máquina opera em uma dada situação, pode estar entre as partes ascendente e descendente de um laço bastante largo de histerese, que corresponde ao circuito magnético da máquina e depende essencialmente da história magnética do ferro. A curva usada para a análise é, em geral, a curva de magnetização média e, assim, os resultados obtidos são substancialmente corretos na média. Entretanto, para um instante em particular, poderão ser encontrados valores que se afastam significativamente da média de desempenho de uma máquina CC qualquer.

#### EXEMPLO 7.6

Um gerador CC em derivação de 100 kW, 250 V, 400 A e 1200 rpm tem as curvas de magnetização (incluindo os efeitos de reação de armadura) da Fig. 7.14. A resistência do circuito de armadura, incluindo as escovas, é  $0,025 \Omega$ . O gerador é acionado a uma velocidade constante de 1200 rpm, e a excitação é ajustada (variando o reostato do campo em derivação) para que seja fornecida a tensão nominal a vazio.

(a) Determine a tensão de terminal para uma corrente de armadura de 400 A. (b) Deve-se acrescentar um campo em série de quatro espiras por pólo tendo uma resistência de  $0,005 \Omega$ . Há 1000 espiras por pólo no campo em derivação. O gerador deve ser *composto plano* de

## EXEMPLO 7.7

Um motor em derivação de 100 HP e 250 V tem as curvas de magnetização (incluindo os efeitos da reação de armadura) da Fig. 7.14. A resistência do circuito de armadura, incluindo as escovas, é  $0,025 \Omega$ . As perdas rotacionais a vazio são de 2000 W e as perdas suplementares são iguais a 1,0 % da saída. O reostato de campo é ajustado para uma velocidade a vazio de 1100 rpm.

- Como exemplo do cálculo de pontos da característica de velocidade  $\times$  carga, determine a velocidade em rpm e a potência de saída em HPs (1 HP = 746 W), correspondendo a uma corrente de armadura de 400 A.
- Como a característica de velocidade  $\times$  carga observada na parte (a) não é a desejável, um enrolamento de estabilização, consistindo em 1,5 espiras aditivas em série por pólo, deve ser acrescentado. Há 1000 espiras por pólo no enrolamento em derivação. Calcule a velocidade correspondente a uma corrente de armadura de 400 A.

### ■ Solução

- A vazio, tem-se  $E_a = 250$  V. O ponto correspondente na curva de saturação a vazio, para 1200 rpm, é

$$E_{a0} = 250 \left( \frac{1200}{1100} \right) = 273 \text{ V}$$

para o qual  $I_f = 5,90$  A. A corrente de campo permanece constante nesse valor.

Para  $I_a = 400$  S, a força contra-eletromotriz real é

$$E_s = 250 - 400 \times 0,025 = 240 \text{ V}$$

Da Fig. 7.14, com  $I_a = 400$  e  $I_f = 5,90$ , o valor de  $E_s$  seria 261 V, se a velocidade fosse 1200 rpm. Então, a velocidade real pode ser encontrada da Equação 7.23

$$n = 1200 \left( \frac{240}{261} \right) = 1100 \text{ rpm}$$

A potência eletromagnética é

$$E_s I_a = 240 \times 400 = 96 \text{ kW}$$

Subtraindo as perdas rotacionais, obtém-se 94 kW. Levando em considerações as perdas suplementares, a potência de saída  $P_o$  é dada por

$$94 \text{ kW} - 0,01 P_o = P_o$$

ou

$$P_o = 93,1 \text{ kW} = 124,8 \text{ HP}$$

Observe que o valor da velocidade com essa carga é o mesmo da velocidade a vazio, mostrando que os efeitos da reação de armadura originaram uma curva de velocidade  $\times$  carga basicamente plana.

- Com  $I_f = 5,90$  A e  $I_s = I_a = 400$  A, a FMM do campo principal em ampères equivalentes de campo em derivação é

$$5,90 + \left( \frac{1,5}{1000} \right) 400 = 6,50 \text{ A}$$

Da Fig. 7.14, o valor correspondente de  $E_a$ , para 1200 rpm, é 271 V. Dessa forma, agora a velocidade é

$$n = 1200 \left( \frac{240}{271} \right) = 1063 \text{ rpm}$$

A saída de potência é a mesma da parte (a). Agora, a curva de velocidade  $\times$  carga está inclinada devido ao efeito do enrolamento de estabilização.

### PROBLEMA PRÁTICO 7.6

Repita o Exemplo 7.7 para uma corrente de armadura de  $I_a = 200$  A.

#### ■ Solução

- Velocidade = 1097 rpm e  $P_0 = 46,5$  kW = 62,4 HP
- Velocidade = 1085 rpm

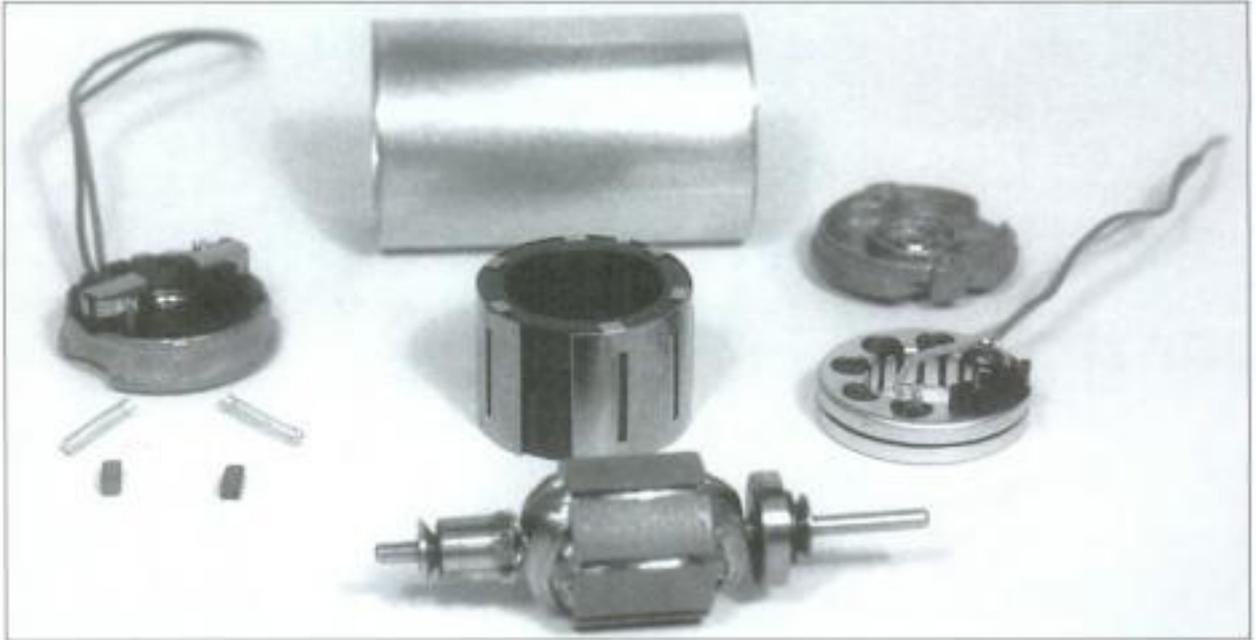
## 7.7 MÁQUINAS CC DE ÍMÃ PERMANENTE

As máquinas CC de ímã permanente são largamente encontradas em uma ampla variedade de aplicações de baixa potência. O enrolamento de campo é substituído por um ímã permanente, resultando uma construção mais simples. Para essas aplicações, os ímãs permanentes oferecem uma série de benefícios úteis. A principal é que os ímãs não necessitam de excitação externa nem dissipam a potência correspondente para criar campos magnéticos na máquina. O espaço necessário para os ímãs permanentes pode ser inferior ao exigido pelos enrolamentos de campo e, assim, as máquinas de ímã permanente podem ser menores e, em alguns casos, de custo inferior ao de seus similares com excitação externa.

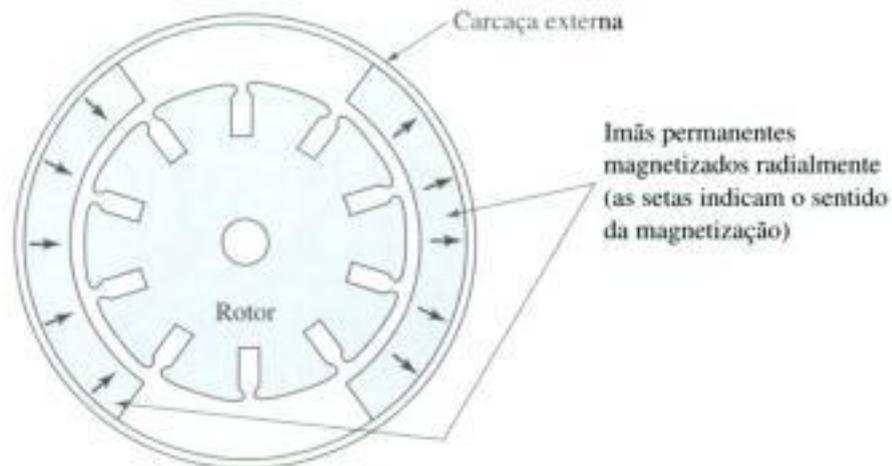
Por outro lado, as máquinas CC de ímã permanente estão sujeitas às limitações impostas pelos próprios ímãs permanentes. Entre elas, está incluído o risco de desmagnetização devido a correntes excessivas nos enrolamentos do motor ou a um sobreaquecimento do ímã. Além disso, os ímãs permanentes são um tanto limitados em relação à intensidade da densidade de fluxo de entreferro que são capazes de produzir. No entanto, com o desenvolvimento de novos materiais magnéticos, como o samário-cobalto e o neodímio-ferro-boro (Seção 1.6), essas características estão se tornando menos e menos restritivas em relação ao projeto de máquinas de ímã permanente.

A Fig. 7.16 mostra uma vista de um pequeno motor CC de ímã permanente desmontado. Observe que o rotor desse motor consiste em uma armadura CC convencional com as lâminas do comutador e as escovas. Em uma das extremidades, há também um pequeno ímã permanente que produz o campo para um tacômetro CA. Esse pode ser usado em aplicações em que é necessário o controle preciso de velocidade.

Diferentemente de uma máquina CC, cuja excitação de campo é externa (veja a Fig. 7.23) com uma estrutura que se caracteriza pela presença de pólos salientes, os motores de ímã permanente, tal como o da Fig. 7.16, geralmente têm uma estrutura de estator lisa consistindo em uma carcaça cilíndrica externa (ou uma fração dela) de material magnético permanente, com espessura uniforme, magnetizado no sentido radial. Tal estrutura está ilustrada na Fig. 7.17, onde as setas indicam o sentido da magnetização. O rotor da Fig. 7.17 tem comutador, escovas e ranhuras para os enrolamentos, como em todas as máquinas CC. Observe também que, nesses motores, a carcaça externa serve a um duplo propósito: é feita de material magnético servindo assim de caminho de retorno para o fluxo magnético e de suporte para os ímãs.



**FIGURA 7.16** Motor CC de imã permanente desmontado. Um tacômetro CA de imã permanente para o controle da velocidade também foi incluído no mesmo conjunto. (*Buehler Products Inc.*)



**FIGURA 7.17** Seção transversal de um motor típico de imã permanente. As setas indicam o sentido de magnetização dos ímãs permanentes.

#### EXEMPLO 7.8

A Fig. 7.18a define as dimensões de um motor CC de imã permanente similar ao da Fig. 7.17. Assuma os seguintes valores:

$$\begin{aligned} \text{Raio do rotor } R_r &= 1,2 \text{ cm} \\ \text{Comprimento de entreferro } t_g &= 0,05 \text{ cm} \\ \text{Espessura do ímã } t_m &= 0,35 \text{ cm} \end{aligned}$$

Assuma também que o rotor e a carcaça externa sejam feitos de material magnético infinitamente permeável ( $\mu \rightarrow \infty$ ) e que o ímã seja de neodímio-ferro-boro (veja a Fig. 1.19).

Ignorando os efeitos das ranhuras do rotor, estime a densidade de fluxo magnético  $B$  no entreferro desse motor.

### ■ Solução

Como foi assumido que o rotor e a carcaça externa são feitos de um material com permeabilidade magnética infinita, o motor pode ser representado por um circuito magnético equivalente consistindo em um entreferro de  $2t_g$  em série com uma seção de neodímio-ferro-boro de comprimento  $2t_m$  (veja a Fig. 7.18b). Observe que esse circuito equivalente é uma aproximação porque, em um motor, a área da seção reta do caminho de fluxo cresce com o aumento do raio, ao passo que, nesse circuito equivalente, foi suposta constante.

A solução pode ser escrita por analogia direta com o Exemplo 1.9. Substituindo o comprimento de entreferro  $g$  por  $2t_g$  e o comprimento do ímã  $l_m$  por  $2t_m$ , a equação da linha de carga pode ser escrita como

$$B_m = -\mu_0 \left( \frac{t_m}{t_g} \right) H_m = -7\mu_0 H_m$$

Essa relação pode ser plotada sobre a Fig. 1.19 para se determinar o ponto de operação com base na sua interseção com a curva de magnetização CC do neodímio-ferro-boro. Por outro lado, verificando que, em unidades SI, a curva de magnetização CC para o neodímio-ferro-boro é uma linha reta dada por

$$B_m = 1,06\mu_0 H_m + 1,25$$

encontramos que

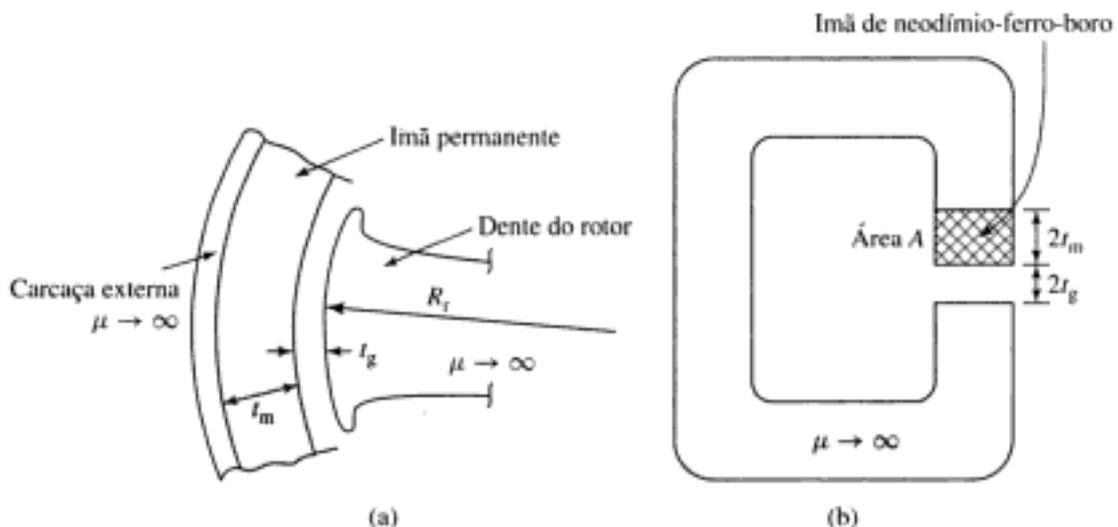
$$B_m = B_g = 1,09 \text{ T}$$

### PROBLEMA PRÁTICO 7.7

Estime a densidade de fluxo magnético do motor do Exemplo 7.8 se o raio do rotor for aumentado para  $R_r = 1,3$  cm e a espessura magnética for diminuída para  $t_m = 0,25$  cm.

### ■ Solução

$$B_m = B_g = 1,03 \text{ T}$$



**FIGURA 7.18** (a) Definições das dimensões do motor da Fig. 7.17, (b) circuito magnético equivalente aproximado.

A Fig. 7.19 mostra uma vista explodida de uma forma alternativa de motor CC de imã permanente. Nesse motor, os enrolamentos de armadura são colocados sobre um disco delgado (sem ferro). Como em qualquer motor CC, escovas são usadas para comutar a corrente de armadura, sendo que os contatos do comutador estão na parte interna da armadura, mais próxima do eixo. As correntes fluem radialmente no disco de armadura, o qual está colocado entre dois conjuntos de ímãs permanentes, criando-se um fluxo axial que cruza o enrolamento da armadura. A combinação do fluxo magnético axial com as correntes radiais cria um conjugado que produz rotação, como em qualquer motor CC. Pode-se mostrar que essa configuração do motor produz uma aceleração elevada (devido à baixa inércia do rotor), um conjugado contínuo, sem flutuações de intensidade (devido ao fato de

Com uma velocidade de 2100 rpm, tem-se

$$\begin{aligned}\omega_m &= \left( \frac{2100 \text{ rotações}}{\text{min}} \right) \times \left( \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{r}} \right) \times \left( \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) \\ &= 220 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

Portanto, da Equação 7.26,

$$K_m = \frac{E_a}{\omega_m} = \frac{48,7}{220} = 0,22 \text{ V/(rad/s)}$$

- b. A vazio, toda a potência fornecida à tensão gerada  $E_a$  é usada para alimentar as perdas rotacionais. Portanto,

$$\text{Perdas rotacionais} = E_a I_a = 48,7 \times 1,25 = 61 \text{ W}$$

- c. Com uma velocidade de 1700 rpm,

$$\omega_m = 1700 \left( \frac{2\pi}{60} \right) = 178 \text{ rad/s}$$

e

$$E_a = K_m \omega_m = 0,22 \times 178 = 39,2 \text{ V}$$

Agora, a corrente de entrada pode ser encontrada como

$$I_a = \frac{V_t - E_a}{R_a} = \frac{48 - 39,2}{1,03} = 8,54 \text{ A}$$

A potência eletromagnética pode ser calculada como

$$P_{mec} = E_a I_a = 39,2 \times 8,54 = 335 \text{ W}$$

Supondo que as perdas rotacionais a vazio sejam constantes (certamente uma aproximação), a potência de saída no eixo pode ser calculada como:

$$P_{eixo} = P_{mec} - \text{perdas rotacionais} = 274 \text{ W}$$

### PROBLEMA PRÁTICO 7.8

Mede-se a resistência de armadura de um pequeno motor CC e obtém-se 178 mΩ. Com uma tensão aplicada de 9V, observa-se que o motor opera a vazio com uma velocidade de 14.600 rpm e uma corrente de 437 mA. Calcule (a) as perdas rotacionais e (b) a constante de conjugado  $K_m$  do motor.

#### ■ Solução

a. Perdas rotacionais = 3,90 W

b.  $K_m = 5,84 \times 10^{-3} \text{ V/(rad/s)}$

## 7.8 COMUTAÇÃO E INTERPOLOS

Um dos fatores mais importantes que limitam a operação satisfatória de uma máquina CC é a capacidade de fazer passar a corrente de armadura necessária através dos contatos entre as escovas e o comutador, sem faiscamento nem excessivas perdas locais por aquecimento das escovas e do comutador. O faiscamento causa enegrecimento, corrosão e desgaste destrutivo do

comutador e das escovas, condições que rapidamente se agravam queimando e destruindo o cobre e o carvão. O faiscamento pode ser causado por condições mecânicas defeituosas, tais como trepidação das escovas ou um comutador áspero que se desgastou de forma não uniforme, ou por condições elétricas, como ocorre em qualquer problema de chaveamento. Essas últimas condições são afetadas seriamente pela FMM de armadura e pela onda de fluxo resultante.

Como foi indicado na Seção 7.2, uma bobina submetida à comutação está em transição entre dois grupos de bobinas de armadura: no final do período de comutação, a corrente na bobina deve ser igual e de sentido oposto à que tinha no início. A Fig. 7.7b mostra a armadura em uma posição intermediária, durante a qual as bobinas 1 e 7 estão sendo comutadas. Essas bobinas são curto-circuitadas pelas escovas. Durante esse período, as escovas devem continuar conduzindo a corrente de armadura  $I_a$  do enrolamento de armadura para o circuito externo. A bobina em curto circuito constitui um circuito indutivo com uma resistência variável no tempo presente no contato da escova, com tensões rotacionais induzidas na bobina e com acoplamento condutivo e indutivo com o restante do enrolamento de armadura.

A obtenção de uma boa comutação é mais uma arte empírica do que uma ciência quantitativa. O principal obstáculo à análise quantitativa está no comportamento elétrico do filme de contato entre o carvão e o cobre (escova e comutador). Sua resistência não é linear sendo função da densidade e sentido da corrente, da temperatura, do material da escova, da umidade e da pressão atmosférica. Seu comportamento sob alguns aspectos é idêntico ao de um gás ionizado ou plasma. O fato mais significativo é que uma densidade indevidamente elevada de corrente em uma porção da superfície da escova (e desse modo uma densidade de energia indevidamente alta naquela parte do filme de contato) produz faiscamento e ruptura do filme naquele ponto. O filme de contato também desempenha uma parte importante no comportamento mecânico das superfícies que estão se friccionando. Em altitudes elevadas, passos específicos devem ser seguidos para preservá-lo, senão ocorrerá um desgaste extremamente rápido das escovas.

Portanto, o fundamento empírico para se assegurar uma comutação sem faiscamento é evitar densidades excessivas de corrente em qualquer ponto de contato entre o cobre e o carvão. Esse fundamento em combinação com o princípio de se utilizar todo o material em sua máxima extensão mostra que condições ótimas são obtidas quando a densidade de corrente é uniforme em toda a superfície da escova e durante o período completo de comutação. Tal condição pode ser alcançada na bobina se ela for comutada com uma variação linear de corrente com o tempo. Isso corresponde a uma comutação linear, como a mostrada na Fig. 7.8, e portanto vem a ser o ótimo procurado.

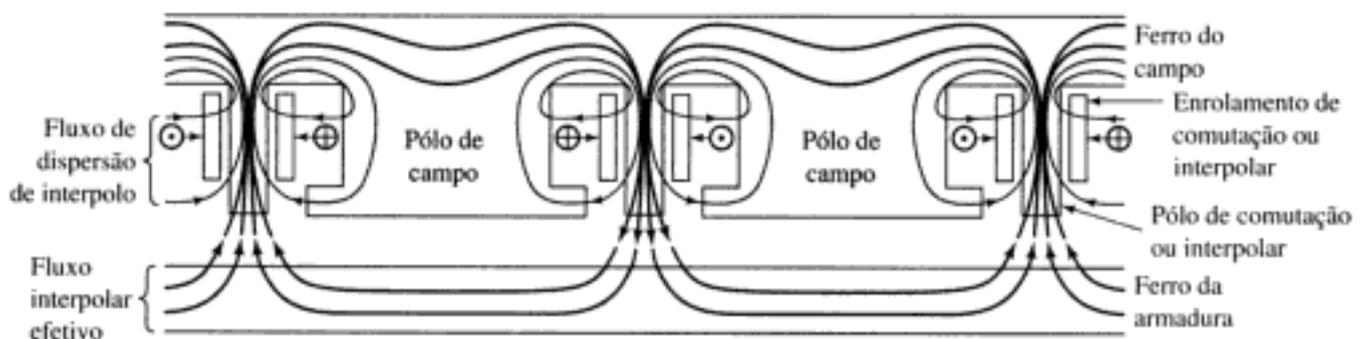
Os principais fatores que tendem a produzir uma comutação linear são as variações no valor da resistência de contato das escovas, que resultam da diminuição linear de área na borda traseira da escova e do aumento linear de área na borda dianteira. Diversos fatores elétricos opõem-se à linearidade. A resistência da bobina comutada é um exemplo. Usualmente, no entanto, a queda de tensão nos contatos das escovas é suficientemente grande (da ordem de 1,0 V) em comparação com a queda na resistência de uma única bobina de armadura, podendo-se assim ignorar esta última. A indutância da bobina é um fator muito mais sério. Tanto a tensão de indução própria da bobina comutada como a tensão de indução mútua de outras bobinas (particularmente aquelas da mesma ranhura), que estão sendo comutadas ao mesmo tempo, opõem-se a mudanças de corrente na bobina comutada. A soma dessas duas tensões é referida freqüentemente como *tensão de reatância*. O resultado é que os valores de corrente da bobina curto-circuitada estão atrasados no tempo em relação aos valores ditados pela comutação linear. Essa condição é conhecida como *subcomutação* ou *comutação atrasada*.

Assim, na borda traseira da escova, a indutância de armadura tende a produzir perdas elevadas e faiscamento. Para melhorar a comutação, a indutância deve ser mantida em um mínimo usando-se o menor número possível de espiras por bobina de armadura e usando-se uma máquina projetada com pólos múltiplos e armadura curta. O efeito de atrasar a comutação, de-

vido a uma dada tensão de reatância, é minimizado quando a queda de tensão na resistência de contato da escova é significativamente maior do que a tensão de reatância. Esse fato é uma das principais razões para que escovas de carvão sejam usadas, tendo em vista a queda de tensão apreciável no contato. Quando uma boa comutação é assegurada por meio de quedas resistivas, o processo é referido como *comutação resistiva*. Tipicamente, usa-se como único método apenas em máquinas de potência fracionária.

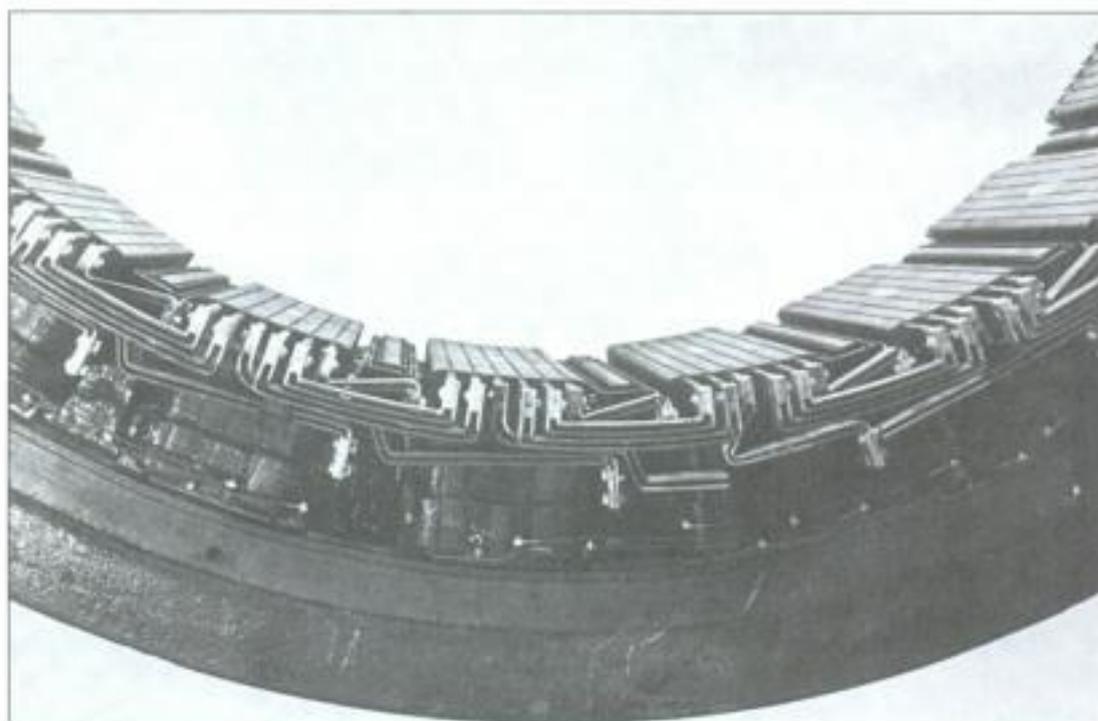
Um outro fator importante no processo de comutação é a tensão rotacional induzida na bobina curto-circuitada. Dependendo do sinal, sua tensão pode prejudicar ou ajudar a comutação. Na Fig. 7.11, por exemplo, a reação de armadura de magnetização cruzada cria um fluxo definido na região interpolar. O sentido da tensão rotacional correspondente na bobina comutada é o mesmo da corrente sob a face polar imediatamente precedente. Essa tensão favorece então a continuação da corrente com o sentido anterior e opõe-se à sua inversão, como a tensão na resistência. Para ajudar a comutação, a tensão rotacional deve se opor à tensão da reatância. O princípio geral é produzir uma tensão rotacional na bobina que está sendo comutada, de modo que a tensão de reatância seja compensada aproximadamente. Esse princípio é chamado de *comutação por tensão*. A comutação por tensão é usada em quase todas as máquinas de potências elevadas que usam comutação. Uma densidade de fluxo apropriada é introduzida na zona de comutação por meio de pólos pequenos e estreitos, localizados entre os pólos principais. Esses pólos auxiliares são chamados *interpolos* ou *pólos de comutação*.

O aspecto geral dos interpolos e um mapa aproximado do fluxo produzido, quando apenas eles são excitados, estão mostrados na Fig. 7.21. Os interpolos são os pólos menores localizados entre os pólos principais maiores que são vistos na seção transversal do motor CC mostrado na Fig. 7.23. A polaridade de um pólo de comutação deve ser a do pólo principal imediatamente à frente dele, isto é, no sentido de rotação para um gerador, e imediatamente atrás para um motor. A FMM no interpolo deve ser suficiente para neutralizar a FMM de armadura de magnetização cruzada na região interpolar, e mais suficiente para fornecer a densidade de fluxo requerida para que a tensão rotacional na bobina de armadura curto-circuitada cancele a tensão de reatância. Como ambas a FMM de armadura e a tensão de reatância são proporcionais à corrente de armadura, o enrolamento de comutação deve ser conectado em série com a armadura. Para preservar a linearidade desejada, o pólo de comutação deve operar com um nível relativamente baixo de fluxo. Usando os campos de comutação, pode-se obter uma comutação sem faiscamento em máquinas CC de grande porte, dentro de um amplo intervalo. De acordo com as normas de desempenho da NEMA,<sup>1</sup> uma máquina CC de propósitos gerais deve ser capaz de suportar, durante um minuto e com uma comutação bem sucedida, cargas de 150 por



**FIGURA 7.21** Interpolos e seus componentes de fluxo associados.

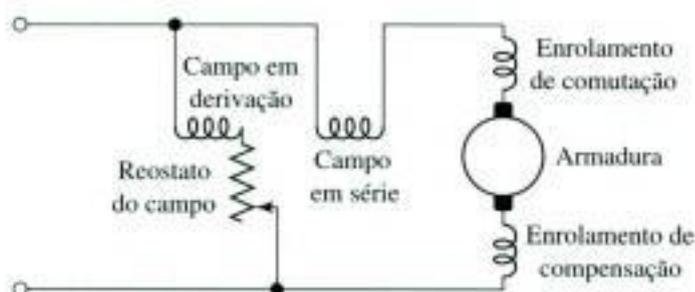
<sup>1</sup> NEMA Standards Publication No. MG1-1998, Motors and Generators, Sections 23 and 24, National Electrical Manufacturers Association, 300 North 17th Street, Suite 1847, Rosslyn, Virginia, 22209.



**FIGURA 7.23** Seção de um estator de motor CC que mostra as bobinas em derivação e em série, os interpolos e o enrolamento de compensação nas faces polares. (Westinghouse Electric Company)

do sobre o fluxo de entreferro, devido ao campo principal, à armadura, ao enrolamento de comutação e ao enrolamento de compensação, é que a distribuição de densidade de fluxo resultante, exceto pela zona de comutação, é substancialmente a mesma que aquela produzida apenas pelo campo principal (Fig. 7.11). Além disso, o acréscimo de um enrolamento de compensação melhora a velocidade de resposta da máquina porque reduz a constante de tempo do circuito de armadura.

A principal desvantagem dos enrolamentos de face polar é o seu custo. São usados em máquinas projetadas para sobrecargas elevadas ou cargas rapidamente variáveis (os motores para laminação de aço são um bom exemplo de máquinas sujeitas a ciclos árduos de trabalho), ou em motores planejados para operar em amplos intervalos de velocidade e controlados pelo campo em derivação. Por meio de um resumo esquemático, a Fig. 7.24 mostra o diagrama de circuito de uma máquina composta que usa enrolamento de compensação. Neste diagrama, a posição relativa das bobinas indica que os campos de comutação e compensação atuam segundo o eixo da armadura, e os campos em derivação e em série atuam segundo o eixo dos pólos principais. Assim, obtém-se um controle bastante completo do fluxo de entreferro na periferia da armadura.



**FIGURA 7.24** Diagrama esquemático das ligações de uma máquina CC.

## 7.10 MOTORES SÉRIE UNIVERSAIS

A Fig. 7.25 mostra uma máquina CC com o enrolamento de campo ligado em série. Nessa ligação, o fluxo de eixo direto  $\Phi_d$  é proporcional à corrente de armadura. Assim, da Equação 7.14, a tensão gerada  $E_a$  é proporcional ao produto da corrente de armadura pela velocidade do motor e, da Equação 7.16, vemos que o conjugado será proporcional ao quadrado da corrente de armadura.

A linha tracejada na Fig. 7.26 mostra uma característica típica de velocidade  $\times$  conjugado para esse motor ligado em série, sob condições CC de funcionamento. Observe que, como o conjugado é proporcional ao quadrado da corrente de armadura, ele depende apenas da magnitude da tensão de armadura e não de sua polaridade. Se a polaridade da tensão aplicada for invertida, a magnitude ou sentido do conjugado aplicado não serão alterados.

Quando as estruturas do rotor e do estator de um motor ligado em série são laminadas apropriadamente, para que as perdas CA por correntes parasitas sejam reduzidas, o motor resultante é referido como *motor série universal*. Esse motor tem a útil capacidade de poder funcionar com correntes alternada ou contínua apresentando características similares. O motor série monofásico é, por essa razão, chamado comumente de *motor universal*. O ângulo de conjugado é fixado pela posição das escovas e normalmente está posicionado em seu valor ótimo de  $90^\circ$ . Se corrente alternada for fornecida a um motor série universal, o conjugado terá sempre o mesmo sentido, embora pulse em magnitude com o dobro da frequência de linha. Um conjugado médio será produzido e, em geral, o desempenho do motor será semelhante ao de um de corrente contínua.

Pequenos motores universais são usados onde um baixo peso é importante, como em aspiradores de pó, eletrodomésticos e ferramentas portáteis, funcionando usualmente com velocidades elevadas (1500 a 15.000 rpm). As características típicas estão mostradas na Fig. 7.26. As características CA e CC diferenciam-se por duas razões: (1) Com corrente alternada,

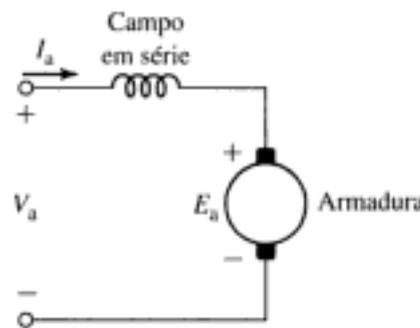


FIGURA 7.25 Máquina universal ligada em série.

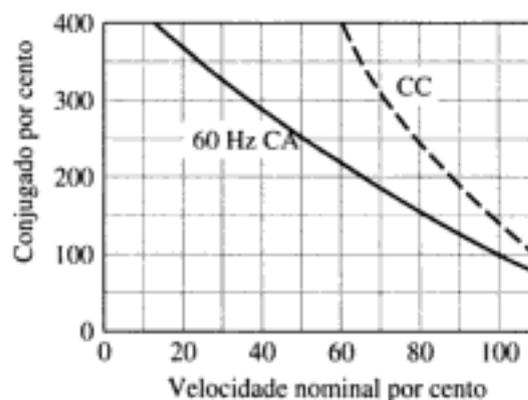


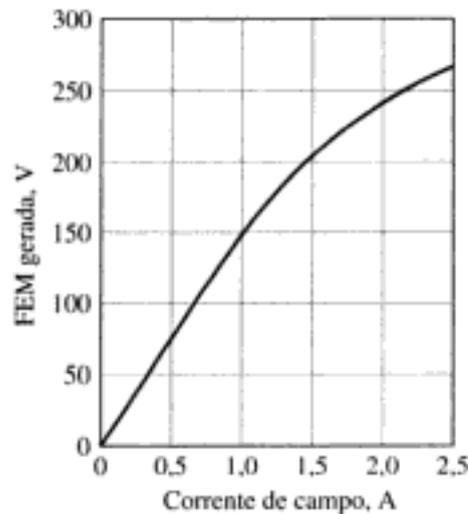
FIGURA 7.26 Característica típica de conjugado  $\times$  velocidade de um motor série universal.

tervalos por meio do controle do campo em derivação, do controle da tensão de armadura, ou da combinação de ambos. Dependendo das intensidades relativas dos campos em derivação e em série, o motor composto aditivo é um intermediário entre os outros dois e basicamente pode apresentar as vantagens de ambos.

Em uma ampla variedade de aplicações de baixa potência, com sistemas que operam a partir de uma fonte CC (aplicações automotivas, eletrônica portátil, etc.), as máquinas CC são a opção mais efetiva em custo. Essas máquinas CC são construídas com uma larga faixa de configurações e muitas delas baseiam-se na excitação com imã permanente. Apesar da ampla variedade de máquinas CC que podem ser encontradas nessas diversas aplicações, os seus desempenhos podem ser facilmente determinados usando-se os modelos e as técnicas apresentadas neste capítulo.

## 7.12 PROBLEMAS

- 7.1** Considere um motor CC de excitação independente. Descreva a variação da velocidade do motor a vazio sob as seguintes condições:
- A tensão de terminal de armadura é variada enquanto a corrente de campo é mantida constante.
  - A corrente de campo é variada ao passo que a tensão de terminal de armadura é mantida constante.
  - O enrolamento de campo é ligado em derivação diretamente aos terminais da armadura, e então a tensão de terminal de armadura é variada.
- 7.2** Observa-se que um motor CC em derivação, operando com uma tensão de terminal de armadura de 125 V, está funcionando a uma velocidade de 1180 rpm. Quando o motor é operado sem carga com a mesma tensão de terminal de armadura, mas com uma resistência adicional de  $5 \Omega$  em série com o campo em derivação, observa-se que a velocidade é de 1250 rpm.
- Calcule a resistência do campo em série.
  - Calcule a velocidade resultante do motor quando a resistência em série é aumentada de  $5 \Omega$  a  $15 \Omega$ .
- 7.3** Para cada uma das seguintes mudanças nas condições de operação de um motor CC em derivação, descreva como a corrente de armadura e a velocidade irão variar:
- Reduzindo à metade a tensão de terminal de armadura enquanto o fluxo de campo e o conjugado da carga permanecem constantes.
  - Reduzindo à metade a tensão de terminal de armadura enquanto a corrente de campo e a potência da carga permanecem constantes.
  - Dobrando o fluxo de campo enquanto a tensão de terminal de armadura e o conjugado da carga permanecem constantes.
  - Reduzindo à metade ambos o fluxo de campo e a tensão de terminal de armadura enquanto a potência da carga permanece constante.
  - Reduzindo à metade a tensão de terminal de armadura enquanto o fluxo de campo permanece constante e o conjugado da carga varia segundo o quadrado da velocidade.
- São necessárias apenas breves descrições quantitativas mostrando a natureza geral do efeito como, por exemplo, “velocidade aproximadamente dobrada”.
- 7.4** A curva de magnetização de velocidade constante de uma máquina CC de 25 kW e 250 V, para uma velocidade de 1200 rpm, está mostrada na Fig. 7.27. Essa máquina tem ex-



**FIGURA 7.27** Curva de magnetização para 1200 rpm do gerador CC do Problema 7.4.

citação independente e uma resistência de armadura de  $0,14 \Omega$ . Ela deve operar como um gerador CC, sendo acionada por um motor síncrono de velocidade constante.

- Qual é a corrente de armadura nominal dessa máquina?
- Com a velocidade do gerador mantida constante em 1200 rpm e se a corrente de armadura for limitada a seu valor nominal, calcule a saída de potência máxima do gerador e a correspondente tensão de armadura para correntes de campo constantes de (i) 1,0 A, (ii) 2,0 A e (iii) 2,5 A.
- Repita a parte (b) se a velocidade do gerador síncrono for reduzida a 900 rpm.



**7.5** O gerador CC do Problema 7.4 deve operar com uma velocidade constante de 1200 rpm atuando sobre uma resistência de carga de  $2,5 \Omega$ .

- Usando a função "spline()" do MATLAB e os pontos da curva de magnetização da Fig. 7.27 para 0, 0,5, 1,0, 1,5, 2,0 e 2,5 A, crie uma plotagem em MATLAB para a curva de magnetização da Fig. 7.27.
- Usando a função "spline()" como na parte (a), use o MATLAB para plotar (i) a tensão de terminal e (ii) a potência entregue à carga quando a corrente de campo do gerador é variada de 0 a 2,5 A.

**7.6** A máquina CC do Problema 7.4 deve operar como motor, alimentado com uma tensão constante de terminal de armadura de 250 V. Se os efeitos de saturação forem ignorados, a curva de magnetização da Fig. 7.27 torna-se uma linha reta, com uma inclinação constante de 150 V por ampère de corrente de campo. Para os propósitos deste problema, você pode supor que os efeitos de saturação sejam desprezíveis.

- Assumindo que a corrente de campo seja mantida constante em 1,67 A, plote a velocidade do motor em função da potência no seu eixo quando essa varia de 0 a 25 kW.
- Assumindo que a corrente de campo possa ser ajustada de modo a manter a velocidade do motor constante em 1200 rpm, plote agora a corrente de campo requerida em função da potência no eixo do motor quando essa varia de 0 a 25 kW.



**7.7** Repita o Problema 7.6 incluindo os efeitos de saturação representados pela curva de saturação da Fig. 7.27. Para a parte (a), torne a corrente de campo igual ao valor necessário para produzir uma tensão de terminal de armadura em circuito aberto de 250 V, a 1200 rpm. (Sugestão: Esse problema é resolvido mais facilmente usando MATLAB e sua função "spline()" como no Problema 7.5.)

<b>FEM gerada, V</b>	375	400	425	450	475
<b>Corrente do campo em série, A</b>	227	260	301	350	402

Determine o conjugado interno de partida quando a corrente de partida for limitada a 460 A. Suponha que a reação de armadura seja equivalente a uma FMM de desmagnetização que varia com o quadrado da corrente. (Sugestão: Esse problema pode ser resolvido graficamente ou usando a função “spline()” do MATLAB para representar a curva de magnetização.)

- 7.16** Um motor em derivação de 25 kW e 230 V tem uma resistência de armadura de 0,11  $\Omega$  e uma resistência de campo de 117  $\Omega$ . A vazio e na tensão nominal, a velocidade é 2150 rpm e a corrente de armadura é 6,35 A. Em plena carga e na tensão nominal, a corrente de armadura é 115 A e, devido à reação de armadura, o fluxo é 6 por cento menor do que seu valor a vazio. Qual é a velocidade a plena carga?
- 7.17** Um ventilador de fluxo axial de 91 cm deve fornecer 16,1 m<sup>3</sup>/s de ar contra uma pressão estática de 120 Pa quando estiver girando a uma velocidade de 1165 rpm. O ventilador tem a seguinte característica de velocidade  $\times$  carga:

<b>Velocidade, rpm</b>	700	800	900	1000	1100	1200
<b>Potência, kW</b>	3,6	4,9	6,5	8,4	10,8	13,9

É proposto que o ventilador seja acionado com um motor CC em derivação de quatro pólos, 12,5 kW, 230 V e 46,9 A. O motor tem um enrolamento de armadura, com dois caminhos paralelos e  $C_a = 666$  condutores ativos. A resistência do circuito de armadura é 0,215  $\Omega$ . O fluxo de armadura por pólo é  $\Phi_a = 10^{-2}$  Wb, e os efeitos da reação de armadura podem ser desprezados. As perdas rotacionais a vazio (consideradas constantes) são estimadas em 750 W. Determine a potência de saída no eixo e a velocidade de funcionamento do motor quando este é conectado à carga do ventilador e operado com uma fonte de 230 V.

(Sugestão: este problema pode ser resolvido facilmente usando MATLAB para representar a característica do ventilador por meio da função “spline()” do MATLAB.)

- 7.18** Um motor em derivação operando a partir de uma linha de 230 V tem uma corrente de armadura de 46,5 A, a plena carga, e funciona com uma velocidade de 1300 rpm, tanto a vazio como a plena carga. Os seguintes dados sobre o motor estão disponíveis:

Resistência do circuito de armadura (incluindo escovas) = 0,17  $\Omega$

Espiras por pólo do campo em derivação = 1500 espiras

A curva de magnetização obtida com a máquina funcionando como motor a vazio e 1300 rpm é

<b><math>E_a</math>, V</b>	180	200	220	240	250
<b><math>I_f</math>, A</b>	0,98	1,15	1,46	1,93	2,27

- Determine a corrente do campo em derivação desse motor, a vazio e 1300 rpm, quando é ligado a uma linha de 230 V. A vazio, assuma que a resistência do circuito de armadura e a reação de armadura sejam desprezíveis.
- Determine a reação de armadura efetiva a plena carga em ampères-espiras por pólo.
- Quantas espiras de campo em série devem ser acrescentadas para que essa máquina torne-se um motor composto aditivo com excitação em derivação longa, cuja velo-

cidade seja 1210 rpm quando a corrente de armadura for 46,5 A e a tensão aplicada for 230 V? Assuma que o campo em série tenha uma resistência de 0,038  $\Omega$ .

- d. Se for instalado um enrolamento de campo em série, tendo 20 espiras por pólo e uma resistência de 0,038  $\Omega$ , determine a velocidade quando a corrente de armadura for 46,5 A e a tensão aplicada for 230 V.

(Sugestão: Esse problema pode ser resolvido graficamente ou usando a função “spline()” do MATLAB para representar a curva de magnetização.)

- 7.19** Um motor em derivação de 7,5 kW e 230 V tem um campo em derivação de 2000 espiras por pólo, uma resistência de armadura (incluindo as escovas) de 0,21  $\Omega$  e uma resistência de campo de comutação de 0,035  $\Omega$ . A resistência do campo em derivação (sem o reostato) é 310  $\Omega$ . Quando o motor está operando a vazio com a tensão nominal de terminal e uma resistência variável de campo em derivação, os seguintes dados são obtidos:

Velocidade, rpm	1110	1130	1160	1200	1240
$I_f$ , A	0,672	0,634	0,598	0,554	0,522

A corrente de armadura a vazio é desprezível. Quando o motor está funcionando a plena carga, com a tensão nominal de terminal e uma corrente de campo de 0,554 A, a corrente de armadura é 35,2 A e a velocidade é 1185 rpm.

- Calcule a reação de armadura a plena carga em ampères-espiras equivalentes de desmagnetização por pólo.
- Calcule o conjugado eletromagnético a plena carga nessa condição de operação.
- Qual será o conjugado de partida produzido pelo motor com a corrente de campo máxima, se a corrente de armadura de partida for limitada a 65 A? Assuma que, nessas condições, a reação de armadura seja igual a 160 ampères-espiras por pólo.
- Projete um enrolamento de campo em série que permita uma velocidade de 1050 rpm, quando o motor estiver carregado com uma corrente de armadura de 35,2 A e quando a corrente do campo em derivação for ajustada para dar uma velocidade de 1200 rpm a vazio. Assuma que o campo em série tenha uma resistência de 0,05  $\Omega$ .

(Sugestão: Esse problema pode ser resolvido graficamente ou usando a função “spline()” do MATLAB para representar a curva de magnetização.)

- 7.20** Quando operando na tensão nominal, um motor em derivação de 230 V funciona com 1750 rpm tanto a plena carga como a vazio. A corrente de armadura a plena carga é 70,8 A. O enrolamento do campo em derivação tem 2000 espiras por pólo. A resistência do circuito de armadura (incluindo escovas e interpólos) é 0,15  $\Omega$ . A curva de magnetização para 1750 rpm é

$E_a$ , V	200	210	220	230	240	250
$I_f$ , A	0,40	0,44	0,49	0,55	0,61	0,71

- Calcule o efeito de desmagnetização da reação de armadura a plena carga.
- Um enrolamento de campo em série aditivo, com excitação em derivação longa, tendo quatro espiras por pólo e uma resistência de 0,038  $\Omega$ , é acrescentado à máquina. Calcule a velocidade para a corrente de plena carga e a tensão nominal. A corrente do campo em derivação será igual à da parte (a).
- Com o enrolamento do campo em série da parte (b) instalado, calcule o conjugado de partida interno em N.m, quando a corrente de partida da armadura é limitada a

125 A. Assuma que o correspondente efeito de desmagnetização da reação de armadura seja de 230 ampères-espiras por pólo.

(Sugestão: Esse problema pode ser resolvido graficamente ou usando a função “spline()” do MATLAB para representar a curva de magnetização.)

- 7.21** Um motor CC em derivação de 230 V tem uma resistência de circuito de armadura de  $0,23 \Omega$ . Quando está funcionando com uma fonte de 230 V e acionando uma carga de conjugado constante, observa-se que o motor tem uma corrente de armadura de 60 A. Agora, uma resistência externa de  $1,0 \Omega$  é inserida em série com a armadura, ao passo que a corrente do campo em derivação mantém-se inalterada. Desprezando os efeitos das perdas rotacionais e a reação da armadura, calcule
- a corrente de armadura resultante e
  - a alteração fracionária da velocidade do motor.



- 7.22** Uma aplicação industrial comum dos motores CC série é o acionamento de guindastes e elevadores de carga. O presente problema volta-se ao cálculo das características de desempenho de um motor selecionado para exercer tal tipo de acionamento. O motor específico escolhido é totalmente selado com um enrolamento em série de 230 V. Quando está operando como guindaste, tem uma especificação nominal de 100 kW durante meia hora com uma elevação de temperatura de  $75^\circ$ . As características de desempenho a 230 V do motor somente estão listadas na Tabela 7.1 e são iguais às encontradas no catálogo do fabricante. A resistência total da armadura (incluindo as escovas) e do enrolamento de comutação é  $0,065 \Omega$ , e a do enrolamento do campo em série é  $0,027 \Omega$ . Os efeitos da reação de armadura podem ser ignorados.

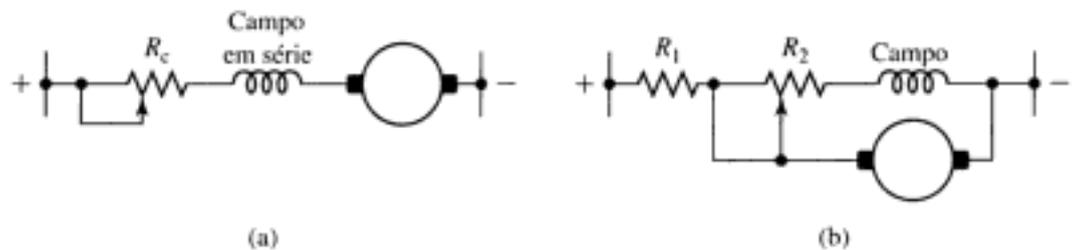
**TABELA 7.1** Características do motor do Problema 7.22

Corrente de linha A	Conjugado no eixo N · m	Velocidade rpm
100	217	940
200	570	630
300	1030	530
400	1480	475
500	1980	438
600	2470	407
700	3000	385
800	3430	370

No levantamento, o motor deve ser ligado como na Fig. 7.28a e, no abaixamento, como na Fig. 7.28b. Na primeira ligação, o controle consiste apenas em uma resistência em série. A segunda forma permite frenagem dinâmica, com o campo religado em derivação com o acréscimo de uma resistência ajustável em série.

Você usará o MATLAB para plotar algumas amostras das curvas de velocidade  $\times$  conjugado (velocidade em função do conjugado) para determinar se o motor e o controle são adequados para a aplicação especificada. Plote todas as curvas usando um único par de eixos que cubram de forma aproximada os intervalos de conjugados e magnitudes encontrados na Tabela 7.1. Preveja valores positivos e negativos de velocidade, correspondendo ao levantamento e ao abaixamento respectivamente, assim como valores positivos e negativos de conjugado, correspondendo a conjugados cujos sentidos são de elevar e abaixar a carga respectivamente.

- No caso da ligação usada no levantamento, plote as curvas de velocidade e conjugado, com valores para o resistor de controle  $R_c$  de 0, 0,3 e  $0,6 \Omega$ . Se, dentro do in-



**FIGURA 7.28** Motor série de guindaste (Problema 7.22): (a) ligação para levantamento e (b) ligação para abaixamento.

tervalo de conjugados cobertos, qualquer uma dessas curvas se estender até o quarto quadrante, interprete fisicamente o que significa o funcionamento nesse regime.

- Para a ligação de abaixamento, plote curvas de velocidade  $\times$  conjugado para  $R_1 = 0,3 \Omega$  e  $R_2 = 0,3 \Omega$ . A porção mais importante dessa curva está no quarto quadrante, mas se ela se estender até o terceiro quadrante, esta região também deverá ser plotada e interpretada fisicamente.
- Na parte (b), qual é a velocidade de abaixamento que corresponde a um conjugado de  $1500 \text{ N.m}$ ? (Sugestão: isso pode ser encontrado facilmente usando a função "spline()" do MATLAB.)

- 7.23** Um motor em derivação de  $25 \text{ kW}$  e  $230 \text{ V}$  tem uma resistência de armadura de  $0,064 \Omega$  e uma resistência de circuito de campo de  $95 \Omega$ . Na tensão nominal, o motor entrega a potência nominal de saída quando sua corrente de armadura é de  $122 \text{ A}$ . Quando o motor está funcionando na tensão nominal, observa-se que a velocidade é de  $1150 \text{ rpm}$  quando a máquina está carregada de modo tal que a corrente de armadura seja  $69,5 \text{ A}$ .
- Calcule a velocidade desse motor para a carga nominal.

Para proteger ambos o motor e a fonte CC de alimentação durante as condições de partida, uma resistência externa será ligada em série com o enrolamento de armadura (com o enrolamento de campo permanecendo ligado diretamente à fonte de  $230 \text{ V}$ ). A seguir, a resistência será ajustada automaticamente em passos de modo que a corrente de armadura não exceda a 200 por cento da corrente nominal. O tamanho do passo será determinado de modo tal que, até que toda a resistência externa tenha sido reduzida a zero, não se permitirá que a corrente de armadura caia abaixo do valor nominal. Em outras palavras, a partida da máquina deve se dar com 200 por cento da corrente nominal de armadura e, logo que a corrente tenha baixado até o valor nominal, deve-se reduzir suficientemente a resistência em série para que a corrente seja elevada novamente até 200 por cento. Esse processo será repetido até que toda a resistência em série tenha sido eliminada.

- Encontre o valor máximo da resistência em série.
  - Quanto de resistência deve ser retirado em cada passo, durante a operação de partida, e em que velocidade deve ocorrer cada mudança de passo?
- 7.24** Os dados de especificação de um fabricante para um motor CC de imã permanente indicam que ele tem uma constante de conjugado de  $K_m = 0,21 \text{ V}/(\text{rad/s})$  e uma resistência de armadura de  $1,9 \Omega$ . Para uma tensão aplicada CC de armadura constante de  $85 \text{ V}$ , calcule
- a velocidade a vazio do motor em rpm e
  - sua corrente e conjugado (em  $\text{N.m}$ ) de estol\* (velocidade zero).
  - Plote o conjugado do motor em função da velocidade.

\* N. de T.: do inglês *stall*.

## Máquinas de Relutância Variável e Motores de Passo

As máquinas de relutância variável<sup>1</sup> (frequentemente abreviadas como MRVs) são talvez a mais simples das máquinas. Consistem em um estator com enrolamentos de excitação e um rotor magnético com saliências. Os condutores do rotor não são necessários porque o conjugado é produzido pela tendência do rotor a se alinhar com a onda de fluxo produzida pelo estator, de modo a maximizar os fluxos concatenados que resultam da aplicação de uma dada corrente de estator. A produção de conjugado nessas máquinas pode ser analisada usando-se as técnicas do Capítulo 3 e o fato de que as indutâncias do enrolamento do estator são funções da posição angular do rotor.

Embora o conceito de MRV seja conhecido já há muito tempo, apenas nas décadas recentes essas máquinas começaram a ter um amplo uso em aplicações de engenharia. Isso é devido em grande parte ao fato de que, embora sejam de construção simples, elas são um tanto complicadas de serem controladas. Por exemplo, para se produzir conjugado, deve-se conhecer a posição do rotor para que os enrolamentos de fase sejam apropriadamente energizados. A ampla disponibilidade e o baixo custo da microeletrônica e da eletrônica de potência tornaram as MRVs competitivas, em relação a outras tecnologias de motores, dentro de uma ampla faixa de aplicações.

Excitando seqüencialmente as fases de uma MRV, o rotor irá girar na forma de uma seqüência de passos, girando de um ângulo específico a cada passo. Os *motores de passo* são projetados para tirar vantagem dessa característica. Esses motores frequentemente combinam uma geometria de relutância variável com imãs permanentes para produzir aumentos de conjugado e na precisão de posicionamento.

### 8.1 FUNDAMENTOS DA ANÁLISE MRV

As máquinas comuns de relutância variável podem ser classificadas em dois tipos: MRV saliente e MRV duplamente saliente. Em ambos os casos, as suas características mais notáveis são rotores sem enrolamentos nem imãs permanentes e uma única fonte de excitação aplicada aos enrolamentos do estator. Isso pode ser uma característica importante porque significa que todas as perdas resistivas de enrolamento da MRV ocorrem no estator. Como geralmente o estator pode ser facilmente refrigerado com mais eficiência que o rotor, o resultado frequentemente é um motor menor para um dada especificação de potência e tamanho.

<sup>1</sup> As máquinas de relutância variável são frequentemente referidas como *máquinas de relutância chaveada* (SRM – *Switched Reluctance Machines*) para indicar a combinação de uma MRV e um inversor chaveado necessário para acioná-la. Esse termo é popular na literatura técnica.

Como foi discutido no Capítulo 3, para produzir conjugado, as MRVs devem ser projetadas de modo que as indutâncias dos enrolamentos do estator variem com a posição do rotor. A Fig. 8.1a mostra a seção reta de uma *MRV de rotor saliente* ou apenas *MRV saliente\**. Pode-se ver que ela consiste em um estator não saliente e um rotor saliente de dois pólos, ambos construídos com material magnético de alta permeabilidade. A figura mostra um enrolamento de duas fases apenas, mas é possível um número qualquer de fases.

A Fig. 8.2a mostra a forma de variação das indutâncias do estator em função do ângulo do rotor  $\theta_m$  para uma MRV saliente como a da Fig. 8.1a. Observe que a indutância de cada enrolamento de fase do estator varia com a posição do rotor de modo que a indutância é máxima quando o eixo do rotor está alinhado com o eixo magnético daquela fase e mínimo quando os dois eixos são perpendiculares. A figura mostra também que a indutância mútua entre os enrolamentos de fase é zero quando o rotor está alinhado com o eixo magnético de qualquer uma das fases, mas que varia periodicamente com a posição do rotor nos demais casos.

A Fig. 8.1b mostra a vista em seção reta de uma *MRV duplamente saliente\*\** de duas fases em que ambos o rotor e o estator têm pólos salientes. Nessa máquina, o estator tem quatro pólos, cada um com um enrolamento. No entanto, os enrolamentos de pólos opostos têm a mesma fase; podem ser conectados em série ou em paralelo. Assim, essa máquina é bem similar à da Fig. 8.1a no sentido de que há um enrolamento bifásico de estator e um rotor de dois pólos salientes. De modo semelhante, a indutância por fase dessa configuração varia desde um valor máximo, quando o eixo do rotor está alinhado com o eixo daquela fase, até um mínimo, quando são perpendiculares.

Diferentemente da máquina de rotor saliente da Fig. 8.1a, supondo que a relutância do ferro seja desprezível, as indutâncias mútuas entre as fases da MRV duplamente saliente da Fig. 8.1b serão zero, com exceção de uma pequena componente essencialmente constante associada ao fluxo de dispersão. Além disso, as saliências do estator aumentam a diferença entre as indutâncias máxima e mínima, o que por sua vez aumenta a capacidade da máquina duplamente saliente de produzir conjugado. A Fig. 8.2b mostra a forma de variação das indutâncias por fase para a MRV duplamente saliente da Fig. 8.1b.

A razão entre o fluxo concatenado e a corrente para a MRV saliente é da forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}(\theta_m) & L_{12}(\theta_m) \\ L_{12}(\theta_m) & L_{22}(\theta_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

Aqui  $L_{11}(\theta_m)$  e  $L_{22}(\theta_m)$  são as indutâncias próprias das fases 1 e 2 respectivamente, e  $L_{12}(\theta_m)$  é a indutância mútua. Por simetria, observe que

$$L_{22}(\theta_m) = L_{11}(\theta_m - 90^\circ) \quad (8.2)$$

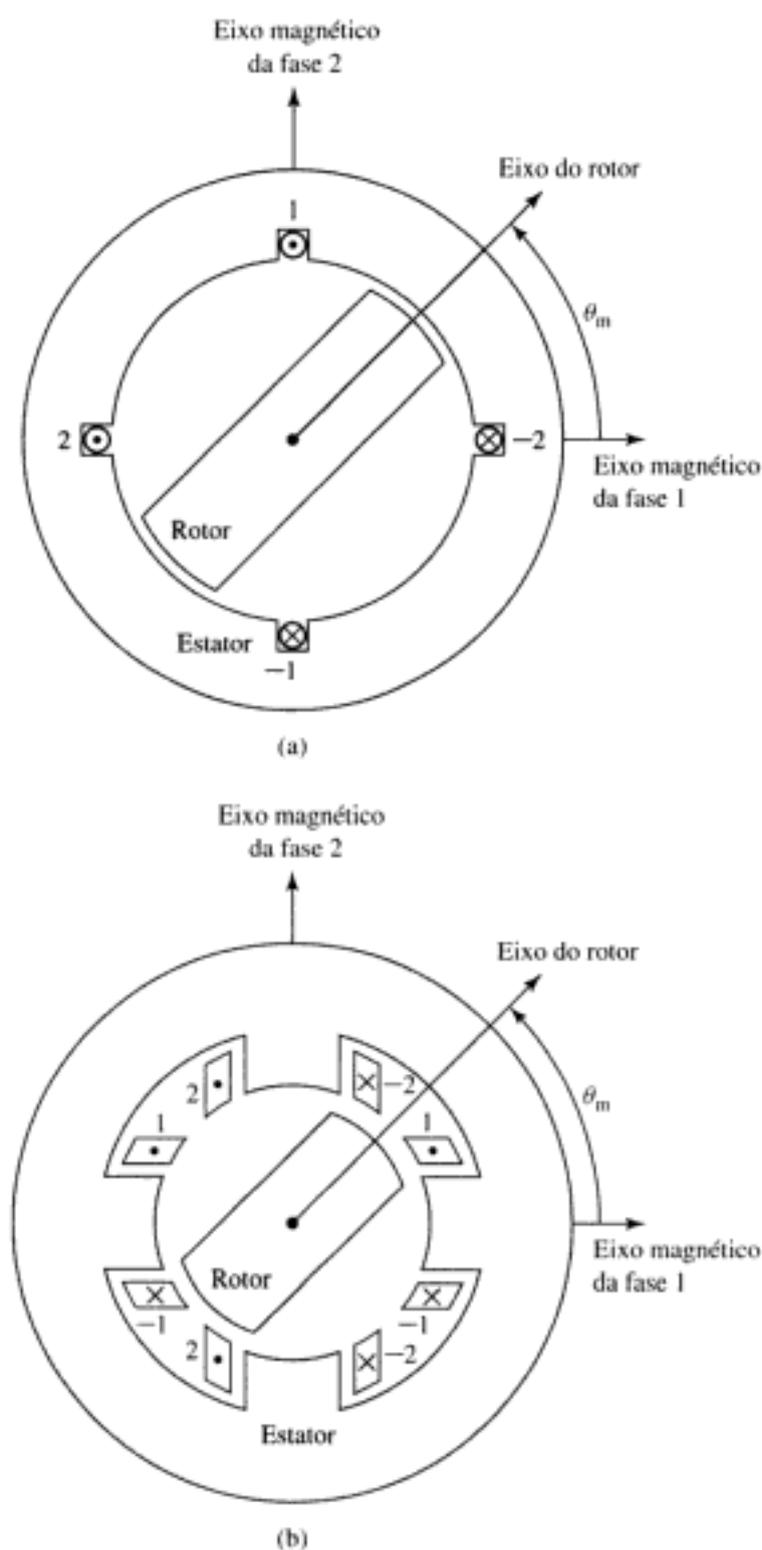
Observe também que todas essas indutâncias são periódicas, com um período de  $180^\circ$ , porque uma rotação do rotor de  $180^\circ$ , a partir de qualquer posição angular dada, não resulta em alterações no circuito magnético da máquina.

Da Equação 3.68, o conjugado eletromagnético desse sistema pode ser determinado a partir da co-energia como sendo

$$T_{mec} = \frac{\partial W'_{campo}(i_1, i_2, \theta_m)}{\partial \theta_m} \quad (8.3)$$

\* N. de T.: Em inglês, *singly-salient VRM*.

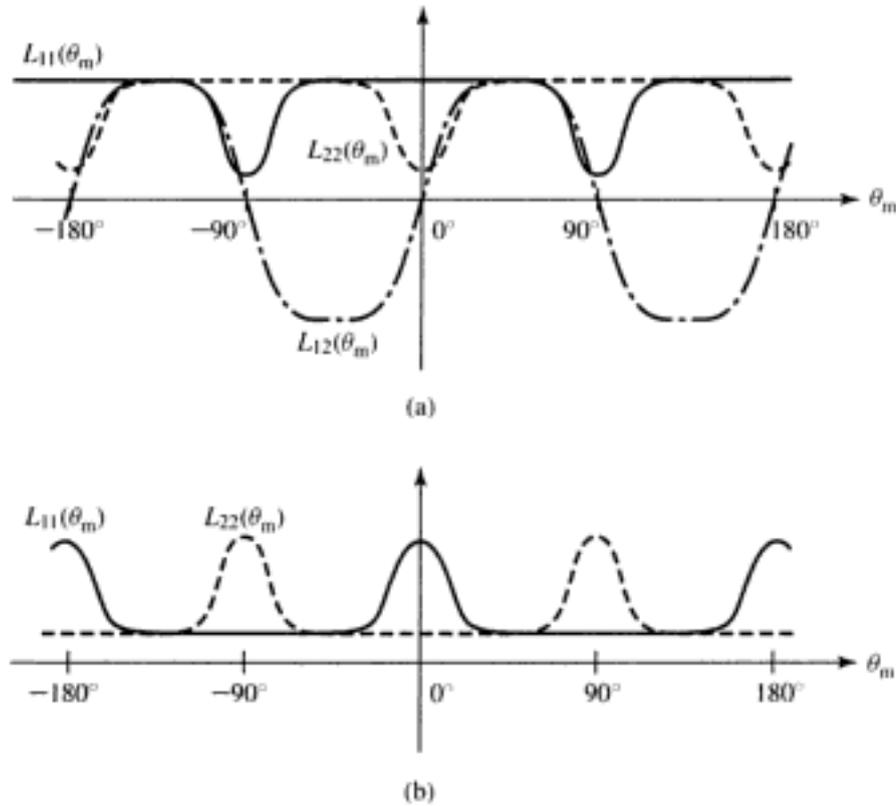
\*\* N. de T.: Em inglês, *doubly-salient VRM*.



**FIGURA 8.1** Máquinas bifásicas básicas de relutância variável: (a) saliente e (b) duplamente saliente.

em que a derivada parcial é obtida mantendo  $i_1$  e  $i_2$  constantes. Aqui, a co-energia pode ser obtida a partir da Equação 3.70,

$$W'_{\text{campo}} = \frac{1}{2}L_{11}(\theta_m)i_1^2 + L_{12}(\theta_m)i_1i_2 + \frac{1}{2}L_{22}(\theta_m)i_2^2 \quad (8.4)$$



**FIGURA 8.2** Gráficos de indutância versus  $\theta_m$  para (a) a MRV saliente da Fig. 8.1a e (b) a MRV duplamente saliente da Fig. 8.1b.

Assim, combinando as Equações 8.3 e 8.4, o conjugado é dado por

$$T_{mec} = \frac{1}{2}i_1^2 \frac{dL_{11}(\theta_m)}{d\theta_m} + i_1 i_2 \frac{dL_{12}(\theta_m)}{d\theta_m} + \frac{1}{2}i_2^2 \frac{dL_{22}(\theta_m)}{d\theta_m} \quad (8.5)$$

Para a MRV duplamente saliente da Fig. 8.1b, o termo de indutância mútua  $dL_{12}(\theta_m)/d\theta_m$  é zero e a expressão do conjugado dada pela Equação 8.5 é simplificada resultando

$$T_{mec} = \frac{1}{2}i_1^2 \frac{dL_{11}(\theta_m)}{d\theta_m} + \frac{1}{2}i_2^2 \frac{dL_{22}(\theta_m)}{d\theta_m} \quad (8.6)$$

Então, a substituição da Equação 8.2 dá

$$T_{mec} = \frac{1}{2}i_1^2 \frac{dL_{11}(\theta_m)}{d\theta_m} + \frac{1}{2}i_2^2 \frac{dL_{11}(\theta_m - 90^\circ)}{d\theta_m} \quad (8.7)$$

As Equações 8.6 e 8.7 ilustram uma característica importante das MRVs em que os efeitos de indutância mútua são desprezíveis. Nessas máquinas, a expressão do conjugado consiste em uma soma de termos, cada um dos quais é proporcional ao quadrado de uma corrente de fase individual. Como resultado, o conjugado depende apenas do módulo das correntes de fase e não de suas polaridades. Assim, a eletrônica que fornece as correntes de fase para essas máquinas pode ser unidirecional; isto é, correntes bidirecionais não são necessárias.

Como tipicamente as correntes de fase são ligadas e desligadas por chaves de estado sólido, tais como transistores ou tiristores, e como cada chave deve lidar com as correntes em apenas um sentido, isso significa que o acionamento do motor requer apenas metade do número de chaves (assim como metade da eletrônica de controle correspondente) que seria necessário em um acionamento bidirecional correspondente. O resultado é um sistema de acio-

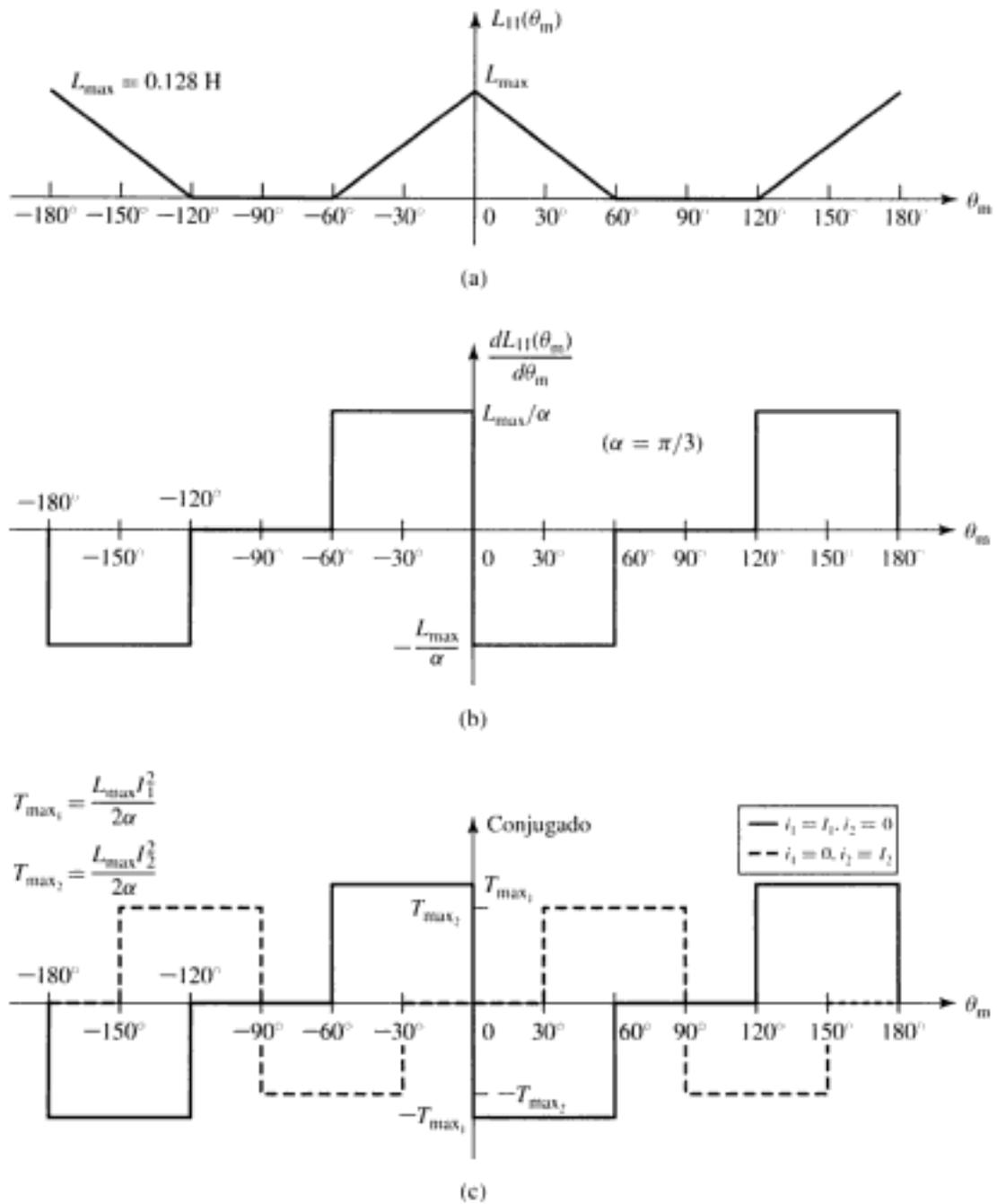


FIGURA 8.4 (a)  $L_{11}(\theta_m)$  versus  $\theta_m$ , (b)  $dL_{11}(\theta_m)/d\theta_m$  versus  $\theta_m$  e (c) conjugado versus  $\theta_m$ .

tornado tanto positivo como negativo simplesmente selecionando apropriadamente as correntes de fase.

- (iii) Para  $\theta_m = 75^\circ$ , a fase 1 não produz nenhum conjugado, ao passo que a fase 2 produz um conjugado positivo de magnitude  $T_{max2}$ . Assim, o conjugado líquido nessa posição é positivo e de magnitude 1,53 N.m. Observe que não há nenhuma combinação de correntes de fase que seja capaz de produzir um conjugado negativo nessa posição porque o conjugado da fase 1 é sempre nulo, ao passo que o da fase 2 pode ser apenas positivo (ou nulo).

## PROBLEMA PRÁTICO 8.1

Repita os cálculos do Exemplo 8.1, parte (c), para o caso em que  $\alpha = \beta = 70^\circ$ .

■ **Solução**

- (i)  $T = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$
- (ii)  $T = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$
- (iii)  $T = 1,59 \text{ N} \cdot \text{m}$

O Exemplo 8.1 ilustra uma série de considerações que são importantes no projeto de MRVs. É evidente que essas máquinas devem ser projetadas de modo que sejam evitadas as posições de rotor em que nenhuma dessas fases seja capaz de produzir conjugado. Essa é uma preocupação presente no projeto de máquinas 4/2, as quais sempre apresentam tais posições quando são construídas com entreferros uniformes e simétricos.

Também está claro que, para se operar uma MRV com características especificadas de conjugado, as correntes de fase devem ser aplicadas de modo consistente com a posição do rotor. Por exemplo, pode-se ver na Fig. 8.4c que a produção de conjugado positivo, a partir de cada enrolamento de fase do Exemplo 8.1, ocorre somente para valores específicos de  $\theta_m$ . Desse modo, para se obter o funcionamento desejado, a operação das MRVs deve incluir algum tipo de sensor de posição do rotor, assim como um controlador que determina tanto a seqüência como a forma de onda das correntes de fase. Em geral, isso é implementado usando-se dispositivos de chaveamento eletrônico (transistores, tiristores, dispositivos GTO, etc.) sob a supervisão de um controlador baseado em microprocessador.

Embora uma MRV 4/2 como no Exemplo 8.1 seja capaz de trabalhar, na prática não é particularmente útil devido a características indesejáveis como as posições de conjugado nulo e o fato de que há posições angulares em que não é possível obter conjugado positivo. Por exemplo, devido a essas limitações, essa máquina não pode gerar um conjugado constante independentemente do ângulo do rotor. Com certeza, não há nenhuma combinação de correntes de fase que seja capaz de fornecer conjugado nas posições de conjugado nulo, ou um conjugado positivo no intervalo de posições angulares em que somente conjugado negativo pode ser produzido. Como foi discutido na Seção 8.2, essas dificuldades podem ser eliminadas por meio de projetos do tipo 4/2, usando geometrias assimétricas que assim possibilitam a construção prática de máquinas 4/2.

Como foi visto nesta seção, a análise de MRVs é conceitualmente simples. Para o caso em que o ferro usado na máquina é linear (sem saturação magnética), a obtenção do conjugado é simplesmente uma questão de se encontrar as indutâncias por fase do estator (próprias e mútuas) em função da posição do rotor, expressando-se a co-energia em termos dessas indutâncias, e em seguida calcular a derivada da co-energia em relação à posição angular (mantendo constantes as correntes de fase). De modo similar, como foi discutido na Seção 3.8, a tensão de terminal elétrico para cada uma das fases pode ser encontrada a partir da soma das derivadas, em relação ao tempo, do fluxo concatenado de fase e a queda  $iR$  na resistência de fase.

Quando o ferro usado na máquina não é linear (caso em que os efeitos de saturação são importantes) como foi discutido na Seção 8.4, a co-energia pode ser encontrada pela integração apropriada dos fluxos concatenados de fase, e novamente o conjugado pode ser encontrado a partir da derivada da co-energia em relação à posição angular do rotor. Em ambos os casos, não há enrolamentos de rotor e, em um motor de relutância variável bem projetado, geralmente não há outras correntes no rotor. Desse modo, diferentemente de outros tipos de má-

quinas CA (síncronas e de indução), não há nenhuma dinâmica associada ao rotor da máquina. Isso simplifica grandemente a sua análise.

Embora as MRVs sejam simples conceitualmente e em termos construtivos, a sua operação é um tanto complicada, requerendo uma eletrônica sofisticada para controlar e acionar o motor, de modo que seja possível conseguir características úteis de funcionamento. Essas e outras questões serão discutidas nas Seções 8.2 a 8.5.

## 8.2 CONFIGURAÇÕES MRV PRÁTICAS

Sistemas práticos de acionamento das MRVs (motor e inversor) são projetados para atender a critérios tais como

- Baixo custo
- Conjugado constante independente da posição angular do rotor
- Uma faixa desejada de velocidades de funcionamento
- Alto rendimento
- Relação elevada entre conjugado e massa

Como em qualquer situação de engenharia, o projeto final de uma aplicação específica envolve um compromisso entre diversas opções disponíveis para o projetista. Como as MRVs requerem alguma forma de eletrônica e de controle para funcionarem, o projetista está frequentemente ocupado com a otimização de alguma característica global do sistema de acionamento. Isso impõe restrições adicionais ao projeto do sistema.

As MRVs podem ser construídas com uma ampla variedade de configurações. Na Fig. 8.1, duas formas de uma máquina 4/2 são mostradas: uma máquina saliente na Fig. 8.1a, e uma duplamente saliente na Fig. 8.1b. Embora ambos os modelos possam ser postos a trabalhar, uma máquina duplamente saliente é freqüentemente a melhor escolha porque em geral produz um conjugado maior para um dado tamanho de carcaça.

Isso pode ser visto qualitativamente (supondo uma estrutura magnética não saturada de alta permeabilidade) referindo-se à Equação 8.7, a qual mostra que o conjugado é uma função de  $dL_{11}(\theta_m)/d\theta_m$ , a derivada da indutância por fase em relação à posição angular do rotor. É evidente, sendo tudo mais igual, que a máquina com a derivada maior produzirá o conjugado mais elevado.

Pode-se pensar que essa derivada seja determinada pela razão entre as indutâncias de fase máxima e mínima  $L_{max}/L_{min}$ . Em outras palavras, podemos escrever,

$$\begin{aligned} \frac{dL_{11}(\theta_m)}{d\theta_m} &\cong \frac{L_{max} - L_{min}}{\Delta\theta_m} \\ &= \frac{L_{max}}{\Delta\theta_m} \left( 1 - \frac{L_{min}}{L_{max}} \right) \end{aligned}$$

em que  $\Delta\theta_m$  é o deslocamento angular do rotor entre as posições de indutância de fase máxima e mínima. Da Equação 8.8, vemos que, para uma dada  $L_{max}$  e  $\Delta\theta_m$ , o maior valor de  $L_{max}/L_{min}$  dará o maior conjugado. Devido à sua geometria, uma estrutura duplamente saliente tipicamente terá uma indutância mínima menor e portanto um valor maior de  $L_{max}/L_{min}$ . Desse modo, produzirá um conjugado maior para a mesma estrutura de rotor.

Por essa razão, as máquinas duplamente salientes são o tipo predominante de MRV e, por essa mesma razão, no restante deste capítulo iremos considerar apenas esse tipo de MRV. Em geral, as máquinas duplamente salientes podem ser construídas com dois ou mais pólos, tanto no estator como no rotor. Deve ser salientado que, depois de estiver definida a estrutura

básica de uma MRV, a indutância  $L_{\max}$  estará perfeitamente determinada pelas grandezas tais como o número de espiras, o comprimento de entreferro e as dimensões básicas do pólo. O desafio para o projetista de MRVs está em obter um valor baixo de  $L_{\min}$ . Essa é uma tarefa árdua porque  $L_{\min}$  é dominada por fluxos de dispersão e outras grandezas difíceis de serem calculadas e analisadas.

Como mostrado no Exemplo 8.1, a geometria de uma MRV 4/2 simétrica com entreferro uniforme dá origem a posições de rotor em que não é possível produzir conjugado, não importando qual seja a combinação das excitações dos enrolamentos de fase. Pode-se ver que esses zeros de conjugado ocorrem em posições do rotor onde todas as fases do estator estão simultaneamente em uma posição de indutância máxima ou mínima. Como o conjugado depende da derivada da indutância em relação à posição angular, esse alinhamento simultâneo de pontos de indutância máxima ou mínima produz necessariamente um conjugado líquido nulo.

A Fig. 8.5 mostra uma MRV 6/4 onde podemos ver que uma característica fundamental da máquina 6/4 é que esses alinhamentos simultâneos de indutâncias de fases não são possíveis. Como resultado, essa máquina não apresenta nenhuma posição em que o conjugado seja nulo. Esse é um ponto significativo porque elimina a possibilidade de que o rotor possa emperrar e ficar parado em uma dessas posições, exigindo que seja movido mecanicamente até uma nova posição antes que possa partir. Em uma MRV 6/4, além do fato de que não há posições de alinhamento simultâneo, pode-se ver também que não há nenhuma posição do rotor na qual seja possível produzir conjugado somente de um mesmo sinal (positivo ou negativo). Assim, com um controle apropriado das correntes de fase, deve ser possível obter conjugado constante, independentemente da posição do rotor.

No caso de uma MRV simétrica com  $p_s$  pólos de estator e  $p_r$  pólos de rotor, um teste simples pode ser usado para determinar se há posições de conjugado nulo. Se a razão  $p_s/p_r$  (ou alternativamente  $p_r/p_s$ , para  $p_r$  maior do que  $p_s$ ) for um número inteiro, então haverá posições de conjugado nulo. Por exemplo, em uma máquina 6/4, a razão é 1,5 e, portanto, não haverá posi-

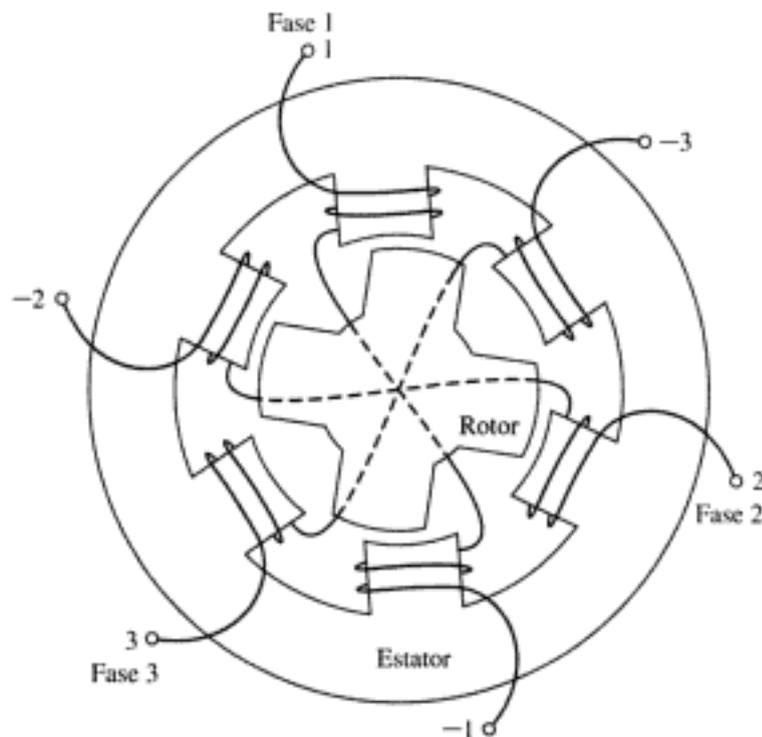
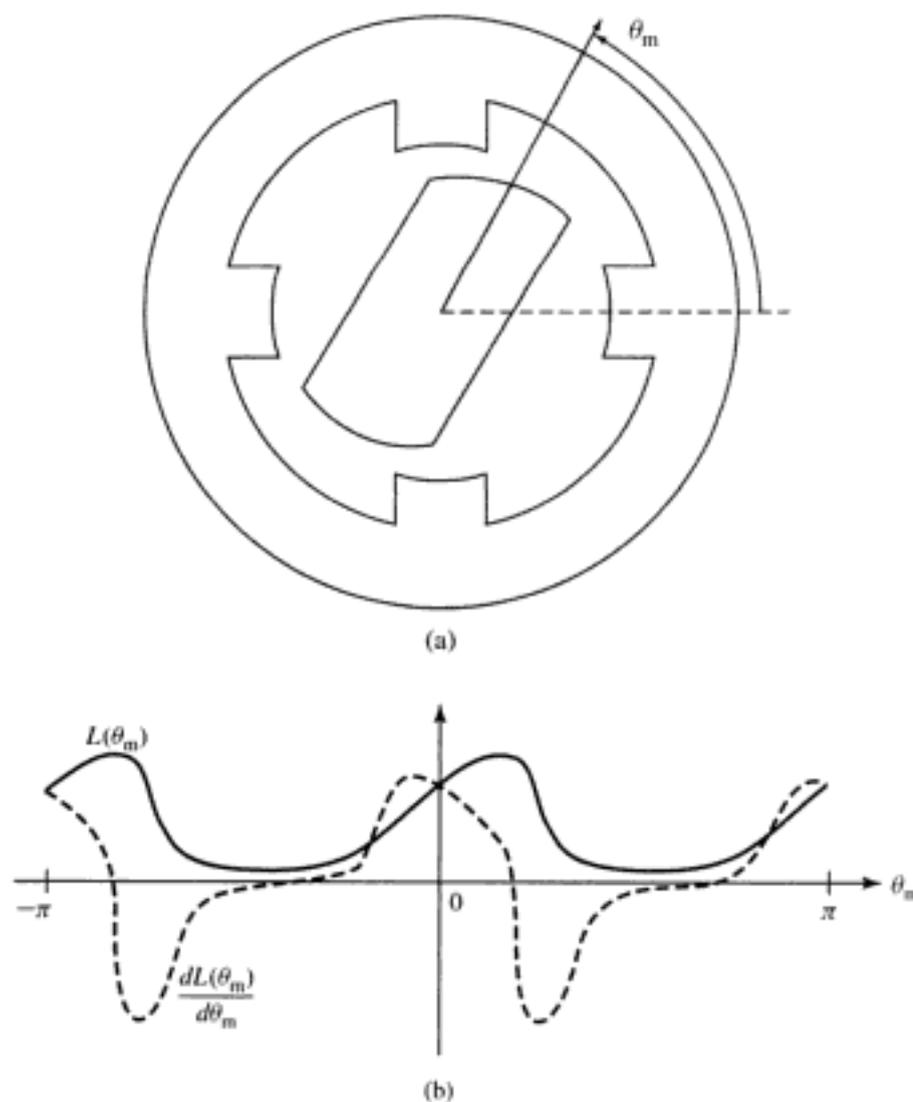


FIGURA 8.5 Vista em seção reta de uma MRV 6/4 trifásica.

ções de conjugado nulo. No entanto, a razão é 2,0 em uma máquina 6/3 e haverá posições de conjugado nulo.

Em alguns casos, as restrições de projeto podem ditar que seja desejável uma máquina com uma razão de pólos inteira. Nesses casos, é possível eliminar as posições de conjugado nulo construindo uma máquina com rotor assimétrico. Por exemplo, o raio do rotor pode ser feito de modo que varie com o ângulo, como está mostrado de forma muito exagerada na Fig. 8.6a. Esse tipo de projeto, que também exige que a largura dos pólos do rotor seja maior do que a do estator, não produz conjugado nulo nas posições de alinhamento porque  $dL(\theta_m)/d\theta_m$  não é zero nesses pontos, como pode-se ver na Fig. 8.6b.

Um procedimento alternativo para se construir uma MRV com uma razão inteira de pólos sem posições de conjugado nulo é encadear duas ou mais MRVs em série, alinhadas de tal modo que as MRVs estejam angularmente deslocadas entre si e que todos os rotores estejam compartilhando um eixo comum. Desse modo, as posições de conjugado nulo de cada máquina não estarão alinhadas entre si e, assim, a máquina como um todo não apresentará nenhum conjugado nulo. Por exemplo, um encadeamento em série de duas MRVs 4/2 bifásicas como as do Exemplo 8.1 (Fig. 8.3), com um deslocamento angular de  $45^\circ$  entre as MRVs individuais, resultará em uma MRV de quatro fases sem posições de conjugado nulo.



**FIGURA 8.6** Uma MRV 4/2 com entreferro não uniforme: (a) vista esquemática exagerada e (b) gráficos de  $L(\theta_m)$  e  $dL(\theta_m)/d\theta_m$  versus  $\theta_m$ .

Em geral, as MRVs são enroladas com uma única bobina para cada pólo. Embora seja possível controlar separadamente cada um desses enrolamentos como fases individuais, é prática comum combiná-los em grupos de pólos excitados simultaneamente. Por exemplo, a Fig. 8.3 mostra a MRV 4/2 ligada como uma máquina bifásica. Como está mostrado na Fig. 8.5, comumente uma MRV 6/4 é ligada como sendo uma máquina trifásica com os pólos opostos conectados à mesma fase e de tal modo que os enrolamentos impulsionem os fluxos no mesmo sentido através do rotor.

Em algumas situações, as MRVs são enroladas com um conjunto de bobinas em paralelo para cada fase. Em alguns casos, essa configuração conhecida como *enrolamento bifilar* pode levar a um inversor de baixa complexidade e assim a um acionamento simples e de baixo custo. O uso de enrolamentos bifilares no acionamento de MRVs será discutido na Seção 11.4.

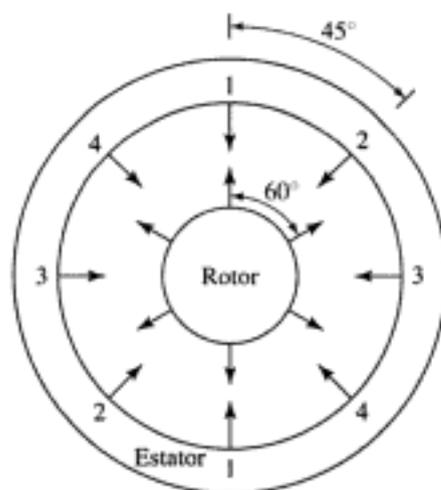
Em geral, quando uma dada fase é excitada, o conjugado é tal que o rotor é arrastado para a posição mais próxima de fluxo concatenado máximo. Quando a excitação é removida naquela fase e a próxima fase é excitada, o rotor “segue em frente” pois ele é então arrastado para uma nova posição de fluxo concatenado máximo. Assim, a velocidade do rotor é determinada pela frequência das correntes de fase. No entanto, diferentemente do caso de uma máquina síncrona, a relação da velocidade do rotor com a frequência e a seqüência de excitação dos enrolamentos de fase pode ser bem complexa, dependendo do número de pólos do rotor e do número de pólos e fases do estator. Isso está ilustrado no Exemplo 8.2.

#### EXEMPLO 8.2

Considere uma MRV 8/6 de quatro fases. Se as fases do estator forem excitadas seqüencialmente, necessitando um tempo total de  $T_0$  segundos para excitar as quatro fases (isto é, cada fase é excitada durante um tempo de  $T_0/4$  s), encontre a velocidade angular da onda de fluxo do estator e a correspondente velocidade angular do rotor. Despreze qualquer característica dinâmica do sistema e assuma que o rotor irá acompanhar instantaneamente a excitação do estator.

#### ■ Solução

A Fig. 8.7 mostra de forma esquemática uma MRV 8/6. Os detalhes da forma dos pólos não são importantes neste exemplo e, por essa razão, os pólos do rotor e do estator são mostrados simplesmente como setas que indicam a sua localização. A figura mostra o rotor alinhado com os pólos da fase 1 do estator. Essa posição corresponde àquela que ocorre quando não há car-



**FIGURA 8.7** Vista esquemática de uma MRV 8/6 de quatro fases. As localizações dos pólos são indicadas por setas.

ga no rotor e os enrolamentos de estator da fase 1 estão excitados, pois corresponde a uma posição da fase 1 em que o fluxo concatenado é máximo.

Considere a seguir que a excitação da fase 1 seja removida e que a fase 2 seja excitada. Nesse instante, a onda de fluxo do estator girou  $45^\circ$  no sentido horário. De modo semelhante, quando a excitação da fase 2 é removida e a fase 3 é excitada, a onda de fluxo do estator irá girar mais  $45^\circ$  no sentido horário. Assim, a velocidade angular  $\omega_s$  da onda de fluxo do estator pode ser calculada simplesmente como sendo  $\pi/4$  rad ( $45^\circ$ ) dividido por  $T_0/4$  s, ou  $\omega_s = \pi/T_0$  rad/s.

No entanto, observe que essa não é a velocidade angular do rotor em si. Quando a excitação da fase 1 for removida e a fase 2 for excitada, o rotor irá se mover de modo a maximizar os fluxos concatenados da fase 2. Nesse caso, a Fig. 8.7 mostra que o rotor irá se mover  $15^\circ$  no sentido anti-horário já que os pólos do rotor mais próximos da fase 2 estão na realidade  $15^\circ$  à frente dos pólos da fase 2. Assim, a velocidade angular do rotor pode ser calculada como sendo  $-\pi/12$  rad ( $15^\circ$ , com o sinal negativo indicando uma rotação no sentido anti-horário) dividido por  $T_0/4$  s, ou  $\omega_m = -\pi(3T_0)$  rad/s.

Nesse caso, o rotor desloca-se com um terço da velocidade angular da excitação do estator e em sentido contrário!

### PROBLEMA PRÁTICO 8.2

Repita os cálculos do Exemplo 8.2 para o caso de uma MRV 8/10.

#### ■ Solução

$$\omega_m = \pi/(5T_0) \text{ rad/s}$$

O Exemplo 8.2 ilustra a relação complexa que pode existir entre a frequência de excitação de uma MRV e a frequência “síncrona” do rotor. Essa relação é diretamente análoga à existente entre duas engrenagens mecânicas, quando a escolha de diferentes formas e configurações de engrenagens dá origem a uma ampla variedade de relações de velocidades. É difícil deduzir uma regra simples que descreva essa relação para a imensa variedade de configurações de MRVs possíveis de serem concebidas. No entanto, é uma questão bastante simples a de seguir um procedimento semelhante ao mostrado no Exemplo 8.2, quando se deseja analisar qualquer configuração de interesse em particular.

Outras variações de configurações de MRVs são possíveis quando os pólos principais do estator e do rotor são subdivididos adicionando-se dentes individuais (que podem ser vistos como um conjunto de pequenos pólos excitados simultaneamente por um único enrolamento). O conceito básico está ilustrado na Fig. 8.8, que mostra uma vista esquemática de três pólos de uma MRV trifásica com um total de seis pólos principais de estator. Essa máquina, com os pólos do estator e do rotor subdivididos em dentes, é conhecida como MRV *em castelo*<sup>\*</sup>. Esse nome resulta do fato de que os dentes do estator são semelhantes às torres de um castelo medieval.

Na Fig. 8.8, cada pólo do estator foi subdividido em quatro subpolos pelo acréscimo de quatro dentes que têm  $6\frac{3}{4}^\circ$  de largura (indicados pelo ângulo  $\beta$  na figura), com uma ranhura de mesma largura entre os dentes. O mesmo espaçamento dente/ranhura é escolhido para o rotor, resultando em um total de 28 dentes no rotor. Observe que esse número de dentes de rotor e os correspondentes valores de  $\beta$  foram escolhidos de modo que quando os dentes do rotor estão alinhados com os do pólo de estator da fase 1, eles não estão alinhados com os das fases 2 e 3. Desse modo, a excitação sucessiva das fases do estator resultará na rotação do rotor.

\* N. de T.: Em inglês, *castleleated VRM*.

Para cada fase de uma MRV, a indutância de fase é periódica em relação à posição angular do rotor. Assim, a área abaixo da curva de  $dL/d\theta_m$ , calculada em um período completo de  $L(\theta_m)$ , é zero, isto é,

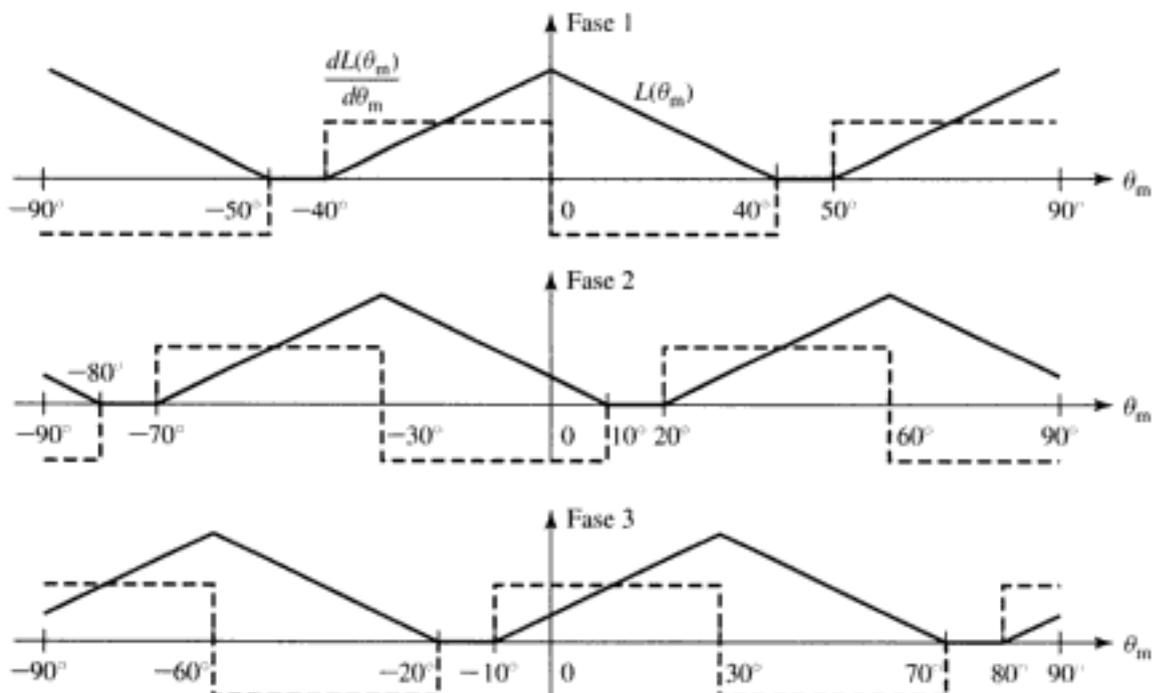
$$\int_0^{2\pi/p_r} \frac{dL(\theta_m)}{d\theta_m} d\theta_m = L(2\pi/p_r) - L(0) = 0 \quad (8.10)$$

em que  $p_r$  é o número de pólos do rotor.

O conjugado médio produzido por uma MRV pode ser encontrado integrando a equação de conjugado (Equação 8.9) em um período completo de rotação. É evidente que, se as correntes do estator forem mantidas constantes, a Equação 8.10 mostrará que o conjugado médio é zero. Assim, para produzir um conjugado médio, em relação ao tempo, as correntes do estator devem variar com a posição do rotor. O conjugado de saída desejado médio de uma MRV depende da natureza da aplicação. Por exemplo, se a MRV estiver funcionando como motor, é necessário um conjugado médio positivo no eixo, em relação ao tempo. De modo semelhante, uma ação de frenagem ou um funcionamento como gerador requerem um conjugado médio negativo, em relação ao tempo.

Um conjugado positivo é produzido quando uma fase é excitada nas posições angulares em que  $dL/d\theta_m$  é positiva para aquela fase. Um conjugado negativo é produzido aplicando a excitação nas posições em que  $dL/d\theta_m$  é negativa. Considere uma MRV 6/4 trifásica (semelhante à mostrada na Fig. 8.5) com pólos de rotor e de estator de  $40^\circ$ . A curva de indutância *versus* posição do rotor será semelhante à representação idealizada mostrada na Fig. 8.9.

A operação dessa máquina como motor requer um conjugado líquido positivo. Alternativamente, ela pode funcionar como gerador quando são atendidas as condições necessárias para um conjugado líquido negativo. Observando que um conjugado positivo é produzido quando se aplica a excitação nas posições de rotor em que  $dL/d\theta_m$  é positiva, vemos que um sistema de controle torna-se necessário para determinar a posição do rotor e aplicar a excitação nos enrolamentos de fase nos instantes apropriados. De fato, é a necessidade desse tipo de



**FIGURA 8.9** Curvas ideais de indutância e  $dL/d\theta_m$  para uma MRV 6/4 trifásica com pólos de rotor e estator de  $40^\circ$ .

controle que torna os sistemas de acionamento MRV mais complexos do que se poderia esperar quando se leva em conta apenas a simplicidade da própria MRV.

Uma das razões pelas quais as MRVs encontraram aplicação em uma larga variedade de situações foi que a ampla disponibilidade e o baixo custo dos microprocessadores e da eletrônica de potência fizeram com que o custo do controle e dos sensores, necessários para operar exitosamente os sistemas de acionamento MRV, baixasse a tal ponto que esses sistemas tornaram-se competitivos em relação a outras tecnologias concorrentes. Em muitas aplicações, comparando com outros sistemas, o sistema de acionamento MRV no todo é menos dispendioso e mais flexível; apesar de que o controle do acionamento de uma MRV seja mais complexo do que o usado em sistemas de motores CC de indução ou imã permanente.

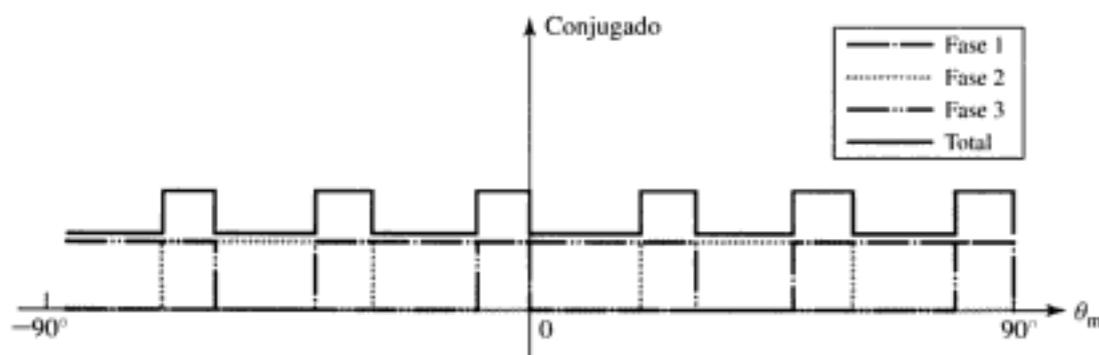
Mesmo supondo que esteja disponível um sistema para determinar e controlar a posição do rotor, ainda permanece a questão de como excitar as fases da armadura. A partir da Fig. 8.9, vemos que um esquema possível de excitação seria aplicar uma corrente constante a cada uma das fases, nas posições angulares em que  $dL/d\theta_m$  é positiva, e uma corrente zero em caso contrário.

Se isso for feito, a forma de onda do conjugado resultante será a da Fig. 8.10. Observe que, como as formas de onda de conjugado das fases individuais sobrepõem-se, o conjugado resultante não será constante mas, pelo contrário, terá uma componente pulsante acima do seu valor médio. Em geral, esses conjugados pulsantes devem ser evitados porque podem produzir esforços destrutivos na MRV e porque podem resultar na geração de vibração e ruído excessivos.

A análise da Fig. 8.9 mostra que há estratégias alternativas de excitação que podem reduzir as pulsações de conjugado da Fig. 8.10. Talvez a estratégia mais simples seja excitar cada fase por apenas  $30^\circ$  do posicionamento ao invés de  $40^\circ$ , como está mostrado na Fig. 8.9. Assim, cada fase seria simplesmente desligada quando a fase seguinte fosse ligada e, conseqüentemente, não haveria sobreposição de conjugados entre as fases.

Embora essa estratégia seja uma solução ideal do problema, em termos práticos não é possível implementá-la. O problema é que como cada enrolamento de fase tem uma indutância própria, não é possível instantaneamente ligar ou desligar as correntes de fase. Especificamente, para uma MRV de fases independentes (desacopladas),<sup>2</sup> a relação entre tensão e corrente da  $j$ -ésima fase é dada por

$$v_j = R_j i_j + \frac{d\lambda_j}{dt} \quad (8.11)$$



**FIGURA 8.10** Conjugados individuais por fase e o conjugado total para o motor da Fig. 8.9. Cada fase é excitada com uma corrente constante  $i_0$  apenas nas posições em que  $dL/d\theta_m > 0$ .

<sup>2</sup> O leitor deve se lembrar de que em alguns casos a suposição de fases independentes não se justifica e, então, uma análise mais complexa da MRV torna-se necessária (veja a discussão que se segue à dedução da Equação 8.5).

em que

$$\lambda_j = L_{jj}(\theta_m) i_j \quad (8.12)$$

Assim,

$$v_j = R_j i_j + \frac{d}{dt} [L_{jj}(\theta_m) i_j] \quad (8.13)$$

A Equação 8.13 pode ser reescrita como

$$v_j = \left\{ R_j + \frac{d}{dt} [L_{jj}(\theta_m)] \right\} i_j + L_{jj}(\theta_m) \frac{di_j}{dt} \quad (8.14)$$

ou

$$v_j = \left[ R_j + \frac{dL_{jj}(\theta_m)}{d(\theta_m)} \frac{d\theta_m}{dt} \right] i_j + L_{jj}(\theta_m) \frac{di_j}{dt} \quad (8.15)$$

Embora as Equações 8.13 a 8.15 sejam matematicamente complexas e freqüentemente requeiram solução numérica, elas mostram claramente que algum tempo é necessário para que as correntes estabeleçam-se nos enrolamentos de fase após a aplicação da tensão àquela fase. Uma análise semelhante pode ser feita com as condições associadas à remoção das correntes de fase. O atraso de tempo associado com a elevação da corrente pode limitar o conjugado máximo que pode ser obtido, ao passo que o tempo de decaimento da corrente pode resultar em conjugado negativo, se ainda houver corrente circulando quando  $dL(\theta_m)/d\theta_m$  inverte de sinal. Esses efeitos estão ilustrados no Exemplo 8.3 o qual também mostra que, nos casos em que a resistência de enrolamento pode ser desprezada, uma solução aproximada dessas equações pode ser encontrada.

### EXEMPLO 8.3



Considere a MRV 4/2 idealizada do Exemplo 8.1. Assuma que ela tenha uma resistência de enrolamento de  $R = 1,5 \Omega/\text{fase}$  e uma indutância de dispersão  $L_r = 5 \text{ mH}$  em cada fase. Para uma velocidade constante de rotor de 4000 rpm, calcule (a) a corrente da fase 1 em função do tempo durante o intervalo  $-60^\circ \leq \theta_m \leq 0^\circ$ , assumindo que uma tensão constante de  $V_0 = 100 \text{ V}$  seja aplicada à fase 1 tão logo  $dL_{11}(\theta_m)/d\theta_m$  torne-se positiva (isto é, em  $\theta_m = -60^\circ = -\pi/3 \text{ rad}$ ), e (b) o decaimento da corrente da fase 1, se uma tensão negativa de  $-200 \text{ V}$  for aplicada em  $\theta_m = 0^\circ$  e assim mantida até que a corrente chegue a zero. (c) Usando MATLAB\*, plote essas correntes assim como o conjugado correspondente. Calcule também a integral sob o gráfico do conjugado *versus* tempo e compare-o com a integral sob a curva do conjugado *versus* tempo para o período de tempo durante o qual o conjugado é positivo.

#### ■ Solução

a. Da Equação 8.15, a equação diferencial que rege a elevação da corrente na fase 1 é dada por

$$v_1 = \left[ R + \frac{dL_{11}(\theta_m)}{d\theta_m} \frac{d\theta_m}{dt} \right] i_1 + L_{11}(\theta_m) \frac{di_1}{dt}$$

Para 4000 rpm,

$$\omega_m = \frac{d\theta_m}{dt} = 4000 \text{ rpm} \times \frac{\pi}{30} \left[ \frac{\text{rad/s}}{\text{rpm}} \right] = \frac{400\pi}{3} \text{ rad/s}$$

\* MATLAB é uma marca registrada da The MathWorks, Inc.

Da Fig. 8.4 (para  $-60^\circ \leq \theta_m \leq 0^\circ$ )

$$\begin{aligned} L_{11}(\theta_m) &= L_l + \frac{L_{\max}}{\pi/3} \left( \theta_m + \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 0,005 + 0,122(\theta_m + \pi/3) \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{dL_{11}(\theta_m)}{d\theta_m} = 0,122 \text{ H/rad}$$

e

$$\frac{dL_{11}(\theta_m)}{d\theta_m} \frac{d\theta_m}{dt} = 51,1 \Omega$$

que é muito inferior à resistência  $R = 1,5 \Omega$ .

Isso capacita-nos a obter uma solução aproximada da corrente desprezando o termo  $Ri$  da Equação 8.13. Então, devemos resolver

$$\frac{d(L_{11}i_1)}{dt} = v_1$$

cuja solução é

$$i_1(t) = \frac{\int_0^t v_1 dt}{L_{11}(t)} = \frac{V_0 t}{L_{11}(t)}$$

A substituição

$$\theta_m = -\frac{\pi}{3} + \omega_m t$$

na expressão de  $L_{11}(\theta_m)$  fornece, então,

$$i_1(t) = \frac{100t}{0,005 + 51,1t} \text{ A}$$

que é válida até  $\theta_m = 0^\circ$  para  $t = 2,5$  ms. Nesse ponto, temos  $i_1(t) = 1,88$  A.

- b. Durante o período de decaimento da corrente, a solução é feita como na parte (a). Da Equação 8.4, para  $0^\circ \leq \theta_m \leq 60^\circ$ , obtém-se  $dL_{11}(\theta_m)/dt = -51,1 \Omega$ , e o termo  $Ri$  pode novamente ser ignorado na Equação 8.13.

Assim, considerando que a tensão aplicada é  $-200$  V nesse período de tempo ( $t \geq 2,5$  ms até  $i_1(t) = 0$ ) em um esforço para trazer rapidamente a corrente a zero; considerando que a corrente deve ser contínua no tempo  $t_0 = 2,5$  ms, e como, da Fig. 8.4 (para  $0^\circ \leq \theta_m \leq 60^\circ$ ),

$$\begin{aligned} L_{11}(\theta_m) &= L_l + \frac{L_{\max}}{\pi/3} \left( \frac{\pi}{3} - \theta_m \right) \\ &= 0,005 + 0,122(\pi/3 - \theta_m) \end{aligned}$$

constatamos que a solução torna-se

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{L_{11}(t_0)i_1(t_0) + \int_{t_0}^t v_1 dt}{L_{11}(t)} \\ &= \frac{0,25 - 200(t - 2,5 \times 10^{-3})}{0,005 + 51,1(5 \times 10^{-3} - t)} \end{aligned}$$

Nessa equação, vemos que a corrente chega a zero em  $t = 3,75$  ms.

c. O conjugado pode ser obtido da Equação 8.9 fazendo  $i_2 = 0$ . Assim,

$$T_{mec} = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_{11}}{d\theta_m}$$

Usando MATLAB e os resultados das partes (a) e (b), a forma de onda da corrente está plotada na Fig. 8.11a e o conjugado está na Fig. 8.11b. A integral para toda a curva de conjugado é  $3,35 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$ , ao passo que a integral para apenas a porção positiva da curva de conjugado, correspondente ao conjugado positivo, é  $4,56 \times 10^{-4} \text{ N.m.s}$ . Assim, vemos que o conjugado negativo produz uma redução de 27 por cento de conjugado médio no que estaria disponível se, de outro modo, a corrente pudesse ser reduzida instantaneamente a zero.

A partir dos resultados da parte (b) e da Fig. 8.11a, observe que a corrente segue fluindo no enrolamento por 1,25 ms após a inversão da tensão aplicada, mesmo com a aplicação de uma tensão negativa com o dobro da amplitude da tensão usada para criar a corrente. Da Fig. 8.11b, vemos que o resultado é um período significativo de produção de conjugado negativo. Na prática, por exemplo, isso pode ditar um esquema de controle que inverte a corrente de fase antes do instante em que o sinal de  $dL(\theta_m)/d\theta_m$  é invertido. Assim, consegue-se um conjugado médio mais elevado trocando uma pequena redução de conjugado médio positivo por uma maior diminuição de conjugado médio negativo.

Esse exemplo ilustra também um outro aspecto importante do funcionamento de uma MRV. Em um sistema com uma resistência de  $1,5 \Omega$  e uma indutância constante, seria de se esperar uma corrente de regime permanente de  $100/1,5 = 66,7 \text{ A}$ . No entanto, nesse sistema, a corrente de regime permanente é inferior a  $2 \text{ A}$ . A razão disso torna-se evidente quando as Equações 8.14 e 8.15 são analisadas e vemos que  $dL_{11}(\theta_m)/dt = 51,1 \Omega$  aparece como uma resistência aparente em série com a resistência de enrolamento, sendo muito maior do que a própria resistência de enrolamento. A queda de tensão correspondente (a tensão de velocidade) tem magnitude suficiente para limitar a corrente de regime permanente a um valor de  $100/51,1 = 1,96 \text{ A}$ .

Aqui está o *script* de MATLAB:

```

clc
clear

% Aqui estão as indutâncias
Lmax = 0.128;
Lleak = 0.005;

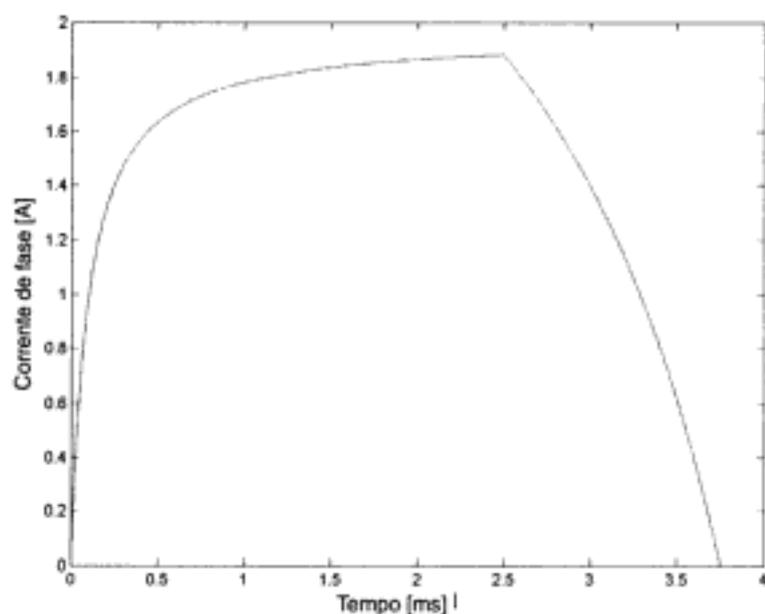
Posintegral = 0;
integral = 0;

N = 500;
tmax = 3.75e-3;
deltat = tmax/N;

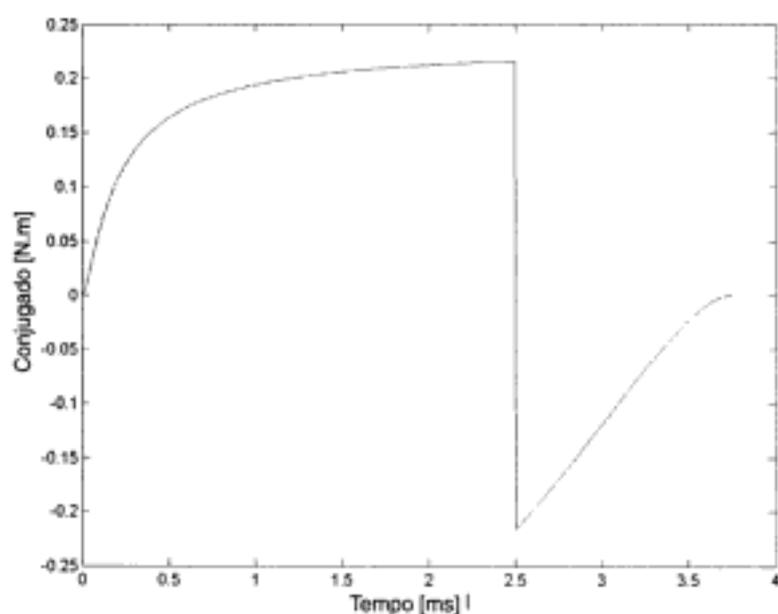
% Agora faça os cálculos
for n = 1:(N+1)
    t(n) = tmax*(n-1)/N;
    thetam(n) = -(pi/3) + (400*pi/3) * t(n);

    if (thetam(n) <= 0)
        i(n) = 100*t(n)/(0.005 + 51.1 *t(n));
        dldltheta = 0.122;
        Torque(n) = 0.5*i(n)^2*dldltheta;
        Posintegral = Posintegral + Torque(n)*deltat;
        integral = Posintegral;
    else
        i(n) = (0.25 - 200*(t(n) - 2.5e-3))/(0.005+51.1*(5e-3 - t(n)));
        dldltheta = -0.122;
        Torque(n) = 0.5*i(n)^2*dldltheta;
        integral = integral + Torque(n)*deltat;
    end
end

```



(a)



(b)

**FIGURA 8.11** Exemplo 8.3: (a) corrente da fase 1 e (b) perfil do conjugado.

```

end
end
fprintf('\nIntegral do conjugado positivo = %g [N-m-s]', Posintegral)
fprintf('\nIntegral do conjugado = %g [N-m-s]\n', integral)
plot(t*1000,i)
xlabel('Tempo [ms]')
ylabel('Corrente de fase [A]')
pause
plot(t*1000,Torque)
xlabel('Tempo [ms]')
ylabel('Conjugado [N.m]')

```

## PROBLEMA PRÁTICO 8.3



Reconsidere o Exemplo 8.3 supondo que uma tensão de  $-250$  V seja aplicada para desligar a corrente de fase. Use MATLAB para calcular a integral da curva completa de conjugado *versus* tempo e compare-a com a integral da curva de conjugado *versus* tempo para o intervalo de tempo durante o qual o conjugado é positivo.

### ■ Solução

A corrente retorna a zero em  $t = 3,5$  ms. A integral da curva completa de conjugado é  $3,67 \times 10^{-4}$  N.m.s, ao passo que a integral para apenas a porção positiva da curva de conjugado, correspondendo ao conjugado positivo, permanece sendo igual a  $4,56 \times 10^{-4}$  N · m · s. Nesse caso, o conjugado negativo produz uma redução de 20 por cento de conjugado no que estaria disponível se, de outro modo, a corrente pudesse ser reduzida instantaneamente a zero.

O Exemplo 8.3 ilustra aspectos importantes do desempenho das MRVs que não surgem em uma análise idealizada como a do Exemplo 8.1, mas que desempenham um papel extremamente importante nas aplicações práticas. É evidente que não é possível aplicar de modo imediato correntes de fase com formas de onda arbitrárias. As indutâncias de enrolamento (e suas derivadas em relação ao tempo) afetam significativamente as formas de onda das correntes que podem ser obtidas com uma dada tensão aplicada.

Em geral, o problema torna-se mais grave quando a velocidade do rotor é aumentada. A análise do Exemplo 8.3, para uma dada tensão aplicada, mostra que (1) quando a velocidade é aumentada, a corrente ocupará uma fração maior do tempo disponível, durante o qual  $dL(\theta_m)/d\theta_m$  é positiva, para atingir um dado nível e que (2) a corrente de regime permanente que pode ser obtida é progressivamente reduzida. Um método comum para maximizar o conjugado disponível é aplicar a tensão de fase um pouco adiantada em relação ao instante em  $dL(\theta_m)/d\theta_m$  começa a aumentar. Isso dá tempo para que a corrente estabeleça-se com um nível significativo antes que a produção de conjugado comece.

Uma dificuldade ainda mais significativa (também ilustrada no Exemplo 8.3) é que, da mesma forma que as correntes requerem uma quantidade significativa de tempo para crescer no início de um ciclo em que são ligadas, elas também requerem tempo para diminuir no final. Como resultado, quando a excitação de fase é removida próximo do final ou no próprio final de um período de  $dL(\theta_m)/d\theta_m$  positiva, é altamente provável que ainda haja corrente de fase quando  $dL(\theta_m)/d\theta_m$  torna-se negativa. Desse modo, haverá um período de produção de conjugado negativo, o que reduz a capacidade efetiva da MRV para produzir conjugado.

Uma maneira de se evitar essa produção de conjugado negativo seria desligar a excitação de fase suficientemente antes dentro do ciclo. Desse modo, a corrente terá diminuído essencialmente até zero quando a  $dL(\theta_m)/d\theta_m$  tornar-se negativa. No entanto, é claro que há uma diminuição de desempenho porque o desligamento da corrente de fase enquanto  $dL(\theta_m)/d\theta_m$  é positiva também reduz a produção de conjugado positivo. Como resultado, freqüentemente é necessário aceitar uma certa quantidade de conjugado negativo (para se conseguir o conjugado positivo requerido) e compensar essa diminuição produzindo um conjugado positivo adicional a partir de uma outra fase.

Uma outra possibilidade está ilustrada na Fig. 8.12. A Fig. 8.12a mostra uma vista em corte de uma MRV 4/2 similar à da Fig. 8.3, exceto que o ângulo dos pólos do rotor foi aumentado de  $60^\circ$  para  $75^\circ$ , com o resultado de que os pólos do rotor ultrapassam os do estator em  $15^\circ$ . Como pode ser visto na Fig. 8.12b, isso resulta em uma região de indutância constante separando as regiões de  $dL(\theta_m)/d\theta_m$  positiva e negativa. Por sua vez, isso proporciona um tempo adicional para que a corrente de fase seja desligada antes que seja alcançada a região de produção negativa de conjugado.

## 8.4 ANÁLISE NÃO-LINEAR

Como a maioria das máquinas elétricas, as MRVs empregam materiais magnéticos tanto para direcionar e dar forma aos campos magnéticos da máquina como para aumentar a densidade de fluxo magnético que pode ser obtida com uma dada amplitude de corrente. Na prática, para obter o máximo benefício do material magnético, as MRVs funcionam com uma densidade de fluxo suficientemente elevada para que o material magnético esteja em saturação sob condições normais de operação.

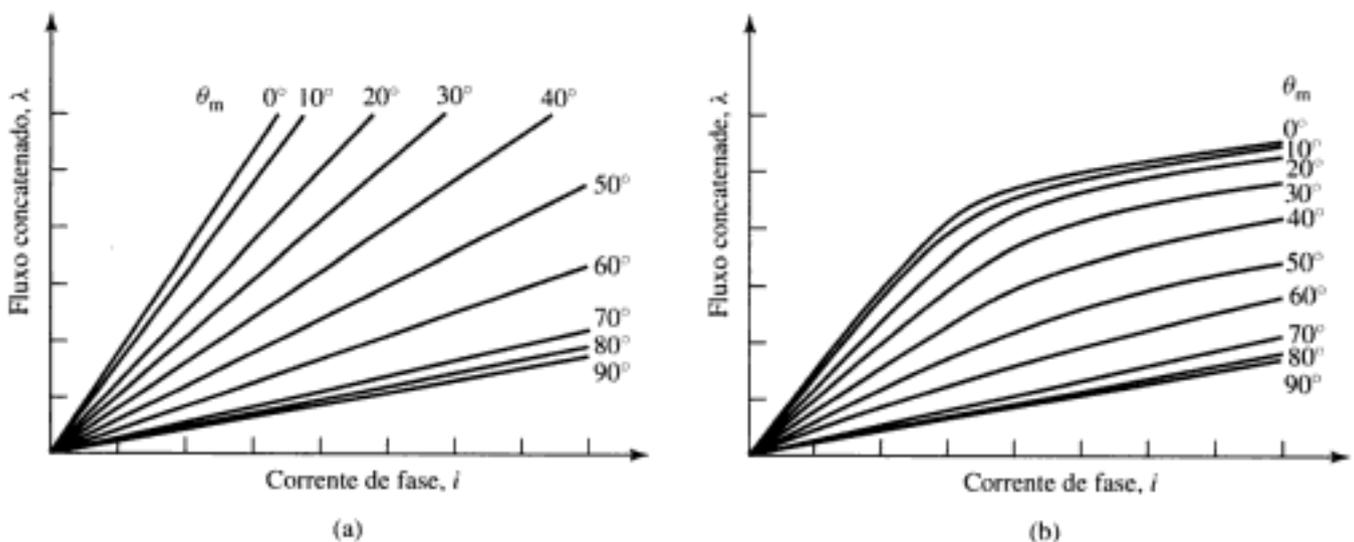
Como nas máquinas síncronas, CC e de indução discutidas nos Capítulos 5 a 7, a densidade de fluxo real de operação é determinada fazendo um compromisso entre grandezas como custo, rendimento e relação entre conjugado e massa. Entretanto, como a MRV e sua eletrônica de acionamento estão interrelacionadas muito de perto, o projeto de MRVs envolve tipicamente compromissos adicionais que, por sua vez, afetam a escolha da densidade de fluxo de operação.

A Fig. 8.2 mostra curvas típicas de indutância  $\times$  ângulo para as MRVs da Fig. 8.1. Essas curvas são características de todas as MRVs. Deve-se levar em consideração que o uso do conceito de indutância é estritamente válido apenas sob a condição de que o circuito magnético da máquina seja linear de modo que a densidade de fluxo (e conseqüentemente o fluxo concatenado do enrolamento) seja proporcional à corrente de enrolamento. Essa análise linear baseia-se na suposição de que o material magnético do motor tenha permeabilidade magnética constante. Essa suposição foi usada em todas as análises anteriores deste capítulo.

Uma representação alternativa da curva característica de fluxo concatenado  $\times$  corrente de uma MRV está mostrada na Fig. 8.13. Essa representação consiste em uma série de gráficos de fluxo concatenado *versus* corrente para diversos ângulos do rotor. Nessa figura, as curvas correspondem a uma máquina com um rotor de dois pólos como o da Fig. 8.1 e, portanto, uma plotagem de curvas de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  é suficiente para caracterizar completamente a máquina.

A Fig. 8.13a mostra o conjunto de curvas  $\lambda \times i$  que seriam medidas em uma máquina com comportamento magnético linear, isto é, permeabilidade magnética constante e nenhuma saturação magnética. Para cada ângulo do rotor, a curva é uma linha reta cuja inclinação corresponde à indutância  $L(\theta_m)$  naquela posição angular. De fato, uma plotagem de  $L(\theta_m)$  *versus*  $\theta_m$ , como a da Fig. 8.2, é uma representação equivalente daquela da Fig. 8.13a.

Na prática, as MRVs operam de fato com o seu material magnético saturado. Suas curvas  $\lambda$  *versus*  $i$  assumem a forma da Fig. 8.13b. Observe que, para níveis baixos de corrente, as



**FIGURA 8.13** Gráficos de  $\lambda$  *versus*  $i$  para uma MRV com comportamento magnético (a) linear e (b) não-linear.

```

    plot(i,Lambda)
    if m==1
hold
    end
end
hold
xlabel('Corrente [A]')
ylabel('Lambda [Nb]')
title('Família de curvas lambda-i quando teta_m varia de 0 a 90 graus')
text(17,.7,'teta_m = 0 graus')
text(20,.06,'teta_m = 90 graus')
%(b) Agora integre para obter as áreas.

%Lambda de pico em 0 graus, 25 ampères
lambdamax = 25*(0.005+0.09*(8/(25+8)));

AreaWnet = 0;
AreaWrec = 0;

% 100 passos de integração
deli = 25/100;

for n=1:101
    i(n) = 25*(n-1)/100;
    AreaWnet = AreaWnet + deli*i(n)*(0.09)*(8/(i(n)+8));
    AreaWrec = AreaWrec + deli*(lambdamax - i(n))*(0.005+0.09*(8/(i(n)+8)));
end

Ratio = (AreaWrec + AreaWnet)/AreaWnet;

fprintf('\nParte (b) Razão = %g',Ratio)

%(c) Calcule a potência

rpm = 2500;
rps = 2500/60;
T = 1/rps;
Pphase = 2*AreaWnet/T;
Ptot = 2*Pphase;

fprintf('\n\nParte (c) ÁreaWliq = %g [joules]', AreaWnet)
fprintf('\n          Pfase = %g [W] e Ptot = %g[W]\n', Pphase, Ptot)

```

#### PROBLEMA PRÁTICO 8.4



Considere uma MRV bifásica idêntica àquela do Exemplo 8.4, exceto que ela tem uma indutância de dispersão adicional de 5 mH em cada fase. (a) Calcule a razão entre a potência nominal do inversor e a potência de saída líquida da MRV para o seguinte ciclo ideal de operação:

- (i) A corrente eleva-se instantaneamente até 25 A quando  $\theta_m = -90^\circ$ .
- (ii) A corrente é então mantida constante enquanto o rotor gira até  $\theta_m = 10^\circ$ .
- (iii) Em  $\theta_m = 10^\circ$ , a corrente é reduzida a zero.

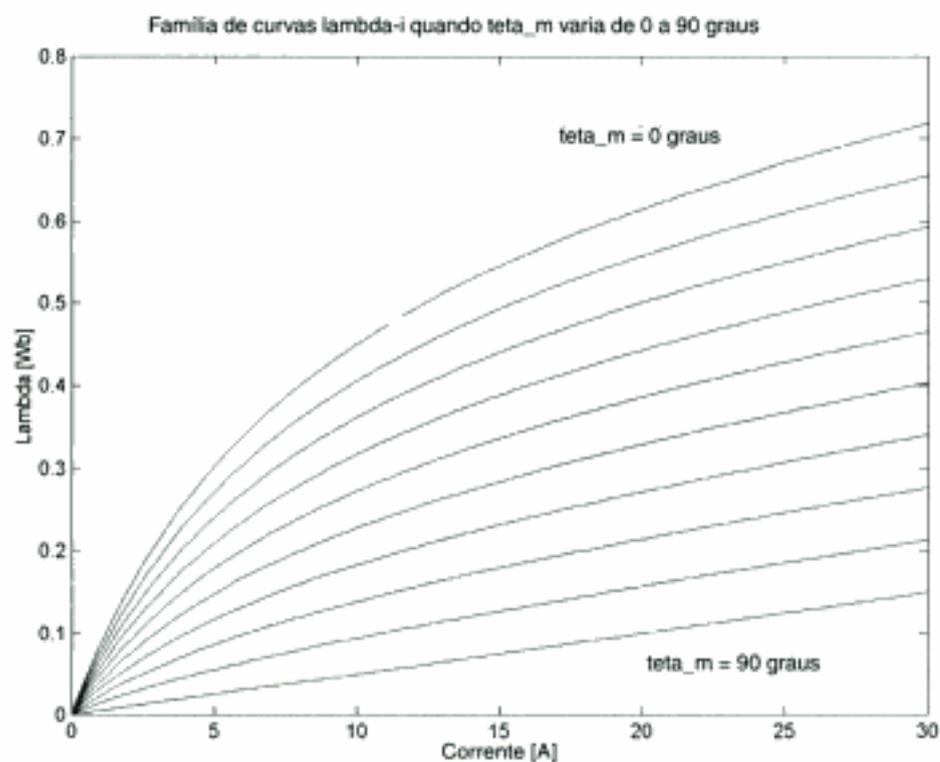
(b) Supondo que a MRV esteja operando como motor, usando o ciclo descrito na parte (a), e esteja girando com uma velocidade constante de 2500 rpm, calcule a potência líquida eletromecânica fornecida ao rotor.

#### ■ Solução

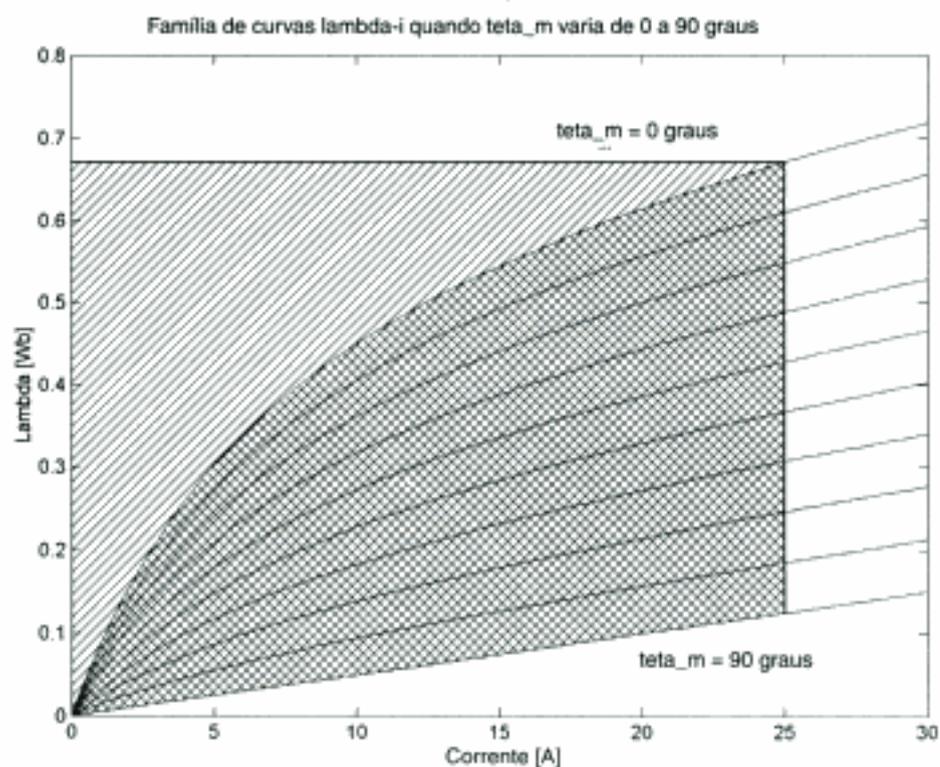
a.

$$\frac{\text{Potência nominal do inversor}}{\text{Potência líquida de saída}} = 1,75$$

b.  $P_{mec} = 1467 \text{ W}$



(a)



(b)

**FIGURA 8.15** (a) Curvas  $\lambda_1 \times i_1$  para o Exemplo 8.4. (b) Áreas usadas no cálculo da parte (b).

Os efeitos de saturação representam claramente um papel significativo no desempenho da maioria das MRVs e devem ser levados em consideração. Além disso, o ciclo ideal de operação ilustrado no Exemplo 8.4 não pode, naturalmente, ser alcançado na prática pois é provável que surja algum movimento do rotor dentro da escala de tempo em que ocorrem as variações de corrente. Como resultado, freqüentemente é necessário usar pacotes de análise numérica, tais como programas de elementos finitos, como parte do processo de projeto de sistemas práticos de MRVs. Muitos desses programas incorporam a capacidade de modelar os efeitos não-lineares da saturação magnética assim como os efeitos mecânicos (por exemplo, o movimento do rotor) e os efeitos elétricos dinâmicos (por exemplo, durante a elevação da corrente).

Como vimos, tipicamente o projeto de um sistema de acionamento de uma MRV requer que seja feito um compromisso. De um lado, para uma dada potência de saída, a saturação tende a aumentar o tamanho da MRV. Por outro lado, ao se comparar dois sistemas MRV de mesma potência de saída, o sistema com o nível mais alto de saturação irá requerer tipicamente um inversor com uma potência nominal (VA) mais baixa. Assim, o projeto final será determinado por um compromisso entre tamanho, custo e rendimento da MRV e do inversor.

## 8.5 MOTORES DE PASSO

Como vimos, quando as fases de uma MRV são energizadas seqüencialmente de modo aproximadamente passo a passo, a MRV irá girar por um ângulo específico a cada passo. Motores projetados especificamente para tirar vantagem dessa característica são referidos como *motores de passo*. Freqüentemente, os motores de passo são projetados para produzir um grande número de passos por revolução, por exemplo, 50, 100 ou 200 passos (correspondendo a uma rotação de  $7,2^\circ$ ,  $3,6^\circ$  e  $1,8^\circ$  por passo).

Um característica importante do motor de passo é sua compatibilidade com os sistemas eletrônicos digitais. Esses sistemas são comuns em uma ampla variedade de aplicações e continuam a tornar-se mais potentes e menos dispendiosos. Por exemplo, o motor de passo é usado freqüentemente em sistemas de controle digital em que o motor recebe comandos a laço aberto na forma de um trem de pulsos para girar um eixo ou mover um objeto por uma distância específica. Aplicações típicas incluem motores de alimentação de papel e posicionamento da cabeça de impressão em impressoras e plotters, motores de acionamento e posicionamento da cabeça em unidades de disco e toca-CDs, e motores de posicionamento da mesa de trabalho e da ferramenta em equipamentos de usinagem controlados numericamente. Em muitas aplicações, a informação de posição pode ser obtida simplesmente deixando registrado o número de pulsos enviados ao motor, caso em que não são necessários sensores de posição nem controle realimentado.

A resolução angular de uma MRV é determinada pelo número de dentes do rotor e do estator e pode ser grandemente aumentada por técnicas como a de *estrutura em castelo*, como foi discutido na Seção 8.2. Os motores de passo são oferecidos com uma ampla variedade de modelos e configurações. Além das configurações de relutância variável, há também as de ímã permanente e as híbridas. O uso de ímãs permanentes combinados com uma geometria de relutância variável pode aumentar significativamente o conjugado e a exatidão de posicionamento de um motor de passo.

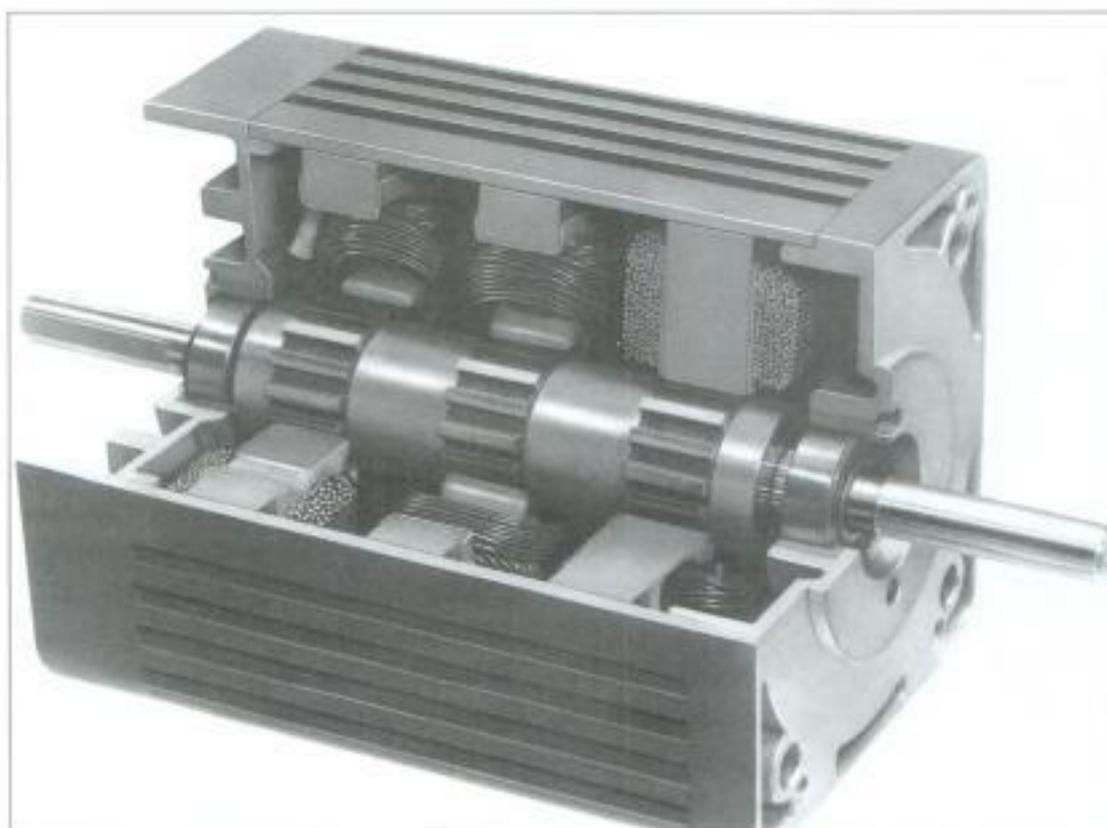
As configurações de MRV discutidas nas Seções 8.1 a 8.3 consistem em um rotor e um estator com múltiplas fases. Um motor de passo com essa configuração é chamado de *motor de passo de relutância variável de empilhamento simples\**. Uma forma alternativa de motor

\* N. de T.: Em inglês, *single stack, variable-reluctance stepping motor*.

de passo de relutância variável é conhecida como *motor de passo de relutância variável de empilhamento múltiplo\**. Nessa configuração, o motor pode ser considerado como sendo constituído por um conjunto de MRVs monofásicas axialmente deslocadas e montadas sobre um único eixo.

A Fig. 8.16 mostra um motor de passo de relutância variável de empilhamento múltiplo. Esse tipo de motor consiste em uma série de empilhamentos, cada um deslocado axialmente, de geometria idêntica e cada um excitado por um enrolamento monofásico, como está mostrado na Fig. 8.17. O motor da Fig. 8.16 tem três empilhamentos e três fases, embora motores com fases e empilhamentos adicionais sejam comuns. Em um motor com  $n_s$  empilhamentos (*stacks*), o rotor ou o estator (mas não ambos) em cada empilhamento está deslocado de  $1/n_s$  vezes o ângulo de passo do pólo. Na Fig. 8.16, os pólos do rotor estão alinhados, mas os estatores estão deslocados angularmente de um terço do passo do pólo. Excitando sucessivamente as fases individuais, o rotor pode ser girado em incrementos iguais ao ângulo de deslocamento.

Um diagrama esquemático de um motor de passo bifásico de ímã permanente e um rotor de dois pólos está mostrado na Fig. 8.18. Observe que essa máquina é de fato uma máquina síncrona bifásica, semelhante por exemplo à máquina trifásica CA de ímã permanente da Fig. 5.29. A distinção entre esse motor de passo e um motor síncrono vem não da construção



**FIGURA 8.16** Vista em corte longitudinal de um motor de passo trifásico de relutância variável e empilhamento triplo. (*Warner Electric*)

\* N. de T.: Em inglês, *multistack, variable-reluctance stepping motor*.

do motor mas de como o motor é operado. Tipicamente, o motor síncrono é planejado para acionar uma carga a uma velocidade específica, ao passo que o motor de passo é planejado tipicamente para controlar a posição de uma carga.

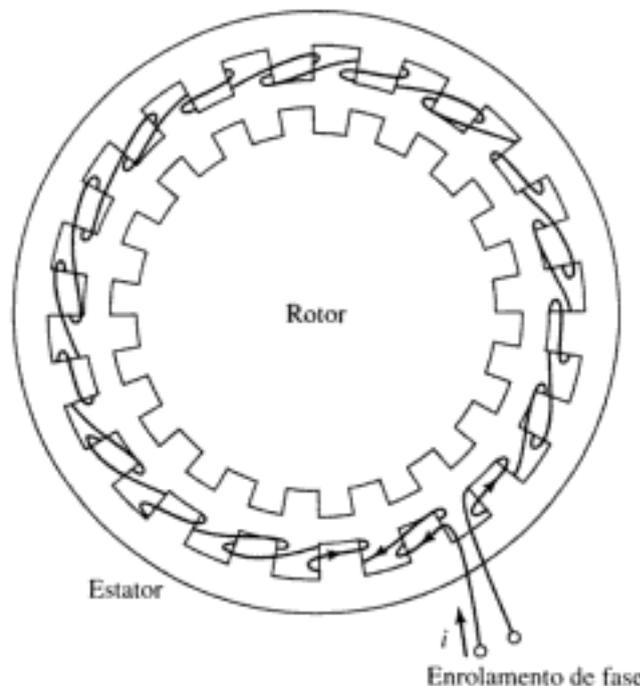
O rotor do motor de passo da Fig. 8.18 assume os ângulos  $\theta_m = 0, 45^\circ, 90^\circ, \dots$  quando os enrolamentos são excitados na seqüência:

1. Corrente positiva na fase 1 apenas.
2. Correntes positivas de mesmo módulo nas fases 1 e 2.
3. Corrente positiva na fase 2 apenas.
4. Corrente negativa na fase 1 e corrente positiva na fase 2, ambas de mesmo módulo.
5. Corrente negativa na fase 1 apenas.
6. E assim por diante.

Observe que, se o rotor de imã permanente fosse substituído por um rotor ferromagnético, o rotor iria se deslocar de modo similar.

O motor de passo da Fig. 8.18 também pode ser usado para passos de  $90^\circ$  se as bobinas forem excitadas uma a uma. Nesse último caso, apenas um rotor de imã permanente pode ser usado. Isso pode ser visto a partir das curvas de conjugado  $\times$  ângulo mostradas na Fig. 8.19 para esses dois tipos de motores. Ao passo que o rotor de imã permanente produz conjugado de pico quando a excitação está deslocada de  $90^\circ$ , o rotor ferromagnético produz conjugado nulo e pode se mover em qualquer sentido.

A posição do rotor no motor de passo de imã permanente da Fig. 8.18 é definida sem ambigüidade pelas correntes de enrolamento e depende do sentido das correntes de fase. A inversão das correntes de fase fará com que o rotor inverta o sentido. Isso contrasta com a configuração de MRV com rotor ferromagnético. Nessa, há duas posições de rotor igualmente estáveis para uma combinação qualquer de correntes de fase e, conseqüentemente, a posição do rotor não pode ser determinada de forma não ambígua. Os motores de passo de imã permanente são também diferentes dos de relutância variável porque o conjugado que tende a ali-



**FIGURA 8.17** Diagrama de um empilhamento e uma fase de um motor de passo de relutância variável multifásico, como o da Fig. 8.16. Para um motor de  $n_p$  empilhamentos, o rotor ou o estator (mas não ambos) de cada empilhamento está deslocado de  $1/n_p$  vezes o passo do motor.

nhar o rotor com os pólos do estator será gerado mesmo quando não há excitação aplicada aos enrolamentos de fase. Assim, o rotor apresentará posições preferidas de repouso quando não estiver excitado, um fato que pode ser aproveitado em algumas aplicações.

### EXEMPLO 8.5

Usando as técnicas do Capítulo 3 e desprezando os efeitos de saturação, o conjugado de um motor de passo bifásico de ímã permanente com a forma da Fig. 8.18 pode ser expresso como

$$T_{mec} = T_0 (i_1 \cos \theta_m + i_2 \sin \theta_m)$$

em que  $T_0$  é uma constante positiva que depende da geometria do motor e das propriedades do ímã permanente.

Calcule as posições de repouso (conjugado nulo) que resultarão se o motor for comandado por um sistema de acionamento tal que cada corrente de fase possa ser ajustada com três valores iguais a  $-I_0$ , 0 e  $I_0$ . Usando esse acionamento, qual é o tamanho do passo do motor?

#### ■ Solução

Em geral, as posições de conjugado nulo do motor podem ser encontradas tornando a expressão do conjugado igual a zero e obtendo a posição resultante do rotor. Assim, fazendo

$$T_{mec} = T_0 (i_1 \sin \theta_m - i_2 \cos \theta_m) = 0$$

obtém-se

$$i_1 \sin \theta_m - i_2 \cos \theta_m = 0$$

ou

$$\theta_m = \arctg \left( \frac{i_2}{i_1} \right)$$

Observe que nem todas essas posições de conjugado nulo correspondem a posições de equilíbrio estável. Por exemplo, operando com  $i_1 = I_0$  e  $i_2 = 0$ , obtêm-se duas posições de conjugado nulo:  $\theta_m = 0^\circ$  e  $\theta_m = 180^\circ$ . No entanto, apenas a posição  $\theta_m = 0^\circ$  será estável. Isso está em analogia direta com o caso de um pêndulo suspenso que apresenta conjugado nulo quando está suspenso para baixo ( $\theta_m = 0^\circ$ ) e também quando está em posição invertida ( $\theta_m = 180^\circ$ ). É claro que a mínima perturbação da posição de pêndulo invertido fará com que ele gire para baixo e que eventualmente entre em repouso na posição suspensa estável.

As posições de repouso estável do rotor são determinadas pela condição de que um conjugado de restauração seja produzido quando o rotor se afasta daquela posição. Assim, um conjugado negativo deve resultar se o rotor mover-se no sentido  $+\theta_m$ , e um conjugado positivo deve resultar quando o movimento ocorrer no sentido  $-\theta_m$ . Matematicamente, isso pode ser expresso como sendo uma condição adicional em relação ao conjugado, quando ele está na posição de repouso

$$\left. \frac{\partial T_{mec}}{\partial \theta_m} \right|_{i_1, i_2} < 0$$

em que a derivada parcial é calculada na posição de conjugado nulo e é calculada mantendo constantes as correntes. Assim, nesse caso, a posição de repouso deve satisfazer a condição adicional de que

$$\left. \frac{\partial T_{mec}}{\partial \theta_m} \right|_{i_1, i_2} = -T_0 (i_1 \cos \theta_m + i_2 \sin \theta_m) < 0$$

Nessa equação, por exemplo, vemos que com  $i_1 = I_0$  e  $i_2 = 0$ , para  $\theta_m = 0^\circ$ , obtemos  $\partial T_{mec} / \partial \theta_m < 0$ , e portanto  $\theta_m = 0^\circ$  é uma posição de repouso estável. De modo similar, em  $\theta_m = 180^\circ$ , obtemos  $\partial T_{mec} / \partial \theta_m > 0$  e, portanto,  $\theta_m = 180^\circ$  não é uma posição de repouso estável.

Usando essas relações, a Tabela 8.1 lista as posições de repouso estável do rotor para diversas combinações de correntes de fase.

A partir dessa tabela, vemos que esse acionamento produz um tamanho de passo de  $45^\circ$ .

**TABELA 8.1** Posições de repouso do rotor do Exemplo 8.5

$i_1$	$i_2$	$\theta_m$
0	0	-
0	$-I_0$	$270^\circ$
0	$I_0$	$90^\circ$
$-I_0$	0	$180^\circ$
$-I_0$	$-I_0$	$225^\circ$
$-I_0$	$I_0$	$135^\circ$
$I_0$	0	$0^\circ$
$I_0$	$-I_0$	$315^\circ$
$I_0$	$I_0$	$45^\circ$

### PROBLEMA PRÁTICO 8.5

Para se obter um tamanho de passo de  $22,5^\circ$ , o acionamento do motor do Exemplo 8.5 é modificado de modo que cada fase possa ser acionada por correntes de intensidade  $0, \pm kI_0$  e  $\pm I_0$ . Encontre o valor necessário para a constante  $k$ .

#### ■ Solução

$$k = \arctg(22,5^\circ) = 0,4142$$

No Exemplo 8.5, vemos que as posições de equilíbrio estável de um motor de passo sem carga satisfaz as condições de conjugado nulo, isto é,

$$T_{mec} = 0 \quad (8.20)$$

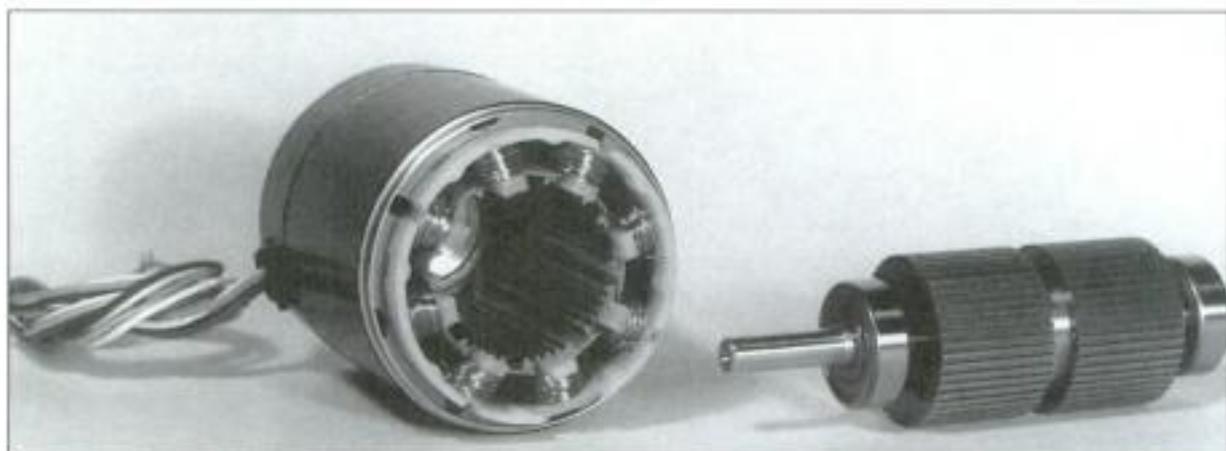
e que há um conjugado positivo de restauração, isto é,

$$\left. \frac{\partial T_{mec}}{\partial \theta_m} \right|_{i_1, i_2} < 0 \quad (8.21)$$

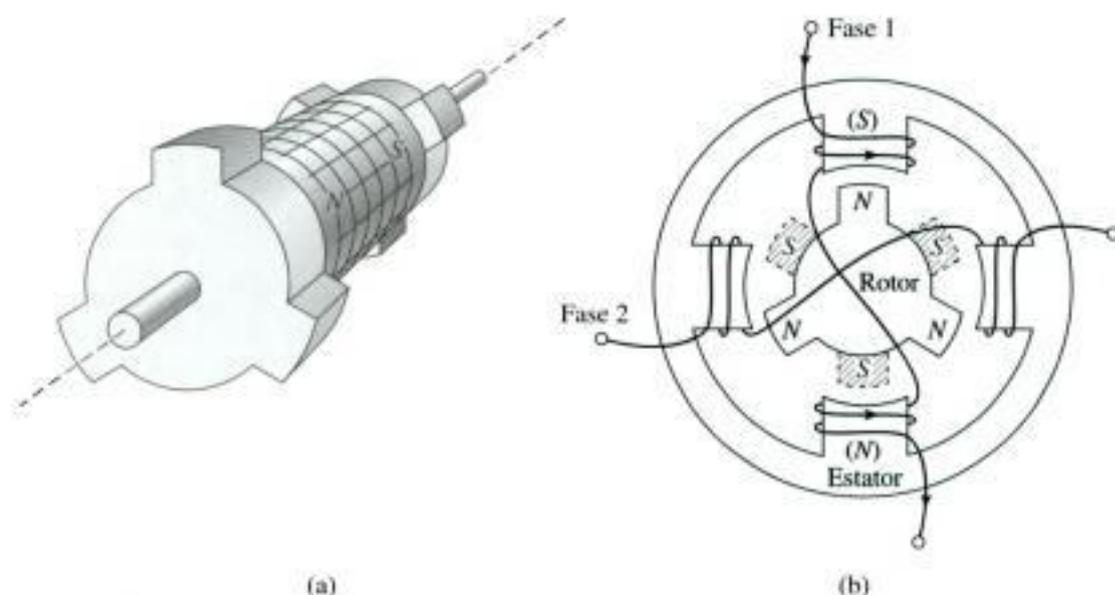
Na prática, naturalmente, haverá um conjugado de carga finito tendendo a afastar o motor de passo dessas posições idealizadas. Para sistemas de controle de laço aberto (isto é, sistemas de controle em que não há nenhum mecanismo para a realimentação da posição), um grau elevado de controle da posição pode ser alcançado projetando o motor de passo para produzir um conjugado elevado de restauração (isto é, um valor elevado de  $\partial T_{mec} / \partial \theta_m$ ). Nesse motor de passo, os conjugados de carga causarão apenas um pequeno afastamento do rotor das posições idealizadas que satisfazem as Equações 8.20 e 8.21.

O Exemplo 8.5 mostra também como combinações cuidadosamente controladas das correntes de fase podem melhorar a resolução de um motor de passo. Esse modo, referido como *técnica de micropasso\**, pode ser usado para se obter resoluções de passo aumentadas, em

\* N. de T.: *Microstepping*, em inglês.



**FIGURA 8.20** Um motor de passo híbrido de  $1,8^\circ$  desmontado. (*Oriental Motor*)



**FIGURA 8.21** Vista esquemática de um motor de passo híbrido. (a) Rotor de empilhamento duplo mostrando o ímã permanente orientado axialmente e as peças polares deslocadas de metade do passo polar. (b) Vista da extremidade do pólo norte do rotor mostrando o pólo sul na extremidade mais distante (mostrado hachurado). A fase 1 do estator é energizada alinhando o rotor como está mostrado.

Para girar o rotor, a excitação é retirada da fase 1 e a fase 2 é excitada. Se a fase 2 for excitada de modo tal que o pólo do estator do lado direito seja um pólo sul e o do lado esquerdo seja um pólo norte, o rotor realizará uma rotação de  $30^\circ$  em sentido anti-horário. De modo semelhante, se a excitação oposta for aplicada ao enrolamento da fase 2, uma rotação de  $30^\circ$  em sentido horário irá ocorrer. Assim, com a aplicação alternada de excitações com polaridades apropriadas nas fase 1 e 2, pode-se fazer com que o rotor execute uma rotação com um incremento angular especificado em ambos os sentidos.

Na prática, para se obter uma resolução angular bem melhor, os motores de passo híbridos são geralmente construídos com mais pólos no rotor do que os mostrados no motor esquemático da Fig. 8.21. Correspondentemente, os pólos do estator são freqüentemente construídos em forma de castelo (veja a Fig. 8.8) de modo a aumentar ainda mais a resolução angular. Além disso, eles podem ser construídos com mais de dois empilhamentos por rotor.

de controle microprocessados de baixo custo e flexíveis, é que as MRVs começaram a ter aplicação em ampla escala em sistemas que vão desde tração até sistemas de controle preciso de posição com conjugado elevado em aplicações de robótica.

A experiência prática com MRVs mostrou que elas têm potencial para uma confiabilidade elevada. Isso, em parte, deve-se à simplicidade de sua construção e ao fato de que não há enrolamentos em seus rotores. Além disso, os acionadores de MRVs podem operar bem (com uma potência um tanto reduzida) após a ocorrência de falhas em uma ou mais das fases, tanto na máquina como no inversor. As MRVs têm tipicamente um número maior de fases no estator (quatro ou mais) e, desse modo, uma potência de saída significativa ainda pode ser obtida mesmo se algumas dessas fases ficarem fora de serviço. Como não há excitação no rotor, não haverá tensão gerada em um enrolamento de fase que fique em aberto ou corrente gerada em uma fase que entre em curto-circuito. Desse modo, a máquina pode continuar a funcionar sem risco de maiores danos ou aquecimento e perdas adicionais.

Como as MRVs podem ser construídas facilmente com um grande número de dentes no rotor e no estator (resultando em grandes variações de indutância com pequenas mudanças no ângulo do rotor), elas podem ser construídas para produzir um conjugado muito elevado por unidade de volume. Entretanto, há um compromisso entre conjugado e velocidade e essas máquinas terão uma baixa velocidade de rotação (consistente com o fato de que só uma dada quantidade de potência pode ser produzida para um dado tamanho de máquina). No extremo oposto, a configuração simples de um rotor de MRV e o fato de que ele não contém enrolamentos sugerem que seja possível construir rotores de MRV extremamente robustos. Esses rotores podem suportar altas velocidades, sendo que motores capazes de funcionar com velocidades acima de 200.000 rpm foram construídos.

Finalmente, vimos que a saturação desempenha um papel importante no desempenho de uma MRV. Na medida em que progressos recentes na eletrônica de potência e nos circuitos microeletrônicos trouxeram os sistemas de acionamento MRV até o campo prático, assim também aconteceu com as técnicas analíticas baseadas em computador em relação à análise dos campos magnéticos. Na prática, o uso dessas técnicas tornou possível realizar projetos otimizados de sistemas de acionamento MRV que são competitivos com tecnologias alternativas em muitas aplicações.

Os motores de passo estão intimamente relacionados com as MRVs na medida em que a excitação de cada fase sucessiva do estator resulta em uma rotação angular específica do rotor. Os motores de passo estão disponíveis em uma ampla variedade de modelos e configurações. Entre essas, temos as configurações de relutância variável, imã permanente e híbrida. A posição do rotor de um motor de passo de relutância variável não é determinada de forma única pelas correntes de fase, pois as indutâncias de fase não são funções únicas do ângulo do rotor. O acréscimo de um imã permanente altera essa situação e a posição do rotor de um motor de passo de imã permanente é uma função única das correntes de fase.

Os motores de passo são os parceiros eletromecânicos da eletrônica digital. Pela aplicação apropriada de correntes de fase aos enrolamentos do estator, pode-se fazer com que esses motores executem rotações em passos bem definidos atingindo uma fração de grau por pulso. Desse modo, são componentes essenciais dos sistemas eletromecânicos controlados digitalmente nos quais é necessário um alto grau de precisão. São encontrados em uma ampla variedade de aplicações, incluindo máquinas-ferramentas controladas numericamente, impressoras, *plotters* e unidades de disco.

## 8.7 PROBLEMAS

- 8.1** Repita o Exemplo 8.1 para uma máquina idêntica à analisada naquele exemplo, exceto que o ângulo das faces dos pólos do estator é  $\beta = 45^\circ$ .
- 8.2** No parágrafo que antecede a Equação 8.1, o texto afirma que “supondo que a relutância do ferro seja desprezível, as indutâncias mútuas entre as fases da MRV duplamente saliente da Fig. 8.1b serão zero, com exceção de uma pequena componente essencialmente constante associada ao fluxo de dispersão.” Desprezando quaisquer efeitos devidos ao fluxo de dispersão, use técnicas de circuitos magnéticos para mostrar que essa afirmação é verdadeira.
- 8.3** Use técnicas de circuito magnético para mostrar que a indutância mútua entre fases na MRV 6/4 da Fig. 8.5 é zero, supondo uma permeabilidade infinita para o ferro do estator e do rotor. Despreze quaisquer contribuições devidas ao fluxo de dispersão.
- 8.4** Uma MRV 6/4 da forma mostrada na Fig. 8.5 tem as seguintes propriedades:

Ângulo dos pólos do estator  $\beta = 30^\circ$

Ângulo dos pólos do rotor  $\alpha = 30^\circ$

Comprimento do entreferro  $g = 0,35 \text{ mm}$

Raio externo do rotor  $R = 5,1 \text{ cm}$

Comprimento ativo  $D = 7 \text{ cm}$

Essa máquina é ligada como um motor trifásico com os pólos opostos conectados em série para formar cada um dos enrolamentos de fase. Há 40 espiras por pólo (80 espiras por fase). O ferro do rotor e do estator pode ser considerado como tendo permeabilidade infinita e, portanto, os efeitos de indutância mútua podem ser desprezados.

- Definindo o zero do ângulo do rotor  $\theta_m$  como sendo a posição para a qual a indutância da fase 1 é máxima, plote a indutância da fase 1 em função do ângulo do rotor. Inclua também legendas.
- Sobre o gráfico da parte (a), plote as indutâncias das fases 2 e 3.
- Encontre a corrente  $I_0$  da fase 1 da qual resulta uma densidade de fluxo magnético sob a face polar da fase 1 de 1,0 T no entreferro, quando o rotor está em uma posição de indutância máxima para a fase 1.
- Assumindo que a corrente da fase 1 seja mantida constante com o valor encontrado na parte (c) e que não haja correntes nas fases 2 e 3, plote o conjugado em função da posição do rotor.

O motor deve ser acionado com um inversor trifásico com uma fonte de corrente que pode ser desligada ou ligada para fornecer corrente zero ou corrente constante de intensidade  $I_0$  nas fases 2 e 3. Plote o conjugado em função da posição do rotor.

- Com a suposição ideal de que as correntes podem ser ligadas instantaneamente, determine a seqüência de correntes de fase (em função da posição do rotor) da qual resultará um conjugado positivo constante, independentemente da posição do rotor.
  - Se a freqüência de excitação do estator for tal que seja necessário um tempo de  $T = 35 \text{ ms}$  para percorrer a seqüência de todas as três fases submetidas às condições de excitação da parte (e), encontre a velocidade angular do rotor e o seu sentido de rotação.
- 8.5** Na Seção 8.2, quando se discute a Fig. 8.5, o texto afirma: “Em uma MRV 6/4, além do fato de que não há posições de alinhamento simultâneo, pode-se ver também que

não há nenhuma posição do rotor na qual seja possível produzir conjugado somente de mesmo sinal (positivo ou negativo).” Mostre que essa afirmação é verdadeira.

- 8.6** Considere uma MRV 6/8 trifásica. As fases do estator são excitadas seqüencialmente exigindo um tempo total de 15 ms. Encontre a velocidade angular do rotor em rpm.
- 8.7** Os enrolamentos de fase da máquina com estrutura em castelo da Fig. 8.8 devem ser excitados ligando e desligando individualmente as fases (isto é, apenas uma fase de cada vez pode estar excitada em um instante dado qualquer).

- a. Descreva a seqüência das excitações de fase necessária para mover o rotor para a direita (sentido horário) percorrendo um ângulo de aproximadamente  $21,4^\circ$ .
- b. As fases do estator devem ser excitados com uma seqüência regular de pulsos.

Calcule a ordem das fases e o tempo entre os pulsos, necessários para produzir uma velocidade de rotação do rotor em regime permanente de 125 rpm no sentido anti-horário.

- 8.8** Substitua o rotor de 28 dentes do Problema 8.7 por um rotor com 26 dentes.
- a. A fase 1 é excitada e permite-se que o rotor entre em repouso. Se a excitação da fase 1 for removida e uma excitação for aplicada à fase 2, calcule o sentido e valor (em graus) resultantes da rotação do rotor.
- b. As fases do estator devem ser excitadas com uma seqüência regular de pulsos.

Calcule a ordem das fases e o tempo entre os pulsos, necessários para produzir uma velocidade de rotação do rotor em regime permanente de 80 rpm no sentido anti-horário.

- 8.9** Repita o Exemplo 8.3 para uma velocidade de rotor de 4500 rpm.
- 8.10** Repita o Exemplo 8.3 supondo que a velocidade do rotor seja de 4500 rpm e que uma tensão negativa de  $-250$  V seja usada para interromper a corrente de fase.

- 8.11** A MRV 6/4 trifásica do Problema 8.4 tem uma resistência de enrolamento de  $0,15 \Omega$ /fase e uma indutância de dispersão de  $4,5$  mH em cada fase. Suponha que o rotor esteja girando com uma velocidade angular constante de 1750 rpm.

- a. Plote a indutância da fase 1 em função do ângulo de rotor  $\theta_m$ .
- b. Uma tensão de  $75$  V é aplicada à fase 1 quando o rotor atinge a posição  $\theta_m = -30^\circ$  e é mantida constante até  $\theta_m = 0^\circ$ . Calcule e plote a corrente da fase 1 em função do tempo durante esse período.
- c. Quando o rotor atinge  $\theta = 0^\circ$ , a tensão aplicada é invertida de modo que uma tensão de  $-75$  V é aplicada ao enrolamento. Essa tensão é mantida até que a corrente de enrolamento chegue a zero, ponto em que o enrolamento é colocado em circuito aberto. Calcule e plote o decaimento de corrente durante o tempo em que a corrente diminui chegando a zero.
- d. Calcule e plote o conjugado durante os períodos de tempo investigados nas partes (b) e (c).

- 8.12** Suponha que a MRV dos Exemplos 8.1 e 8.3 seja modificada substituindo-se o seu rotor por um rotor em que o ângulo das faces dos pólos seja de  $75^\circ$  como está mostrado na Fig. 8.12a. Todos os demais parâmetros e dimensões da MRV permanecem os mesmos.

- a. Calcule e plote  $L(\theta_m)$  para essa máquina.
- b. Repita o Exemplo 8.3, exceto que a tensão constante de  $100$  V é aplicada primeiro em  $\theta_m = -67,5^\circ$ , quando  $dL(\theta_m)/d\theta_m$  torna-se positiva, e a tensão constante de  $-100$  V é então aplicada em  $\theta_m = -7,5^\circ$  (isto é, quando  $dL(\theta_m)/d\theta_m$  torna-se nula), mantendo-se constante até que a corrente de enrolamento chegue a zero.
- c. Plote o conjugado correspondente.





- 8.13** Repita o Exemplo 8.4 para uma MRV 4/2 bifásica e simétrica, cuja característica  $\lambda \times i$  pode ser representada pela seguinte expressão (para a fase 1) em função de  $\theta_m$  dentro do intervalo  $0 \leq \theta_m \leq 90^\circ$ :

$$\lambda_1 = \left( 0,01 + 0,15 \left( \frac{90^\circ - \theta_m}{90^\circ} \right) \left( \frac{12,0}{12,0 + i_1} \right)^{1,2} \right) i_1$$

- 8.14** Considere um motor de passo bifásico com um rotor de imã permanente como o mostrado na Fig. 8.18 e cuja curva de conjugado *versus* ângulo é como a mostrada na Fig. 8.19a. Essa máquina deve ser excitada com uma seqüência digital de quatro bits correspondendo à seguinte excitação dos enrolamentos:

bit		$i_1$	bit		$i_2$
1	2		3	4	
0	0	0	0	0	0
0	1	$-I_0$	0	1	$-I_0$
1	0	$I_0$	1	0	$I_0$
1	1	0	1	1	0

- Faça uma tabela com valores de quatro bits que irão produzir as posições angulares do rotor de  $0, 45^\circ, \dots, 315^\circ$ .
  - Percorrendo a seqüência dada pelos valores de bits encontrados na parte (a) pode-se fazer com que o motor gire. Qual é o intervalo de tempo (em milissegundos) entre as mudanças de valores de bits que resultará em uma velocidade de rotor de 1200 rpm?
- 8.15** A Fig. 8.22 mostra um motor de passo bifásico híbrido com os pólos do estator apresentando uma estrutura em castelo. O rotor está mostrado na posição que ocupa quando a corrente está entrando pelo terminal positivo da fase 1.
- Se a fase 1 for desligada e a fase 2 for excitada, com a corrente entrando pelo seu terminal positivo, calcule a respectiva rotação angular do rotor. Essa se dará em sentido horário ou anti-horário?
  - Descreva uma seqüência de excitação para os enrolamentos de fase que resultará em uma rotação uniforme do rotor em sentido horário.
  - Determine a freqüência das correntes de fase necessária para se obter uma velocidade de rotor de 8 rpm.
- 8.16** Considere um motor de passo de relutância variável multifásico e de empilhamento múltiplo, tal como o mostrado esquematicamente na Fig. 8.17, com 14 pólos em cada um dos empilhamentos do rotor e do estator e três empilhamentos com um enrolamento de fase por empilhamento. O motor é construído de modo que os pólos do estator de cada empilhamento estejam alinhados.
- Calcule o afastamento angular entre os empilhamentos do rotor.
  - Determine a freqüência das correntes de fase necessária para se obter uma velocidade de rotor de 900 rpm.

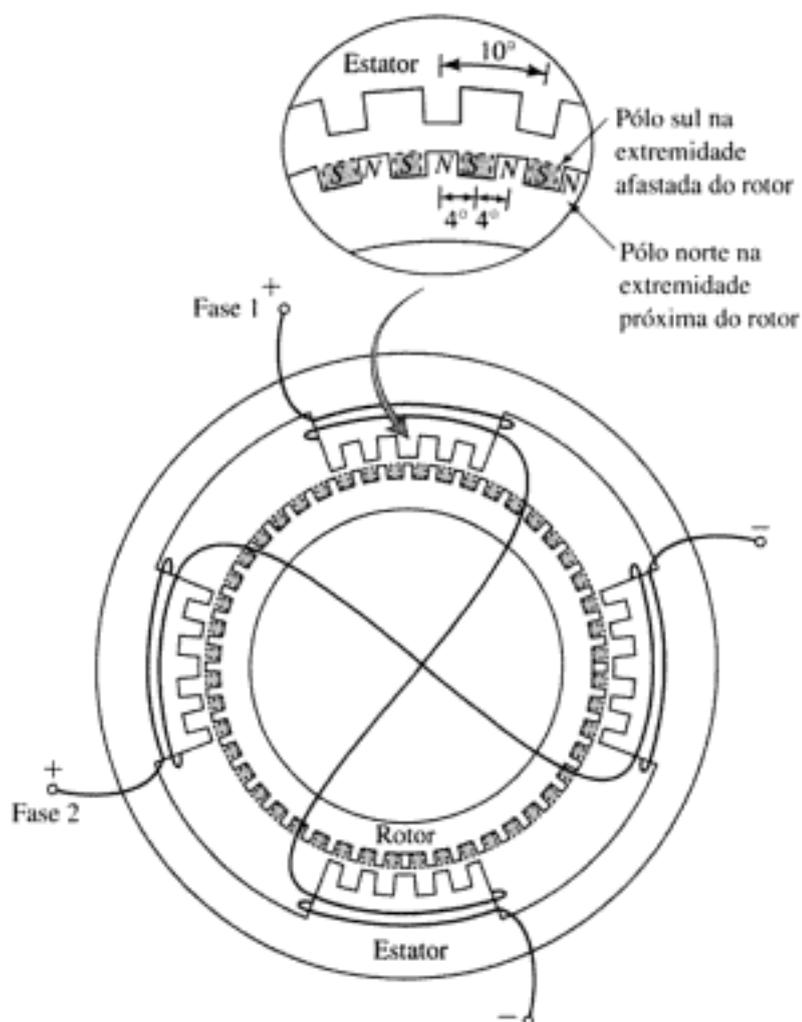


FIGURA 8.22 Motor de passo híbrido em castelo para o Problema 8.15.

## Motores Mono e Bifásicos

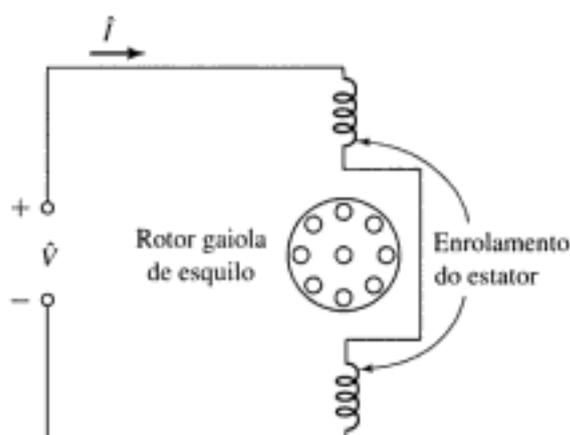
Este capítulo discute os motores monofásicos. Ao mesmo tempo que focaliza os motores de indução, também discute os motores de indução, os síncronos de relutância, os de histerese e os de pólos sombreados. Observe que um outro motor monofásico comum, o motor série universal, foi discutido na Seção 7.10. A maioria dos motores de indução com uma especificação de potência fracionária (fração de quilowatt) são motores monofásicos. Em aplicações residenciais e comerciais, são encontrados em uma ampla variedade de equipamentos incluindo refrigeradores, condicionadores de ar, trocadores de calor, ventiladores, bombas, máquinas de lavar e secadores.

Neste capítulo, descreveremos esses motores qualitativamente em termos da teoria do campo girante e começaremos com uma análise rigorosa de um motor simples monofásico que opera com um único enrolamento. Entretanto, na realidade, a maioria dos motores de indução monofásicos são motores bifásicos com enrolamentos assimétricos. Tipicamente os dois enrolamentos são bem diferentes, com números diferentes para as espiras e/ou a distribuição de enrolamento. Assim, este capítulo discute também os motores bifásicos e inclui o desenvolvimento de uma teoria quantitativa para a análise de motores de indução monofásicos, que estejam funcionando com ambos os enrolamentos principal e auxiliar.

### 9.1 MOTORES DE INDUÇÃO MONOFÁSICOS: UM EXAME QUALITATIVO

Estruturalmente, os tipos mais comuns de motores de indução monofásicos são semelhantes aos motores polifásicos de gaiola de esquilo, exceto em relação à disposição dos enrolamentos do estator. Um motor de indução com um rotor gaiola de esquilo e um enrolamento de estator monofásico está representado esquematicamente na Fig. 9.1. No lugar de uma bobina concentrada, o enrolamento real do estator está distribuído em ranhuras de modo a produzir uma distribuição espacial de FMM aproximadamente senoidal. Como vimos na Seção 4.5.1, um enrolamento monofásico produz ondas de FMM iguais para frente e para trás\*. Quando está em repouso, é evidente que por simetria esse motor basicamente não apresenta nenhum conjugado de partida porque ele está produzindo conjugados iguais em ambos os sentidos. No entanto, mostraremos que se for dada a partida por meios auxiliares, o resultado será um conjugado líquido no sentido da partida e o motor continuará a funcionar.

\* N. de T.: Em inglês, *forward* (para frente, progressivo) e *backward* (para trás, retrógrado).



**FIGURA 9.1** Vista esquemática de um motor de indução monofásico.

Antes de examinarmos os métodos auxiliares de partida, discutiremos as propriedades básicas do motor esquemático da Fig. 9.1. Se a corrente do estator for uma função co-seno do tempo, a FMM resultante no entreferro será dada pela Equação 4.18

$$\mathcal{F}_{gl} = F_{\max} \cos(\theta_{ae}) \cos \omega_e t \quad (9.1)$$

a qual, como foi mostrado na Seção 4.5.1, pode ser escrita como sendo a soma de ondas para frente e para trás de amplitudes iguais. A onda para frente é dada por

$$\mathcal{F}_{gl}^+ = \frac{1}{2} F_{\max} \cos(\theta_{ae} - \omega_e t) \quad (9.2)$$

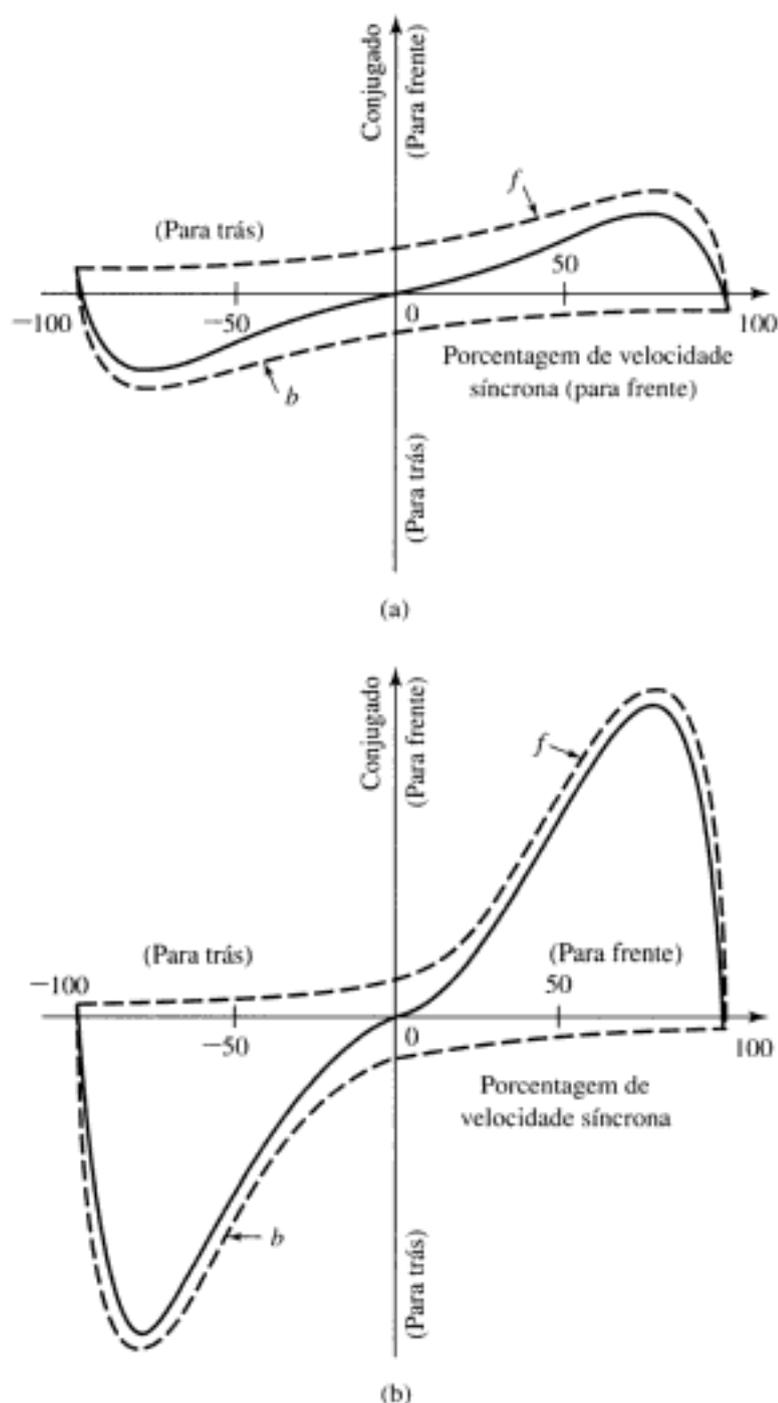
e a onda para trás é dada por

$$\mathcal{F}_{gl}^- = \frac{1}{2} F_{\max} \cos(\theta_{ae} + \omega_e t) \quad (9.3)$$

Cada uma dessas ondas componentes da FMM produz uma ação do tipo motor de indução, mas os conjugados correspondentes estão em sentidos opostos. Com o rotor em repouso, as ondas de fluxo no entreferro para frente e para trás, criadas pelas FMMs combinadas das correntes de estator e de rotor, são iguais. Conseqüentemente, os conjugados componentes são iguais e nenhum conjugado de partida é produzido. Se as ondas de fluxo para frente e para trás no entreferro permanecessem iguais enquanto o rotor girasse, cada um dos campos componentes produziria uma característica de conjugado  $\times$  velocidade semelhante à de um motor polifásico, com uma impedância de dispersão de estator desprezível, como está ilustrado pelas linhas tracejadas *f* e *b* da Fig. 9.2a\*. A característica de conjugado  $\times$  velocidade resultante, que é a soma algébrica das duas curvas componentes, mostra que, se fosse usado algum meio auxiliar para dar partida no motor, seria produzido um conjugado com o sentido usado na partida, qualquer que fosse ele.

A suposição de que as ondas de fluxo no entreferro permanecem iguais quando o rotor está em movimento é uma simplificação um tanto drástica da situação real. Primeiro, os efeitos da impedância de dispersão do estator são ignorados. Segundo, os efeitos das correntes induzidas no rotor não são adequadamente levados em consideração. Ambos esses efeitos serão incluídos na teoria quantitativa detalhada da Seção 9.3. A seguinte explicação qualitativa mostra que o desempenho de um motor de indução monofásico é muito melhor que o previsto com base em ondas iguais de fluxo para frente e para trás.

\* N. de T.: Do inglês, *f* de *forward* (para frente) e *b* de *backward* (para trás).



**FIGURA 9.2** Característica de conjugado  $\times$  velocidade de um motor de indução monofásico (a) com base em ondas de fluxo constantes para frente e para trás, (b) levando em consideração as alterações nas ondas de fluxo.

Quando o rotor está em movimento, as componentes da corrente de rotor induzidas pelo campo para trás são maiores do que quando em repouso, e seu fator de potência é mais baixo. Sua FMM, que se opõe à da corrente do estator, resulta em uma redução da onda de fluxo para trás. De modo inverso, o efeito magnético das componentes de corrente induzidas pelo campo para frente é menor do que quando em repouso, porque as correntes do rotor são menores e seu fator de potência é mais elevado. Portanto, à medida que a velocidade cresce, a onda do fluxo para frente cresce, ao passo que a do fluxo para trás diminui. A soma dessas ondas de fluxo deve permanecer aproximadamente constante porque é ela que induz a força con-

tra-eletromotriz do estator, a qual é aproximadamente constante, quando a queda de tensão na impedância de dispersão do estator é pequena.

Portanto, com o rotor em movimento, o conjugado do campo para frente é maior e o do campo para trás, menor do que o da Fig. 9.2a. A situação real é aproximadamente a mostrada na Fig. 9.2b. Na região normal de funcionamento com um escorregamento de alguns poucos por cento, o campo para frente é diversas vezes maior do que o campo para trás, e a onda de fluxo não é muito diferente do campo girante de amplitude constante presente no entreferro de um motor polifásico equilibrado. Na região de funcionamento normal, portanto, a característica de conjugado  $\times$  velocidade de um motor monofásico não é muito inferior à de um motor polifásico que tem o mesmo rotor e que funcione com a mesma densidade máxima de fluxo no entreferro.

Além dos conjugados mostrados na Fig. 9.2, pulsações de conjugado com o dobro da frequência do estator são produzidas pelas interações entre as ondas de fluxo e FMM, que giram em sentidos opostos e cruzam-se com o dobro da velocidade síncrona. Essas interações não produzem nenhum conjugado médio, mas tendem a tornar o motor mais ruidoso do que um motor polifásico. Essas pulsações de conjugado são inevitáveis em um motor monofásico, devido às pulsações na entrada instantânea de potência sendo inerentes a um circuito monofásico. Os efeitos do conjugado pulsante podem ser minimizados usando-se uma montagem elástica para o motor. O conjugado referido nas curvas de conjugado  $\times$  velocidade de um motor monofásico é a média, no tempo, do conjugado instantâneo.

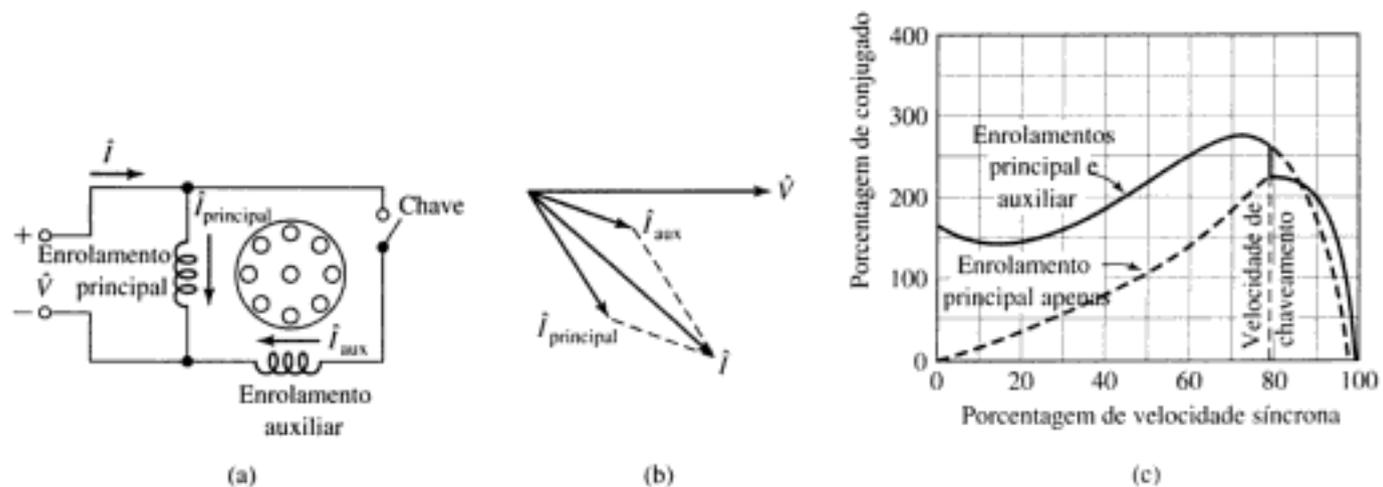
## 9.2 DESEMPENHOS DE PARTIDA E DE FUNCIONAMENTO DOS MOTORES MONOFÁSICOS DE INDUÇÃO E SÍNCRONOS

Os motores de indução monofásicos são classificados de acordo com os seus métodos de partida e usualmente são referidos por nomes que descrevem esses métodos. A seleção do motor apropriado baseia-se nas exigências dos conjugados de partida e de trabalho da carga, no ciclo de trabalho da carga, e nas limitações das correntes de partida e de trabalho impostas ao motor pela linha de abastecimento de energia elétrica. O custo dos motores monofásicos aumenta com a potência e com as características de desempenho, tal como a relação entre conjugado de partida e corrente. Tipicamente, para minimizar o custo, um engenheiro de aplicações irá escolher o motor com as menores especificações de potência e desempenho capazes de atender às exigências da aplicação. Quando um grande número de motores deve ser usado para um propósito específico, um motor especial pode ser projetado para garantir o custo mínimo. No negócio de motores de potência fracionária, pequenas diferenças de custo são importantes.

Os métodos de partida e as características resultantes de conjugado  $\times$  velocidade são examinados qualitativamente nesta seção. Uma teoria quantitativa para a análise desses motores será desenvolvida na Seção 9.4.2.

### 9.2.1 Motores de Fase Dividida

Os *motores de fase dividida* apresentam dois enrolamentos no estator, o *enrolamento principal* (também referido como *enrolamento de trabalho*) que será indicado pelo subscrito “principal” e o *enrolamento auxiliar* (também referido como *enrolamento de partida*) que será indicado pelo subscrito “aux”. Como em um motor bifásico, os eixos desses enrolamentos estão deslocados entre si de 90 graus elétricos no espaço, e eles são ligados como está mostrado na Fig. 9.3a. O enrolamento auxiliar tem uma razão mais elevada entre resistência e rea-



**FIGURA 9.3** Motor de fase dividida: (a) conexões, (b) diagrama fasorial na partida, e (c) característica típica de conjugado  $\times$  velocidade.

tância do que o enrolamento principal. A consequência disso é que as duas correntes estarão fora de fase, como está indicado no diagrama fasorial da Fig. 9.3b que é representativo das condições na partida. Como a corrente  $\hat{i}_{\text{aux}}$  do enrolamento auxiliar está adiantada em relação à corrente  $\hat{i}_{\text{principal}}$  do enrolamento principal, o campo do estator atinge primeiro o máximo no eixo do enrolamento auxiliar e então, um pouco depois, atinge o máximo no eixo do enrolamento principal.

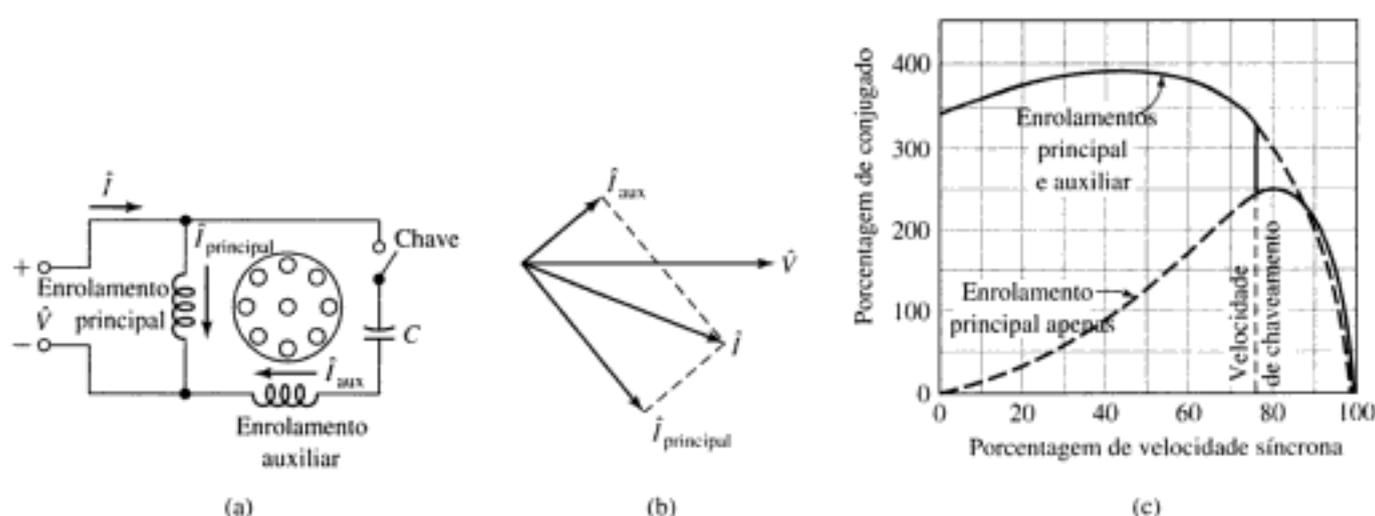
As correntes de enrolamento são equivalentes a correntes bifásicas desequilibradas e o motor é equivalente a um motor bifásico desequilibrado. O resultado é um campo girante de estator que causa a partida do motor. Em seguida, o enrolamento auxiliar é desligado, usualmente por meio de uma chave centrífuga que atua em torno de 75 por cento da velocidade síncrona. Uma maneira simples de se obter uma razão elevada entre resistência e reatância no enrolamento auxiliar é pelo uso de um fio mais fino no enrolamento auxiliar do que no enrolamento principal. Esse procedimento é permitido porque o enrolamento auxiliar atua somente durante a partida. A sua reatância poderá ser reduzida um pouco se ele for colocado no topo das ranhuras. Uma característica típica de conjugado  $\times$  velocidade para esse motor está mostrada na Fig. 9.3c.

Os motores de fase dividida têm conjugados de partida moderados para uma baixa corrente de partida. Aplicações típicas incluem ventiladores, sopradores, bombas centrífugas e equipamentos de escritório. As potências nominais típicas estão entre 50 e 500 watts. Dentro dessa faixa, são os motores de menor custo disponíveis.

## 9.2.2 Motores com Capacitor

Capacitores podem ser usados para melhorar o desempenho de partida do motor, o desempenho de trabalho, ou ambos, dependendo do tamanho e da conexão do capacitor. O motor com partida a capacitor também é um motor de fase dividida, mas o deslocamento de fase no tempo entre as duas correntes é obtido por meio de um capacitor em série com o enrolamento auxiliar, como está mostrado na Fig. 9.4a. Novamente, o enrolamento auxiliar é desconectado depois da partida do motor e, conseqüentemente, o capacitor e o enrolamento auxiliar podem ser projetados a um custo mínimo para uso intermitente.

Usando um capacitor de partida de valor apropriado, pode-se fazer com que a corrente  $\hat{i}_{\text{aux}}$  do enrolamento auxiliar, com o rotor parado, fique adiantada de 90 graus elétricos em



**FIGURA 9.4** Motor com partida a capacitor: (a) conexões, (b) diagrama fasorial na partida, e (c) característica típica de conjugado  $\times$  velocidade.

relação à corrente  $\hat{I}_{\text{principal}}$  do enrolamento principal, como ocorreria em um motor bifásico equilibrado (veja a Fig. 9.4b). Na prática, o melhor compromisso entre conjugado de partida, corrente de partida e custo ocorre geralmente com um ângulo de fase um pouco inferior a  $90^\circ$ . Uma característica típica do conjugado  $\times$  velocidade está mostrada na Fig. 9.4c, em que se destaca o elevado conjugado de partida. Esses motores são usados com compressores, bombas, equipamentos de refrigeração e de ar condicionado, e outras cargas de partida difícil. Uma vista em corte longitudinal de um motor de partida a capacitor está mostrada na Fig. 9.5.

No motor de fase dividida com capacitor permanente,\* o capacitor e o enrolamento auxiliar não são desconectados após a partida. A construção pode ser simplificada omitindo-se a chave. Com isso, obtêm-se melhorias no fator de potência, no desempenho e nas pulsações de conjugado. Por exemplo, o capacitor e o enrolamento auxiliar poderiam ser projetados para uma operação bifásica perfeita (isto é, sem a onda de fluxo para trás) com uma carga desejada qualquer. Nesse ponto de funcionamento, as perdas devidas ao campo que gira para trás seriam eliminadas, melhorando-se o desempenho resultante. As pulsações de conjugado com o dobro da frequência de estator também seriam eliminadas, sendo que o capacitor serviria como um reservatório de armazenamento de energia que suavizaria as pulsações na entrada de potência a partir da linha monofásica, resultando uma operação mais silenciosa. O conjugado de partida deve ser sacrificado porque a escolha da capacitância é necessariamente um compromisso entre os valores melhores de partida e de trabalho. A característica resultante de conjugado  $\times$  velocidade e um diagrama esquemático estão dados na Fig. 9.6.

Se forem usados dois capacitores, um de partida e um de trabalho, podem-se obter teoricamente desempenhos ótimos de partida e de trabalho. Uma maneira de se conseguir esse resultado está mostrado na Fig. 9.7a. O pequeno valor de capacitância necessário para se ter condições ótimas de trabalho é ligado permanentemente em série com o enrolamento auxiliar, e o valor muito mais elevado necessário na partida é obtido com um capacitor ligado em paralelo com o capacitor de trabalho por meio de uma chave que se abre quando o motor atinge a velocidade de trabalho. Tal motor é conhecido como *motor com capacitores de partida e de trabalho*.

\* N. de T.: Também chamado de capacitor de marcha.

Em motores com partida a capacitor, a capacitância tem um valor típico de  $300 \mu\text{F}$  para um motor de  $500 \text{ W}$ . Como ele deve conduzir corrente apenas durante a partida, o capacitor é um tipo especial, eletrolítico e compacto, para corrente alternada, usado em partida de motores. O capacitor permanente para o mesmo motor tem um valor típico de  $40 \mu\text{F}$  e, como opera continuamente, o capacitor é um tipo CA a óleo. O custo dos vários tipos de motores está relacionado com o desempenho: o motor de partida a capacitor tem o menor custo, a seguir vem o motor de fase dividida e capacitor permanente, e o de custo mais elevado é o motor com capacitores de partida e de trabalho.

**EXEMPLO 9.1**

Um motor de  $2,5 \text{ kW}$ ,  $120 \text{ V}$  e  $60 \text{ Hz}$  com partida a capacitor tem as seguintes impedâncias nos enrolamentos principal e auxiliar (na partida):

$$Z_{\text{principal}} = 4,5 + j3,7 \Omega \quad \text{enrolamento principal}$$

$$Z_{\text{aux}} = 9,5 + j3,5 \Omega \quad \text{enrolamento auxiliar}$$

Encontre o valor do capacitor de partida que colocará em quadratura as correntes dos enrolamentos principal e auxiliar, durante a partida.

**■ Solução**

As correntes  $I_{\text{principal}}$  e  $I_{\text{aux}}$  estão mostradas na Fig. 9.4a e b. O ângulo de impedância do enrolamento principal é

$$\phi_{\text{principal}} = \arctg \left( \frac{3,7}{4,5} \right) = 39,6^\circ$$

Para produzir correntes em quadratura no tempo com o enrolamento principal, o ângulo de impedância do circuito do enrolamento auxiliar (incluindo o capacitor de partida) deve ser

$$\phi = 39,6^\circ - 90,0^\circ = -50,4^\circ$$

A impedância combinada do enrolamento auxiliar e do capacitor de partida é igual a

$$Z_{\text{total}} = Z_{\text{aux}} + jX_c = 9,5 + j(3,5 + X_c) \Omega$$

em que  $X_c = -\frac{1}{\omega C}$  é a reatância do capacitor e  $\omega = 2\pi 60 \approx 377 \text{ rad/s}$ . Assim,

$$\arctg \left( \frac{3,5 + X_c}{9,5} \right) = -50,4^\circ$$

$$\frac{3,5 + X_c}{9,5} = \text{tg}(-50,4^\circ) = -1,21$$

e, portanto,

$$X_c = -1,21 \times 9,5 - 3,5 = -15,0 \Omega$$

A capacitância  $C$  é, então,

$$C = \frac{-1}{\omega X_c} = \frac{-1}{377 \times (-15,0)} = 177 \mu\text{F}$$

## PROBLEMA PRÁTICO 9.1

Considere o motor do Exemplo 9.1. Encontre o ângulo de fase entre as correntes dos enrolamentos principal e auxiliar quando o capacitor de  $177 \mu\text{F}$  é substituído por um capacitor de  $200 \mu\text{F}$ .

■ Solução

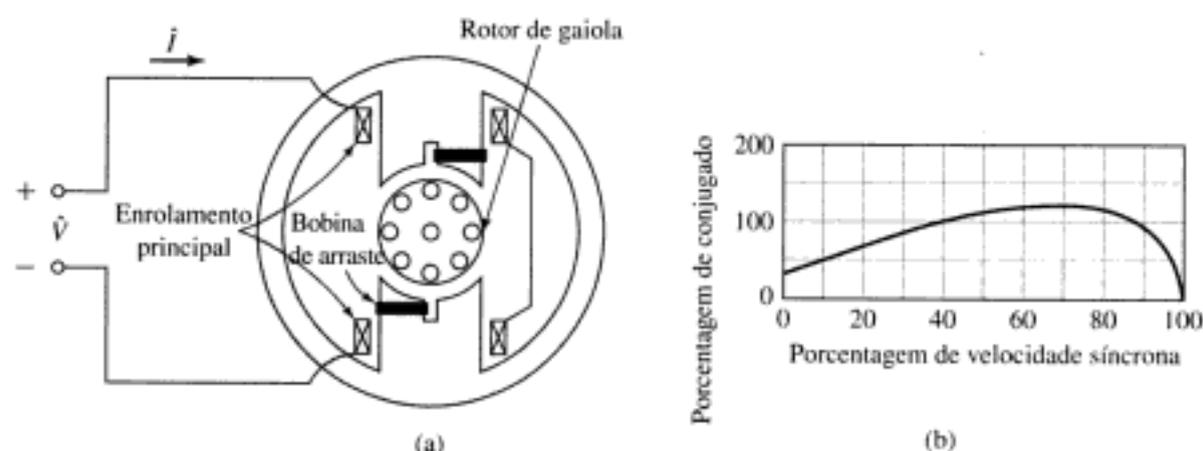
85,2°

### 9.2.3 Motores de Indução de Pólos Sombreados

Como está ilustrado esquematicamente na Fig. 9.8a, o *motor de indução de pólos sombreados* tem usualmente pólos salientes com uma porção de cada pólo envolvida por uma espira de cobre em curto-circuito chamada de *bobina de arraste*. As correntes induzidas na bobina de arraste fazem com que o fluxo presente na porção sombreada do pólo atrase-se em relação ao fluxo da outra porção. O resultado é similar a um campo girante que se move no sentido da porção não sombreada para a porção sombreada do pólo; correntes são induzidas no rotor de gaiola, e um baixo conjugado de partida é produzido. A Fig. 9.8b mostra uma característica típica de conjugado  $\times$  velocidade. O rendimento é baixo, mas os motores de pólos sombreados são o tipo menos dispendioso de motor de potência fracionária. Encontram-se disponíveis com potências nominais de até cerca de 50 W.

### 9.2.4 Motores Síncronos de Relutância com Partida Própria

Qualquer um dos tipos de motores de indução descritos pode se tornar um *motor síncrono de relutância com partida própria*. Qualquer coisa que faça com que a relutância de entreferro torne-se uma função da posição angular do rotor, em relação ao eixo da bobina de estator, produzirá um conjugado de relutância quando o motor estiver girando em velocidade síncrona. Por exemplo, suponha que alguns dos dentes de um rotor de gaiola sejam removidos, deixando-se intactas as barras e os anéis de terminação, como em um motor de indução comum de gaiola. A Fig. 9.9a mostra uma chapa de um rotor desse tipo, projetado para ser usado com um estator de quatro pólos. O estator pode ser polifásico ou qualquer um dos tipos monofásicos descritos.

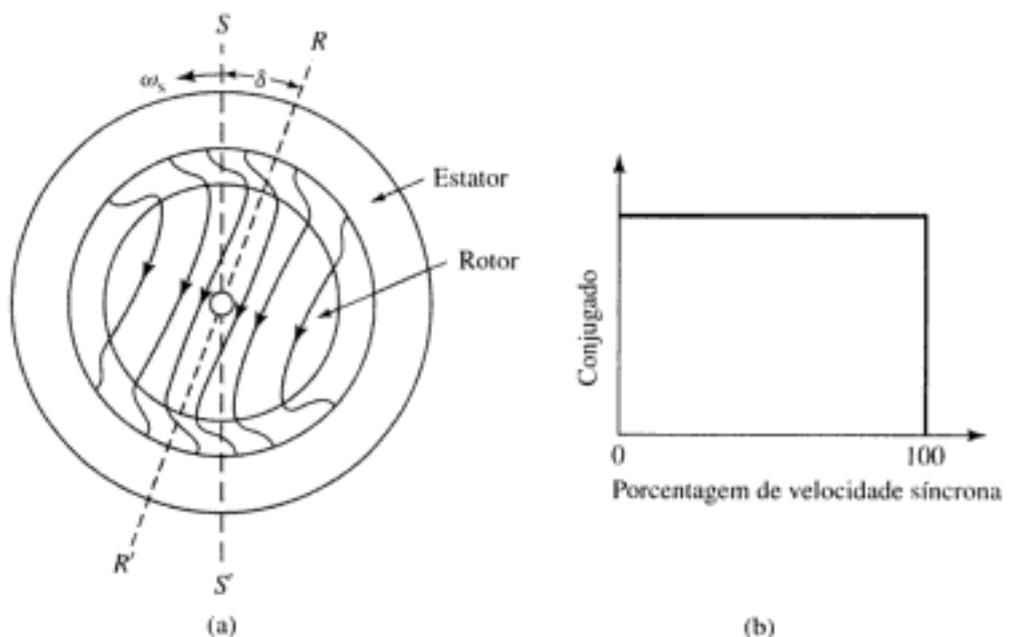


**FIGURA 9.8** Motor de indução de pólos sombreados e a característica típica de conjugado  $\times$  velocidade.

ro, sem enrolamentos nem dentes. Ele é colocado no interior de um estator ranhurado, tendo enrolamentos distribuídos que foram projetados para produzir, tão aproximadamente quanto possível, uma distribuição de fluxo senoidal espacial, já que flutuações na onda de fluxo aumentam grandemente as perdas. Nos motores monofásicos, os enrolamentos de estator são usualmente do tipo de fase dividida com capacitor permanente, como na Fig. 9.6. O capacitor é escolhido de modo a se obter uma configuração bifásica aproximadamente equilibrada nos enrolamentos do motor. O estator produz então um campo no entreferro que é constituído principalmente por uma fundamental espacial que está girando na velocidade síncrona.

As condições magnéticas instantâneas no entreferro e no rotor estão mostradas na Fig. 9.10a para um estator de dois pólos. O eixo  $SS'$  da onda de FMM do estator gira na velocidade síncrona. Devido à histerese, a magnetização do rotor está atrasada em relação à onda FMM de indução e, portanto, o eixo  $RR'$  da onda de fluxo do rotor está atrasado em relação ao eixo da onda de FMM do estator por um ângulo de histerese em atraso  $\delta$  (Fig. 9.10a). Quando o rotor está parado, o conjugado de partida produzido é proporcional ao produto das componentes fundamentais da FMM do estator e do fluxo do rotor, e ao seno do ângulo de conjugado  $\delta$ . Então, se o conjugado de carga for inferior ao conjugado desenvolvido pelo motor, o rotor será acelerado.

Enquanto o rotor estiver girando com velocidade inferior à síncrona, cada região do rotor estará sujeita a um ciclo repetitivo de histerese com a frequência de escorregamento. Enquanto o rotor é acelerado, o ângulo de atraso  $\delta$  permanecerá constante se o fluxo for constante, porque o ângulo  $\delta$  depende apenas do laço de histerese do material de que é feito o rotor e é independente da taxa com a qual o laço é percorrido. Portanto, o motor desenvolve conjugado constante até a velocidade síncrona, como está mostrado na característica ideal de conjugado  $\times$  velocidade da Fig. 9.10b. Essa particularidade é uma das vantagens do motor de histerese. Em contraste com o motor de relutância, que deve conduzir a sua carga até o sincronismo de acordo a curva característica de conjugado  $\times$  velocidade de um motor de indução, um motor de histerese pode sincronizar qualquer carga que possa acelerar, não importando quão grande é a inércia. Depois de atingir o sincronismo, o motor continua girando na velocidade síncrona e ajusta o ângulo de conjugado de modo a desenvolver o conjugado exigido pela carga.



**FIGURA 9.10** (a) Constituição geral do campo magnético no entreferro e no rotor de um motor de histerese; (b) característica ideal de conjugado  $\times$  velocidade.

O motor de histerese é inerentemente silencioso e produz rotação suave em sua carga. Além disso, o rotor usa o mesmo número de pólos que o campo do estator. O motor presta-se ao funcionamento síncrono com velocidades múltiplas quando o estator for enrolado com diversos conjuntos de bobinas e utilizar conexões que permitam a troca de pólos. O motor de histerese pode acelerar e sincronizar cargas de inércia elevada porque seu conjugado é uniforme desde o repouso até a velocidade síncrona.

### 9.3 TEORIA DO CAMPO GIRANTE DE MOTORES DE INDUÇÃO MONOFÁSICOS

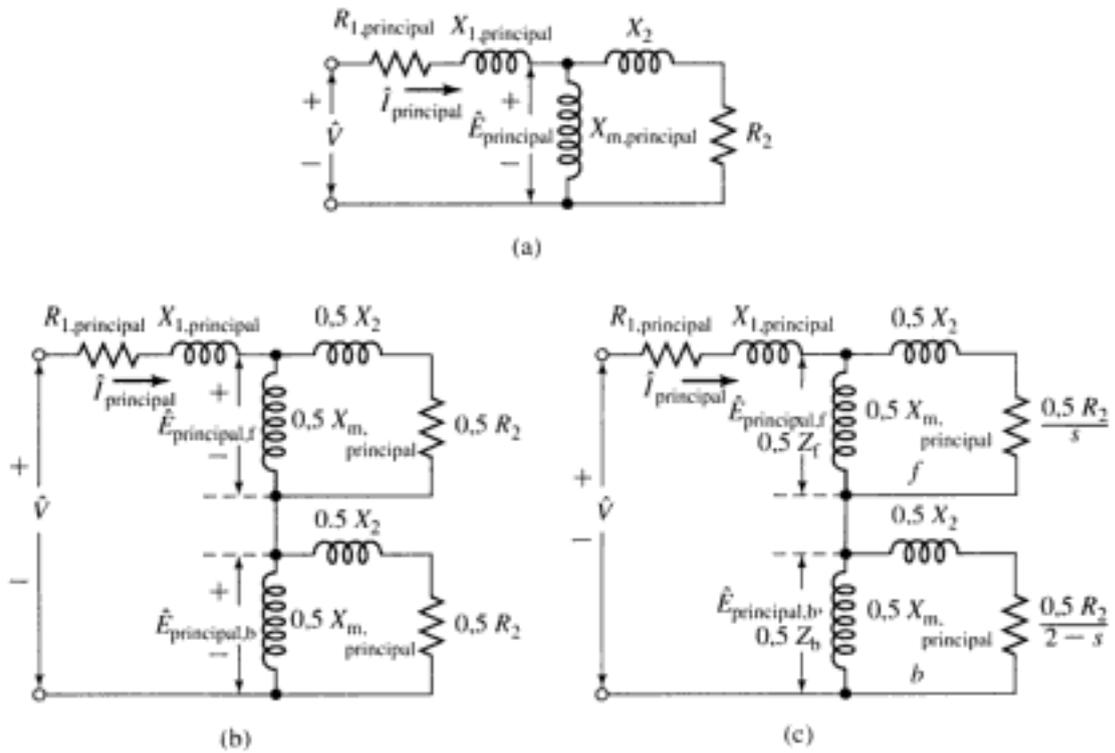
Como foi discutido na Seção 9.1, pode-se mostrar que a onda de FMM do estator de um motor de indução monofásico é equivalente a duas ondas de FMM de amplitude constante que estão girando com velocidade síncrona em sentidos opostos. Cada uma dessas ondas componentes da FMM do estator induz as suas próprias componentes de corrente no rotor e produz ação do tipo motor de indução, exatamente como em um motor polifásico equilibrado. Esse conceito de campo girante duplo não é útil apenas para uma visualização qualitativa, mas também pode ser usado no desenvolvimento de uma teoria quantitativa aplicável a uma ampla variedade de tipos de motores de indução. Entretanto, não iremos discutir toda a teoria quantitativa aqui.<sup>1</sup> Iremos examinar somente o caso simples, mas importante, de um motor de indução monofásico que esteja funcionando com o enrolamento principal apenas.

Considere a situação em que o rotor está parado e apenas o enrolamento principal do estator está excitado. Então, o motor é equivalente a um transformador com seu secundário em curto-circuito. O circuito equivalente está mostrado na Fig. 9.11a, em que  $R_{1,\text{principal}}$  e  $X_{1,\text{principal}}$  são respectivamente a resistência e a reatância de dispersão do enrolamento principal,  $X_{m,\text{principal}}$  é a reatância de magnetização e  $R_{2,\text{principal}}$  e  $X_{2,\text{principal}}$  são os valores com o rotor parado da resistência e da reatância de dispersão, referidas ao enrolamento principal do estator, tendo-se usado a relação de espiras adequada. As perdas no núcleo, omitidas aqui, serão levadas em consideração mais tarde como se fossem perdas rotacionais. A tensão aplicada é  $\hat{V}$ , e a corrente do enrolamento principal é  $\hat{I}_{\text{principal}}$ . A tensão  $\hat{E}_{\text{principal}}$  é a força contra-eletromotriz gerada no enrolamento principal pela onda de fluxo pulsante estacionária de entreferro, produzida pela ação combinada das correntes de estator e rotor.

De acordo com o conceito de campo girante duplo da Seção 9.1, a FMM do estator pode ser decomposta em campos que giram para frente e para trás, ambos com metade da amplitude. Com o rotor parado, as amplitudes das ondas resultantes do fluxo no entreferro, para frente e para trás, são ambas iguais à metade da amplitude do campo pulsante. Na Fig. 9.11b, a parte do circuito equivalente que representa os efeitos do fluxo no entreferro está dividida em duas partes iguais, representando os efeitos dos campos para frente e para trás, respectivamente.

Agora, considere a situação depois que o motor atingiu a velocidade de trabalho por meio de algum método auxiliar e está funcionando apenas com o enrolamento principal no sentido do campo para frente, com um escorregamento  $s$  por unidade. As correntes de rotor induzidas pelo campo para frente têm a frequência de escorregamento  $sf_c$ , em que  $f_c$  é a frequência elétrica aplicada ao estator. Exatamente como em qualquer motor polifásico, com um rotor simétrico polifásico ou gaiola de esquilo, essas correntes de rotor produzem uma onda de FMM que se desloca para frente na velocidade de escorregamento em relação ao rotor e, portanto, na velocidade síncrona em relação ao estator. A FMM resultante das ondas para

<sup>1</sup> Para um tratamento extensivo dos motores monofásicos, veja, por exemplo, C. B. Veinott, *Fractional- and Subfractional-Horsepower Electric Motors*, McGraw-Hill, New York, 1970.



**FIGURA 9.11** Circuitos equivalentes de um motor de indução monofásico: (a) rotor bloqueado; (b) rotor bloqueado mostrando os efeitos dos campos para frente e para trás; (c) condições de operação.

frente do estator e do rotor cria uma onda resultante de fluxo para frente no entreferro, que gera uma força contra-eletromotriz  $\hat{E}_{principal,f}$  no enrolamento principal do estator. O efeito refletido do rotor, visto do estator, é semelhante àquele de um motor polifásico e pode ser representado por uma impedância  $0,5R_{2,principal}/s + j0,5X_{2,principal}$  em paralelo com  $j0,5X_{m,principal}$  como na porção do circuito equivalente da Fig. 9.11c indicada por 'f'. Os fatores 0,5 vêm da decomposição da FMM pulsante de estator em componentes para frente e para trás.

Agora, considere a situação em relação ao campo para trás. O motor continua girando com um escorregamento  $s$  em relação ao campo para frente, e sua velocidade  $n$  por unidade no sentido do campo para frente é  $n = 1 - s$ . A velocidade relativa do rotor em relação ao campo para trás é  $1 + n$ , ou seu escorregamento em relação ao campo para trás é  $1 + n = 2 - s$ . O campo para trás induz então correntes de rotor cuja frequência é  $(2 - s)f_e$ . Para pequenos escorregamentos, essas correntes de rotor têm quase o dobro da frequência do estator.

Portanto, para escorregamentos de pequeno valor, um traçado da corrente de rotor no osciloscópio irá mostrar uma componente de alta frequência, devida ao campo para trás, superposta a uma componente de baixa frequência, devida ao campo para frente. Vista do estator, a onda de FMM do rotor, devida à corrente de rotor induzida pelo campo para trás, desloca-se na velocidade síncrona, mas no sentido para trás. O circuito equivalente que representa essas reações internas do ponto de vista do estator é como o de um motor polifásico cujo escorregamento é  $2 - s$ , como está mostrado na porção do circuito equivalente (Fig. 9.11c) indicada por b. Como no caso do campo para frente, os fatores de 0,5 originam-se da decomposição da FMM pulsante do estator em componentes para frente e para trás. A tensão  $\hat{E}_{principal,b}$  sobre a combinação em paralelo que representa o campo para trás é a força contra-eletromotriz gerada no enrolamento principal do estator pelo campo para trás resultante.

Usando o circuito equivalente da Fig. 9.11c, a corrente de estator, a potência de entrada e o fator de potência podem ser calculados para qualquer valor escolhido de escorregamento quando a tensão aplicada e as impedâncias do motor são conhecidas. Para simplificar a notação, sejam

$$Z_f \equiv R_f + jX_f \equiv \left( \frac{R_{2,\text{principal}}}{s} + jX_{2,\text{principal}} \right) \text{ em paralelo com } jX_{m,\text{principal}} \quad (9.4)$$

e

$$Z_b \equiv R_b + jX_b \equiv \left( \frac{R_{2,\text{principal}}}{2-s} + jX_{2,\text{principal}} \right) \text{ em paralelo } jX_{m,\text{principal}} \quad (9.5)$$

Do ponto de vista do enrolamento monofásico principal do estator, as impedâncias que representam as reações dos campos para frente e para trás são  $0,5Z_f$  e  $0,5Z_b$ , respectivamente, na Fig. 9.11c.

O exame do circuito equivalente (Fig. 9.11c) confirma a conclusão, obtida por raciocínio qualitativo na Seção 9.1 (Fig. 9.2b), de que a onda de fluxo para frente no entreferro cresce e a onda para trás diminui quando o rotor é colocado em movimento. Quando o motor está funcionando com um escorregamento pequeno, o efeito refletido da resistência do rotor sobre o campo para frente é muito maior do que seu valor com o rotor parado, ao passo que o respectivo efeito no campo para trás, é menor. Portanto, a impedância do campo para frente é maior do que seu valor com o rotor parado, ao passo que a do campo para trás é menor. A força contra-eletromotriz do campo para frente, portanto, é maior do que com o rotor parado, ao passo que a força contra-eletromotriz do campo para trás é menor; isto é, a onda de fluxo para frente cresce, ao passo que a onda de fluxo para trás decresce.

A potência e o conjugado mecânicos podem ser calculados aplicando-se as relações de conjugado e potência desenvolvidas para os motores polifásicos no Capítulo 6. Os conjugados produzidos por cada um dos campos para frente e para trás podem ser tratados dessa maneira. As interações entre as ondas girantes opostas de fluxo e de FMM produzem pulsações de conjugado com o dobro da frequência do estator mas nenhum conjugado médio é produzido.

Como na Equação 6.25, o conjugado eletromagnético  $T_{\text{principal},f}$  do campo para frente em newtons-metros é igual a  $1/\omega_s$  vezes a potência  $P_{\text{entreferro},f}$  em watts entregue pelo enrolamento do estator ao campo para frente. Aqui,  $\omega_s$  é a velocidade angular síncrona em radianos mecânicos por segundo e, assim,

$$T_{\text{principal},f} = \frac{1}{\omega_s} P_{\text{entreferro},f} \quad (9.6)$$

Quando a impedância de magnetização é tratada como sendo puramente indutiva,  $P_{\text{entreferro},f}$  é a potência absorvida pela impedância  $0,5Z_f$ ; isto é,

$$P_{\text{entreferro},f} = I^2(0,5R_f) \quad (9.7)$$

em que  $R_f$  é a componente resistiva da impedância do campo para frente definida na Equação 9.4.

De modo semelhante, o conjugado interno  $T_{\text{principal},b}$  do campo para trás é

$$T_{\text{principal},b} = \frac{1}{\omega_s} P_{\text{entreferro},b} \quad (9.8)$$

onde  $P_{\text{entreferro},b}$  é a potência entregue pelo enrolamento de estator ao campo para trás, ou

$$P_{\text{entreferro},b} = I^2(0,5R_b) \quad (9.9)$$

Aqui,  $R_b$  é a componente resistiva da impedância  $Z_b$  do campo para trás definida na Equação 9.5.

$$R_f = \left( \frac{X_{m,\text{principal}}^2}{X_{22}} \right) \frac{1}{sQ_{2,\text{principal}} + 1/(sQ_{2,\text{principal}})} \quad X_f = \frac{X_{2,\text{principal}}X_{m,\text{principal}}}{X_{22}} + \frac{R_f}{sQ_{2,\text{principal}}}$$

onde

$$X_{22} = X_{2,\text{principal}} + X_{m,\text{principal}} \quad \text{e} \quad Q_{2,\text{principal}} = \frac{X_{22}}{R_{2,\text{principal}}}$$

A substituição por valores numéricos dá, para  $s = 0,05$ ,

$$Z_f = R_f + jX_f = 31,9 + j40,3 \, \Omega$$

Relações semelhantes para a impedância do campo para trás  $Z_b$  são obtidas substituindo  $2 - s$  em  $s$  nessas equações. Quando  $(2 - s)Q_{2,\text{principal}}$  é maior do que 10, como usualmente é o caso, ocorrem erros inferiores a 1 por cento quando são usadas as seguintes relações aproximadas:

$$R_b = \frac{R_{2,\text{principal}}}{2 - s} \left( \frac{X_{m,\text{principal}}}{X_{22}} \right)^2 \quad X_b = \frac{X_{2,\text{principal}}X_{m,\text{principal}}}{X_{22}} + \frac{R_b}{(2 - s)Q_{2,\text{principal}}}$$

A substituição de valores numéricos dá, para  $s = 0,05$ ,

$$Z_b = R_b + jX_b = 1,98 + j2,12 \, \Omega$$

Somando os elementos em série do circuito equivalente da Fig. 9.11c, obtêm-se

$$R_{1,\text{principal}} + jX_{1,\text{principal}} = 2,02 + j2,79$$

$$0,5(R_f + jX_f) = 15,95 + j20,15$$

$$0,5(R_b + jX_b) = 0,99 + j1,06$$

$$\text{Impedância total de entrada } Z = 18,96 + j24,00 = 30,6 \angle 51,7^\circ$$

$$\text{Corrente de estator } I = \frac{V}{Z} = \frac{110}{30,6} = 3,59 \text{ A}$$

$$\text{Fator de potência} = \cos(51,7^\circ) = 0,620$$

$$\text{Potência de entrada} = P_{\text{entrada}} = VI \times \text{Fator de potência} = 110 \times 3,59 \times 0,620 = 244 \text{ W}$$

A potência absorvida pelo campo para frente (Equação 9.7) é

$$P_{\text{entreforo},f} = I^2(0,5R_f) = 3,59^2 \times 15,95 = 206 \text{ W}$$

A potência absorvida pelo campo para trás (Equação 9.9) é

$$P_{\text{entreforo},b} = I^2(0,5R_b) = 3,59^2 \times 0,99 = 12,8 \text{ W}$$

A potência mecânica interna (Equação 9.14) é

$$P_{\text{mec}} = (1 - s)(P_{\text{entreforo},f} - P_{\text{entreforo},b}) = 0,95(206 - 13) = 184 \text{ W}$$

Supondo que as perdas no núcleo possam ser combinadas com as perdas por atrito e ventilação, as perdas rotacionais tornam-se  $24 + 13 = 37 \text{ W}$  e a potência de saída no eixo é a diferença. Assim,

$$P_{\text{eixo}} = 184 - 37 = 147 \text{ W} = 0,197 \text{ HP}$$

Da Equação 4.40, a velocidade síncrona em rad/s é dada por

$$\omega_s = \left( \frac{2}{\text{pólos}} \right) \omega_c = \left( \frac{2}{4} \right) 120\pi = 188,5 \text{ rad/s}$$

ou, em termos de rpm, da Equação 4.41

$$n_s = \left( \frac{120}{\text{pólos}} \right) f_c = \left( \frac{120}{4} \right) 60 = 1800 \text{ rpm}$$

$$\begin{aligned} \text{Velocidade do rotor} &= (1 - s)(\text{Velocidade síncrona}) \\ &= 0,95 \times 1800 = 1710 \text{ rpm} \end{aligned}$$

e

$$\omega_m = 0,95 \times 188,5 = 179 \text{ rad/s}$$

O conjugado pode ser obtido da Equação 9.14.

$$T_{\text{eixo}} = \frac{P_{\text{eixo}}}{\omega_m} = \frac{147}{179} = 0,821 \text{ N} \cdot \text{m}$$

e o rendimento é

$$\eta = \frac{P_{\text{eixo}}}{P_{\text{entrada}}} = \frac{147}{244} = 0,602 = 60,2\%$$

A título de verificação da contabilidade da potência, calcule as perdas:

$$I^2 R_{1,\text{principal}} = (3,59)^2 (2,02) = 26,0$$

$$\text{Perdas } I^2 R \text{ no rotor devidas ao campo para frente (Eq. 9.11)} = 0,05 \times 206 = 10,3$$

$$\text{Perdas } I^2 R \text{ no rotor devidas ao campo para trás (Eq. 9.12)} = 1,95 \times 12,8 = 25,0$$

$$\text{Perdas rotacionais} = \frac{37,0}{98,3 \text{ W}}$$

Da expressão  $P_{\text{entrada}} - P_{\text{eixo}}$ , as perdas totais são iguais a 97 W, o que está correto dentro da precisão dos cálculos.

### PROBLEMA PRÁTICO 9.2

Suponha que o motor do Exemplo 9.2 esteja operando com um escorregamento de 0,065 em tensão e frequência nominais. Determine (a) a corrente de estator e o fator de potência e (b) a potência de saída.

#### ■ Solução

- 4,0 A, fator de potência = 0,70 indutivo
- 190 W

A análise da ordem de magnitude dos valores numéricos do Exemplo 9.2 sugere aproximações que usualmente podem ser feitas. Essas aproximações relacionam-se particularmente com a impedância do campo para trás. Observe que a impedância  $0,5(R_b + jX_b)$  é apenas cerca de 5 por cento da impedância total do motor para um escorregamento próximo da carga total. Conseqüentemente, uma aproximação tão grande quanto 20 por cento dessa impedância causaria apenas cerca de 1 por cento de erro na corrente do motor. Embora, estritamente falando, a impedância do campo para trás seja uma função do escorregamento, usualmente um erro muito baixo resulta quando se calcula o seu valor para qualquer escorregamento conveniente dentro da região normal de funcionamento, por exemplo, 5 por cento, e então supor que  $R_b$  e  $X_b$  sejam constantes.

Correspondendo a uma aproximação ligeiramente maior, o efeito do ramo em derivação  $jX_{m,\text{principal}}$  sobre a impedância do campo para trás pode ser frequentemente desprezado, obtendo-se

$$Z_b \approx \frac{R_{2,\text{principal}}}{2-s} + jX_{2,\text{principal}} \quad (9.15)$$

Essa equação dá valores de resistência de campo para trás que são uns poucos por cento maiores, como se pode ver fazendo uma comparação com a expressão exata dada no Exemplo 9.2. Se  $s$  fosse desprezado na Equação 9.15, ela tenderia a fornecer valores baixos demais de resistência de campo para trás e, portanto, tal aproximação tenderia a contrabalançar o erro na Equação 9.15. Conseqüentemente, para pequenos escorregamentos,

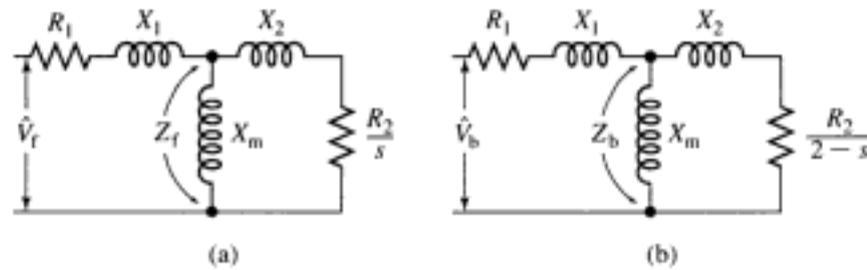
$$Z_b \approx \frac{R_{2,\text{principal}}}{2} + jX_{2,\text{principal}} \quad (9.16)$$

Em um motor polifásico (Seção 6.5), o conjugado interno máximo e o escorregamento para o qual isso ocorre podem ser expressos simplesmente em termos dos parâmetros do motor. O conjugado interno máximo não depende da resistência do rotor. No caso de um motor monofásico, tal expressão simples não existe. O problema monofásico é muito mais complexo devido à presença do campo para trás. Seus efeitos são duplos: (1) ele absorve parte da tensão aplicada, reduzindo assim a tensão disponível para o campo para frente e diminuindo o conjugado para frente desenvolvido, e (2) o campo para trás produz conjugado negativo, reduzindo o conjugado efetivo desenvolvido. Ambos os efeitos dependem da resistência do motor e da reatância de dispersão. Conseqüentemente, ao contrário do motor polifásico, o conjugado interno máximo de um motor monofásico é influenciado pela resistência do motor. O aumento da resistência do rotor diminui o conjugado máximo e aumenta o escorregamento para o qual ocorre o conjugado máximo.

Devido principalmente aos efeitos do campo para trás, o motor de indução monofásico é um tanto inferior a um motor polifásico que usa o mesmo rotor e o mesmo núcleo de estator. O motor monofásico tem um conjugado máximo menor o qual ocorre para um escorregamento menor. Para o mesmo conjugado, o motor monofásico tem um escorregamento mais elevado e perdas maiores devidas em grande parte às perdas  $I^2R$  do campo para trás no rotor. A potência aparente de entrada do motor monofásico é maior, principalmente devido às potências ativa e reativa consumidas pelo campo para trás. As perdas  $I^2R$  do estator também são maiores no motor monofásico, porque uma fase, e não diversas, deve suportar toda a corrente. Devido às perdas maiores, o rendimento é menor e a elevação de temperatura para um mesmo conjugado é maior. Uma carcaça de maior tamanho deve ser usada em um motor monofásico do que em um motor polifásico de mesma potência e velocidade nominais. Devido à carcaça maior, o conjugado máximo pode se tornar comparável ao de um motor polifásico fisicamente menor mas de igual potência nominal. Apesar do tamanho maior da carcaça e da necessidade de configurações auxiliares de partida, um motor monofásico para uso geral, dentro das especificações padrões nominais de potência fracionária, custa aproximadamente o mesmo que o respectivo motor polifásico devido ao volume muito maior de produção do primeiro.

## 9.4 MOTORES DE INDUÇÃO BIFÁSICOS

Como vimos, na realidade a maioria dos motores monofásicos de indução é construída na forma de motores bifásicos com dois enrolamentos de estator em quadratura no espaço. Geralmente, os enrolamentos principal e auxiliar são bem diferentes, com diferenças no número de espiras, espessura do fio e distribuição das espiras. Essa diferença em combinação com o ca-



**FIGURA 9.12** Circuitos equivalentes monofásicos para um motor bifásico sob condições desequilibradas: (a) campo para frente e (b) campo para trás.

mesmo sentido, a impedância de terminal por fase é dada pelo circuito equivalente da Fig. 9.12b para o caso em que  $\hat{V}_\beta$  está adiantada em relação a  $\hat{V}_\alpha$  de  $90^\circ$ . Essa seqüência de fase é chamada *seqüência negativa* e é designada pelo subscrito b,\* já que as correntes com seqüência negativa produzem um campo para trás.

Suponha agora que *duas* fontes de tensão, bifásicas e equilibradas, de *seqüências opostas de fases* sejam conectadas em série e aplicadas simultaneamente ao motor da forma que está indicada na Fig. 9.13a, em que as tensões fasoriais  $\hat{V}_\alpha$  e  $-j\hat{V}_\alpha$ , aplicadas respectivamente aos enrolamentos  $\alpha$  e  $\beta$ , formam um sistema equilibrado de seqüência positiva, e as tensões fasoriais  $\hat{V}_\beta$  e  $-j\hat{V}_\beta$  formam um outro sistema equilibrado mas de seqüência negativa.

A tensão resultante  $V_\alpha$  aplicada ao enrolamento  $\alpha$  é, como fasor,

$$\hat{V}_\alpha = \hat{V}_\alpha + \hat{V}_\beta \quad (9.17)$$

e aquela aplicada ao enrolamento  $\beta$  é

$$\hat{V}_\beta = j\hat{V}_\alpha - j\hat{V}_\beta \quad (9.18)$$

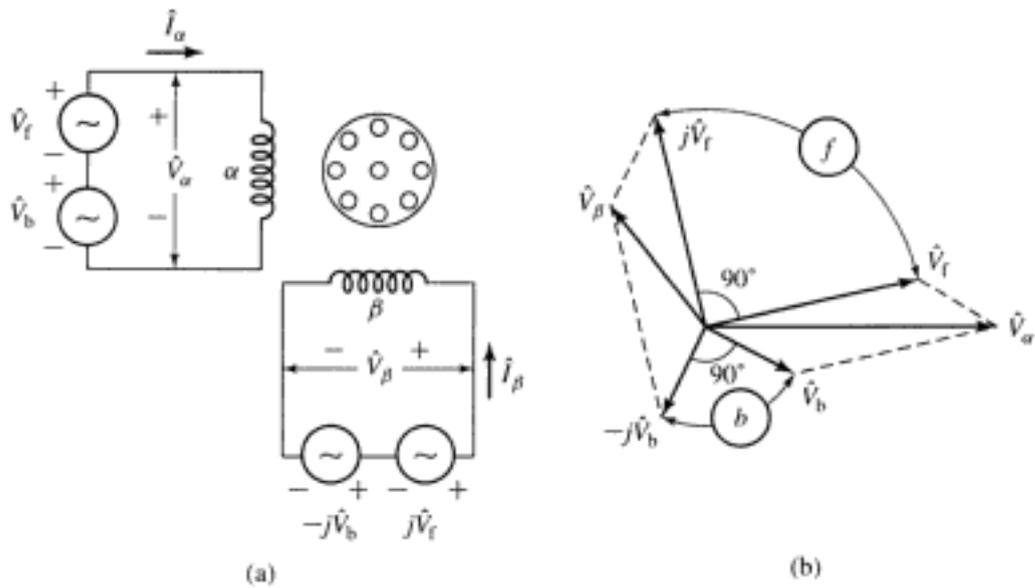
A Fig. 9.13b mostra um diagrama fasorial generalizado em que o sistema para frente, ou de seqüência positiva, é dado pelos fasores  $\hat{V}_\alpha$  e  $j\hat{V}_\alpha$  e o sistema para trás, ou de seqüência negativa, é dado pelos fasores  $\hat{V}_\beta$  e  $-j\hat{V}_\beta$ . Em geral, as tensões resultantes, dadas pelos fasores  $\hat{V}_\alpha$  e  $\hat{V}_\beta$ , não são iguais nem em módulo nem em quadratura de tempo. Dessa discussão, vemos que um sistema bifásico desequilibrado com tensões aplicadas  $V_\alpha$  e  $V_\beta$  pode ser sintetizado combinando dois conjuntos de tensões equilibradas com seqüências de fase opostas.

No entanto, é muito mais fácil trabalhar com os sistemas de componentes simétricas do que com o sistema desequilibrado que resulta deles. Assim, é fácil calcular as componentes de corrente que são produzidas pelas tensões aplicadas por cada um dos sistemas de componentes simétricas porque o motor de indução funciona como um motor bifásico equilibrado para cada um dos sistemas de componentes. Por superposição, a corrente real em um enrolamento será então a soma de suas componentes. Assim, se  $\hat{I}_\alpha$  e  $\hat{I}_\beta$  forem, respectivamente, as componentes fasoriais de corrente das seqüências positiva e negativa no enrolamento  $\alpha$ , então as correspondentes correntes fasoriais componentes das seqüências positiva e negativa no enrolamento  $\beta$  serão, respectivamente,  $j\hat{I}_\alpha$  e  $-j\hat{I}_\beta$ , e as correntes reais de enrolamento  $\hat{I}_\alpha$  e  $\hat{I}_\beta$  serão

$$\hat{I}_\alpha = \hat{I}_\alpha + \hat{I}_\beta \quad (9.19)$$

$$\hat{I}_\beta = j\hat{I}_\alpha - j\hat{I}_\beta \quad (9.20)$$

\* N. de T.: Lembrando, *f* de *forward* (para frente) e *b* de *backward* (para trás).



**FIGURA 9.13** Síntese de um sistema bifásico desequilibrado a partir da soma de dois sistemas equilibrados com seqüências de fase opostas.

Freqüentemente, deve-se realizar a operação inversa de se encontrar as componentes simétricas das tensões ou correntes especificadas. Resolvendo as Equações 9.17 e 9.18 para se obter as componentes fasoriais  $\hat{V}_r$  e  $\hat{V}_b$ , em termos das tensões fasoriais conhecidas  $\hat{V}_\alpha$  e  $\hat{V}_\beta$  obtêm-se

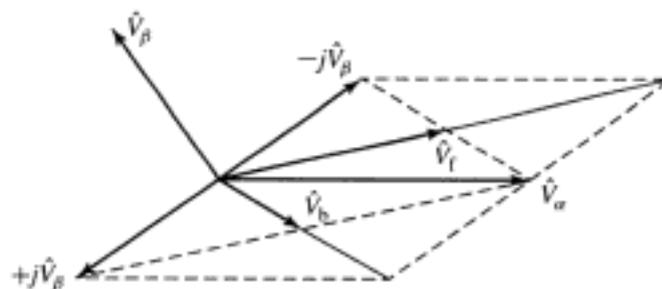
$$\hat{V}_r = \frac{1}{2}(\hat{V}_\alpha - j\hat{V}_\beta) \tag{9.21}$$

$$\hat{V}_b = \frac{1}{2}(\hat{V}_\alpha + j\hat{V}_\beta) \tag{9.22}$$

Essas operações estão ilustradas no diagrama fasorial da Fig. 9.14. Obviamente, relações similares fornecem as componentes fasoriais simétricas  $\hat{I}_r$  e  $\hat{I}_b$  da corrente no enrolamento  $\alpha$  em termos das correntes fasoriais especificadas  $\hat{I}_m$  e  $\hat{I}_a$  nas duas fases. Assim,

$$\hat{I}_r = \frac{1}{2}(\hat{I}_\alpha - j\hat{I}_\beta) \tag{9.23}$$

$$\hat{I}_b = \frac{1}{2}(\hat{I}_\alpha + j\hat{I}_\beta) \tag{9.24}$$



**FIGURA 9.14** Decomposição de tensões bifásicas desequilibradas em duas componentes simétricas.

```

%(b) Primeiro calcule a impedância de entrada do campo para frente do
% motor a partir do circuito equivalente da Fig. 9-12 (a)
Zforward = R1 + j*Xl + j*Xm*(R2/s+j*X2)/(R2/s+j*(X2+Xm));
% Agora calcule a corrente do campo para frente.
If = Vf/Zforward;
magIf = abs(If);
angleIf = angle(If)*180/pi;
% A seguir calcule a impedância de entrada do campo para trás do
% motor a partir do circuito equivalente da Fig. 9-12 (b)
Zback = R1 + j*Xl + j*Xm*(R2/(2-s)+j*X2)/(R2/(2-s)+j*(X2+Xm));
% Agora calcule a corrente do campo para trás.
Ib = Vb/Zback;
magIb = abs(Ib);
angleIb = angle(Ib)*180/pi;
fprintf('\n(b)')
fprintf('\n If = %.1f + j %.1f = %.1f no ângulo de %.1f graus A', ...
    real(If), imag(If), magIf, angleIf);
fprintf('\n Ib = %.1f + j %.1f = %.1f no ângulo de %.1f graus A\n', ...
    real(Ib), imag(Ib), magIb, angleIb);
%(c) Calcule as correntes de enrolamento das Equações 9.19 e 9.20
Ialpha = If + Ib;
Ibeta = j*(If - Ib);
magIalpha = abs(Ialpha);
angleIalpha = angle(Ialpha)*180/pi;
magIbeta = abs(Ibeta);
angleIbeta = angle(Ibeta)*180/pi;
fprintf('\n(c)')
fprintf('\n Ialpha = %.1f + j %.1f = %.1f no ângulo de %.1f graus A', ...
    real(Ialpha), imag(Ialpha), magIalpha, angleIalpha);
fprintf('\n Ibeta = %.1f + j %.1f = %.1f no ângulo de %.1f graus A\n', ...
    real(Ibeta), imag(Ibeta), magIbeta, angleIbeta);
%(d) A potência entregue ao campo para frente é igual à potência entregue
% ao campo para trás menos as perdas  $I^2R$  no enrolamento de estator
Pgf = 2*(real(Vf*conj(If)) - R1*magIf^2);
% A potência entregue ao campo para trás é igual à potência entregue
% ao campo para trás menos as perdas  $I^2R$  no enrolamento de estator
Pgb = 2*(real(Vb*conj(Ib)) - R1*magIb^2);
% A potência eletromagnética é igual a (1-s) vezes a
% potência líquida de entreferro
Pmech = (1-s)*(Pgf - Pgb);
fprintf('\n(d)')
fprintf('\n Potência entregue ao campo para frente = %.1f W', Pgf)
fprintf('\n Potência entregue ao campo para trás = %.1f W', Pgb)
fprintf('\n Pmec = %.1f W\n', Pmech)
fprintf('\n')

```

### PROBLEMA PRÁTICO 9.3



Para o motor do Exemplo 9.3, use MATLAB para plotar a potência mecânica interna em função do escorregamento, quando esse varia de  $s = 0,04$  até  $s = 0,05$  com as mesmas tensões de

sequilibradas que foram usadas no exemplo. Com os mesmos eixos (usando linhas tracejadas), plote a potência mecânica interna para tensões bifásicas equilibradas de 220 V de magnitude e  $90^\circ$  de defasagem.

### ■ Solução

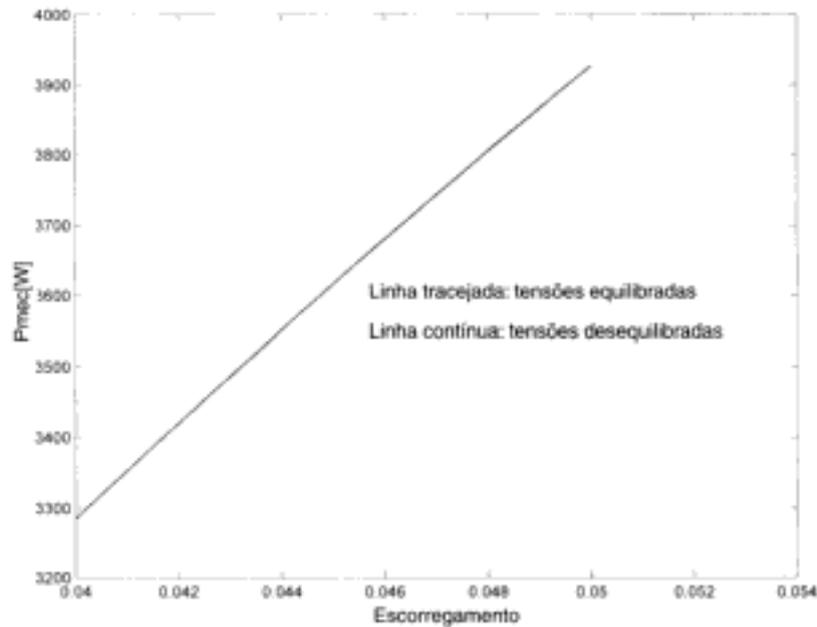


FIGURA 9.15 Plotagem de MATLAB para o Problema Prático 9.3.

## 9.4.2 O Caso Geral: Máquinas de Indução Bifásicas Assimétricas

Como discutimos, um motor de indução monofásico com um enrolamento principal e outro auxiliar é um exemplo de motor de indução bifásico assimétrico. Nesta seção, desenvolveremos um modelo para esse motor bifásico, usando uma notação apropriada ao motor monofásico. Vamos supor, como é comum neste caso, que os enrolamentos estejam em quadratura espacial mas que sejam assimétricos no sentido de que podem ter um número diferente de espiras, uma distribuição diferente de enrolamentos, e assim por diante.

Nossa abordagem analítica consiste em representar o rotor por um enrolamento equivalente bifásico, como está mostrado esquematicamente na Fig. 9.16, e começar com as relações existentes entre o fluxo concatenado e a corrente para o rotor e o estator dadas por

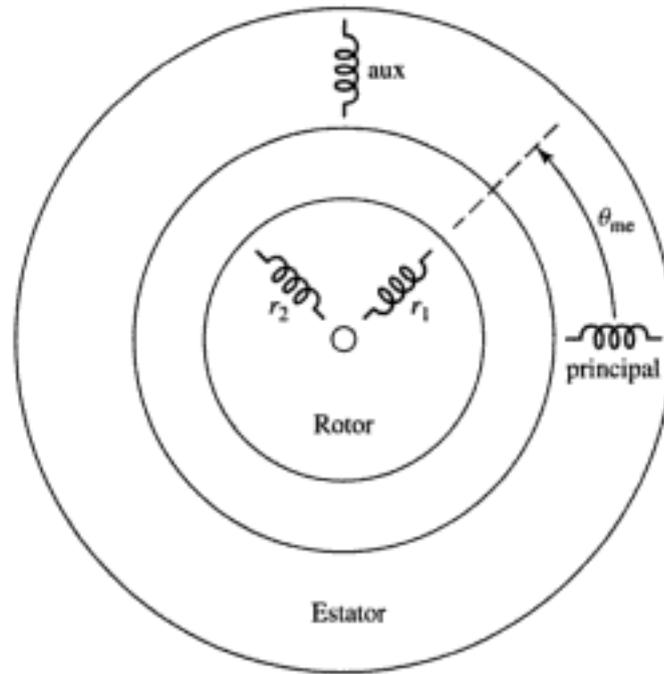
$$\begin{bmatrix} \lambda_{\text{principal}} \\ \lambda_{\text{aux}} \\ \lambda_{r1} \\ \lambda_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\text{principal}} & 0 & \mathcal{L}_{\text{principal},r1}(\theta_{me}) & \mathcal{L}_{\text{principal},r2}(\theta_{me}) \\ 0 & L_{\text{aux}} & \mathcal{L}_{\text{aux},r1}(\theta_{me}) & \mathcal{L}_{\text{aux},r2}(\theta_{me}) \\ \mathcal{L}_{\text{principal},r1}(\theta_{me}) & \mathcal{L}_{\text{aux},r1}(\theta_{me}) & L_r & 0 \\ \mathcal{L}_{\text{principal},r2}(\theta_{me}) & \mathcal{L}_{\text{aux},r2}(\theta_{me}) & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\text{principal}} \\ i_{\text{aux}} \\ i_{r1} \\ i_{r2} \end{bmatrix} \quad (9.25)$$

onde  $\theta_{me}$  é o ângulo de rotor medido em radianos elétricos

$L_{\text{principal}}$  = Indutância própria do enrolamento principal

$L_{\text{aux}}$  = Indutância própria do enrolamento auxiliar

$L_r$  = Indutância própria dos enrolamentos equivalentes do rotor



**FIGURA 9.16** Representação esquemática de um motor de indução bifásico com um rotor bifásico equivalente.

$\mathcal{L}_{\text{principal},r1}(\theta_{me})$  = Indutância mútua entre o enrolamento principal e o enrolamento equivalente 1 do rotor

$\mathcal{L}_{\text{principal},r2}(\theta_{me})$  = Indutância mútua entre o enrolamento principal e o enrolamento equivalente 2 do rotor

$\mathcal{L}_{\text{aux},r1}(\theta_{me})$  = Indutância mútua entre o enrolamento auxiliar e o enrolamento 1 do rotor

$\mathcal{L}_{\text{aux},r2}(\theta_{me})$  = Indutância mútua entre o enrolamento auxiliar e o enrolamento 2 do rotor

Supondo uma distribuição senoidal de fluxo no entreferro, as indutâncias mútuas entre o enrolamento principal e o rotor serão da forma

$$\mathcal{L}_{\text{principal},r1}(\theta_{me}) = L_{\text{principal},r} \cos \theta_{me} \quad (9.26)$$

e

$$\mathcal{L}_{\text{principal},r2}(\theta_{me}) = -L_{\text{principal},r} \text{sen } \theta_{me} \quad (9.27)$$

em que  $L_{\text{principal},r}$  é a amplitude da indutância mútua.

As indutâncias mútuas envolvendo o enrolamento auxiliar serão da mesma forma com exceção que o enrolamento auxiliar encontra-se deslocado de 90 graus elétricos no espaço em relação ao enrolamento principal. Desse modo, podemos escrever

$$\mathcal{L}_{\text{aux},r1}(\theta_{me}) = L_{\text{aux},r} \text{sen } \theta_{me} \quad (9.28)$$

e

$$\mathcal{L}_{\text{aux},r2}(\theta_{me}) = L_{\text{aux},r} \cos \theta_{me} \quad (9.29)$$

Observe que geralmente o enrolamento auxiliar tem um número diferente de espiras (e talvez uma distribuição diferente de enrolamento) do que o enrolamento principal. Assim, para os propósitos de modelagem, freqüentemente é mais conveniente escrever

$$L_{\text{aux},r} = a L_{\text{principal},r} \quad (9.30)$$

Finalmente, depois de uma cuidadosa manipulação algébrica, pode-se mostrar que o conjugado eletromagnético médio, no tempo, é dado por

$$\begin{aligned} \langle T_{mec} \rangle = & \left( \frac{\text{pólos}}{2} \right) \text{Re} \left[ (L_{principal,r}^2 \hat{I}_{principal} \hat{I}_{principal}^* + L_{aux,r}^2 \hat{I}_{aux} \hat{I}_{aux}^*) (\hat{K}^+ - \hat{K}^-)^* \right. \\ & \left. + j L_{principal,r} L_{aux,r} (\hat{I}_{principal}^* \hat{I}_{aux} - \hat{I}_{principal} \hat{I}_{aux}^*) (\hat{K}^+ + \hat{K}^-)^* \right] \end{aligned} \quad (9.48)$$

em que o símbolo  $\text{Re}[\ ]$  indica novamente a parte real de um número complexo e o índice \* indica o conjugado complexo. Observe que a Equação 9.49 é deduzida supondo-se que as diversas correntes são expressas em grandezas eficazes.

#### EXEMPLO 9.4

Considere o caso de um motor bifásico simétrico, como o discutido na Seção 9.4.1. Nesse caso, as Equações 9.25 a 9.37 simplificam-se quando as indutâncias próprias e mútuas e as resistências são iguais nos dois enrolamentos. Usando a notação da Seção 9.4.1 com  $\alpha$  e  $\beta$  substituindo principal e aux, as relações entre os fluxos concatenados e as correntes das Equações 9.39 e 9.40 tornam-se

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_\alpha &= [L_\alpha - jL_{\alpha,r}^2(\hat{K}^+ + \hat{K}^-)] \hat{I}_\alpha + L_{\alpha,r}^2(\hat{K}^+ - \hat{K}^-) \hat{I}_\beta \\ \hat{\lambda}_\beta &= -L_{\alpha,r}^2(\hat{K}^+ - \hat{K}^-) \hat{I}_\alpha + [L_\alpha - jL_{\alpha,r}^2(\hat{K}^+ + \hat{K}^-)] \hat{I}_\beta \end{aligned}$$

e as equações de tensão (Equação 9.43 e 9.44) tornam-se

$$\begin{aligned} \hat{V}_\alpha &= \hat{I}_\alpha R_\alpha + j\omega_c \hat{\lambda}_\alpha \\ \hat{V}_\beta &= \hat{I}_\beta R_\alpha + j\omega_c \hat{\lambda}_\beta \end{aligned}$$

Mostre que, quando operado a partir de uma seqüência positiva de tensões tal que  $\hat{V}_\beta = -jV_\alpha$ , o circuito equivalente monofásico é o circuito equivalente do campo para frente (seqüência positiva) da Fig. 9.12a.

#### ■ Solução

A substituição das tensões de seqüência positiva nas equações acima e a solução para a impedância  $Z_\alpha = \hat{V}_\alpha / \hat{I}_\alpha$  dá

$$\begin{aligned} Z_\alpha &= R_\alpha + j\omega_c L_\alpha + \frac{(\omega_c L_{\alpha,r})^2}{(R_r/s + j\omega_c L_r)} \\ &= R_\alpha + jX_\alpha + \frac{X_{\alpha,r}^2}{(R_r/s + jX_r)} \end{aligned}$$

Essa equação pode ser reescrita como

$$Z_\alpha = R_\alpha + j(X_\alpha - X_{\alpha,r}) + \frac{jX_{\alpha,r} [j(X_r - X_{\alpha,r}) + R_r/s]}{(R_r/s + jX_r)}$$

Fazendo  $R_\alpha \Rightarrow R_1$ ,  $(X_\alpha - X_{\alpha,r}) \Rightarrow X_1$ ,  $X_{\alpha,r} \Rightarrow X_m$ ,  $(X_r - X_{\alpha,r}) \Rightarrow X_2$  e  $R_r \Rightarrow R_2$ , vemos que essa equação representa de fato um circuito equivalente da forma da Fig. 9.12a.

#### PROBLEMA PRÁTICO 9.4

De forma análoga ao cálculo do Exemplo 9.4, mostre que, quando está funcionando a partir de uma seqüência negativa de tensões de modo que  $\hat{V}_\beta = jV_\alpha$ , o circuito equivalente monofásico é o circuito equivalente do campo para trás (seqüência negativa) da Fig. 9.12b.

### ■ Solução

Para uma seqüência negativa, a impedância  $Z_\alpha$  é igual a

$$\begin{aligned} Z_\alpha &= R_\alpha + j\omega_c L_\alpha + \frac{(\omega_c L_{\alpha,r})^2}{(R_r/(2-s) + j\omega_c L_r)} \\ &= R_\alpha + jX_\alpha + \frac{X_{\alpha,r}^2}{(R_r/(2-s) + jX_r)} \end{aligned}$$

Como no Exemplo 9.4, pode-se mostrar que isso corresponde a um circuito equivalente da forma da Fig. 9.12b.

### EXEMPLO 9.5

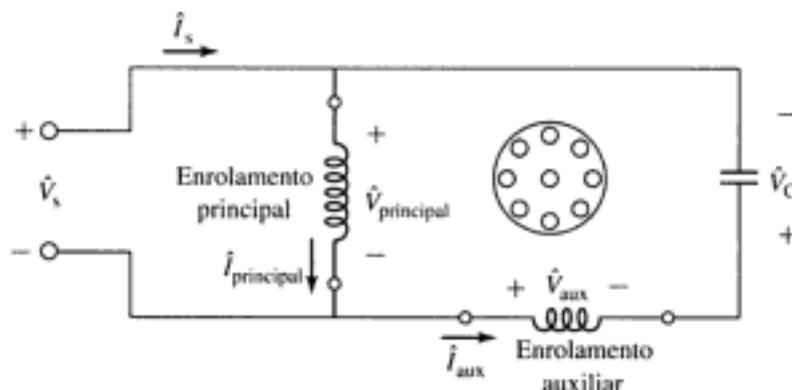
Um motor de indução monofásico de dois pólos tem os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} L_{\text{principal}} &= 80,6 \text{ mH} & R_{\text{principal}} &= 0,58 \ \Omega \\ L_{\text{aux}} &= 196 \text{ mH} & R_{\text{aux}} &= 3,37 \ \Omega \\ L_r &= 4,7 \ \mu\text{H} & R_r &= 37,6 \ \mu\Omega \\ L_{\text{principal},r} &= 0,588 \text{ mH} & L_{\text{aux},r} &= 0,909 \text{ mH} \end{aligned}$$

Ele opera com uma fonte monofásica de 230 V eficazes e 60 Hz, funcionando como um motor de fase dividida e capacitor permanente de valor  $35 \mu\text{F}$ , conectado em série com o enrolamento auxiliar. Para obter a necessária defasagem de corrente no enrolamento auxiliar, o enrolamento deve ser conectado com as polaridades mostradas na Fig. 9.17. O motor tem perdas rotacionais de 40 W e de 105 W, no núcleo.

Considere que o motor está operando a 3500 rpm.

- Encontre as correntes dos enrolamentos principal e auxiliar, a da fonte de alimentação e o valor da tensão no capacitor.
- Encontre o conjugado eletromagnético médio no tempo e a potência de saída no eixo.
- Calcule a potência de entrada do motor e o seu rendimento elétrico. Observe que, como as perdas no núcleo não são explicitamente levadas em consideração no modelo desenvolvido nesta seção, você pode considerá-las simplesmente como sendo um componente adicional da potência de entrada.
- Plote o conjugado eletromagnético médio no tempo em função da velocidade desde o repouso até a velocidade síncrona.



**FIGURA 9.17** Conexões do motor de indução de fase dividida e capacitor permanente do Exemplo 9.5.

### ■ Solução

O MATLAB, com a sua facilidade para manipular números complexos, é ideal para resolver este problema.

- a. O enrolamento principal deste motor está ligado diretamente à fonte de tensão monofásica. Assim, podemos fazer diretamente  $\hat{V}_{\text{principal}} = \hat{V}_s$ . No entanto, o enrolamento auxiliar está conectado à fonte de tensão monofásica por meio de um capacitor e sua polaridade encontra-se invertida. Assim, devemos escrever

$$\hat{V}_{\text{aux}} + \hat{V}_C = -\hat{V}_s$$

em que a tensão do capacitor é dada por

$$\hat{V}_C = j\hat{I}_{\text{aux}}X_C$$

Aqui, a impedância do capacitor  $X_C$  é igual a

$$X_C = -\frac{1}{(\omega_c C)} = -\frac{1}{(120\pi \times 35 \times 10^{-6})} = -75,8 \Omega$$

Fazendo  $\hat{V}_s = V_0 = 230$ , substituindo essas expressões nas Equações 9.43 e 9.44 e usando as Equações 9.39 e 9.40, obtém-se então a seguinte equação matricial para as correntes dos enrolamentos principal e auxiliar.

$$\begin{bmatrix} (R_{\text{principal}} + j\omega_c \hat{A}_1) & j\omega_c \hat{A}_2 \\ -j\omega_c \hat{A}_2 & (R_{\text{aux}} + jX_C + j\omega_c \hat{A}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{I}_{\text{principal}} \\ \hat{I}_{\text{aux}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ -V_0 \end{bmatrix}$$

em que

$$\hat{A}_1 = L_{\text{principal}} - jL_{\text{principal},s}^2(\hat{K}^+ + \hat{K}^-)$$

$$\hat{A}_2 = L_{\text{principal},r}L_{\text{aux},r}(\hat{K}^+ - \hat{K}^-)$$

e

$$\hat{A}_3 = L_{\text{aux}} - jL_{\text{aux},r}^2(\hat{K}^+ + \hat{K}^-)$$

Os parâmetros  $\hat{K}^+$  e  $\hat{K}^-$  podem ser obtidos das Equações 9.41 e 9.42 depois que o escorregamento tenha sido encontrado por meio da Equação 6.1

$$s = \frac{n_s - n}{n_s} = \frac{3600 - 3500}{3600} = 0,278$$

Essa equação matricial pode ser resolvida facilmente usando-se o MATLAB com os resultados

$$\hat{I}_{\text{principal}} = 15,9\angle -37,6^\circ \text{ A}$$

$$\hat{I}_{\text{aux}} = 5,20\angle -150,7^\circ \text{ A}$$

e

$$\hat{I}_s = 18,5\angle -22,7^\circ \text{ A}$$

O valor da tensão de capacitor é

$$|\hat{V}_C| = |\hat{I}_{\text{aux}}X_C| = 374 \text{ V}$$

- b. Usando MATLAB, o conjugado eletromagnético médio, no tempo, pode ser encontrado da Equação 9.49 como sendo

$$\langle T_{mec} \rangle = 9,74 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Então, a potência no eixo pode ser encontrada subtraindo-se as perdas rotacionais  $P_{rot}$  da potência de entreferro

$$\begin{aligned} P_{eixo} &= \omega_m \langle T_{mec} \rangle - P_{rot} \\ &= \left( \frac{2}{\text{pólos}} \right) (1-s) \omega_e (\langle T_{mec} \rangle) - P_{rot} \\ &= 3532 \text{ W} \end{aligned}$$

c. A potência de entrada do enrolamento principal pode ser obtida como

$$P_{principal} = \text{Re} [V_0 \hat{I}_{principal}^*] = 2893 \text{ W}$$

e a potência que é fornecida ao enrolamento auxiliar, incluindo o capacitor (que não dissipa nenhuma potência), é dada por

$$P_{aux} = \text{Re} [-V_0 \hat{I}_{aux}^*] = 1043 \text{ W}$$

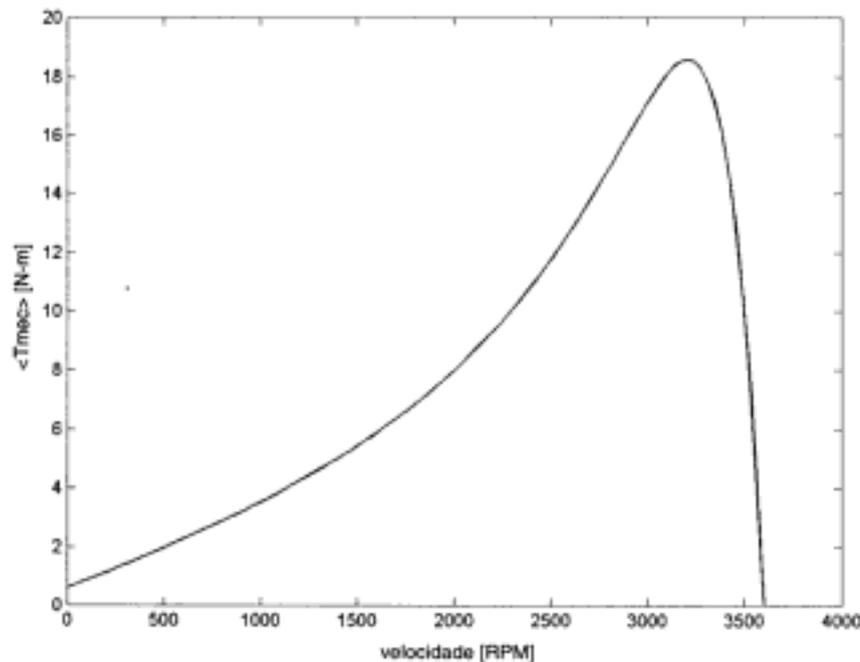
A potência total de entrada, incluindo-se a potência das perdas no núcleo  $P_{núcleo}$ , é obtida por

$$P_{entrada} = P_{principal} + P_{aux} + P_{núcleo} = 4041 \text{ W}$$

Finalmente, o rendimento pode ser determinado como

$$\eta = \frac{P_{eixo}}{P_{entrada}} = 0,874 = 87,4\%$$

d. A plotagem gerada pelo MATLAB de  $\langle T_{mec} \rangle$  versus velocidade encontra-se na Fig. 9.18. Aqui está o *script* de MATLAB:



**FIGURA 9.18** Conjugado eletromagnético médio, no tempo, versus velocidade para o motor de indução monofásico do Exemplo 9.5.

**■ Solução**

- a. 86,4 %
  - b. 41,8  $\mu\text{F}$ , 86,6 %
- 

## 9.5 RESUMO

Um dos temas deste capítulo é a continuação da teoria da máquina de indução do Capítulo 6 e sua aplicação ao motor de indução monofásico. Essa teoria é ampliada por meio de um processo de raciocínio gradativo que inicia na teoria do campo girante simples do motor polifásico simétrico de indução. O conceito básico é a decomposição da onda de FMM do estator em duas ondas de amplitudes constantes que se deslocam girando ao redor do entreferro na velocidade síncrona em sentidos opostos. Se o escorregamento do campo para frente for  $s$ , então o do campo para trás será  $(2 - s)$ . Cada uma dessas componentes de campo produz uma ação do tipo motor de indução, exatamente como em um motor polifásico simétrico. Do ponto de vista do estator, os efeitos refletidos do rotor podem ser visualizados e expressos quantitativamente em termos de circuitos equivalentes simples. A facilidade com que as reações internas podem ser analisadas dessa forma é a razão essencial para a utilidade da teoria do campo girante duplo.

Em um enrolamento monofásico, as ondas componentes de FMM para trás e para frente são iguais, e sua amplitude é a metade do valor máximo de pico da onda de FMM estacionária pulsante produzida pelo enrolamento. A decomposição da onda de FMM em suas componentes para frente e para trás leva então ao conceito físico do motor monofásico descrito na Seção 9.1 e finalmente à teoria quantitativa desenvolvida na Seção 9.3 e aos circuitos equivalentes da Fig. 9.11.

Na maioria dos casos, os motores monofásicos de indução são na realidade motores bifásicos com enrolamentos assimétricos que funcionam com uma fonte de tensão monofásica. Assim, para completar o nosso entendimento dos motores de indução monofásicos, é necessário examinar o desempenho dos motores bifásicos. Desse modo, o próximo passo é aplicar a imagem do campo girante duplo a um motor bifásico simétrico com tensões aplicadas em desequilíbrio, como na Seção 9.4.1. Essa investigação conduz ao conceito de componentes simétricas, pelo qual um sistema bifásico desequilibrado de correntes ou tensões pode ser decomposto na soma de dois sistemas de componentes bifásicas equilibradas com seqüências opostas de fases. A decomposição das correntes em sistemas de componentes simétricas é equivalente a decompor a onda de FMM de estator em suas componentes para frente e para trás e, desse modo, as reações internas do rotor para cada um dos sistemas de componentes simétricas são iguais às que já investigamos. Um processo muito semelhante de raciocínio, que não será examinado aqui, leva ao método bem conhecido de componentes simétricas trifásicas, usado no tratamento de problemas que envolvem a operação desequilibrada de máquinas rotativas trifásicas. A facilidade com que a máquina rotativa pode ser analisada em termos da teoria do campo girante é a razão principal da utilidade do método das componentes simétricas.

Finalmente, o capítulo termina na Seção 9.4.2 com o desenvolvimento de uma teoria analítica para o caso geral de um motor de indução bifásico com enrolamentos assimétricos. Essa teoria permite-nos analisar o funcionamento de motores monofásicos que estejam operando com ambos os enrolamentos principal e simétrico.

Esse motor opera com uma fonte bifásica desequilibrada de 60 Hz cujas tensões de fase são, respectivamente, 223 e 190 V, sendo que a tensão menor está adiantada em relação à maior de  $73^\circ$ . Para um escorregamento de 0,045, encontre

- as correntes de fase em cada um dos enrolamentos e
- a potência mecânica interna.

**9.10** Considere o motor bifásico do Exemplo 9.3.

- Encontre o conjugado de partida para as condições especificadas no exemplo.
- Compare o resultado da parte (a) com o conjugado de partida que o motor produziria se tensões bifásicas equilibradas de 220 V fossem aplicadas ao motor.
- Mostre que, se as tensões de estator  $\hat{V}_\alpha$  e  $\hat{V}_\beta$  de um motor de indução bifásico estiverem em quadratura de tempo mas forem desiguais em módulo, então o conjugado de partida será o mesmo que aquele desenvolvido quando tensões bifásicas equilibradas de módulo  $\sqrt{V_\alpha V_\beta}$  são aplicadas.

**9.11** O motor de indução do Problema 9.9 é abastecido a partir de uma fonte bifásica desequilibrada por um alimentador de quatro fios que tem uma impedância  $Z = 0,32 + j1,5 \Omega$ /fase. As tensões da fonte podem ser expressas como

$$\hat{V}_\alpha = 235 \angle 0^\circ \quad \hat{V}_\beta = 212 \angle 78^\circ$$

Para um escorregamento de 5 por cento, mostre que as tensões de terminal do motor de indução correspondem mais aproximadamente a um conjunto bifásico equilibrado do que aquelas da fonte.

**9.12** Os parâmetros de circuito equivalente, em ohms por fase, referidos ao estator de um motor de indução bifásico 1,0 kW, 220 V, quatro pólos, 60 Hz e de gaiola estão dados abaixo. As perdas rotacionais a vazio são de 65 W.

$$R_1 = 0,78 \quad R_2 = 4,2 \quad X_1 = X_2 = 5,3 \quad X_m = 93$$

- A tensão aplicada à fase  $\alpha$  é  $220 \angle 0^\circ$  V e aquela aplicada à fase  $\beta$  é  $220 \angle 65^\circ$  V. Encontre o conjugado líquido de entreferro para um escorregamento  $s = 0,035$ .
- Qual é o conjugado de partida para as tensões aplicadas da parte (a)?
- As tensões aplicadas são alteradas de modo que  $\hat{V}_\alpha = 220 \angle 65^\circ$  V e  $\hat{V}_\beta = 220 \angle 90^\circ$  V. A carga plena da máquina ocorre com  $s = 0,048$ . Para qual valor de escorregamento, ocorre o conjugado interno máximo? Qual é o valor do conjugado máximo?
- Enquanto o motor está funcionando como na parte (c), a fase  $\beta$  é aberta. Qual é a potência de saída da máquina para um escorregamento  $s = 0,04$ ?
- Que tensões aparecem nos terminais da fase aberta  $\beta$  sob as condições da parte (d)?



**9.13** Um motor de indução monofásico com um capacitor permanente de trabalho, 120 V, 60 Hz e dois pólos tem os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} L_{\text{principal}} &= 47,2 \text{ mH} & R_{\text{principal}} &= 0,38 \Omega \\ L_{\text{aux}} &= 102 \text{ mH} & R_{\text{aux}} &= 1,78 \Omega \\ L_r &= 2,35 \mu\text{H} & R_r &= 17,2 \mu\Omega \\ L_{\text{principal},r} &= 0,342 \text{ mH} & L_{\text{aux},r} &= 0,530 \text{ mH} \end{aligned}$$

Você pode assumir que o motor tem 48 W de perdas no núcleo e 23 W de perdas rotacionais. Os enrolamentos do motor estão conectados com a polaridade mostrada na Fig. 9.17, sendo que o capacitor de trabalho é de  $40 \mu\text{F}$ .

a. Calcule o conjugado de partida do motor.

Com o motor funcionando com uma velocidade de 3490 rpm, calcule:

b. as correntes dos enrolamentos principal e auxiliar,

c. a corrente total de linha e o fator de potência do motor,

d. a potência de saída e

e. a potência de entrada elétrica e o rendimento.



**9.14** Considere o motor monofásico do Problema 9.13. Escreva um *script* de MATLAB para pesquisar, dentro do intervalo de valores de capacitor desde  $25 \mu\text{F}$  até  $75 \mu\text{F}$ , e encontrar o valor que irá maximizar o rendimento do motor para uma velocidade de 3490 rpm. Qual é o respectivo rendimento máximo?



**9.15** Para elevar o conjugado de partida, o motor de indução monofásico do Problema 9.13 deve ser convertido em um motor com capacitores de partida e de trabalho. Escreva um *script* de MATLAB para encontrar o valor mínimo do capacitor de partida, necessário para elevar o conjugado de partida até 0,5 N.m.



**9.16** Considere o motor de indução monofásico do Exemplo 9.5 funcionando no intervalo de velocidade desde 3350 rpm até 3580 rpm.

a. Use o MATLAB para plotar a potência de saída dentro no intervalo de velocidade dado.

b. Plote o rendimento do motor nesse intervalo de velocidade.

c. Sobrepondo à mesma plotagem da parte (b), plote o rendimento do motor se o capacitor permanente for aumentado para  $45 \mu\text{F}$ .

## Introdução à Eletrônica de Potência

**A**té as décadas finais do século passado, as máquinas CA tendiam a ser empregadas basicamente como dispositivos de velocidade única. Tipicamente, elas funcionavam a partir de fontes de frequência fixa (na maioria dos casos, 50 ou 60 Hz da rede elétrica). No caso dos motores, o controle da velocidade necessitava de uma fonte de frequência variável, e tais fontes não estavam facilmente disponíveis. Assim, as aplicações que exigiam controle de velocidade eram atendidas por máquinas CC, que podem fornecer um controle de velocidade altamente flexível, embora com um certo custo porque elas são mais complexas, mais dispendiosas e exigem maior manutenção do que as máquinas CA.

A disponibilidade de chaves de potência de estado sólido alterou esse quadro imensamente. Agora, é possível desenvolver a eletrônica de potência capaz de fornecer o acionamento de tensão, corrente e frequência variáveis necessário para se obter um desempenho de velocidade variável em máquinas CA. Atualmente, as máquinas CA substituíram as máquinas CC em muitas das aplicações mais tradicionais, e uma ampla gama de novas aplicações se desenvolveu.

Como é o caso com a eletromecânica e as máquinas elétricas, a eletrônica de potência é uma disciplina que só pode ser dominada por meio de muito estudo. Muitos livros foram escritos a respeito desse assunto, alguns dos quais estão listados na bibliografia no final deste capítulo. É evidente que um único capítulo em um livro sobre máquinas elétricas não é suficiente para fazer justiça a esse tópico. Por essa razão, aqui os nossos objetivos serão limitados. O nosso propósito é fornecer uma visão geral da eletrônica de potência e mostrar como os blocos construtivos básicos podem ser reunidos como sistemas de acionamento de máquinas CA e CC. Não daremos muita atenção às características detalhadas de dispositivos em particular nem aos inúmeros detalhes requeridos para se projetar sistemas práticos de acionamento. No Capítulo 11, levaremos adiante a discussão deste capítulo e examinaremos as características de alguns sistemas comuns de acionamento.

### 10.1 CHAVES DE POTÊNCIA

Comum a todos os sistemas de eletrônica de potência são os dispositivos de chaveamento. Idealmente, esses dispositivos controlam a corrente de modo muito parecido ao modo como as válvulas controlam o fluxo dos fluidos: coloque-as em "ABERTO" e elas não apresentarão nenhuma resistência ao fluxo da corrente; coloque-as em "FECHADO" e nenhum fluxo de corrente será possível. Naturalmente, na prática as chaves não são ideais e suas características específicas afetam significativamente a sua aplicabilidade em qualquer situação dada. Felizmente, o comportamento básico da maioria dos circuitos de eletrônica de potência pode ser compreendido supon-

do que as chaves sejam ideais. Essa será a abordagem que adotaremos neste livro. Nesta seção, discutiremos brevemente alguns dispositivos de chaveamento comuns e apresentaremos seus modelos ideais simplificados.

### 10.1.1 Diodos

Os diodos constituem a mais simples das chaves de potência. A forma genérica da curva característica  $v \times i$  de um diodo está mostrada na Fig. 10.1.

As características essenciais de um diodo estão presentes na curva ideal  $v \times i$  da Fig. 10.2a. O símbolo usado para representar um diodo está mostrado na Fig. 10.2b, juntamente com os sentidos de referência para a corrente  $i$  e a tensão  $v$ . Com base na terminologia que foi desenvolvida quando os diodos retificadores eram válvulas eletrônicas, a corrente do diodo flui para dentro do *anodo* e sai do *catodo*.

Podemos ver que o diodo ideal bloqueia o fluxo de corrente quando a tensão é negativa ( $i = 0$  para  $v < 0$ ) e deixa passar corrente positiva sem apresentar queda de tensão ( $v = 0$  para  $i \geq 0$ ). Iremos nos referir à região de tensão negativa como sendo o estado de bloqueio do diodo e, à região positiva, como sendo a região de estado de condução do diodo. Comparando com a curva  $v \times i$ , vê-se que um diodo real diferencia-se de um diodo ideal porque:

- Há uma *queda de tensão direta*, indicado por  $V_F$  na Fig. 10.1, na região de corrente positiva. Para dispositivos de baixa potência, esse intervalo de tensão está na ordem de 0,6 a 0,7 V, ao passo que para os dispositivos de potência elevada pode exceder 3 V.
- A essa queda de tensão, corresponde uma dissipação de potência. Os diodos reais tem uma potência máxima de dissipação (e uma correspondente corrente máxima) que não pode ser ultrapassada.

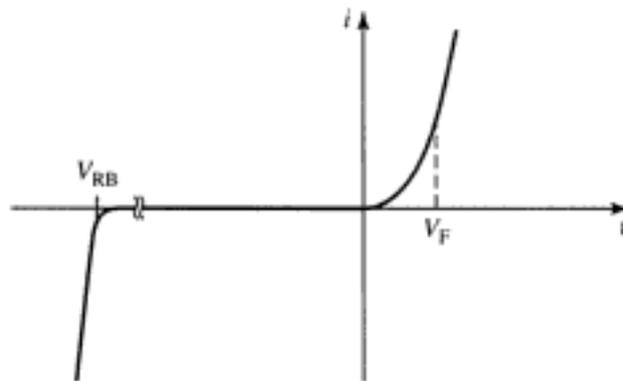


FIGURA 10.1 Curva característica  $v \times i$  de um diodo.



FIGURA 10.2 (a) Característica  $v \times i$  de um diodo ideal.

- Um diodo real é limitado pela tensão negativa que pode suportar. Conhecida como *tensão inversa de ruptura\** e indicada por  $V_{RB}$  na Fig. 10.1, essa é a tensão inversa máxima que pode ser aplicada ao diodo antes que comece a conduzir corrente inversa.

O diodo é a mais simples das chaves de potência no sentido de que ele não pode ser controlado; ele simplesmente entra em condução quando uma corrente positiva começa a fluir e é bloqueado quando a corrente começa a inverter de sentido. Embora seu comportamento seja simples, ele é usado em uma ampla variedade de aplicações, a mais comum das quais é como retificador na conversão de CA em CC.

O comportamento básico de um diodo pode ser ilustrado pelo exemplo simples mostrado a seguir.

### EXEMPLO 10.1

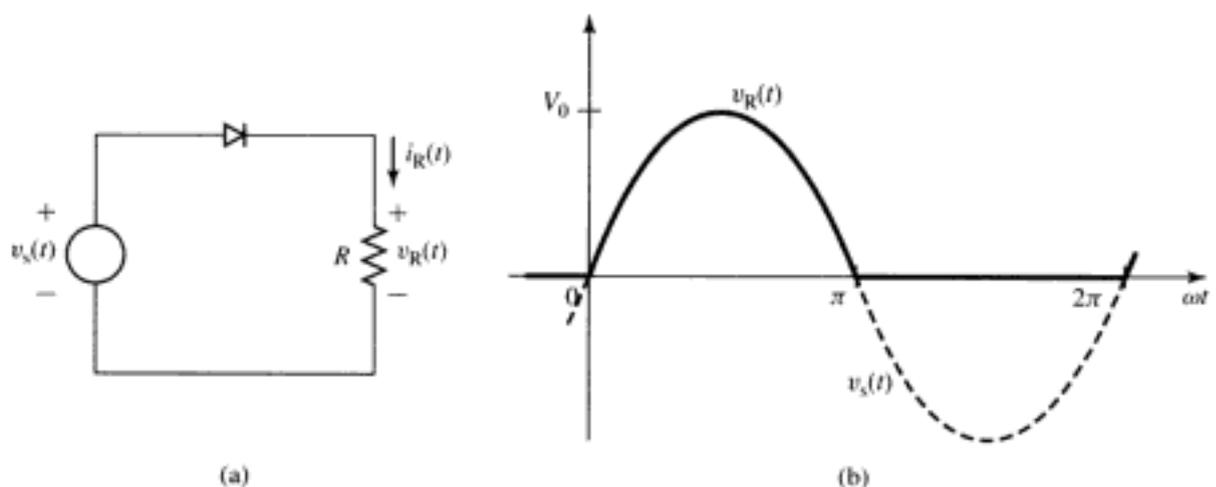
Considere o circuito *retificador de meia onda* da Fig. 10.3a em que um resistor  $R$  é alimentado por uma fonte de tensão  $v_s(t) = V_0 \text{ sen } \omega t$  através de um diodo. Assuma que o diodo é ideal. (a) Encontre a tensão  $v_R(t)$  e a corrente  $i_R(t)$  no resistor. (b) Encontre os valores médios CC de tensão  $V_{CC}$  e de corrente  $I_{CC}$  no resistor.

#### ■ Solução

- a. Este é um problema não-linear no sentido de que não é possível escrever uma expressão analítica para a característica  $v \times i$  do diodo ideal. No entanto, pode ser resolvido facilmente usando o *método dos estados assumidos* em que, para qualquer valor dado da tensão da fonte, o diodo é alternadamente suposto em condução (um curto-circuito) ou bloqueado (um circuito aberto) obtendo-se então a corrente. Uma das duas soluções irá violentar a curva  $v \times i$  do diodo (isto é, haverá fluxo de corrente negativa em curto-circuito, ou tensão positiva em circuito aberto) e deverá ser descartada; a outra solução será a correta.

Seguindo este procedimento, encontramos que a solução é dada por

$$v_R(t) = \begin{cases} v_s(t) = V_0 \text{ sen } \omega t & v_s(t) \geq 0 \\ 0 & v_s(t) < 0 \end{cases}$$



**FIGURA 10.3** (a) Circuito retificador de meia onda para o Exemplo 10.1. (b) Tensão no resistor.

\* N. de T.: *Reverse-breakdown voltage*, em inglês.

Essa tensão está plotada na Fig. 10.3b. A corrente tem forma idêntica e é obtida simplesmente como  $i_R(t) = v_R(t)/R$ . A terminologia *retificação de meia onda* é aplicada a esse sistema porque a tensão é aplicada ao resistor durante o semiciclo em que a forma de onda da tensão da fonte é positiva.

b. O valor CC ou médio da forma de onda da tensão é igual a

$$V_{CC} = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} V_o \sin(\omega t) dt = \frac{V_o}{\pi}$$

e, portanto, a corrente CC no resistor é igual a

$$I_{CC} = \frac{V_o}{\pi R}$$

### PROBLEMA PRÁTICO 10.1

Calcule a tensão média no resistor da Fig. 10.3 quando a fonte de tensão senoidal do Exemplo 10.1 é substituída por uma fonte de mesma frequência, mas que produz uma onda quadrada de valor médio zero e amplitude de pico a pico de  $2V_o$ .

#### ■ Solução

$$V_{CC} = \frac{V_o}{2}$$

### 10.1.2 Retificadores Controlados de Silício e TRIACs

As características de um *retificador controlado de silício*, ou SCR, também referido como *ti-ristor*, são similares às de um diodo. Entretanto, além de um anodo e um catodo, o SCR tem um terceiro terminal conhecido como *porta* (*gate*) ou *gatilho*. A Fig. 10.4 mostra a forma da curva característica  $v \times i$  de um SCR típico.

Como no caso do diodo, o SCR entrará em condução apenas se o anodo for positivo em relação ao catodo. Para entrar em condução, diferentemente de um diodo, o SCR também requer um pulso de corrente  $i_G$  aplicado na porta. Entretanto, depois que o SCR está conduzindo, observe que o sinal de comando do gatilho pode ser removido e o SCR permanecerá conduzindo até que a corrente do SCR tenha caído abaixo de um pequeno valor referido como *corrente de manutenção*. Nesse ponto, o SCR é bloqueado exatamente como em um diodo.

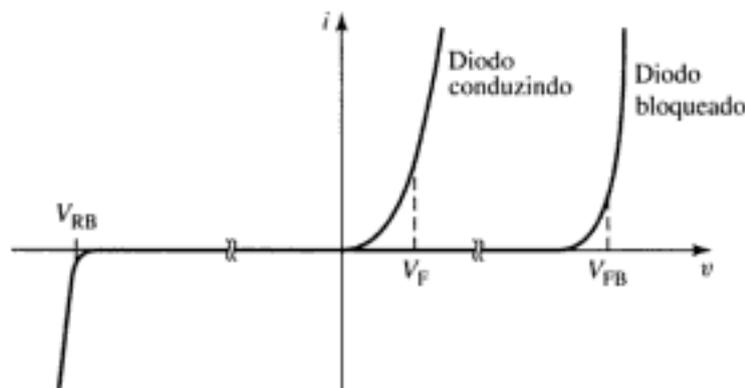


FIGURA 10.4 Curva característica  $v \times i$  de um SCR.

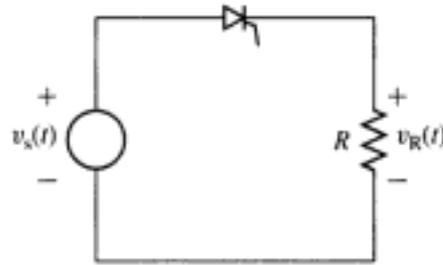


FIGURA 10.6 Circuito retificador de meia onda com SCR do Exemplo 10.2.

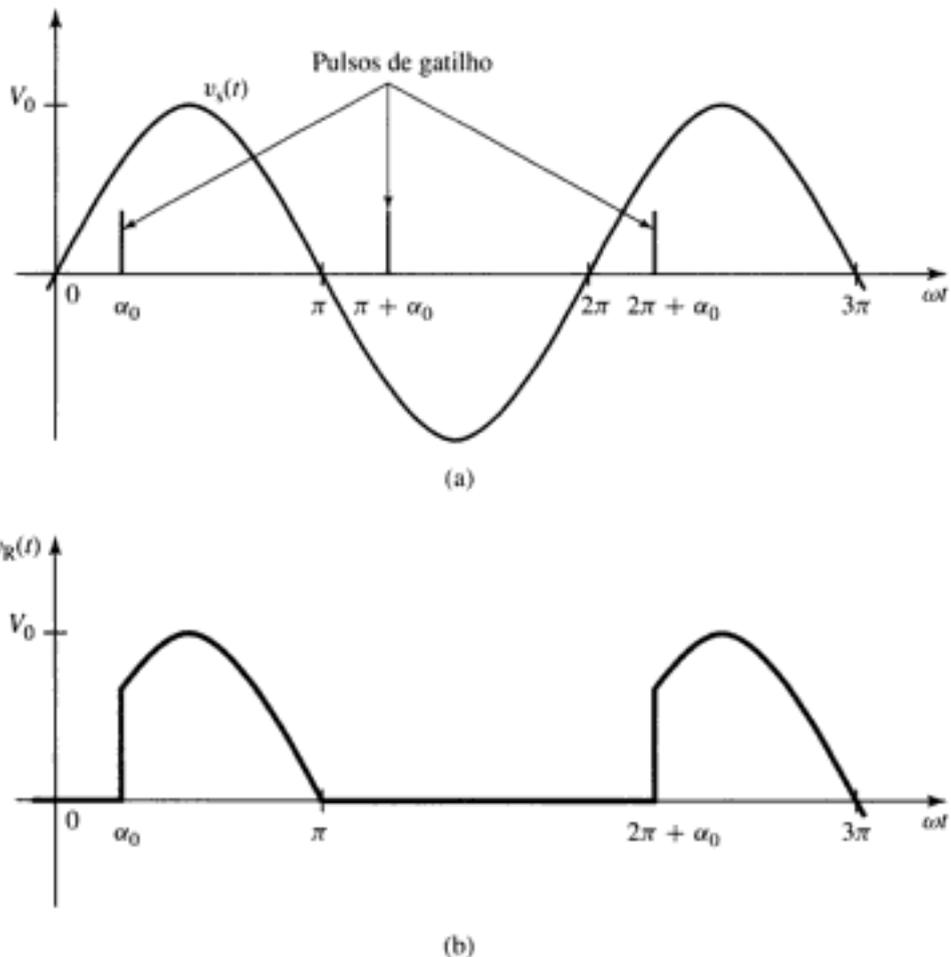


FIGURA 10.7 (a) Pulsos de gatilho do Exemplo 10.2. (b) Tensão de resistor.

### ■ Solução

A solução segue a do Exemplo 10.1, com exceção de que após o SCR ter sido bloqueado, independentemente da polaridade da tensão, ele assim permanece até que a tensão do SCR torne-se positiva e um pulso de corrente de gatilho seja aplicado. Depois disso, o método dos estados assumidos pode ser usado para determinar o estado do SCR.

Seguindo esse procedimento, a solução obtida é dada por

$$v_R(t) = \begin{cases} 0 & v_s(t) \geq 0 \quad (\text{antes do pulso de gatilho}) \\ v_s(t) = V_0 \sin \omega t & v_s(t) \geq 0 \quad (\text{após o pulso de gatilho}) \\ 0 & v_s(t) < 0 \end{cases}$$

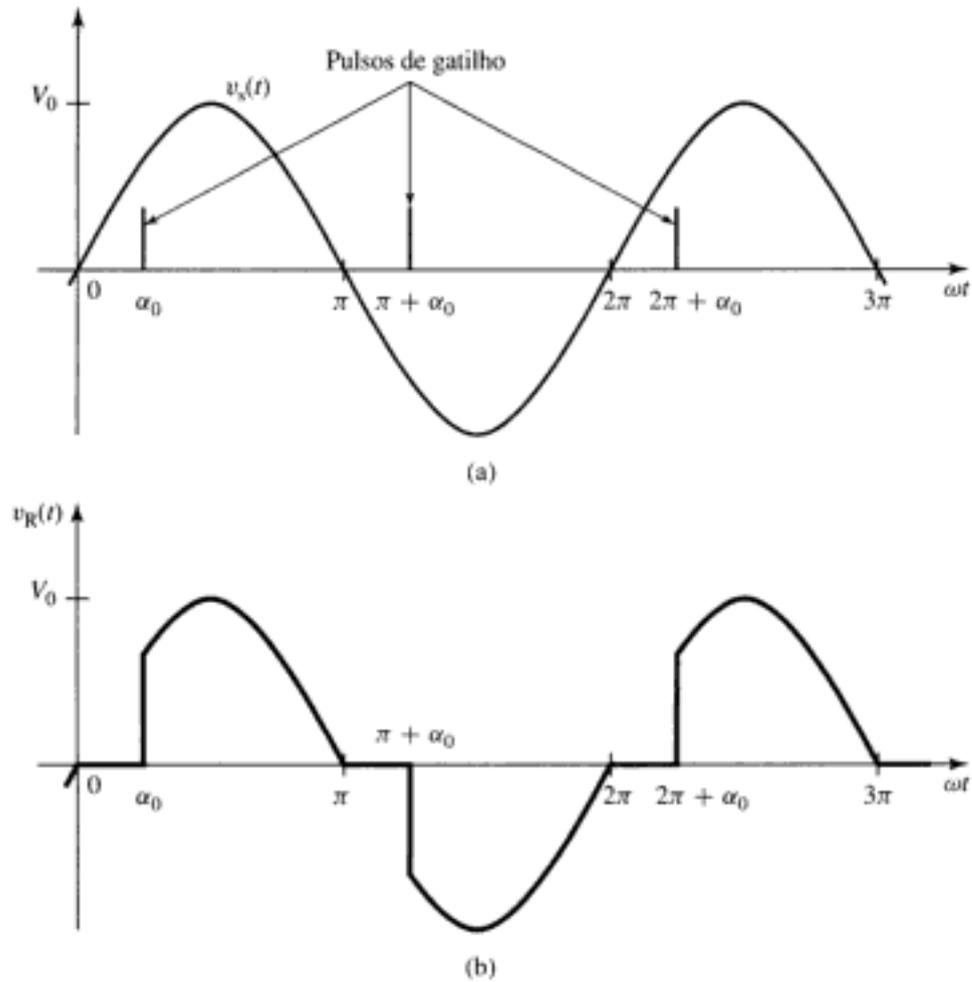


FIGURA 10.10 (a) Pulsos de gatilho do Exemplo 10.3. (b) Tensão de resistor.

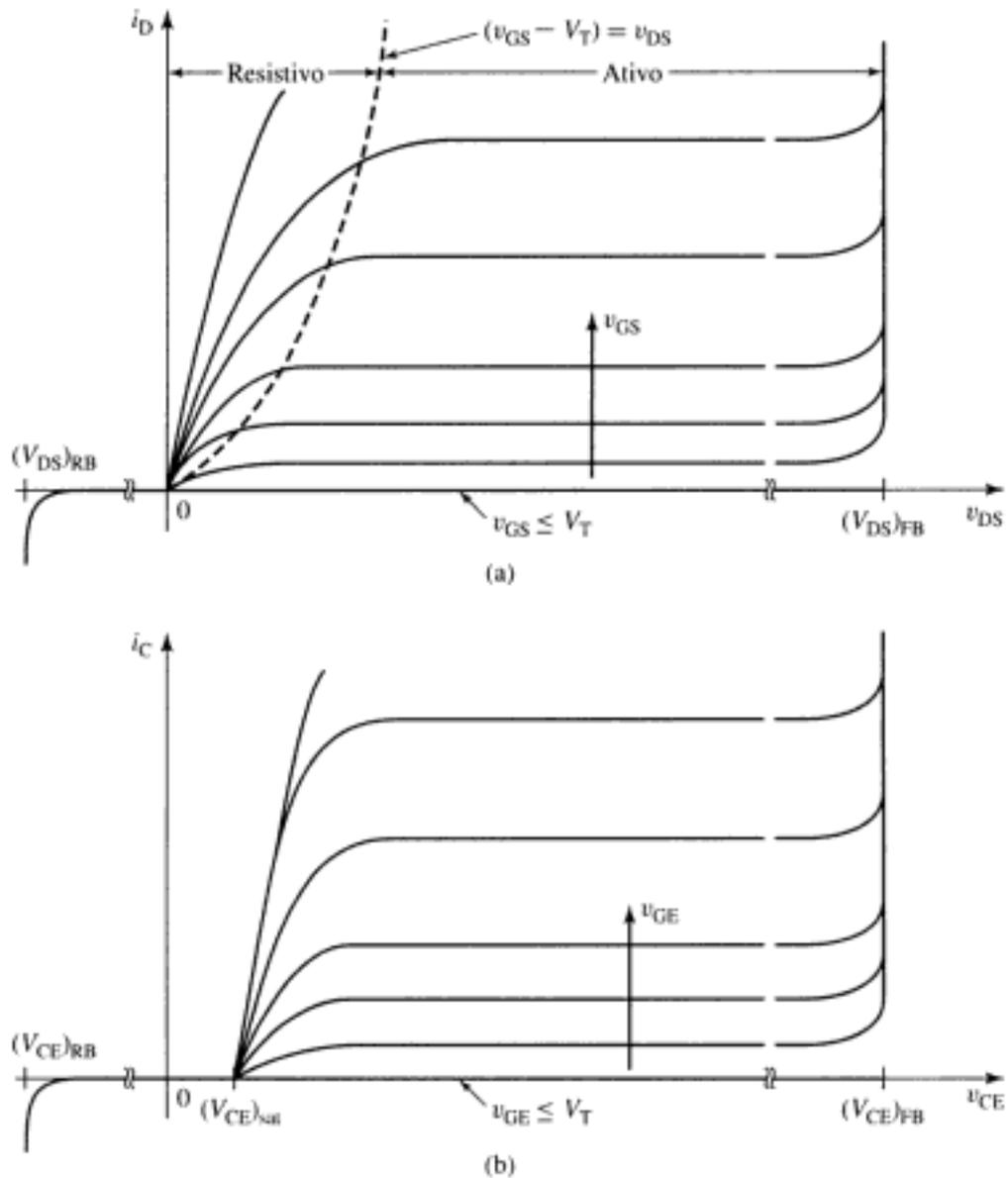
### ■ Solução

$$V_{R,ef} = V_0 \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha_0}{\pi}\right)}$$

## 10.1.3 Transistores

Em circuitos de eletrônica de potência, em que é necessário controlar tensões e correntes, é comum escolher os transistores de potência como chaves controladas. Embora uma série de tipos estejam disponíveis, iremos considerar apenas dois: o *transistor de efeito de campo de metal-óxido-semicondutor (MOSFET)* e o *transistor bipolar de porta isolada (IGBT)*.

MOSFETs e IGBTs são ambos dispositivos de três terminais. A Fig. 10.11a mostra os símbolos para os MOSFETs de canal n e p, ao passo que a Fig. 10.11b mostra o símbolo dos IGBTs de canal n e p. No caso do MOSFET, os três terminais serão referidos como *fonte*, *dreno* e *gatilho*, ao passo que no caso do IGBT os terminais respectivos serão *emissor*, *coletor* e *gatilho*. Para o MOSFET, o sinal de controle é a tensão entre gatilho e fonte (*source*),  $v_{GS}$ . Para o IGBT, é a tensão entre gatilho e emissor,  $v_{GE}$ . Em ambos o MOSFET e o IGBT, o eletrodo do gatilho está acoplado capacitivamente ao restante do dispositivo. Dessa forma, com funcionamento CC, drena corrente nula, aparecendo como um circuito aberto, e com funcionamento CA drena uma pequena corrente capacitiva.



**FIGURA 10.12** (a) Curva característica  $v \times i$  típica de um MOSFET de canal n. (b) Curva característica  $v \times i$  típica de um IGBT de canal n.

Observe que, para pequenos valores de  $v_{CE}$ , a tensão do IGBT tende a um valor constante, independentemente da corrente de dreno. Essa *tensão de saturação*, indicada por  $(v_{CE})_{sat}$  na figura, é da ordem de um volt ou menos em dispositivos pequenos e de uns poucos volts em dispositivos de potência elevada. Correspondentemente, no MOSFET, para pequenos valores de  $v_{DS}$ ,  $v_{DS}$  é proporcional à corrente de dreno e o MOSFET comporta-se como uma pequena resistência cujo valor diminui com valores crescentes de  $v_{GS}$ .

Felizmente, para os nossos propósitos, os detalhes dessas características não são importantes. Como veremos no próximo exemplo, para um sinal de gatilho suficientemente elevado, a queda de tensão sobre ambos o MOSFET e o IGBT pode tornar-se muito pequena. Então, esses dispositivos poderão ser modelados como um curto-circuito entre o dreno e a fonte, no caso do MOSFET, e entre o coletor e o emissor, no caso do IGBT. Entretanto, observe que essas "chaves", quando fechadas, conduzem apenas corrente unidirecional e, desse modo, iremos modelá-las como uma chave em série com um diodo ideal. Esse *modelo de chave ideal* está mostrado na Fig. 10.13a.

### ■ Solução

Escrevendo a lei de Kirchhoff das tensões para o circuito da Fig. 10.14a, obtemos

$$V_0 = i_c R + v_{CE}$$

Isolando  $i_c$ , temos

$$i_c = \frac{(V_0 - v_{CE})}{R}$$

Observe que essa relação linear, referida como *reta de carga*, representa uma restrição imposta pelo circuito externo à relação que existe entre o IGBT e as variáveis de terminal  $i_c$  e  $v_{CE}$ . A restrição imposta pelo próprio IGBT é dada pela curva característica  $v \times i$  da Fig. 10.12b.

O ponto de operação do circuito é dado pelo ponto em que essas duas restrições são simultaneamente satisfeitas. Pode ser obtido muito facilmente plotando a reta de carga sobre a relação de  $v \times i$  do IGBT. Isso foi feito na Fig. 10.14b. Então, o ponto de operação é encontrado como sendo a intersecção da reta de carga com a curva característica  $v \times i$  do IGBT.

Considere o ponto de operação indicado por A na Fig. 10.14b. Esse é o ponto de operação correspondente aos valores de  $v_{GE}$  menores ou igual à tensão de limiar  $V_T$ . Nessas condições, o IGBT está bloqueado, não há corrente de coletor e, desse modo,  $v_{CE} = V_0$ . À medida que  $v_{GE}$  aumenta ultrapassando  $V_T$ , a corrente de coletor começa a fluir, o ponto de operação começa a se elevar ao longo da reta de carga e  $v_{CE}$  diminui. O ponto de operação indicado por B é um exemplo típico.

Entretanto, observe que quando  $v_{GE}$  é aumentada ainda mais, o ponto de operação aproxima-se da parte da curva característica do IGBT em que as curvas aglomeram-se (veja o ponto de operação C na Fig. 10.14b). Quando esse ponto é alcançado, quaisquer outros aumentos em  $v_{GE}$  causarão apenas uma mínima diminuição em  $v_{CE}$ . Nessas condições, a tensão sobre o IGBT é aproximadamente igual à tensão de saturação  $(v_{CE})_{sat}$ .

Se o IGBT desse exemplo fosse substituído por um MOSFET, o resultado seria similar. À medida que a tensão  $v_{GS}$  entre gatilho e fonte for aumentando, um ponto será alcançado em que a queda de tensão sobre o MOSFET terá um valor pequeno e constante. Isso pode ser visto, plotando a reta de carga sobre a curva característica do MOSFET na Fig. 10.12a.

A reta de carga cruza o eixo vertical no ponto em que a corrente de coletor é de  $i_c = V_0/R$ . Observe que, quanto maior for a resistência, mais embaixo estará essa intersecção e assim menor será o valor de  $v_{CE}$  necessário para saturar o transistor. Assim, nos sistemas em que o transistor deve ser usado como chave, é necessário assegurar-se de que o dispositivo seja capaz de conduzir a corrente requerida, e que o circuito de comando do gatilho seja capaz de suprir adequadamente as necessidades do acionamento.

O Exemplo 10.4 mostra que, quando uma tensão de gatilho suficientemente elevada é aplicada, a queda de tensão no transistor de potência é reduzida a um pequeno valor. Nessas condições, o IGBT terá uma tensão constante, ao passo que o MOSFET será semelhante a uma resistência de baixo valor. Em ambos os casos, a queda de tensão será pequena, sendo suficiente modelá-lo como se fosse uma chave fechada (isto é, o transistor estará conduzindo). Quando o acionamento do gatilho for removido (isto é, reduzido a um valor abaixo de  $V_T$ ), a chave irá se abrir e o transistor será bloqueado.

## 10.2 RETIFICAÇÃO: CONVERSÃO CA-CC

A entrada de potência de muitos sistemas de acionamento de motores origina-se em uma fonte com tensão e frequência constantes (por exemplo, um sistema de potência de 50 ou 60 Hz).

ao passo que a saída do acionamento deve fornecer potência de tensão variável e/ou frequência variável ao motor. Tipicamente, tais sistemas convertem a potência em duas etapas: primeiro, a entrada CA é *retificada* para CC e, então, convertida na forma de onda CA que é a saída desejada. Assim, começaremos discutindo os circuitos retificadores. A seguir, iremos discutir os inversores, que convertem CC para CA, na Seção 10.3.

### 10.2.1 Ponte Monofásica de Onda Completa com Diodos

O Exemplo 10.1 ilustra um circuito retificador de meia onda. Esse tipo de retificação é geralmente usada apenas em aplicações de pequeno porte, baixo custo e baixa potência. Os retificadores de onda completa são muito mais comuns. Considere o circuito *retificador de onda completa* da Fig. 10.15a. Aqui a resistência  $R$  é suprida a partir de uma fonte de tensão  $v_s(t) = V_0 \sin \omega t$  por meio de quatro diodos conectados em uma configuração referida como *ponte de onda completa*.

Se assumirmos que os diodos são ideais, podemos usar o método dos estados assumidos para mostrar que os estados permitidos dos diodos são:

Diodo D1 e D3 conduzindo e diodos D2 e D4 bloqueados, para  $v_s(t) > 0$

Diodo D2 e D4 conduzindo e diodos D1 e D3 bloqueados, para  $v_s(t) < 0$

A tensão de resistor, plotada na Fig. 10.15b, é dada então por

$$v_R(t) = \begin{cases} v_s(t) = V_0 \sin \omega t & v_s(t) \geq 0 \\ -v_s(t) = -V_0 \sin \omega t & v_s(t) < 0 \end{cases} \quad (10.1)$$

Observe agora que a tensão no resistor é positiva para ambas as polaridades de tensão da fonte, sendo essa a razão da expressão *retificação de onda completa*. Pode-se ver que o valor CC ou médio desta forma de onda é o dobro do valor para a forma de onda retificada de meia onda do Exemplo 10.1.

$$V_{cc} = \left(\frac{2}{\pi}\right) V_0 \quad (10.2)$$

As formas de onda retificadas das Figs. 10.3b e 10.15b não são evidentemente o tipo de forma de onda "CC" que é considerado desejável para a maioria das aplicações. Pelo contrário, para ser bem útil, a CC retificada deveria ser relativamente constante e livre de flutuações. Essa forma de onda pode ser conseguida usando-se um capacitor de filtro, como está ilustrado no Exemplo 10.5.

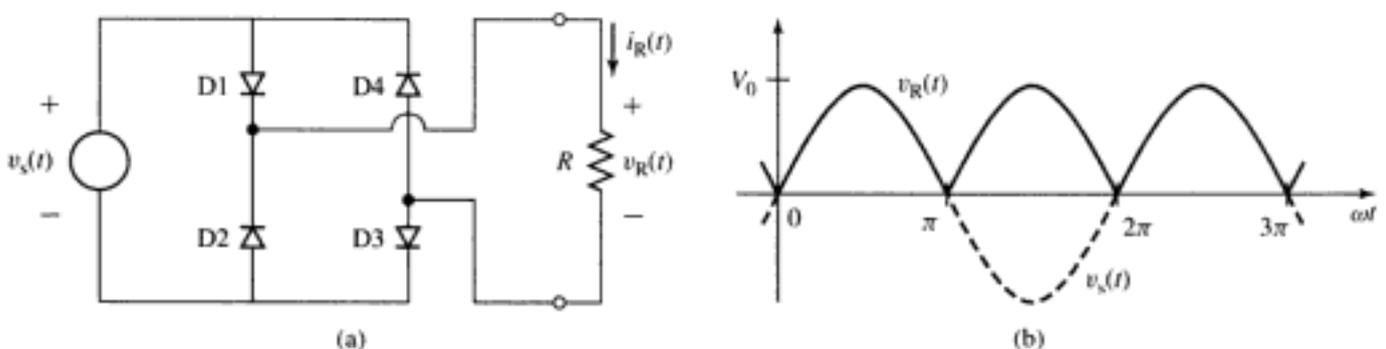
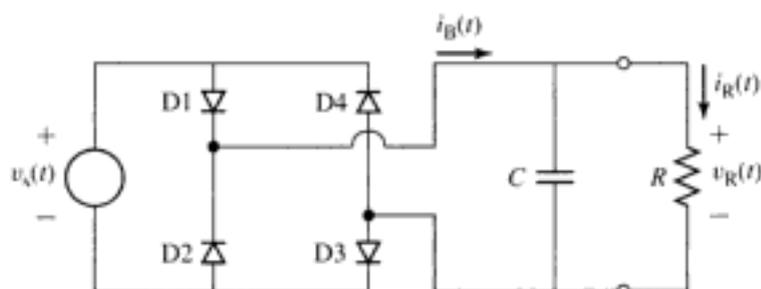


FIGURA 10.15 (a) Retificador com ponte de onda completa. (b) Tensão de resistor.



**FIGURA 10.16** Retificador com ponte de onda completa com filtro capacitivo para o Exemplo 10.5.

### EXEMPLO 10.5



Como está mostrado na Fig. 10.6, um capacitor de filtro foi acrescentado em paralelo ao resistor de carga, no sistema retificador de onda completa da Fig. 10.15. Para os propósitos deste exemplo, assumamos que  $v_s(t) = V_0 \sin \omega t$  com  $V_0 = \sqrt{2}$  (120) V,  $\omega = (2\pi)60 \approx 377$  rad/s e que  $R = 10 \Omega$  e  $C = 10^4 \mu\text{F}$ . Plote a tensão de resistor,  $v_R(t)$ , a corrente,  $i_R(t)$ , e a corrente total da ponte (bridge)  $i_B(t)$ .

#### ■ Solução

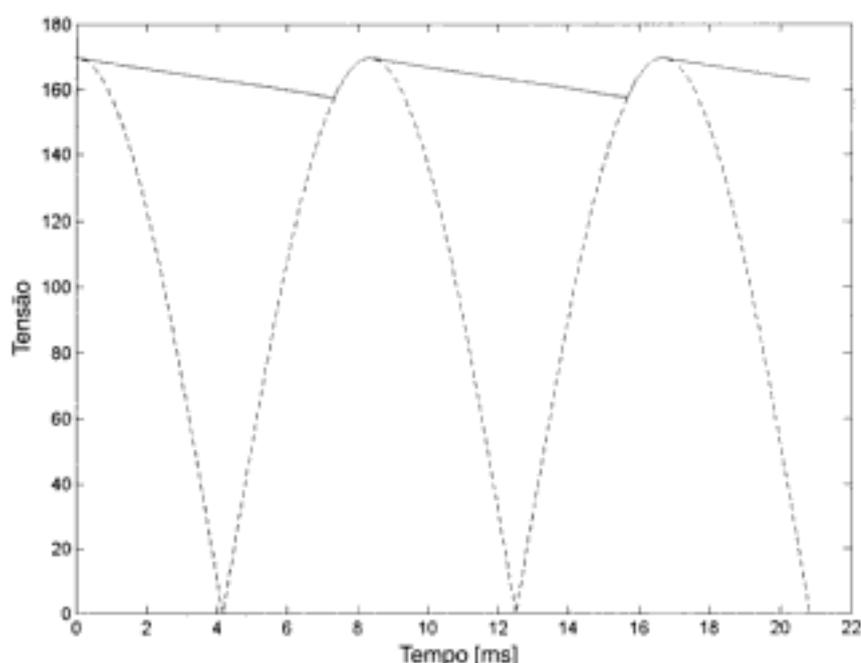
O acréscimo do capacitor de filtro tenderá a manter constante a tensão de resistor  $v_R(t)$  quando a tensão da fonte cair. Os diodos permanecerão conduzindo enquanto a corrente de saída da ponte permanecer positiva, e serão bloqueados quando esta corrente começar a inverter de polaridade.

Este exemplo pode ser resolvido facilmente usando MATLAB\*. A Fig. 10.17a mostra a tensão de resistor  $v_R(t)$  plotada juntamente com a tensão retificada da fonte. Durante o período em que a ponte está conduzindo, isto é, o par de diodos conduzindo, a tensão no resistor é igual à tensão retificada da fonte. Quando a ponte está bloqueada, a tensão de resistor decai exponencialmente.

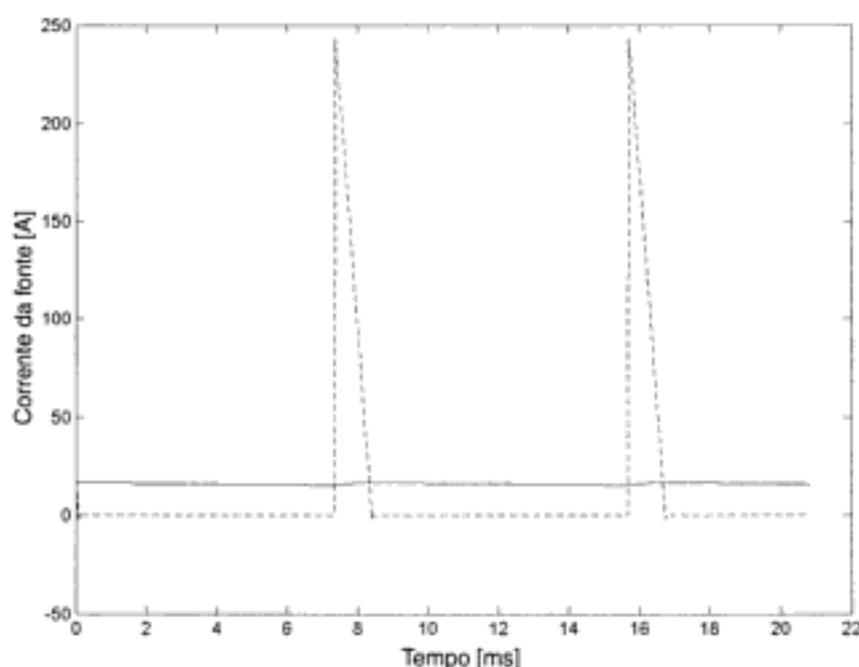
Observe que, como o capacitor é relativamente grande (a constante de tempo  $RC$  é 100 ms, comparada com o período da tensão retificada da fonte, que é ligeiramente superior a 8,3 ms), os diodos conduzem apenas por um curto intervalo de tempo em torno do pico da forma de onda da tensão retificada da fonte. Na Fig. 10.17b, isso pode ser visto facilmente nas plotagens ampliadas da corrente na resistência e da corrente na ponte. Embora a corrente de resistor permaneça contínua e relativamente constante, variando entre 15,8 e 17 A, a corrente de saída da ponte consiste essencialmente em um pulso de corrente que flui por menos de 0,9 ms próximo do pico da forma de onda da tensão retificada e tem um valor de pico de 250 A. Deve ser salientado que a corrente de pico em um circuito real será inferior a 250 A, por que será limitada pelas impedâncias do circuito, as quedas nos diodos e assim por diante.

Usando MATLAB, é possível calcular o valor eficaz da corrente de resistor, encontrando-se 16,4 A, ao passo que a corrente da ponte é de 51,8 A. Portanto, vemos que os diodos da ponte nesse sistema devem ter especificações nominais de corrente significativamente superiores às da carga. Geralmente, as folhas de especificações para diodos de fontes de alimentação mostram seus valores nominais de corrente em valores eficazes, tendo em vista especificamente esses tipos de aplicações. Essas correntes de alimentação de pico são características de circuitos retificadores com cargas capacitivas e, quando se tornam uma fração significativa da carga total do sistema, podem afetar significativamente as formas de onda de tensão em sistemas de potência CA.

\* MATLAB é uma marca registrada da The MathWorks, Inc.



(a)



(b)

**FIGURA 10.17** Exemplo 10.5. (a) Tensão de resistor e tensão retificada da fonte (linha tracejada). (b) Corrente de resistor e corrente total da ponte (linha tracejada).

A *tensão de ripple* ou de *flutuação* da tensão do resistor é definida como sendo a diferença entre seus valores máximo e mínimo. Neste exemplo, o valor máximo é igual ao valor de pico da tensão da fonte, ou 169,7 V. O valor mínimo pode ser encontrado a partir da solução produzida por MATLAB valendo 157,8 V. Assim a *tensão de ripple* é de 11,9 V. É claro que a *tensão de ripple* pode ser diminuída aumentando-se o valor do capacitor de filtro. No entanto, observe que isso é conseguido com um aumento de custo, pulsos mais curtos de corrente e correntes eficazes mais elevadas nos diodos do retificador.

Aqui está o *script* de MATLAB para o Exemplo 10.5.

```

clc
clear

%Parâmetros
omega = 2*pi*60;
R = 10;
C = 0.01;
V0 = 120*sqrt(2);
tau = R*C;
Nmax = 800;

% diode = 1 quando a ponte retificadora está conduzindo
diode = 1;

%Aqui está o laço que faz o trabalho.
for n = 1:Nmax+1
    t(n) = (2.5*pi/omega)*(n-1)/Nmax; %tempo
    vs(n) = V0*cos(omega*t(n)); %tensão da fonte
    vrect(n) = abs(vs(n)); %tensão da fonte com retificação de onda completa

    %Cálculos quando a ponte retificadora está conduzindo
    if diode == 1

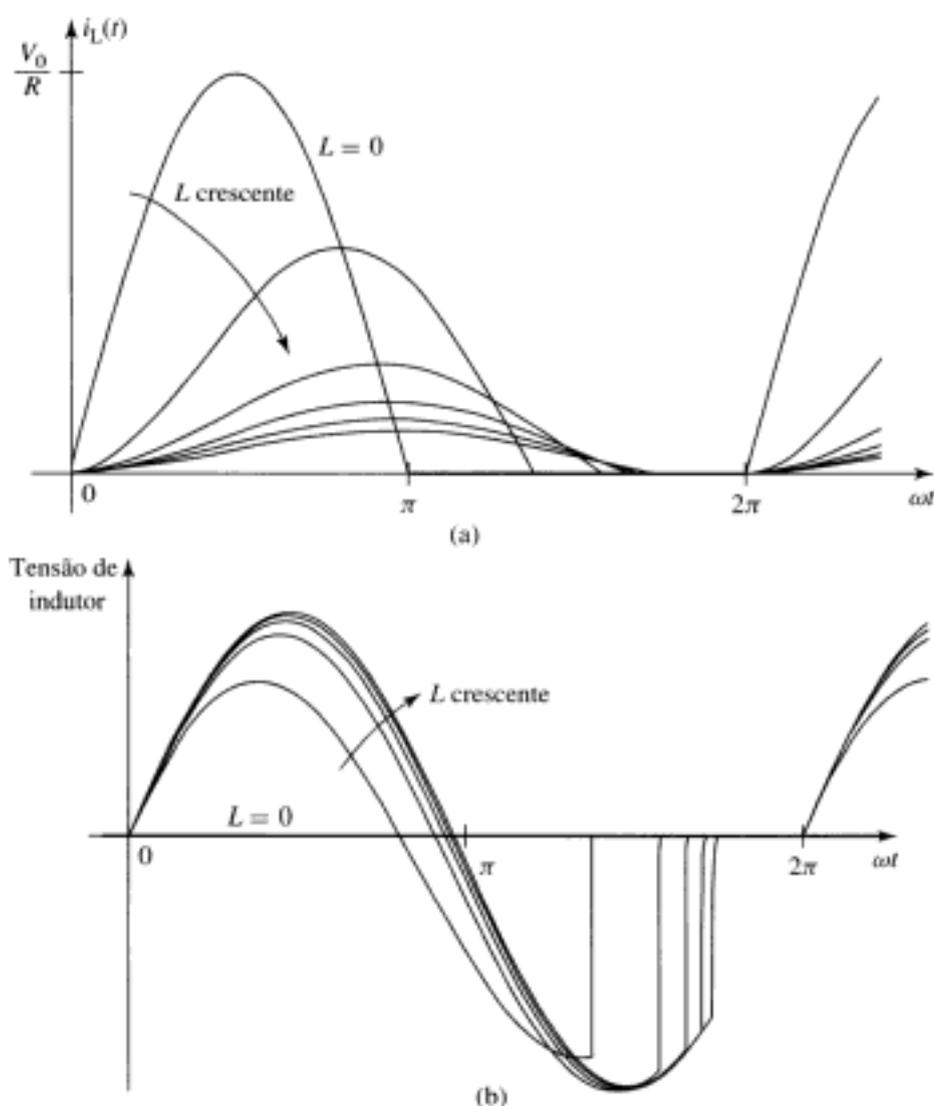
        %Se a ponte estiver conduzindo, a tensão de resistor é igual à tensão da
        %fonte retificada.
        vR(n) = vrect(n);
        %Verifique a corrente total que deixa os retificadores
        if (omega*t(n)) <= pi/2.
            iB(n) = vR(n)/R - V0*C*omega*sin(omega*t(n));
        elseif (omega*t(n)) <= 3.*pi/2.
            iB(n) = vR(n)/R + V0*C*omega*sin(omega*t(n));
        else
            iB(n) = vR(n)/R - V0*C*omega*sin(omega*t(n));
        end

        %Se a corrente tender a se tornar negativa, os diodos serão bloqueados
        if iB(n) < 0;
            diode = 0;
            toff = t(n);
            Voff = vrect(n);
            end
        else
            %Quando os diodos estão bloqueados, a tensão de resistor/capacitor decai
            %exponencialmente.
            vR(n) = Voff*exp(-(t(n)-toff)/tau);
            iB(n) = 0;
            if (vrect(n) - vR(n)) > 0;
                diode = 1;
            end
        end
    end

    %Calcule a corrente de resistor
    iR = vR/R;

    %Agora plote vR como uma linha cheia e vrect como uma linha tracejada
    plot(1000*t,vR)
    xlabel('Tempo [ms]')
    ylabel('Tensão [V]')
    axis ([0 22 0 180])
    hold
    plot(1000*t,vrect,'--')
    hold

```



**FIGURA 10.20** Efeito da elevação da indutância em série no circuito da Fig. 10.19 sobre (a) a corrente de carga e (b) a tensão de indutor.

Dessa equação, podemos ver que os volts-segundos líquidos (e a tensão média respectiva) no o indutor durante um ciclo deve ser igual a zero, ou seja,

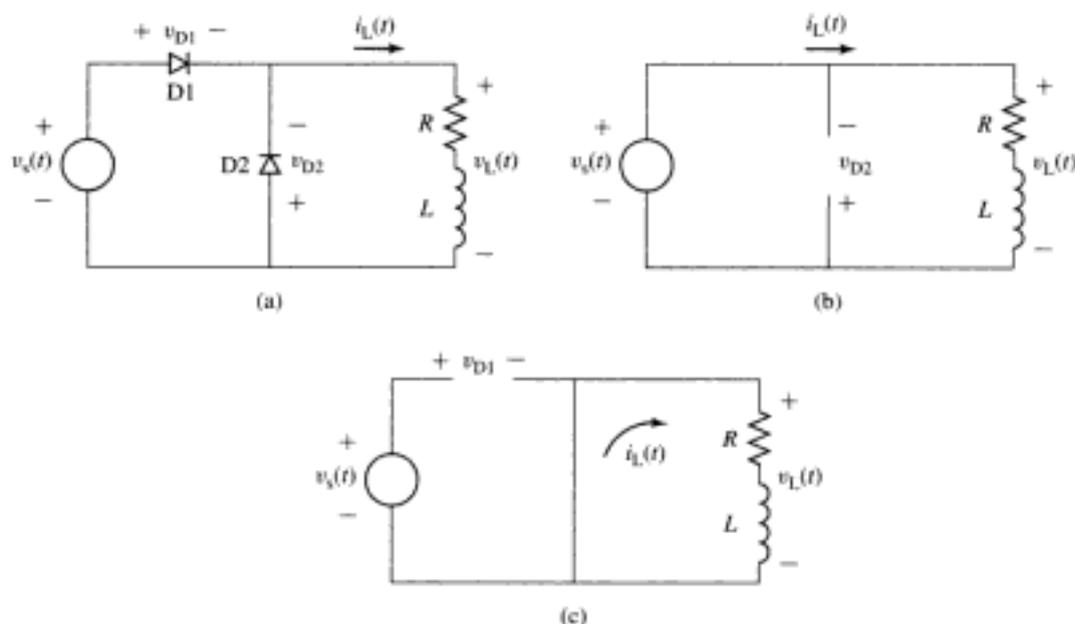
$$\int_t^{t+T} v dt = 0 \quad (10.5)$$

Nesse retificador de meia onda, quando a indutância cresce, observe que ambas a corrente de *ripple* e a corrente CC diminuem. De fato, para indutâncias elevadas ( $\omega L \gg R$ ), a corrente CC de carga tenderá a zero. Isso pode ser visto facilmente acompanhando a argumentação seguinte:

Quando a indutância cresce, o ângulo de condução do diodo eleva-se a partir de  $180^\circ$  aproximando-se de  $360^\circ$  para valores elevados de  $L$ .

No limite de um ângulo de condução de  $360^\circ$ , o diodo pode ser substituído por um curto-circuito contínuo. Nesse caso, o circuito reduz-se à fonte de tensão ligada diretamente à combinação em série do resistor e do indutor.

Nessa situação, nenhuma corrente CC irá fluir porque a fonte é puramente CA. Além disso, como a impedância  $Z = R + j\omega L$  cresce com o aumento de  $L$ , a corrente CA (*ripple*) também tenderá a zero.



**FIGURA 10.21** (a) Retificador de meia onda com uma carga indutiva e um diodo de “roda livre”. (b) Circuito equivalente quando  $v_s(t) > 0$  e o diodo D1 está conduzindo. (c) Circuito equivalente quando  $v_s(t) < 0$  e o diodo de “roda livre” D2 está conduzindo.

A Fig. 10.21a mostra uma modificação simples que pode ser feita no circuito retificador de meia onda da Fig. 10.19. O diodo de “roda livre”<sup>\*</sup> D2 serve como um caminho alternativo para a corrente do indutor.

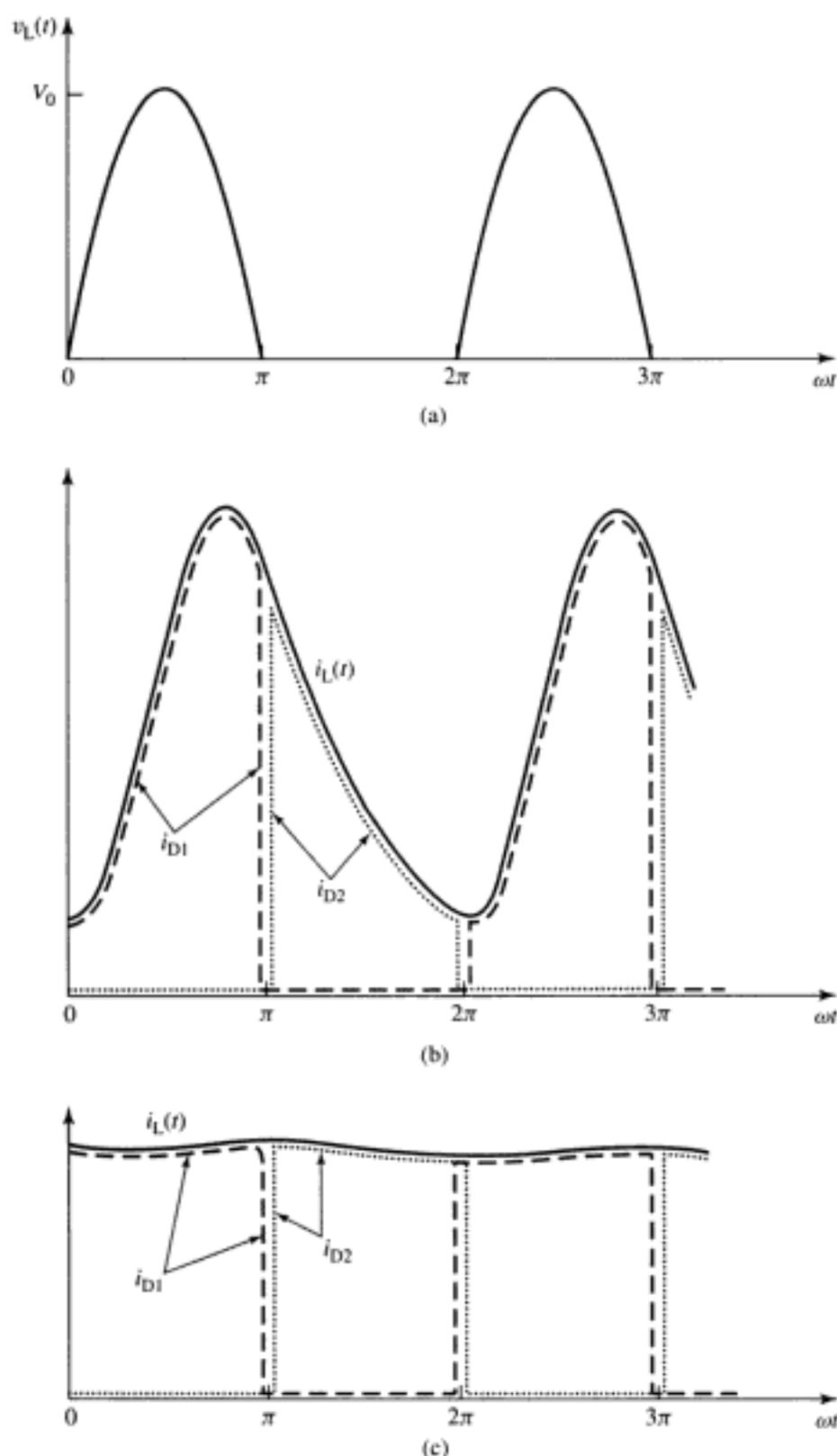
Para compreender o comportamento desse diodo, considere a situação em que a tensão da fonte é positiva e o diodo retificador D1 está conduzindo. O circuito equivalente para essa condição de operação está mostrado na Fig. 10.21b. Observe que, nessa condição, a tensão sobre o diodo D2 é igual ao negativo da tensão da fonte e, conseqüentemente, o diodo D2 encontra-se bloqueado.

Essa condição de operação irá perdurar enquanto a tensão da fonte for positiva. Entretanto, logo que a tensão da fonte começar a se tornar negativa, a tensão sobre o diodo D2 começará a se tornar positiva e ele entrará em condução. Como a carga é indutiva, uma corrente de carga positiva estará fluindo nesse instante e essa corrente de carga será transferida imediatamente ao curto-circuito, correspondente ao diodo D2. Ao mesmo tempo, a corrente no diodo D1 cairá imediatamente a zero, o diodo D1 será polarizado inversamente pela fonte de tensão e será bloqueado. Essa condição de operação está mostrada na Fig. 10.21c. Assim, os diodos desse circuito estão alternadamente conduzindo e sendo bloqueados a cada meio ciclo: D1 está conduzindo quando  $v_s(t)$  é positiva e D2 está conduzindo quando ela é negativa.

Com base nessa discussão, vemos que a tensão  $v_L(t)$  sobre a carga (igual ao negativo da tensão sobre o diodo D2) é uma versão retificada de meia onda de  $v_s(t)$ , como se vê na Fig. 10.22a. Como está mostrado no Exemplo 10.1, a média dessa tensão é  $V_{CC} = V_0 / \pi$ . Além disso, a média da tensão de regime permanente sobre o indutor deve ser igual a zero e, desse modo, a média da tensão  $v_L(t)$  aparecerá sobre o resistor. Portanto, a corrente CC de carga será igual a  $V_0 / (\pi R)$ . Esse valor independe do valor do indutor e assim não tende a zero quando a indutância cresce.

A Fig. 10.22b mostra as correntes de diodo e carga para um valor relativamente pequeno de indutância ( $\omega L < R$ ), e a Fig. 10.22c mostra essas mesmas correntes para um valor elevado de indutância  $\omega L \gg R$ . Em cada caso, vemos a corrente de carga, que deve ser contínua devido à pre-

<sup>\*</sup> N. de T.: *Free-wheeling diode*, em inglês. O nome é uma alusão ao mecanismo conhecido por roda livre, presente em alguns veículos, e que permite o desengate automático da tração sob certas condições. É semelhante ao mecanismo de catraca de uma bicicleta. Na literatura nacional, aparece também como diodo de retorno, diodo de recirculação e diodo de livre circulação.



**FIGURA 10.22** (a) Tensão aplicada à carga pelo circuito da Fig. 10.21. (b) Correntes de carga e diodo para um valor baixo de  $L$ . (c) Correntes de carga e diodo para um valor elevado de  $L$ .

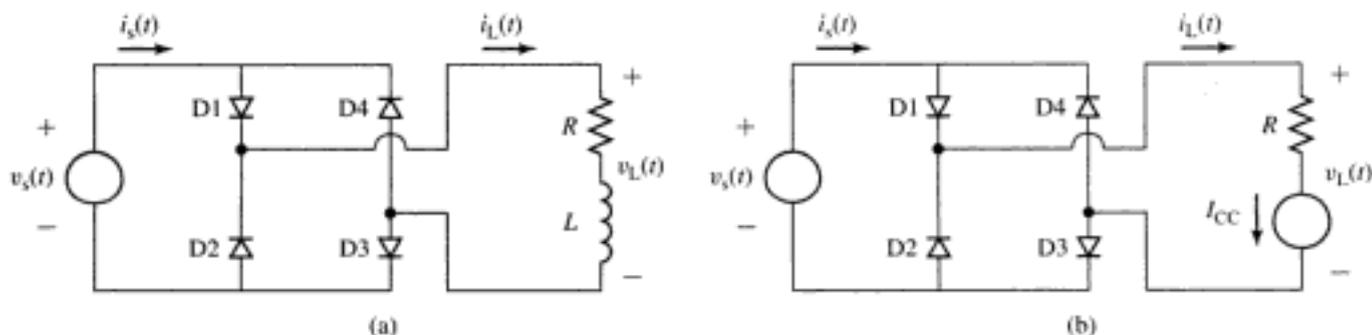
sença do indutor, sendo chaveada instantaneamente entre os diodos de acordo com a polaridade da tensão da fonte. Vemos também que, durante o tempo em que D1 está conduzindo, a corrente de carga cresce devido à aplicação da tensão senoidal da fonte, ao passo que, durante o tempo em que D2 está conduzindo, a corrente de carga simplesmente decai segundo a constante de tempo  $L/R$  da própria carga.

Como esperado, em cada caso, a corrente média na carga é igual a  $V_0 / (\pi R)$ . De fato, pode-se ver que a presença de um indutor de valor elevado reduz a corrente de *ripple* até o ponto em que a corrente de carga é essencialmente uma corrente CC igual a esse valor.

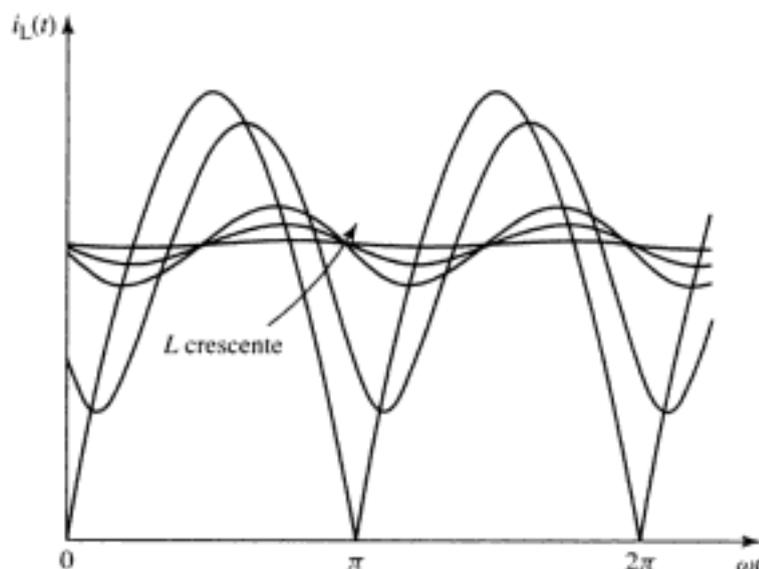
Agora, vamos considerar o caso em que a ponte de meia onda da Fig. 10.19 é substituída por uma ponte de onda completa, como na Fig. 10.23a. Nesse circuito, a tensão aplicada à carga é a tensão da fonte retificada de onda completa, como está mostrado na Fig. 10.15, e a tensão média (CC) aplicada à carga é igual a  $2 V_0 / \pi$ . Aqui novamente, a presença do indutor faz com que o *ripple* CA seja reduzido. A Fig. 10.24, obtida novamente de uma solução analítica detalhada, mostra a corrente no resistor quando a indutância é aumentada.

Se adotarmos um indutor de valor elevado ( $\omega L \gg R$ ), a corrente de carga será relativamente livre de *ripple* e constante. Dessa forma, é prática comum analisar o desempenho desse circuito substituindo o indutor por uma fonte CC de corrente  $I_{CC}$ , como está mostrado na Fig. 10.23b, em que  $I_{CC} = 2 V_0 / (\pi R)$ . Essa é uma prática comumente usada na análise de circuitos de eletrônica de potência e que simplifica grandemente a sua análise.

Nessas condições, podemos mostrar facilmente que as correntes de diodo e de fonte desse circuito são dadas pelas formas de onda da Fig. 10.25. A Fig. 10.25a mostra a corrente em um par de diodos (por exemplo, diodos D1 e D3), e a Fig. 10.25b mostra a corrente da fonte  $i_s(t)$ . A corrente de carga  $I_{CC}$ , essencialmente constante, flui em cada par de diodos durante meio ciclo e aparece como uma onda quadrada de amplitude  $I_{CC}$  na fonte.



**FIGURA 10.23** (a) Retificador de onda completa com carga indutiva. (b) Retificador de onda completa com o indutor substituído por uma fonte de corrente CC.



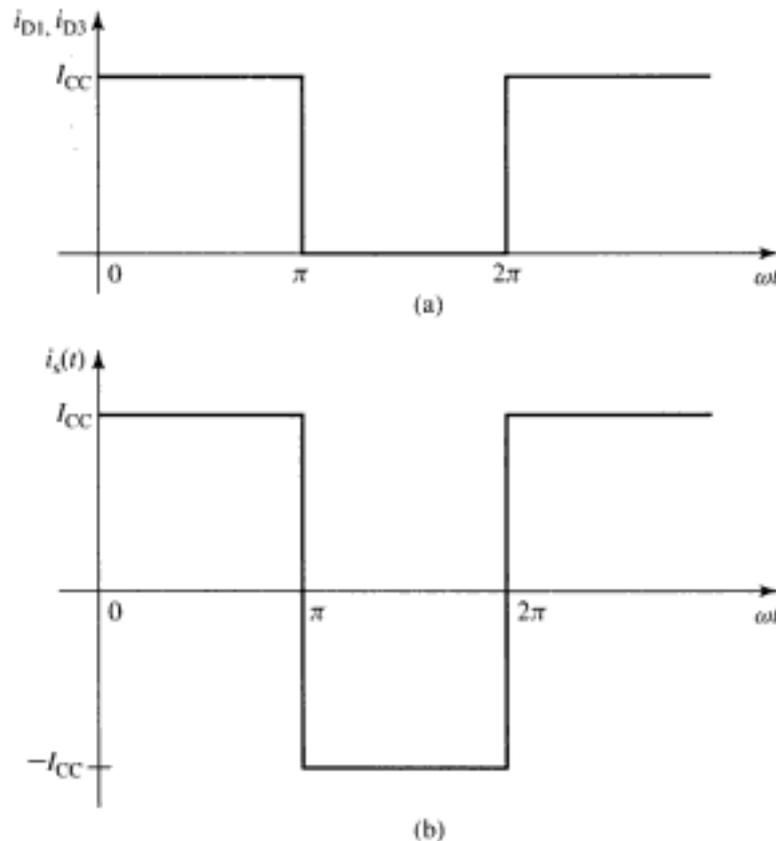
**FIGURA 10.24** Efeito da elevação da indutância em série no circuito da Fig. 10.23a sobre a corrente de carga.

De modo similar ao que vimos no circuito retificador de meia onda com diodo de “roda livre”, aqui um par de diodos (por exemplo, diodos D1 e D3) está conduzindo a corrente quando então a polaridade da tensão da fonte é invertida. Isso torna condutor o outro par de diodos e bloqueia o par de diodos que anteriormente estava conduzindo. Desse modo, a corrente de carga permanece contínua sendo simplesmente chaveada entre os pares de diodos.

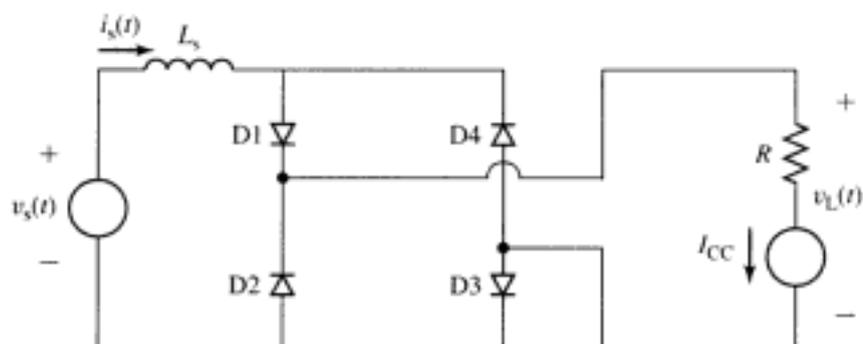
### 10.2.3 Efeitos da Indutância de Comutação

Nossa análise e as formas de onda da Fig. 10.25 mostram que a corrente sofre comutação instantânea ao ser chaveada entre um par de diodos e o próximo. Nos circuitos reais, devido à presença da indutância da fonte, a *comutação* da corrente entre os pares de diodos não ocorre instantaneamente. O efeito da indutância da fonte, referida em geral como *indutância de comutação*, será examinado estudando-se o circuito da Fig. 10.26, que é o circuito retificador de onda completa da Fig. 10.23 no qual uma indutância de fonte  $L_s$  foi colocada em série com a fonte de tensão. Assumimos novamente que a constante de tempo é grande ( $\omega L / R \gg 1$ ) e substituímos o indutor por uma fonte CC de corrente  $I_{CC}$ .

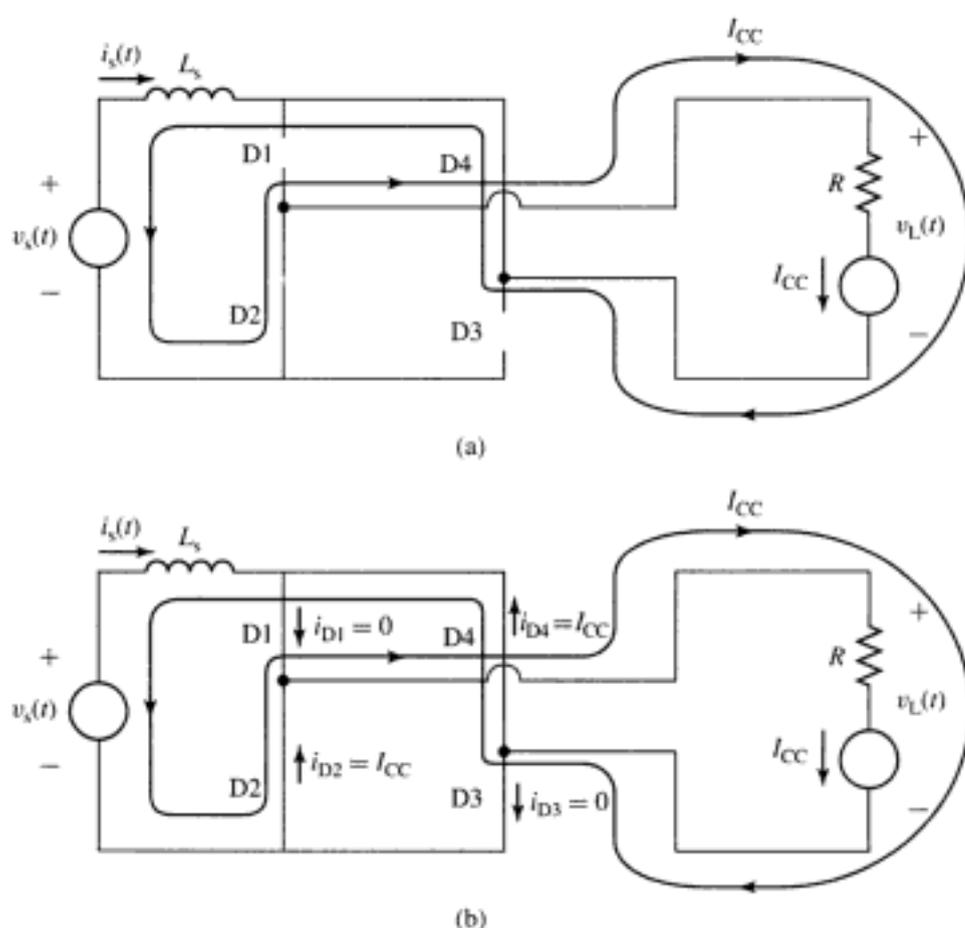
A Fig. 10.27a mostra a situação que ocorre quando  $v_s < 0$  e os diodos D2 e D4 estão conduzindo a corrente  $I_{CC}$ . A comutação inicia quando  $v_s$  chega a zero e começa a se tornar positiva, colocando os diodos D1 e D3 em condução. Observe que, *como a corrente na indutância  $L_s$  não pode mudar instantaneamente*, a situação do circuito nesse instante é descrita pela Fig. 10.27b: a corrente em  $L_s$  é igual a  $-I_{CC}$ , a corrente nos diodos D2 e D4 é igual a  $I_{CC}$ , ao passo que a corrente nos diodos D1 e D3 é zero.



**FIGURA 10.25** (a) Corrente nos diodos D1 e D3 e (b) corrente de fonte para o circuito da Fig. 10.23, ambos os casos com uma indutância tendendo a um valor elevado.



**FIGURA 10.26** Retificador com ponte de onda completa e indutância de fonte. Assume-se que a corrente de carga seja CC.



**FIGURA 10.27** (a) Situação do circuito de onda completa da Fig. 10.26 imediatamente antes dos diodos D1 e D3 entrarem em condução. (b) Condição imediatamente após os diodos D1 e D3 terem entrado em condução.

Nessas condições, com todos os quatro diodos conduzindo, a tensão da fonte  $v_s(t)$  aparece diretamente sobre a indutância  $L_s$  da fonte. Observando que a comutação inicia-se no instante em que  $v_s(t) = 0$ , a corrente em  $L_s$  pode ser escrita como

$$i_s(t) = -I_{CC} + \frac{1}{L_s} \int_0^t v_s(t) dt$$

$$= -I_{CC} + \left( \frac{V_0}{\omega L_s} \right) (1 - \cos \omega t) \quad (10.6)$$

Observando que  $i_s = i_{D1} - i_{D4}$ ,  $i_{D1} + i_{D2} = I_{CC}$  e, por simetria,  $i_{D4} = i_{D2}$ , podemos escrever que

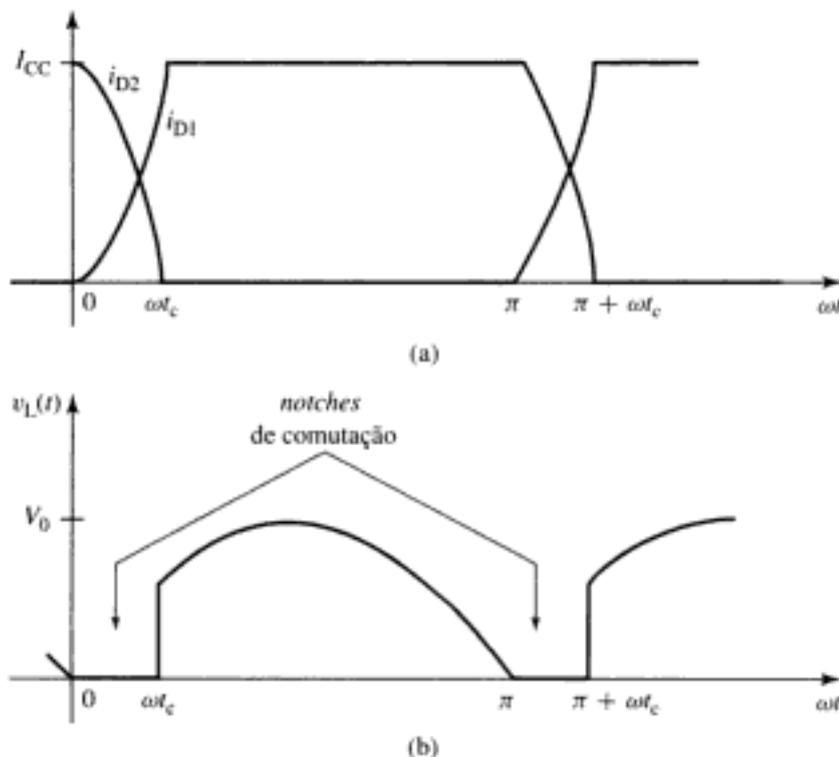
$$i_{D2} = \frac{I_{CC} - i_s(t)}{2} \quad (10.7)$$

O diodo D2 (e do mesmo modo o diodo D4) será bloqueado quando  $i_{D2}$  chega a zero, o que ocorre quando  $i_s(t) = I_{CC}$ . Em outras palavras, a comutação estará concluída no tempo  $t_c$ , quando a polaridade da corrente em  $L_s$  está completamente invertida e quando toda a corrente de carga está fluindo pelos diodos D1 e D3.

Fazendo  $i_s(t_c) = I_{CC}$  e resolvendo a Equação 10.6, obtém-se uma expressão para o *intervalo de comutação*  $t_c$  em função de  $I_{CC}$  dada por

$$t_c = \frac{1}{\omega} \arccos \left[ 1 - \left( \frac{2I_{CC}\omega L_s}{V_0} \right) \right] \quad (10.8)$$

A Fig. 10.28a mostra as correntes nos diodos D1 e D2 quando a corrente é comutada entre eles. O tempo finito de comutação  $t_c$  pode ser visto claramente. Há um segundo efeito de comutação que pode ser visto claramente na Fig. 10.28b, a qual mostra a tensão retificada de carga  $v_L(t)$ . Observe que, durante o intervalo de comutação, com todos os diodos conduzindo, a tensão retificada de carga é zero. Esses intervalos de tensão zero presentes na forma de onda da tensão retificada são conhecidos como *notches\* de comutação*.



**FIGURA 10.28** (a) Correntes nos diodos D1 e D2 mostrando o intervalo de comutação finito. (b) Tensão de carga mostrando os *notches* de comutação devidos ao tempo de comutação finito.

\* N. de T.: Depressão ou desfiladeiro profundo, em inglês.

Comparando a tensão retificada ideal de onda completa da Fig. 10.15b com a forma de onda da Fig. 10.28b, vemos que o efeito dos *notches* de comutação é reduzir a saída CC do retificador. Especificamente, a tensão CC nesse caso é dada por

$$\begin{aligned} V_{CC} &= \left(\frac{\omega}{\pi}\right) \int_{t_c}^{\frac{\pi}{\omega}} V_0 \text{sen } \omega t \, dt \\ &= \frac{V_0}{\pi} (1 + \cos \omega t_c) \end{aligned} \quad (10.9)$$

em que  $t_c$  é o intervalo de comutação calculado pela Equação 10.8.

Finalmente, a corrente CC de carga pode ser calculada em função de  $t_c$  como

$$I_{CC} = \frac{V_{CC}}{R} = \frac{V_0}{\pi R} (1 + \cos \omega t_c) \quad (10.10)$$

Substituindo a Equação 10.8 na Equação 10.10, obtém-se uma solução de forma fechada para  $I_{CC}$  dada por

$$I_{CC} = \frac{2V_0}{\pi R + 2\omega L_s} \quad (10.11)$$

e, desse modo,

$$V_{CC} = I_{CC}R = \frac{2V_0}{\pi + \frac{2\omega L_s}{R}} \quad (10.12)$$

Vimos que a indutância de comutação (que em grande parte é inevitável em circuitos práticos) dá origem a um tempo finito de comutação e produz *notches* de comutação na forma de onda da tensão retificada, reduzindo a tensão CC aplicada à carga.

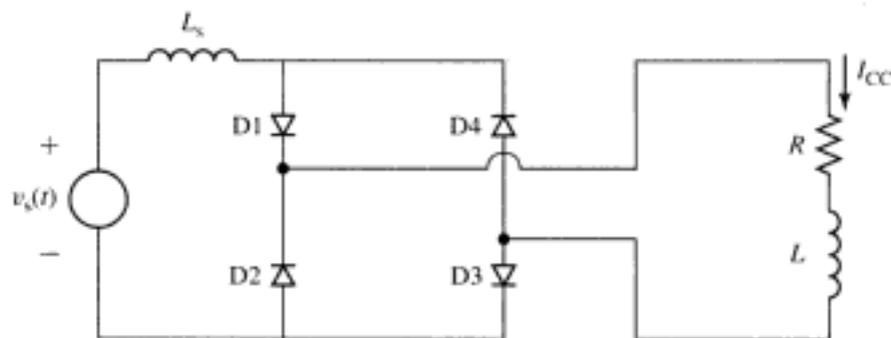
### EXEMPLO 10.6



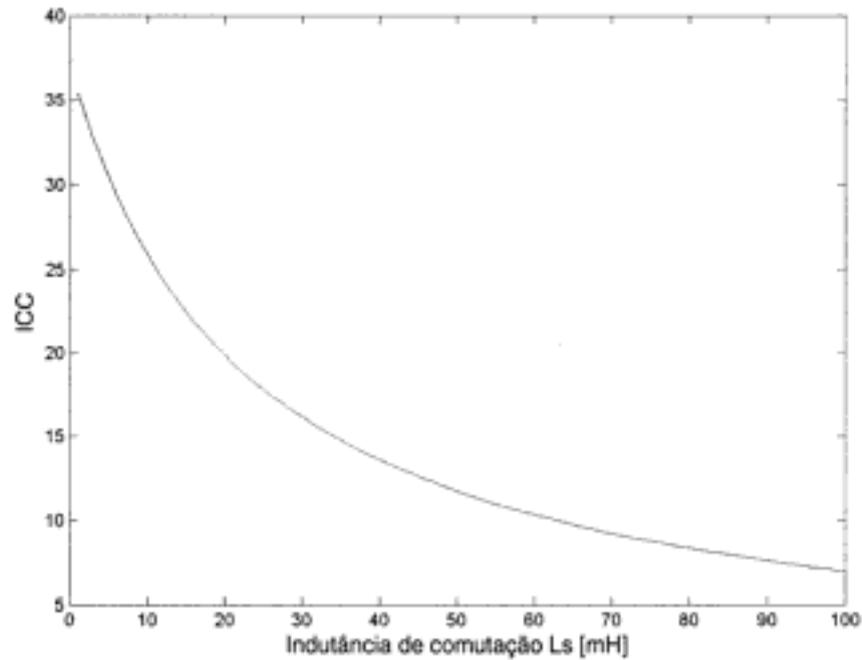
Considere um retificador de onda completa acionando uma carga indutiva como está mostrado na Fig. 10.29. Para 60 Hz, tensão de 230 V eficazes,  $R = 5,6 \, \Omega$  e  $L$  elevada ( $\omega L \gg R$ ), plote a corrente  $I_{CC}$  na carga e o tempo de comutação  $t_c$  quando a indutância da fonte  $L_s$  varia de 1 a 100 mH.

#### ■ Solução

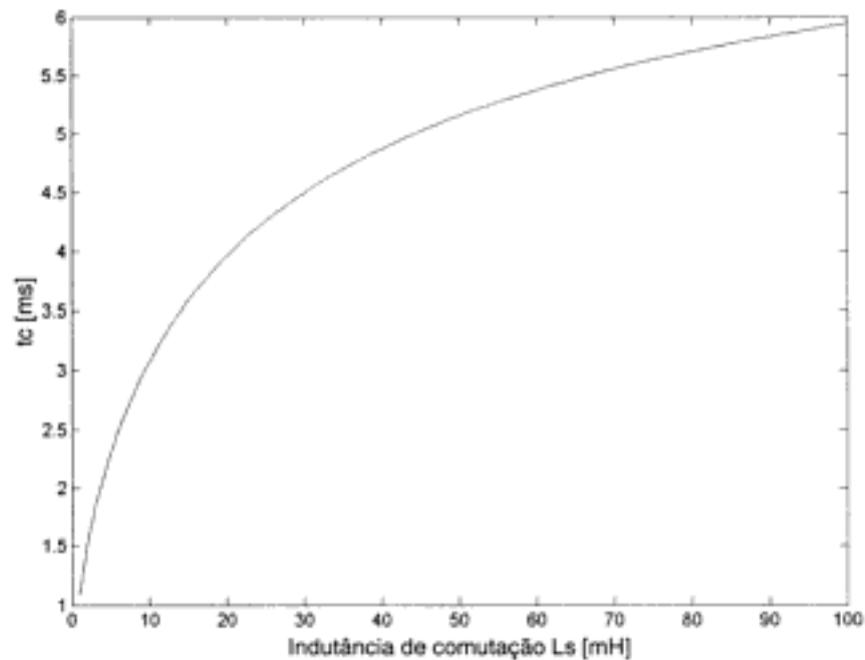
A solução pode ser obtida por substituição nas Equações 10.8 e 10.11. Isso é feito facilmente usando MATLAB. As plotagens de  $I_{CC}$  e  $t_c$  estão mostradas nas Figs. 10.30a e b, respectiva-



**FIGURA 10.29** Retificador com ponte de onda completa e indutância de fonte para o Exemplo 10.6.



(a)



(b)

**FIGURA 10.30** (a) Corrente  $I_{CC}$  e (b) tempo de comutação  $t_c$  para o Exemplo 10.6.

mente. Observe que a máxima corrente CC possível de ser obtida, correspondendo a  $L_s = 0$ , é igual a  $2V_0 / (\pi R) = 37\text{A}$ . Assim, pode-se ver que as indutâncias de comutação da ordem de 1 mH têm pequeno efeito no desempenho do retificador e podem ser ignoradas. Por outro lado, pode-se ver que uma indutância de comutação de 100 mH reduz a corrente CC a aproximadamente 7 A, reduzindo significativamente a capacidade do circuito retificador.

Aqui está o *script* de MATLAB para o Exemplo 10.6.

```
clc
clear
%Parâmetros
```

```

omega = 2*pi*60;
R = 5.6;
V0 = 230*sqrt(2);
for n = 1:100
    Ls(n) = n*1e-3;
    Idc(n) = 2*V0/(pi*R + 2*omega*Ls(n));
    tc(n) = (1/omega)*acos(1-(2*Idc(n)*omega*Ls(n))/V0);
end
plot(Ls*1000,Idc)
xlabel('Indutância de comutação Ls [mH]')
ylabel('ICC')
fprintf('\nPressione qualquer tecla para continuar\n')
pause
plot(Ls*1000,tc*1000)
xlabel('Indutância de comutação Ls[mH]')
ylabel('tc [ms]')

```

### PROBLEMA PRÁTICO 10.5

Calcule a indutância de comutação e o respectivo tempo de comutação para o circuito do Exemplo 10.6 se a corrente CC de carga foi medida e vale 29,7 A.

#### ■ Solução

$L_c = 5,7$  mH e  $t_c = 2,4$  ms.

### 10.2.4 Ponte Monofásica de Onda Completa e Fase Controlada

A Fig. 10.31 mostra uma ponte de onda completa na qual os diodos da Fig. 10.15 foram substituídos por SCRs. Vamos assumir que a indutância de carga  $L$  é suficientemente elevada de modo que a corrente de carga é essencialmente constante tendo um valor  $I_{CC}$ . Iremos ignorar também quaisquer efeitos da indutância de comutação, embora evidentemente eles exerçam o mesmo papel em um sistema de retificação de fase controlada que em um sistema de retificação com diodos.

A Fig. 10.32 mostra a tensão da fonte e os tempos dos pulsos de gatilho de SCR para o caso do funcionamento típico desse circuito. Vemos aqui que os pulsos de disparo estão atrasados de um ângulo  $\alpha_d$  após o cruzamento por zero da forma de onda da tensão da fonte. Os pulsos de disparo dos SCRs T1 e T3 ocorrem após a passagem por zero na subida (positiva) de  $v_s(t)$  e os dos SCRs T2 e T4, após a passagem na descida (negativa).

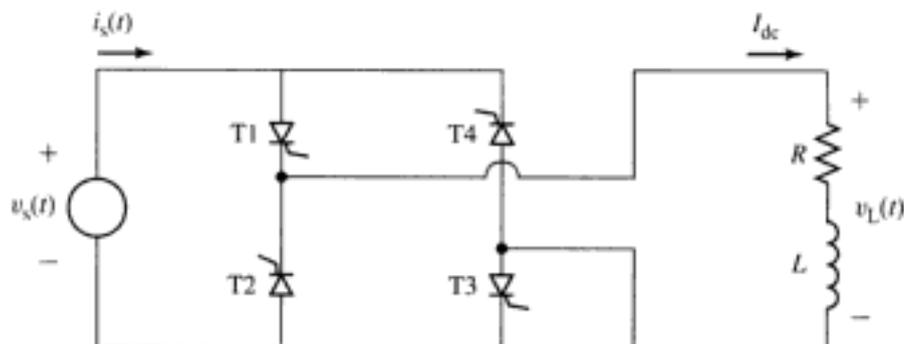
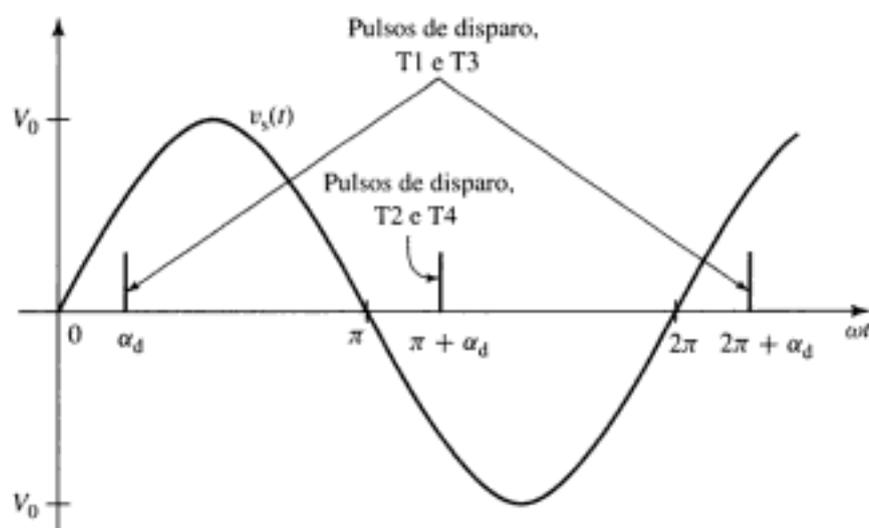


FIGURA 10.31 Ponte de onda completa com SCRs e fase controlada.



**FIGURA 10.32** Tensão da fonte e pulsos de disparo da ponte SCR de fase controlada da Fig. 10.31.

A Fig. 10.33a mostra a corrente que circula nos SCRs T1 e T3. Observe que esses SCRs não entram em condução até receberem os pulsos de disparo no ângulo  $\alpha_d$ , depois de terem sido diretamente polarizados após a tensão da fonte ter passado por um cruzamento por zero de subida (positivo). Além disso, observe que, após o próximo cruzamento por zero da tensão da fonte, os SCRs T2 e T4 não entram em condução. Desse modo, os SCRs T1 e T3 permanecem conduzindo a corrente até que os SCRs T2 e T4 entrem em condução, comandados pelos pulsos de gatilho. Os SCRs T2 e T4 entram em condução apenas após receberem seus respectivos pulsos de gatilho (por exemplo, no ângulo  $\pi + \alpha_d$  na Fig. 10.33). Isso é um exemplo de *comutação forçada*, em que um par de SCRs não é bloqueado naturalmente mas, pelo contrário, deve ser obrigado a tanto quando o outro par entra em condução.

A Fig. 10.33b mostra a tensão de carga resultante  $v_L(t)$ . Vemos agora que a tensão de carga tem uma componente negativa, que aumentará quando o ângulo de atraso de disparo  $\alpha_d$  for aumentado. O valor CC dessa forma de onda é igual a

$$V_{CC} = \left( \frac{2V_0}{\pi} \right) \cos \alpha_d \quad (0 \leq \alpha_d \leq \pi) \quad (10.13)$$

da qual pode-se ver que o ângulo de atraso de disparo, correspondente a um dado valor de tensão CC, é

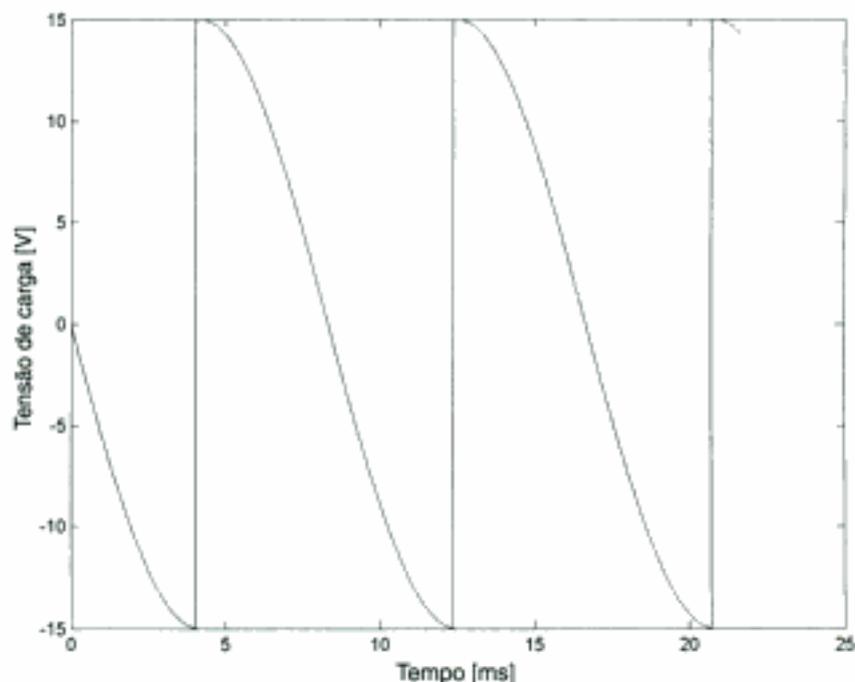
$$\alpha_d = \arccos \left( \frac{\pi V_{CC}}{2V_0} \right) \quad (10.14)$$

Da Equação 10.13, vemos que a tensão CC aplicada à carga pode variar entre  $2V_0/\pi$  e  $-2V_0/\pi$ . Esse resultado é um tanto surpreendente porque é difícil compreender como uma ponte retificadora pode fornecer tensão negativa. Entretanto, nesse caso, é necessário entender que esse resultado está sendo aplicado a uma carga indutiva que mantém circulando a corrente positiva nos SCRs, apesar da inversão de polaridade da tensão da fonte. Se a carga fosse puramente resistiva, a corrente nos SCRs iria a zero quando a tensão da fonte invertesse de polaridade, e eles simplesmente seriam bloqueados. Nenhuma corrente de carga iria circular até que o próximo par de SCRs fosse comutado entrando em condução.

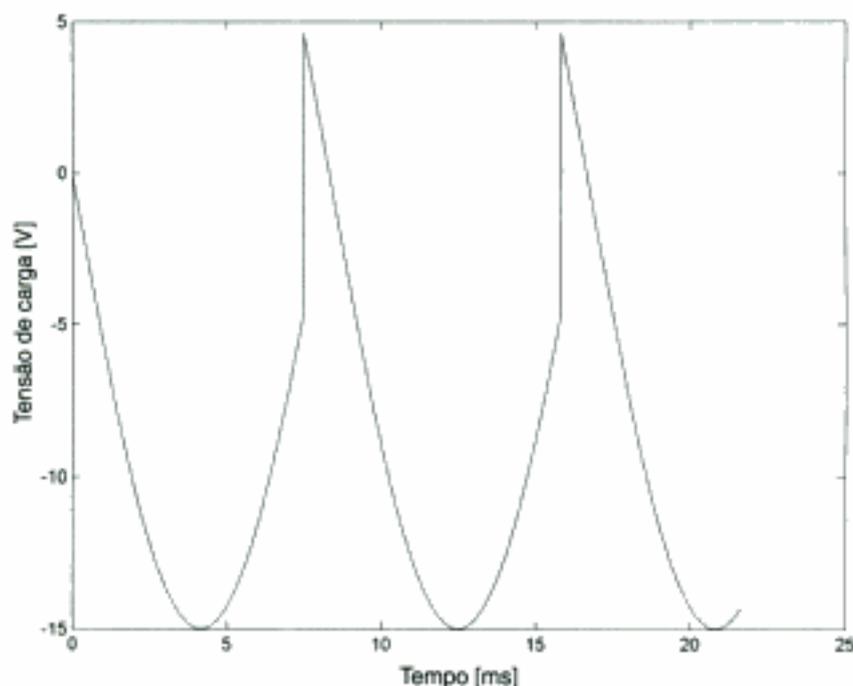
- Uma plotagem de  $v_L(t)$  para esse caso está na Fig. 10.34a.  
 b. Para um ângulo de atraso de  $0,9\pi$ , a tensão CC de carga será

$$V_{CC} = \left( \frac{2V_0}{\pi} \right) \cos \alpha_d = \left( \frac{2 \times 15}{\pi} \right) \cos (0,9\pi) = -9,1 \text{ V}$$

Uma plotagem de  $v_L(t)$  para esse caso está na Fig. 10.34b.



(a)



(b)

**FIGURA 10.34** Formas de onda do Exemplo 10.7. (a) Tensão do eletroímã para  $\alpha_d = 87,4^\circ$  e  $V_{CC} = 0,438 \text{ V}$ . (b) Tensão do eletroímã para  $\alpha_d = 162^\circ$  e  $V_{CC} = -9,1 \text{ V}$ .

### 10.2.5 Carga Indutiva com uma Fonte CC em Série

Como vimos no Capítulo 9, os motores CC podem ser modelados como fontes de tensão CC em série com um indutor e um resistor. Assim, seria útil analisar brevemente o caso de uma fonte de tensão CC em série com uma carga indutiva.

Vamos examinar o sistema retificador SCR de onda completa e fase controlada da Fig. 10.35. Aqui acrescentamos uma fonte CC de tensão  $E_{CC}$  em série com a carga. Novamente, supondo  $\omega L \gg R$  de modo que a corrente de carga seja essencialmente CC, vemos que a tensão de carga  $v_L(t)$  depende apenas dos tempos dos pulsos de gatilho do SCR e, assim, não é alterada pela presença da fonte CC de tensão  $E_{CC}$ . Desse modo, o valor CC de  $v_L(t)$  é dado pela Equação 10.13 como antes.

Em regime permanente, a corrente CC na carga pode ser obtida a partir da tensão CC líquida no resistor como

$$I_{CC} = \frac{V_{CC} - E_{CC}}{R} \quad (V_{CC} \geq E_{CC}) \quad (10.18)$$

em que  $V_{CC}$  é obtida da Equação 10.13. Em condições transitórias, é a diferença de tensões,  $V_{CC} - E_{CC}$ , que causa uma alteração na corrente CC da combinação  $R$ - $L$  em série, de modo semelhante ao ilustrado no Exemplo 10.7.

#### EXEMPLO 10.8

Um pequeno motor CC de ímã permanente deve funcionar a partir de uma ponte de fase controlada. A forma de onda CA de 60 Hz tem uma tensão eficaz de 35 volts. O motor CC tem uma resistência de armadura de  $3,5 \Omega$  e uma indutância de armadura de 17,5 mH. Com uma tensão de armadura de 50 V, atinge uma velocidade a vazio de 8000 rpm.

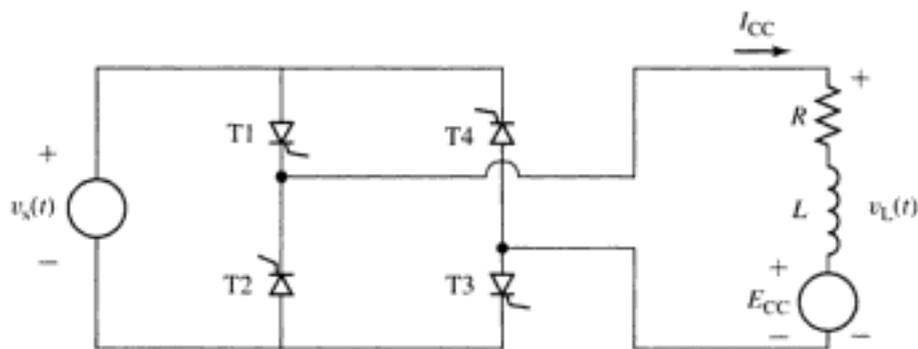
Calcule a velocidade a vazio do motor, em rpm, em função do ângulo de atraso de disparo  $\alpha_g$ .

#### ■ Solução

Na Seção 7.7, vimos que o circuito equivalente de um motor CC de ímã permanente consiste em uma fonte CC (proporcional à velocidade do motor) em série com uma indutância e uma resistência. Assim, o circuito equivalente da Fig. 10.35 aplica-se diretamente ao caso deste problema.

Da Equação 7.26, a tensão gerada do motor CC ( $E_{CC}$  na Fig. 10.35) é proporcional à velocidade do motor CC. Portanto,

$$n = \left( \frac{8000}{50} \right) E_{CC} = 160 E_{CC} \text{ rpm}$$



**FIGURA 10.35** Ponte retificadora SCR de onda completa e fase controlada com carga indutiva e uma fonte CC de tensão.

Em regime permanente, a queda de tensão CC na indutância de armadura será zero. Além disso, a vazão, a corrente de armadura será suficientemente pequena para que a queda de tensão na resistência de armadura possa ser desprezada. Assim, fazendo  $E_{CC} = V_{CC}$  e substituindo esta expressão na Equação 10.13, obtém-se

$$\begin{aligned} E_{CC} = V_{CC} &= \left( \frac{2V_0}{\pi} \right) \cos \alpha_d \\ &= \left( \frac{2\sqrt{2}35}{\pi} \right) \cos \alpha_d = 31,5 \cos \alpha_d \end{aligned}$$

Observe que, como a ponte pode fornecer apenas corrente positiva ao motor CC (e assim, em regime permanente, a tensão CC deve ser positiva), essa expressão é válida apenas para  $0 \leq \alpha_d \leq \pi/2$ .

Finalmente, substituindo na expressão da velocidade  $n$  em termos de  $E_{CC}$ , obtém-se

$$n = 160 \times (31,5 \cos \alpha_d) = 5040 \cos \alpha_d \text{ rpm} \quad (0 \leq \alpha_d \leq \pi/2)$$

### PROBLEMA PRÁTICO 10.7

Foi observado que o motor CC do Exemplo 10.8 está operando com uma velocidade de 3530 rpm e puxando uma corrente CC de 1,75 ampères. Calcule o respectivo ângulo de atraso de disparo  $\alpha_d$ .

#### ■ Solução

$$\alpha_d = 0,15\pi \text{ rad} = 27^\circ$$

## 10.2.6 Pontes Trifásicas

Embora muitos sistemas com potências de até cinco ou mais quilowatts usem potência monofásica, a maioria dos sistemas de grande porte é alimentada com fontes trifásicas. Em geral, todas as questões que discutimos em relação às pontes monofásicas de onda completa aplicam-se diretamente a situações de pontes trifásicas. Por essa razão, discutiremos apenas brevemente as pontes trifásicas.

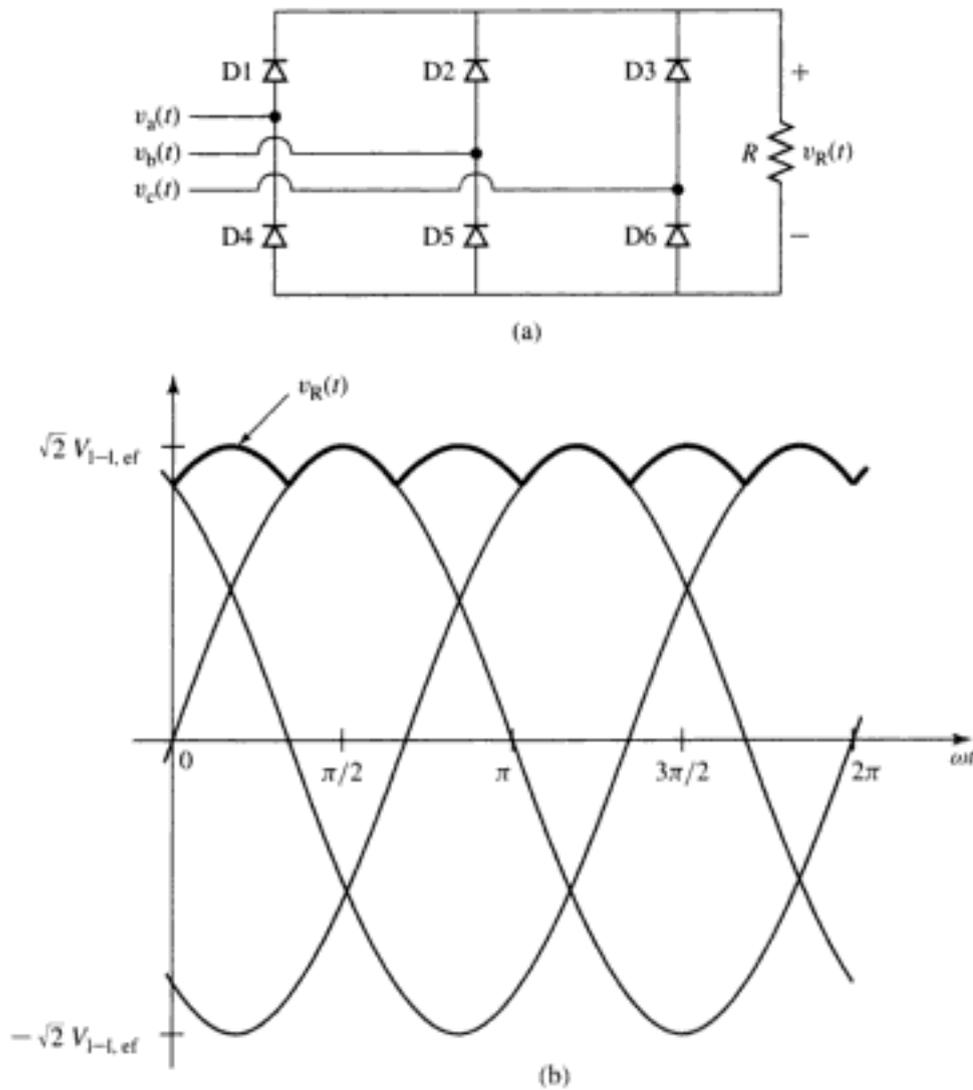
A Fig. 10.36a mostra um sistema em que um resistor  $R$  é alimentado com uma fonte trifásica por meio de uma *ponte trifásica a diodos de seis pulsos*. A Fig. 10.36b mostra as tensões de linha trifásicas (valor de pico  $\sqrt{2}V_{l-l,ef}$  em que  $V_{l-l,ef}$  é o valor eficaz da tensão de linha)\* e a tensão de resistor  $v_R(t)$ , a qual foi obtida usando o método dos estados assumidos e supondo que os diodos fossem ideais.

Observe que  $v_R$  tem seis pulsos por ciclo. Diferentemente da ponte monofásica de onda completa da Fig. 10.15a, a tensão de resistor não vai a zero. Pelo contrário, a ponte trifásica a diodos produz uma tensão de saída igual ao máximo instantâneo do valor absoluto das três tensões de linha. A média CC dessa tensão (que pode ser obtida integrando 1/6 de um ciclo) é dada por

$$\begin{aligned} V_{CC} &= \frac{3\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} -v_{bc}(t) dt \\ &= -\frac{3\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{2}V_{l-l,ef} \text{sen} \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) dt \\ &= \left( \frac{3\sqrt{2}}{\pi} \right) V_{l-l,ef} \end{aligned} \quad (10.19)$$

em que  $V_{l-l,ef}$  é o valor eficaz da tensão de linha.

\* N. de T.: Lembrando, o subscrito l-l refere-se à tensão de linha ou, como também é conhecida, tensão linha-linha.



**FIGURA 10.36** (a) Ponte trifásica a diodos de seis pulsos e carga resistiva. (b) Tensões de linha e tensão de resistor.

A Tabela 10.1 mostra a seqüência de chaveamento dos diodos para a ponte trifásica da Fig. 10.36a, correspondendo a um único período da tensão trifásica cuja forma de onda está na Fig. 10.36b. Observe que apenas dois diodos estão conduzindo em um instante qualquer e que cada diodo conduz durante  $1/3$  de um ciclo ( $120^\circ$ ).

De modo análogo ao caso da ponte monofásica SCR de onda completa e fase controlada das Figs. 10.31 e 10.35, a Fig. 10.37 mostra uma ponte trifásica SCR de fase controlada. Assu-

**TABELA 10.1** Tempos de condução dos diodos da ponte trifásica a diodos da Fig. 10.36a. A letra C indica diodo conduzindo e B indica diodo bloqueado

$\alpha_d$	$0-\pi/3$	$\pi/3-2\pi/3$	$2\pi/3-\pi$	$\pi-4\pi/3$	$4\pi/3-5\pi/3$	$5\pi/3-2\pi$
D1	B	C	C	B	B	B
D2	B	B	B	C	C	B
D3	C	B	B	B	B	C
D4	B	B	B	B	C	C
D5	C	C	B	B	B	B
D6	B	B	C	C	B	B

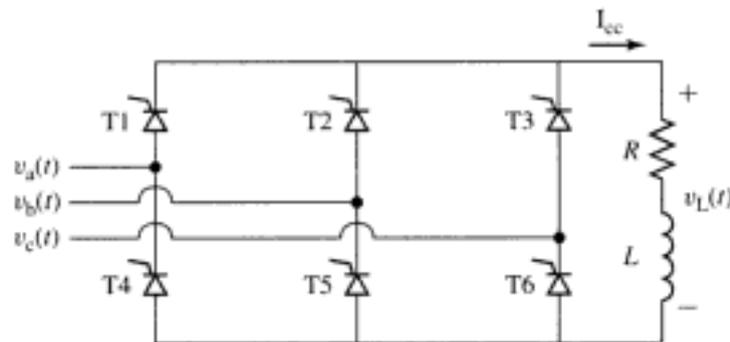


FIGURA 10.37 Circuito de ponte trifásica SCR de fase controlada com uma carga indutiva.

mando uma corrente de carga contínua, correspondendo por exemplo à condição  $\omega L \gg R$ , caso em que a corrente de carga é essencialmente uma corrente CC constante  $I_{CC}$ , essa ponte é capaz de aplicar uma tensão negativa à carga e de regenerar potência de modo muito semelhante ao da ponte monofásica SCR de onda completa e fase controlada que discutimos na Seção 10.2.4.

É relativamente simples mostrar que a máxima tensão de saída dessa configuração de ponte irá ocorrer quando os SCRs entrarem em condução nos instantes em que os diodos de uma ponte a diodos entrariam naturalmente em condução. Esses instantes podem ser obtidos da Tabela 10.1. Por exemplo, vemos que o SCR T5 deve ser ativado no ângulo  $\alpha_d = 0$  (isto é, no cruzamento por zero de subida de  $v_{ab}(t)$ ). De modo semelhante, o SCR T1 deve entrar em condução no tempo  $\alpha_d = \pi/3$  e assim por diante.

Portanto, um esquema possível para gerar os pulsos de gatilho dos SCRs é usar os cruzamentos por zero de subida de  $v_{ab}(t)$  como referência a partir da qual é sincronizado um trem de pulsos com frequência seis vezes superior à frequência fundamental (isto é, haverá seis pulsos uniformemente distanciados em cada ciclo da tensão aplicada). O SCR T5 seria disparado primeiro, seguido pelos SCRs T1, T6, T2, T4 e T3 nessa ordem, separados entre si por  $60^\circ$  de atraso de fase.

Se o trem de pulsos de disparo for sincronizado para começar imediatamente após o cruzamento por zero de  $v_{ab}(t)$ , então a forma de onda da tensão de carga  $v_L(t)$  será a da Fig. 10.36b. Se os pulsos de disparo forem atrasados de um ângulo  $\alpha_d$ , então as formas de onda da tensão de carga serão como as da Fig. 10.38a (para  $\alpha_d = 0,1\pi$ ) e da Fig. 10.38b (para  $\alpha_d = 0,9\pi$ ).

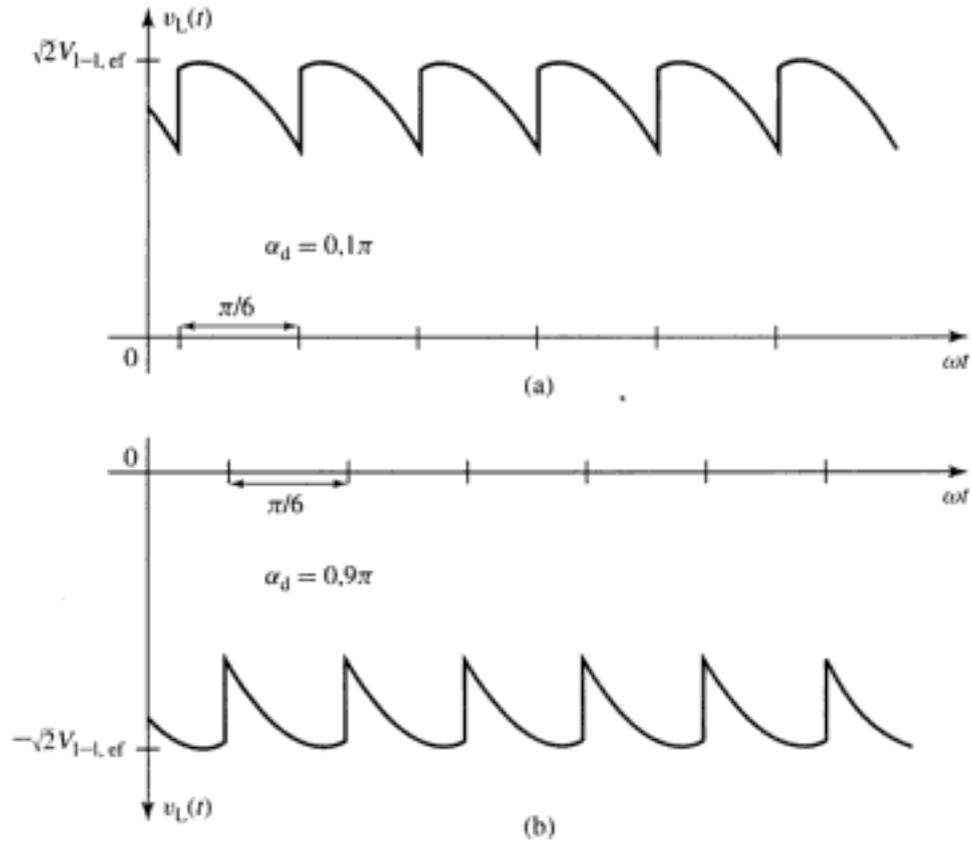
A tensão CC média da tensão de saída da ponte de fase controlada pode ser obtida como

$$\begin{aligned}
 V_{CC} &= \frac{3\omega}{\pi} \int_{\alpha_d}^{\alpha_d + \pi/3} -v_{bc}(t) dt \\
 &= -\frac{3\omega}{\pi} \int_{\alpha_d}^{\alpha_d + \pi/3} \sqrt{2} V_{1-l,ef} \operatorname{sen} \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) dt \\
 &= \left( \frac{3\sqrt{2}}{\pi} \right) V_{1-l,ef} \cos \alpha_d \quad (0 \leq \alpha_d \leq \pi)
 \end{aligned} \tag{10.20}$$

em que  $V_{1-l,ef}$  é o valor eficaz da tensão de linha.

#### EXEMPLO 10.9

Um eletroímã de grande porte com uma indutância de 14,7 H e resistência de  $68 \Omega$  deve ser alimentado com uma fonte trifásica de 60 Hz e 460 V por meio de uma ponte SCR de fase



**FIGURA 10.38** Tensões de carga típicas para disparo com atraso dos SCRs do retificador trifásico de fase controlada da Fig. 10.37; (a)  $\alpha_d = 0,1\pi$ , (b)  $\alpha_d = 0,9\pi$ .

controlada, como na Fig. 10.37. Calcule (a) a tensão CC  $V_{CC,max}$  e a corrente  $I_{CC,max}$  máximas que podem ser fornecidas por essa fonte e (b) o ângulo de atraso  $\alpha_d$  requerido para obter uma corrente de eletroímã de 2,5 A.

■ **Solução**

a. Da Equação 10.20, a tensão máxima (correspondente a  $\alpha_d = 0$ ) é igual a

$$V_{CC,max} = \left( \frac{3\sqrt{2}}{\pi} \right) V_{1-l,ef} = \left( \frac{3\sqrt{2}}{\pi} \right) 460 = 621 \text{ V}$$

e  $I_{CC,max} = V_{CC,max} / R = 9,1 \text{ A}$ .

b. O ângulo de atraso para uma corrente de 2,5 A, correspondente a  $V_{CC} = I_{CC} R = 170 \text{ V}$ , pode ser obtida da Equação 10.20 como

$$\alpha_d = \arccos \left[ \left( \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \right) \left( \frac{V_{CC}}{V_{1-l,ef}} \right) \right] = 1,29 \text{ rad} = 74,1^\circ$$

**PROBLEMA PRÁTICO 10.8**

Repita o Exemplo 10.9 para o caso em que a fonte de 60 Hz é substituída por uma fonte trifásica de 50 Hz e 400 V.

■ **Solução**

a.  $V_{CC,max} = 540 \text{ V}$ ,  $I_{CC,max} = 7,94 \text{ A}$

b.  $\alpha_d = 1,25 \text{ rad} = 71,6^\circ$

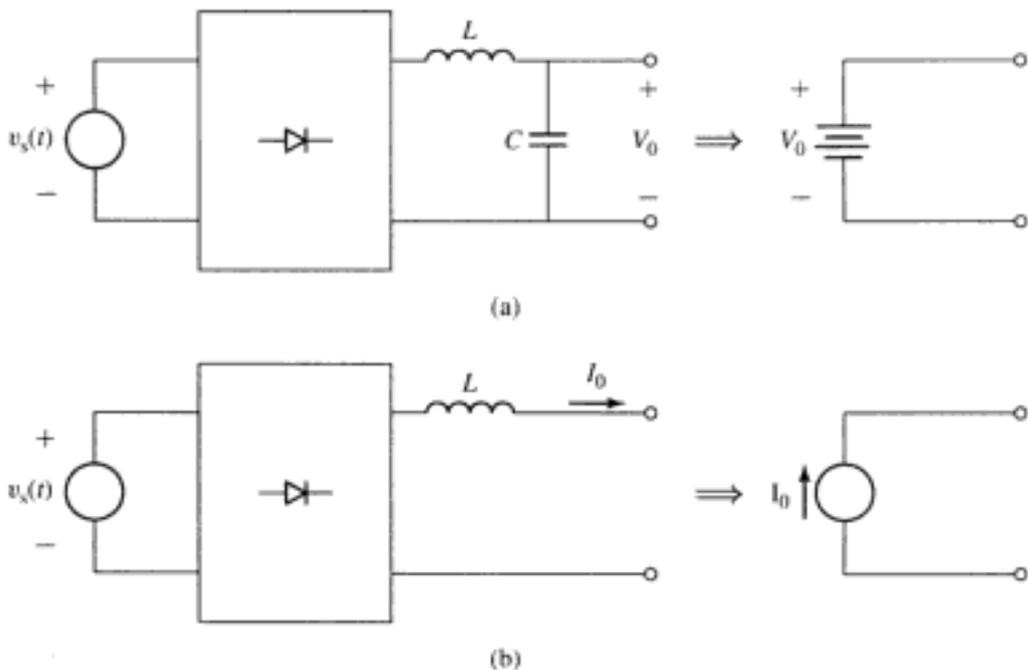
Os desenvolvimentos das pontes trifásicas apresentados aqui ignoraram questões como o efeito da indutância de comutação, que foi levada em consideração durante a nossa análise dos retificadores monofásicos. Embora o escopo limitado de nossa apresentação não nos permita discuti-los especificamente aqui, os efeitos em retificadores trifásicos são semelhantes aos dos sistemas monofásicos e devem ser levados em consideração no projeto e análise de sistemas retificadores trifásicos reais.

### 10.3 INVERSÃO: CONVERSÃO CC-CA

Na Seção 10.2, discutimos várias configurações de retificadores que podem ser usadas para fazer a conversão de CA para CC. Nesta seção, discutiremos algumas configurações de circuito, conhecidas como *inversores*, que podem ser usadas para converter CC na potência elétrica, de frequência e tensão variáveis, que é requerida para muitas aplicações de acionamento de motores. Muitas dessas configurações e técnicas estão disponibilizadas e não tentaremos discuti-las todas aqui. Pelo contrário, de acordo com os objetivos deste capítulo, iremos revisar algumas das configurações comuns de inversores e destacar seus aspectos e características básicas.

Para os objetivos desta discussão, vamos assumir que o inversor é antecedido por uma fonte CC estável. Por exemplo, na Seção 10.2, vimos como um filtro LC pode ser usado para produzir uma tensão de saída CC relativamente constante em um retificador. Assim, como está mostrado na Fig. 10.39a, em nosso estudo de inversores representaremos esses sistemas retificadores por uma fonte CC de tensão constante  $V_0$ , conhecida como *tensão de barramento CC*, na entrada do inversor. Iremos fazer referência a esse sistema, com tensão constante CC de entrada, como *inversor de fonte de tensão*.

De modo semelhante, vimos que um indutor de valor elevado em série com a saída do retificador produz uma corrente constante CC relativamente constante, conhecida como *corrente de link CC*. Desse modo, iremos representar esse retificador por uma fonte de corrente  $I_0$  na entrada do inversor. Iremos nos referir a esse tipo de inversor como um *inversor de fonte de corrente*.



**FIGURA 10.39** Representações de entradas para inversores. (a) Fonte de tensão. (b) Fonte de corrente.

Observe que, como vimos na Seção 10.2, os valores dessas fontes CC podem ser variados por meio de controles apropriados aplicados ao estágio de retificação, como o tempo em que os pulsos de gatilho são aplicados aos SCRs da ponte retificadora. O controle da magnitude dessas fontes e os controles aplicados ao estágio inversor fornecem a flexibilidade necessária para produzir uma ampla variedade de formas de onda de saída, para várias aplicações no acionamento de motores.

### 10.3.1 Inversores Monofásicos em Ponte H com Forma de Onda Quase Quadrada

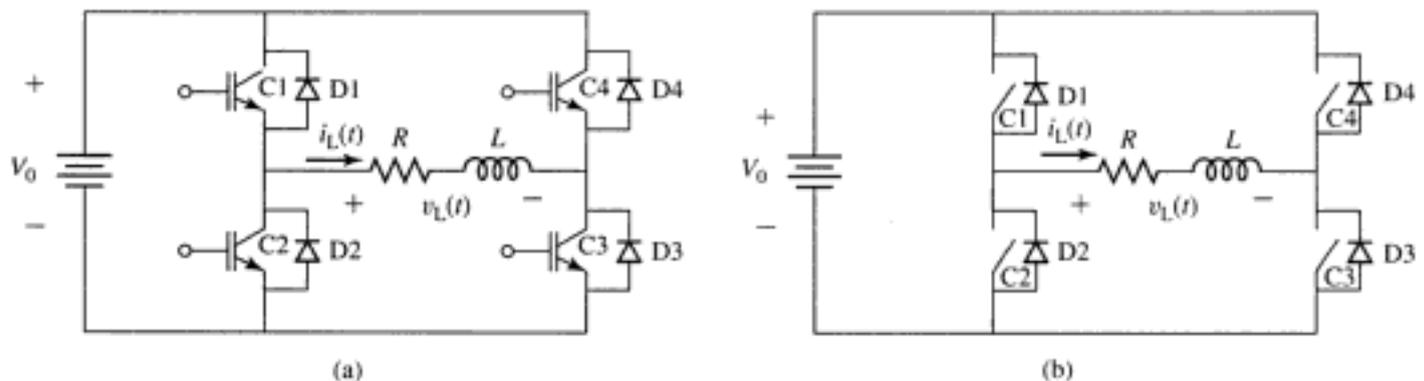
A Fig. 10.40a mostra uma configuração de inversor monofásico em que uma carga (consistindo aqui em uma associação  $RL$  em série) é alimentada por uma fonte CC de tensão  $V_0$  por meio de um conjunto de quatro IGBTs, no que é conhecido como configuração em *ponte H*. MOSFETs ou outros dispositivos de chaveamento são igualmente aplicáveis a essa configuração. Como discutimos na Seção 10.1.3, os IGBTs desse sistema são usados simplesmente como chaves. Como os IGBTs dessa ponte H estão acompanhados por diodos de proteção, podemos analisar o comportamento deste circuito substituindo os IGBTs pelo modelo de chave ideal da Fig. 10.13b, como está mostrado na Fig. 10.40b.

Nessa análise, vamos assumir que os tempos de chaveamento do inversor (isto é, o intervalo de tempo em que as chaves permanecem em um estado constante) são muito maiores do que a constante de tempo  $L/R$ . Assim, na escala de tempo de interesse, a corrente de carga será simplesmente igual a  $V_L/R$ , com  $V_L$  sendo determinada pelo estado das chaves.

Vamos começar a análise da estrutura desse inversor assumindo que as chaves C1 e C3 estão fechadas e que  $i_L$  é positiva, como está mostrado na Fig. 10.41a. Nessas condições, a tensão de carga é igual a  $V_0$  e a corrente de carga é portanto igual a  $V_0/R$ .

A seguir, vamos assumir que a chave C1 é aberta, ao passo que C3 permanece fechada. Isso fará com que a corrente de carga, que não pode mudar instantaneamente de valor devido à presença do indutor, seja comutada da chave C1 para o diodo D2, como está mostrado na Fig. 10.41b. Observe que, nessas condições, a tensão de carga irá a zero e portanto não haverá corrente de carga. Observe também que essa mesma condição poderia ter sido alcançada abrindo a chave C3 e mantendo fechada a C1.

Agora, é possível inverter a tensão e a corrente de carga, fechando as chaves C2 e C4, caso em que  $V_L = -V_0$  e  $i_L = -V_0/R$ . Finalmente, a corrente pode novamente ser levada a zero, abrindo-se ou a chave C2 ou a chave C4. Neste ponto, foi completado um ciclo da tensão de carga aplicada, com a forma de onda da Fig. 10.42.



**FIGURA 10.40** Configuração de inversor monofásico em ponte H. (a) Configuração típica usando IGBTs. (b) Configuração genérica usando diodos ideais.

ser usadas para acionar um motor trifásico. As componentes fundamentais seriam combinadas para produzir uma onda de fluxo girante, como foi discutido no Capítulo 4. Em alguns sistemas de acionamento de motores, são usados filtros LC, constituídos por capacitores em derivação e que operam em conjunto com as indutâncias de fase do motor, para reduzir as tensões harmônicas aplicadas aos enrolamentos de fase do motor.

Em geral, as harmônicas de ordem elevada, cujas amplitudes variam inversamente com o seu índice de componente harmônica, como pode ser visto na Equação 10.22, produzirão perdas adicionais no núcleo do estator assim como dissipação no rotor. Desde que essas perdas adicionais sejam aceitáveis, tanto do ponto de vista de aquecimento do motor como do de rendimento, um acionamento baseado nesse esquema de chaveamento será bem adequado em muitas aplicações.

### EXEMPLO 10.10

Um inversor de fonte de tensão trifásico, em ponte H, com forma de onda quase quadrada, será construído a partir de três estágios inversores em ponte H do tipo mostrado na Fig. 10.40b. Todas as fases serão idênticas, com exceção de que os esquemas de chaveamento de fase estarão defasados entre si no tempo de  $1/3$  de um período. Esse sistema será usado para acionar um motor trifásico de quatro pólos com  $N_{\text{fase}} = 34$  espiras por fase e fator de enrolamento  $k_{\text{emr}} = 0,94$ . O motor está ligado em Y e cada um dos inversores é ligado entre fase e neutro.

Para uma fonte de alimentação de 125 V, um período de chaveamento  $T$  de 20 ms e com  $\Delta_1 = 0,44$ , calcule (a) a frequência e a velocidade síncrona em rpm da onda de fluxo de entreferro resultante e (b) a amplitude eficaz da tensão de linha aplicada ao motor.

#### ■ Solução

- a. A frequência  $f_c$  da componente fundamental da tensão de acionamento será igual a  $f_c = 1/T = 50$  Hz. Da Equação 4.41, tem-se que isso produzirá uma onda de fluxo no entreferro que irá girar a

$$n_s = \left( \frac{120}{\text{pólos}} \right) f_c = \left( \frac{120}{4} \right) 50 = 1500 \text{ rpm}$$

- b. O pico da componente fundamental da tensão aplicada entre a fase e o neutro pode ser obtida da Equação 10.21.

$$V_{a,\text{pico}} = \left( \frac{4}{\pi} \right) V_0 \sin(\Delta_1 \pi) = \left( \frac{4}{\pi} \right) 125 \sin(0,44 \pi) = 156 \text{ V}$$

Portanto, a tensão eficaz de linha resultante é dada por

$$V_{l-\text{ef}} = \sqrt{\frac{3}{2}} V_{a,\text{pico}} = 191 \text{ V}$$

### PROBLEMA PRÁTICO 10.9

Para o sistema inversor trifásico do Exemplo 10.10, (a) encontre a fração do tempo de condução  $\Delta_1$  para a qual a quinta componente harmônica da tensão aplicada é zero. (b) Calcule a respectiva amplitude da componente fundamental da tensão de fase.

#### ■ Solução

- a. 0,2  
b. 93 V

**EXEMPLO 10.12**

Considere o inversor do tipo fonte de corrente da Fig. 10.44a. Aqui a carga consiste em uma fonte de tensão senoidal  $V_a \cos \omega t$ . Suponha que as chaves do inversor sejam controladas de tal modo que a corrente de carga seja uma onda quadrada, também com frequência  $f = \omega/(2\pi)$ , como está mostrado na Fig. 10.44b. Calcule a potência média, no tempo, entregue à carga em função do ângulo de atraso  $\alpha_d$  como está definido na Fig. 10.44b.

**■ Solução**

Como a tensão de carga é senoidal, a potência média no tempo será produzida apenas pela componente fundamental da corrente de carga. Em analogia com a Equação 10.21, com  $I_0$  substituindo  $V_0$  e com  $\Delta_i = 0,5$ , a amplitude da componente fundamental da corrente de carga é

$$I_{L,1} = \left(\frac{4}{\pi}\right) I_0$$

e, portanto, a componente fundamental da corrente de carga é igual a

$$i_{L,1}(t) = I_{L,1} \cos(\omega t - \alpha_d) = \left(\frac{4}{\pi}\right) I_0 \cos(\omega t - \alpha_d)$$

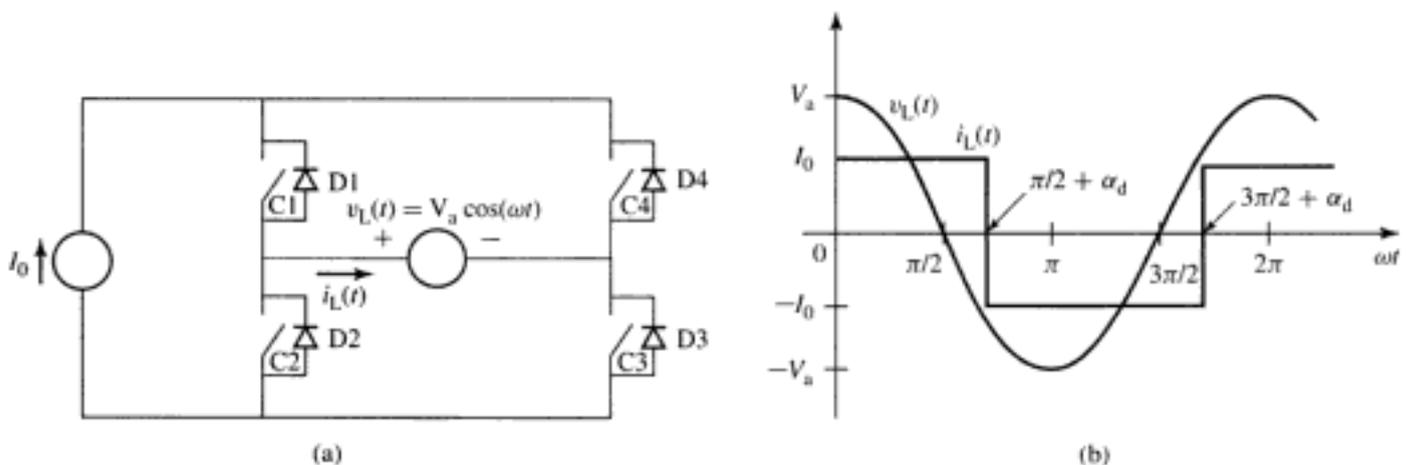
A amplitude complexa da tensão de carga é assim dada por  $\hat{V}_L = V_a$  e a da corrente de carga é  $\hat{I}_L = I_{L,1} e^{-j\alpha_d}$ . Assim, a potência média no tempo é igual a

$$P = \frac{1}{2} \text{Re}[\hat{I}_L \hat{V}_L^*] = \left(\frac{2}{\pi}\right) V_a I_0 \cos \alpha_d$$

Variando o ângulo de atraso de disparo  $\alpha_d$ , a potência transferida da fonte à carga pode variar. De fato, quando  $\alpha_d$  é variado dentro do intervalo  $0 \leq \alpha_d \leq \pi$ , a potência irá variar dentro do intervalo

$$\left(\frac{2}{\pi}\right) V_a I_0 \geq P \geq -\left(\frac{2}{\pi}\right) V_a I_0$$

Observe que esse inversor admite regeneração; isto é, para  $\pi/2 < \alpha_d \leq \pi$ ,  $P < 0$  e, portanto, a potência irá circular da carga de volta ao inversor.



**FIGURA 10.44** (a) Inversor do tipo fonte de corrente do Exemplo 10.12. (b) Forma de onda da corrente de carga.

## PROBLEMA PRÁTICO 10.10

O inversor do Exemplo 10.12 funciona com um ângulo de atraso fixo  $\alpha_d = 0$  mas com uma fração de tempo de condução variável  $\Delta_1$ . Encontre uma expressão para a potência média, no tempo, entregue à carga em função de  $\Delta_1$ .

## ■ Solução

$$P = \left(\frac{2}{\pi}\right) V_s I_0 \text{sen}(\Delta_1 \pi)$$

### 10.3.2 Inversores de Fonte de Tensão com Modulação por Largura de Pulso

Vamos examinar novamente a configuração em ponte H da Fig. 10.40b, repetida na Fig. 10.45. De novo, uma carga RL é alimentada a partir de uma fonte de tensão por meio de uma ponte H. Entretanto, neste caso, vamos assumir que o tempo de chaveamento do inversor seja muito mais curto do que a constante de tempo ( $L/R$ ).

Considere uma situação de funcionamento típico como a mostrada na Fig. 10.46. Nesse caso, as chaves funcionam por um período  $T$  e um *ciclo de trabalho*  $D$  ( $0 \leq D \leq 1$ ). Como se pode ver na Fig. 10.46a, durante um tempo  $DT$ , as chaves C1 e C3 estão fechadas conduzindo, e a tensão de carga é  $V_0$ . Isso é seguido por um tempo  $(1-D)T$ , durante o qual as chaves C1 e C3 estão abertas e a corrente é transferida aos diodos D2 e D4, fazendo com que a tensão de carga seja igual a  $-V_0$ . O ciclo de trabalho  $D$  é assim uma fração do período total sendo, neste caso, a fração do período durante a qual a tensão de carga é  $V_0$ .

Observe que, embora as chaves C2 e C4 sejam normalmente fechadas depois que as chaves C1 e C3 são abertas (mas não antes para evitar um curto-circuito direto sobre a fonte de tensão), elas não conduzirão a corrente a menos que a corrente de carga torne-se negativa. Isso ocorre porque na realidade essas chaves (C2 e C4) são dispositivos semicondutores. Pelo contrário, a corrente irá circular através dos diodos de proteção D2 e D4. Por outro lado, se a corrente de carga tornar-se negativa, então a corrente será controlada atuando sobre as chaves C2 e C4 em conjunto com os diodos D1 e D3. Nessas condições, as chaves C1 e C3 não irão conduzir a corrente.

Esse tipo de controle é conhecido como *modulação por largura de pulso*, ou *PWM*,\* porque é implementado por meio da variação da largura dos pulsos de tensão que são aplicados à carga. Como se pode ver na Fig. 10.46a, a tensão média aplicada à carga é igual a

$$(v_L)_{\text{média}} = (2D - 1)V_0 \quad (10.23)$$

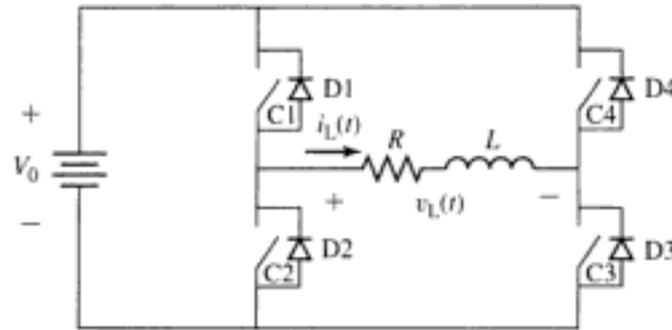
Como veremos agora, variando-se o ciclo de trabalho por meio do controle PWM, pode-se produzir uma corrente de carga continuamente variável.

Uma forma de onda típica para a corrente de carga está mostrada na Fig. 10.46b. Em regime permanente, a corrente média no indutor será constante e, desse modo, a tensão no indutor deverá ser igual a zero. Assim, a corrente de carga média será igual à tensão média dividida pela resistência ou

$$(i_L)_{\text{média}} = \frac{(v_L)_{\text{média}}}{R} = \frac{[2D - 1]V_0}{R} \quad (10.32)$$

Portanto, vemos que variando o ciclo de trabalho  $D$  dentro do intervalo de 0 a 1, podemos variar a corrente de carga dentro do intervalo  $-V_0/R \leq (i_L)_{\text{média}} \leq V_0/R$ .

\* N. de T.: *Pulse Width Modulation*, em inglês.


**FIGURA 10.45** Configuração de inversor monofásico em ponte H.

Como a forma de onda da corrente é periódica, é possível calcular facilmente as correntes máxima e mínima e, portanto, também o *ripple* de corrente. Atribuindo-se o instante  $t = 0$  ao tempo em que as chaves C1 e C3 são inicialmente fechadas e a corrente de carga é mínima, a corrente durante esse período de tempo será dada por

$$i_L(t) = \frac{V_0}{R} + \left( (i_L)_{\min} - \frac{V_0}{R} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (0 \leq t \leq DT) \quad (10.25)$$

em que  $\tau = L/R$ . A máxima corrente de carga  $(i_L)_{\max}$  é obtida no tempo  $DT$ , tendo-se

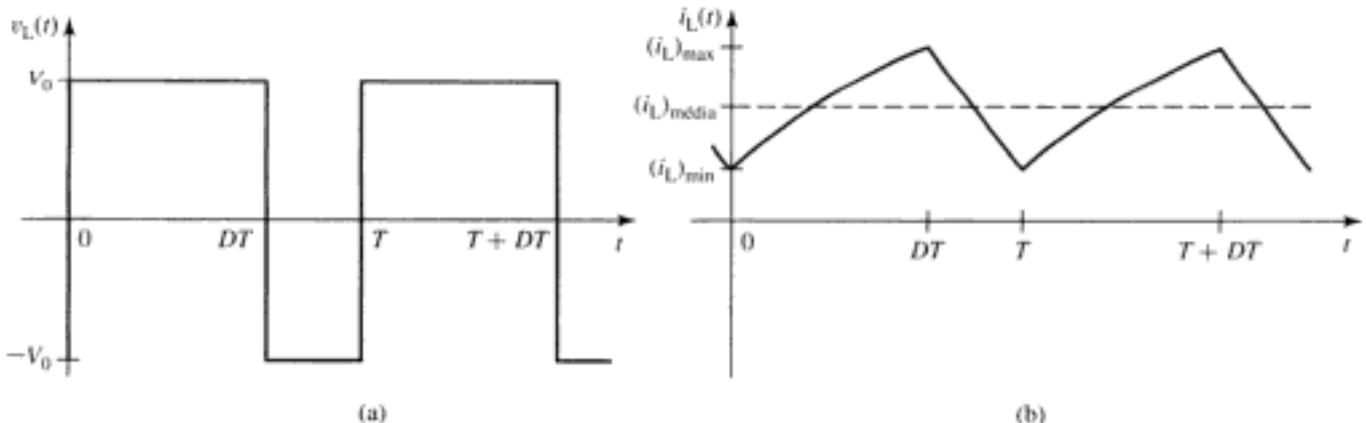
$$(i_L)_{\max} = \frac{V_0}{R} + \left( (i_L)_{\min} - \frac{V_0}{R} \right) e^{-\frac{DT}{\tau}} \quad (10.26)$$

Depois que as chaves C1 e C3 são abertas, a tensão de carga é  $-V_0$  e a corrente é dada por

$$i_L(t) = -\frac{V_0}{R} + \left( (i_L)_{\max} + \frac{V_0}{R} \right) e^{-\frac{(t-DT)}{\tau}} \quad (DT < t \leq T) \quad (10.27)$$

Como a corrente é periódica de período  $T$ ,  $i_L(t)$  será novamente igual a  $(i_L)_{\min}$  no tempo  $T$ . Assim,

$$(i_L)_{\min} = -\frac{V_0}{R} + \left( (i_L)_{\max} + \frac{V_0}{R} \right) e^{-\frac{(T-DT)}{\tau}} \quad (10.28)$$


**FIGURA 10.46** Formas de onda típicas de (a) tensão e (b) corrente utilizando PWM.

Agora, vamos examinar a situação em que o ciclo de trabalho é variável no tempo, isto é,  $D = D(t)$ . Se  $D(t)$  variar lentamente em relação ao período  $T$  da frequência de chaveamento, então, a partir da Equação 10.23, a tensão de carga média será igual a

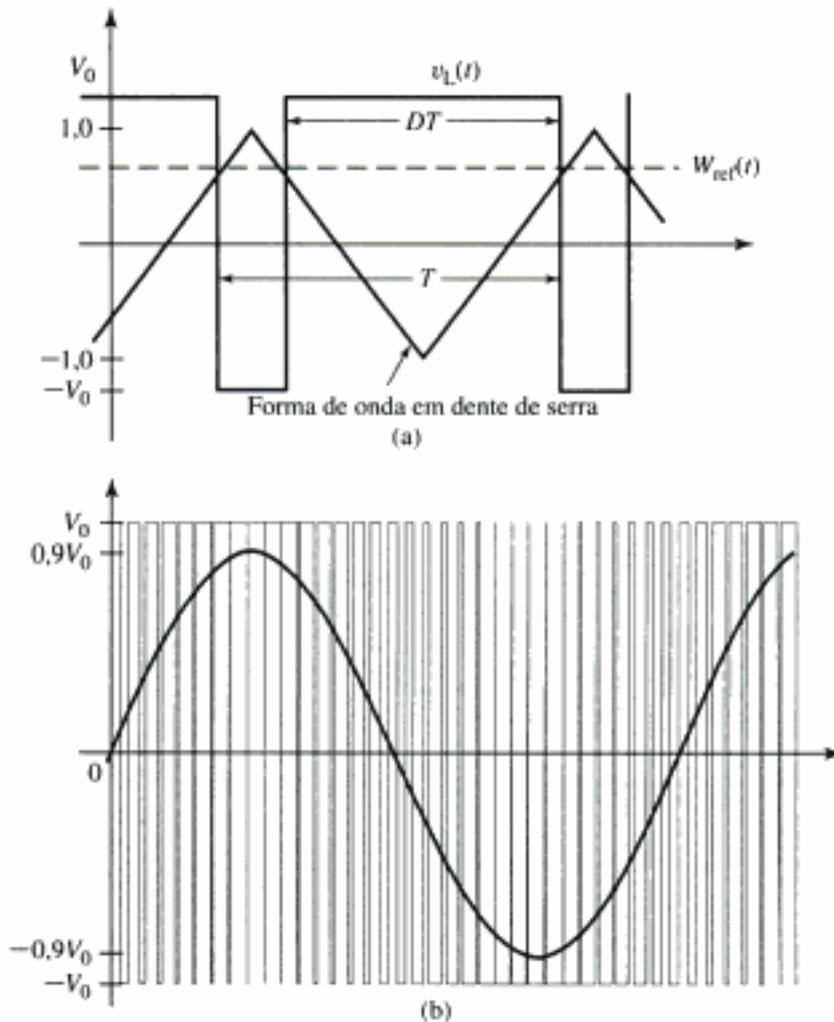
$$(v_L)_{\text{média}} = [2D(t) - 1]V_0 \quad (10.33)$$

e a corrente de carga média será

$$(i_L)_{\text{média}} = \frac{[2D(t) - 1]V_0}{R} \quad (10.34)$$

A Fig. 10.47a ilustra um método para se produzir ciclos de trabalho variáveis neste sistema. Aqui, vemos uma forma de onda em dente de serra variando entre  $-1$  e  $1$ . A figura ilustra também uma forma de onda de referência  $W_{\text{ref}}(t)$  que é obrigada a permanecer dentro do intervalo de  $-1$  a  $1$ . As chaves são controladas em pares. Durante o tempo em que  $W_{\text{ref}}(t)$  é superior à forma de onda em dente de serra, as chaves C1 e C3 estão conduzindo e a tensão de carga é  $V_0$ . De modo semelhante, quando  $W_{\text{ref}}(t)$  é inferior à forma de onda em dente de serra, as chaves C2 e C4 estão conduzindo e a tensão de carga é  $-V_0$ . Assim,

$$D(t) = \frac{(1 + W_{\text{ref}}(t))}{2} \quad (10.35)$$



**FIGURA 10.47** (a) Método para se produzir um ciclo de trabalho variável a partir de uma forma de onda de referência  $W_{\text{ref}}(t)$ . (b) Tensão de carga e tensão de carga média para  $W_{\text{ref}}(t) = 0,9 \sin \omega t$ .

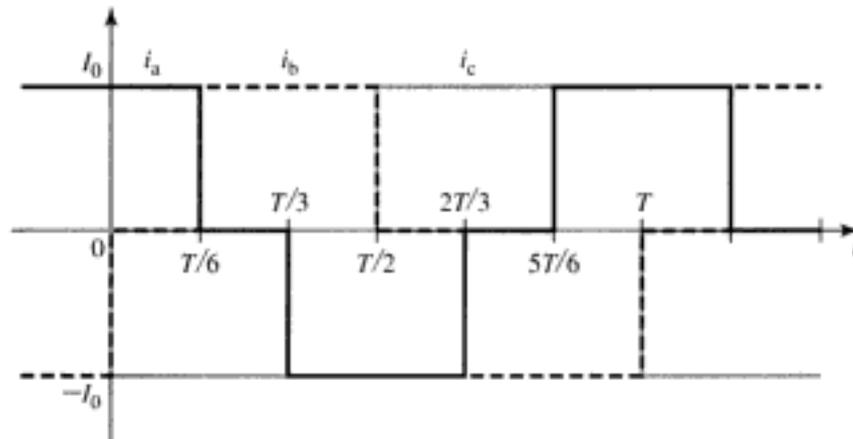


FIGURA 10.49 Forma de onda quase quadrada trifásica do Exemplo 10.14.

### ■ Solução

- a. Observando que a chave C1 conduz quando a corrente da fase *a* é positiva, a chave C4 conduz quando é negativa, e assim por diante, pode-se montar a seguinte tabela para as seqüências de chaveamento. A letra A significa chave aberta e F, chave fechada.

<i>t</i>	0–( <i>T</i> /6)	( <i>T</i> /6)–( <i>T</i> /3)	( <i>T</i> /3)–( <i>T</i> /2)	( <i>T</i> /2)–(2 <i>T</i> /3)	(2 <i>T</i> /3)–(5 <i>T</i> /6)	(5 <i>T</i> /6)– <i>T</i>
C1	A	F	F	F	F	A
C2	F	A	A	F	F	F
C3	F	F	F	A	A	F
C4	F	F	A	A	F	F
C5	F	F	F	F	A	A
C6	A	A	F	F	F	F

- b. As amplitudes das componentes harmônicas da corrente de fase podem ser determinadas a partir das Equações 10.21 e 10.22, fazendo-se  $\Delta_1 = 1/3$ . Portanto,

$$I_{n,1} = \left( \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \right) I_0 \quad I_{n,3} = 0$$

$$I_{n,5} = - \left( \frac{2\sqrt{3}}{5\pi} \right) I_0 \quad I_{n,7} = \left( \frac{2\sqrt{3}}{7\pi} \right) I_0$$

## 10.4 RESUMO

O objetivo deste capítulo é relativamente modesto. O nosso foco foi introduzir alguns princípios básicos da eletrônica de potência e ilustrar como podem ser aplicados ao projeto de diversos circuitos de condicionamento de potência, encontrados comumente no acionamento de motores. Embora a nossa discussão nesse capítulo não seja completa nem ampla, a sua intenção é fornecer os fundamentos necessários para embasar as diversas discussões sobre o controle de motores que são apresentadas neste livro.

Começamos com uma breve visão geral de alguns dos dispositivos de chaveamento de estado sólido disponíveis: diodos, SCRs, IGBTs, MOSFETs e assim por diante. Mostramos que, para os propósitos de uma análise preliminar, é mais do que suficiente representar esses

dispositivos como chaves ideais. Para enfatizar o fato de que eles geralmente só permitem a passagem da corrente em um único sentido, incluímos diodos ideais em série com essas chaves. O mais simples desses dispositivos é o diodo, que tem apenas dois terminais e entra em condução ou é bloqueado simplesmente pelas condições do circuito externo. Os demais tem um terceiro terminal que pode ser usado para colocar os dispositivos em condução e, no caso de transistores como MOSFETS e IGBTs, para tirá-los da condução novamente.

Pode-se considerar que um sistema típico, para o acionamento de um motor com frequência e tensão variáveis, consiste em três seções. A seção de entrada retifica a tensão CA fixa de entrada que tem a frequência da rede e produz uma tensão ou corrente CC. A seção intermediária filtra a saída do retificador, produzindo uma corrente ou tensão relativamente constantes, dependendo do tipo de acionamento que está sendo considerado. A seção de saída do inversor converte a tensão ou corrente CC em tensão ou corrente CA de frequência e tensão variáveis que podem ser aplicadas aos terminais de um motor.

Os inversores mais simples que investigamos produzem formas de onda quadradas ou quase quadradas de tensão ou corrente, cujas amplitudes são iguais às da fonte CC e cujas frequências podem ser controladas pela seqüência de tempos das chaves do inversor. Para produzir uma forma de onda de saída com amplitude variável, é necessário aplicar um controle adicional ao estágio de retificação para variar a amplitude da tensão do barramento CC ou da corrente de *link* CC fornecida ao inversor.

Nós também discutimos inversores de fonte de tensão com modulação por largura de pulso. Nesse tipo de inversor, a tensão da carga é chaveada entre  $V_0$  e  $-V_0$  de modo que a tensão de carga média seja determinada pelo ciclo de trabalho da forma de onda de chaveamento. Cargas cujas constantes de tempo são longas em relação ao tempo de chaveamento do inversor irão atuar como filtros e, então, a corrente de carga será determinada pela tensão de carga média. Inversores de fonte de corrente com modulação por largura de pulso também foram discutidos brevemente.

O leitor deve acompanhar a apresentação realizada aqui com muita cautela. É importante estar ciente de que um tratamento completo da eletrônica de potência e do acionamento de motores é o objeto de uma seqüência de estudos que tipicamente abrange múltiplas disciplinas. Embora os princípios básicos apresentados aqui apliquem-se a uma ampla variedade de tipos de acionamento de motores, há muitos detalhes na prática que devem ser incluídos no projeto dos sistemas de acionamento. Os circuitos de comando usados para colocar em condução as “chaves” (acionadores de gatilho para SCRs, MOSFETs, IGBTs, etc.) devem ser cuidadosamente projetados para que consigam fornecer ativação suficiente, capaz de colocar esses dispositivos completamente em condução e para fornecer as seqüências adequadas de chaveamento. Um inversor típico inclui um controlador e um sistema de proteção que é bastante elaborado. Geralmente, no projeto de circuitos de comando de gatilho, predominam as especificações de corrente e tensão dos dispositivos de chaveamento disponíveis. Isso é especialmente verdadeiro no caso de sistemas de acionamento de alta potência em que as chaves devem ser ligadas em série e/ou em paralelo para se conseguir a especificação desejada de potência. O leitor é remetido às referências da bibliografia para uma discussão, muito mais completa do que a apresentada aqui, sobre a eletrônica de potência e os sistemas inversores.

Os sistemas para o acionamento de motores, com base nas configurações discutidas aqui, podem ser usados para controlar a velocidade e o conjugado dos motores. No caso das máquinas CA, o uso dos sistemas de acionamento de motores baseados em eletrônica de potência resultou em desempenhos que anteriormente só estavam disponíveis com máquinas CC e levou à utilização muito difundida dessas máquinas na maioria das aplicações.

## 10.5 BIBLIOGRAFIA

A intenção deste capítulo é servir de introdução à disciplina de eletrônica de potência. Para os leitores que desejarem estudar esse tópico em maior profundidade, esta bibliografia lista alguns dos muitos livros que foram escritos sobre esse assunto.

Bird, B. M., K. G. King, e D. A. G. Pedder, *An Introduction to Power Electronics*, 2/e. New York: John Wiley & Sons, 1993.

Dewan, S. B., e A. Straughen, *Power Semiconductor Circuits*. New York: John Wiley & Sons, 1975.

Hart, D. W., *Introduction to Power Electronics*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1998.

Kassakian, J. G., M. F. Schlecht, e G. C. Verghese, *Principles of Power Electronics*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1991

Mohan, N., T. M. Undeland, e W. P. Robbins, *Power Electronics: Converters, Applications, and Design*, 3/e. New York: John Wiley & Sons, 2002.

Rahsid, M. H., *Power Electronics: Circuits, Devices and Applications*, 2/e. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1993.

Subrahmanyam, V., *Electric Drives: Concepts and Applications*. New York: McGraw-Hill, 1996.

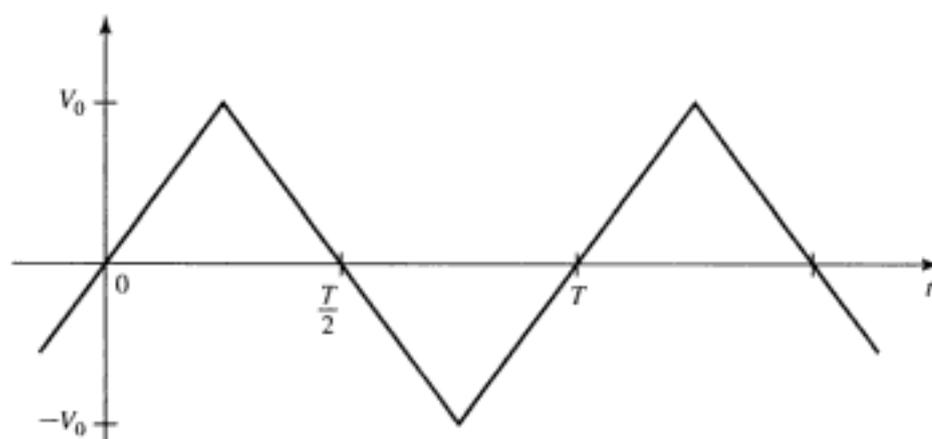
Thorborg, K., *Power Electronics*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall International (U.K.) Ltd, 1988.

## 10.6 PROBLEMAS

**10.1** Considere o circuito retificador de meia onda da Fig. 10.3a. O circuito é acionado por uma fonte de tensão triangular  $v_s(t)$  de amplitude  $V_0 = 9\text{ V}$ , como está mostrado na Fig. 10.50. Assumindo que o diodo é ideal e para um resistor  $R = 1,5\text{ k}\Omega$ :

- Plote a tensão de resistor  $v_R(t)$ .
- Calcule o valor eficaz da tensão do resistor.
- Calcule a dissipação de potência média do resistor no tempo.

**10.2** Repita o Problema 10.1 assumindo que o diodo tem uma queda de tensão fixa de 0,6 V quando ele está conduzindo, mas que de outro modo é ideal. Além disso, calcule a dissipação de potência média do diodo no tempo.



**FIGURA 10.50** Forma de onda de tensão triangular.

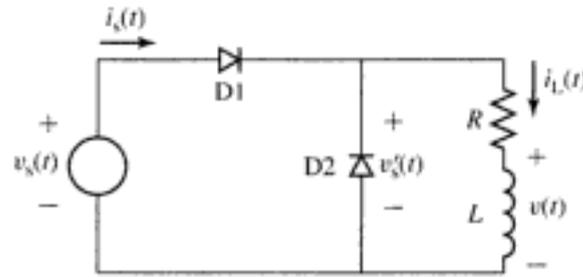


FIGURA 10.52 Sistema retificador de meia onda para o Problema 10.8.

suma que o indutor  $L$  é suficientemente grande para que  $\omega(L/R) \gg 1$  e que o SCR é disparado no tempo  $t_d$  ( $0 \leq t_d \leq \pi/\omega$ ).

- Encontre uma expressão para o valor (CC) médio  $V_{CC}$  da tensão  $v'_s(t)$  na associação em série do resistor e do indutor em função do tempo de atraso  $t_d$ .
- Usando o fato de que, em regime permanente, haverá tensão média zero no indutor, encontre uma expressão para a corrente CC de indutor  $I_{CC}$ , novamente em função do tempo de atraso  $t_d$ .
- Plote  $I_{CC}$  em função de  $t_d$  para ( $0 \leq t_d \leq \pi/\omega$ ).

**10.10** O sistema retificador de meia onda e fase controlada do Problema 10.9 e da Fig. 10.53 deve ser substituído pelo sistema retificador de onda completa e fase controlada da Fig. 10.54. O SCR T1 será disparado no tempo  $t_d$  ( $0 \leq t_d \leq \pi/\omega$ ) e o SCR T4 será disparado exatamente após um semiciclo.

- Encontre uma expressão para o valor (CC) médio  $V_{CC}$  da tensão  $v'_s(t)$  na associação em série do resistor e do indutor em função do tempo de atraso  $t_d$ .
- Usando o fato de que, em regime permanente, haverá tensão média zero no indutor, encontre uma expressão para a corrente CC de indutor  $I_{CC}$ , novamente em função do tempo de atraso  $t_d$ .
- Plote  $I_{CC}$  em função de  $t_d$  para ( $0 \leq t_d \leq \pi/\omega$ ).
- Plote a corrente  $i_s(t)$  da fonte durante um ciclo da tensão da fonte para  $t_d = 3$  ms.

**10.11** O sistema retificador de onda completa e fase controlada da Fig. 10.55 está alimentado uma carga altamente indutiva tal que é possível assumir que a corrente de carga é puramente CC, como está representado pela fonte de corrente  $I_{CC}$  na figura. A tensão da fonte é uma senóide,  $v_s(t) = V_0 \sin \omega t$ . Como está mostrado na Fig. 10.31, os SCRs T1 e T3 são disparados ao mesmo tempo no ângulo de atraso  $\alpha_d$  ( $0 \leq \alpha_d \leq \pi$ ), e os SCRs T2 e T4 são disparados após exatamente um semiciclo.

- Para  $\alpha_d = \pi/4$ :
  - Esboce a tensão de carga  $v'_s(t)$ .

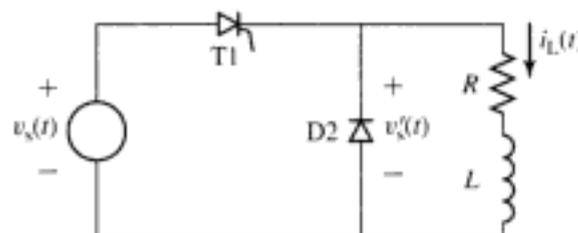


FIGURA 10.53 Sistema retificador de meia onda e fase controlada para o Problema 10.9.

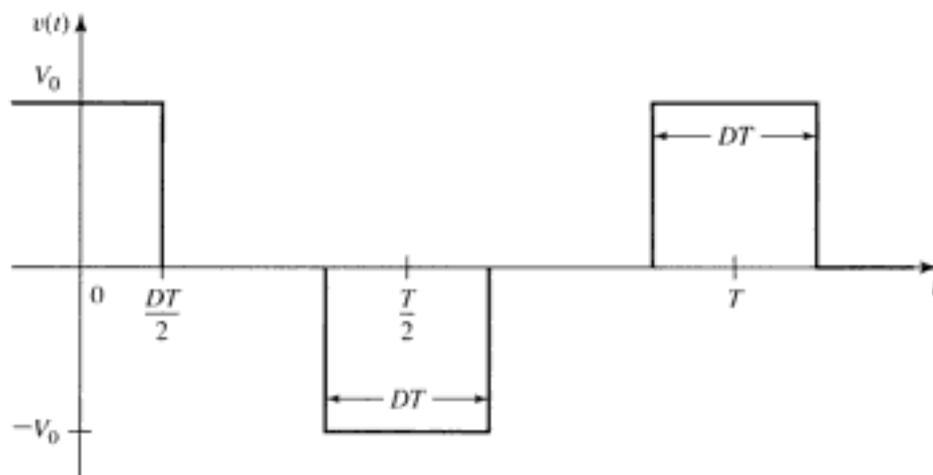


FIGURA 10.57 Forma de onda quase quadrada de tensão do Problema 10.18.

- Monte uma tabela que mostre a seqüência de chaveamento necessária para produzir a forma de onda especificada e o período de tempo durante o qual cada chave está conduzindo ou bloqueada.
- Expresse a componente fundamental da forma de onda de corrente dada por

$$i_1(t) = I_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$

em que  $I_1$  e  $\phi_1$  são funções de  $I_0$ ,  $D$  e o ângulo de atraso  $\alpha_d$ .

- Desenvolva uma expressão para a potência média, no tempo, entregue à fonte de tensão  $v_L(t) = V_a \cos \omega t$ .

- 10.21** Um inversor PWM como o da Fig. 10.45 está operando a partir de uma tensão CC de 75 V e acionando uma carga com  $L = 53$  mH e  $R = 1,7 \Omega$ . Para uma frequência de chaveamento de 1500 Hz, calcule a corrente média de carga, as correntes mínima e máxima, e o *ripple* de corrente para um ciclo de trabalho de  $D = 0,7$ .

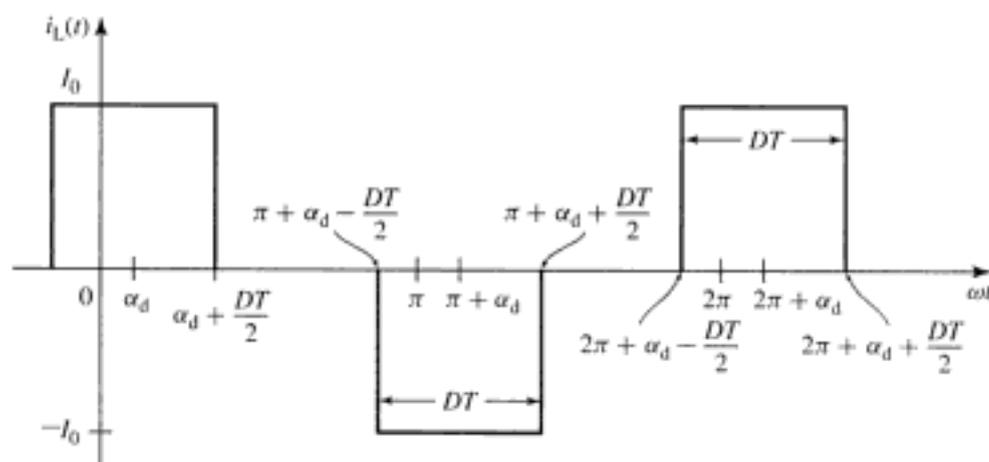


FIGURA 10.58 Forma de onda quase quadrada de corrente do Problema 10.20.

## Controle de Velocidade e Conjugado

O objetivo deste capítulo é discutir as várias técnicas de controle das máquinas elétricas. Como uma discussão aprofundada desse tópico seria ao mesmo tempo demasiado extensa para um único capítulo e estaria além do escopo deste livro, a apresentação aqui será necessariamente de natureza introdutória. Apresentaremos as técnicas básicas de controle de velocidade e de conjugado, e ilustraremos as configurações típicas da eletrônica de acionamento que são usadas para implementar os algoritmos de controle. Este capítulo será desenvolvido com base na discussão sobre eletrônica de potência do Capítulo 10.

Observe que a discussão neste capítulo estará limitada à operação em regime permanente. A descrição de regime permanente apresentada aqui é bem adequada a uma ampla variedade de aplicações de máquinas elétricas. No entanto, o leitor deve estar prevenido de que, em algumas aplicações, a dinâmica do sistema desempenha um papel crítico com as considerações indo desde a velocidade de resposta até a estabilidade global do sistema. Embora as técnicas apresentadas aqui formem a base das análises dinâmicas, as limitações de um livro introdutório são tais que uma discussão mais extensa, incluindo os comportamentos transitório e dinâmico, não é possível.

Na discussão sobre o controle de conjugado em máquinas síncronas e de indução, serão introduzidas as técnicas de controle vetorial ou de campo orientado, e uma analogia será feita com o controle de conjugado em máquinas CC. Esse material é um pouco mais sofisticado matematicamente do que a discussão sobre o controle de velocidade e requer a aplicação das transformações  $dq0$  desenvolvidas no Apêndice C. O capítulo é escrito de tal modo que esse material possa ser omitido segundo a escolha do professor sem prejudicar a discussão sobre o controle de velocidade.

### 11.1 CONTROLE DE MOTORES CC

Antes da aplicação em larga escala dos acionamentos baseados em eletrônica de potência para controlar as máquinas CA, os motores CC eram de longe as máquinas escolhidas em aplicações que necessitassem de flexibilidade de controle. Apesar dos acionamentos CA terem se tornado bem comuns nos últimos anos, a facilidade de controle das máquinas CC assegura que continuem a ser usadas em muitas aplicações.

#### 11.1.1 Controle de Velocidade

Os três métodos mais comuns de controle de velocidade de motores CC são métodos para ajustar o fluxo, usualmente por meio do controle da corrente de campo, da variação da resistência associada ao circuito de armadura e da variação da tensão dos terminais de armadura.

**Controle da Corrente de Campo** Em parte porque envolve o controle com um nível de potência relativamente baixo (a potência para o enrolamento de campo é geralmente uma pequena fração da potência que é entregue à armadura de uma máquina CC), o *controle por corrente de campo* é usado frequentemente para controlar a velocidade de um motor CC, com enrolamento de campo de excitação independente ou em derivação. O circuito equivalente para uma máquina CC com excitação independente acha-se na Fig. 7.4a e está repetido na Fig. 11.1. Naturalmente, o método também é aplicável aos motores compostos. A corrente do campo em derivação pode ser ajustada por meio de uma resistência variável em série com o campo em derivação. Alternativamente, a corrente de campo pode ser fornecida por circuitos eletrônicos de potência que podem ser usados para mudar rapidamente a corrente de campo, em resposta a uma ampla variedade de sinais de controle.

A Fig. 11.2a mostra esquematicamente uma configuração de chaveamento para a tensão de campo com modulação por largura de pulso. Esse sistema assemelha-se de perto ao de modulação por largura de pulso discutido na Seção 10.3.2. Consiste em um retificador que retifica a tensão CA de entrada, um capacitor do chamado *link* CC que filtra a tensão retificada produzindo uma tensão  $V_{CC}$  e um modulador de largura de pulso.

Nesse sistema, como é necessária apenas uma corrente de campo unidirecional, o modulador de largura de pulso consiste em uma única chave e um diodo de “roda livre” ao invés da configuração mais complexa de quatro chaves da Fig. 10.45. Assumindo que a chave e o diodo são ideais, a tensão média sobre o enrolamento de campo\* será igual a

$$V_f = DV_{CC} \quad (11.1)$$

em que  $D$  é o ciclo de trabalho da forma de onda do chaveamento; isto é,  $D$  é a fração de tempo durante a qual a chave  $C$  está fechada.

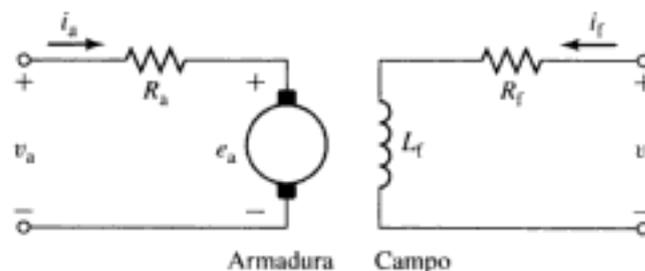
A Fig. 11.2b mostra a corrente de campo resultante. Como em regime permanente a tensão média no indutor deve ser igual a zero, a corrente de campo  $I_f$  será assim igual a

$$I_f = \frac{V_f}{R_f} = D \left( \frac{V_{CC}}{R_f} \right) \quad (11.2)$$

Desse modo, a corrente de campo pode ser controlada simplesmente variando o ciclo de trabalho do modulador de largura de pulso. Se a constante de tempo do enrolamento de campo  $L_f / R_f$  for elevada em relação ao tempo de chaveamento, a corrente de *ripple*  $\Delta i_f$  será pequena em relação à corrente média  $I_f$ .

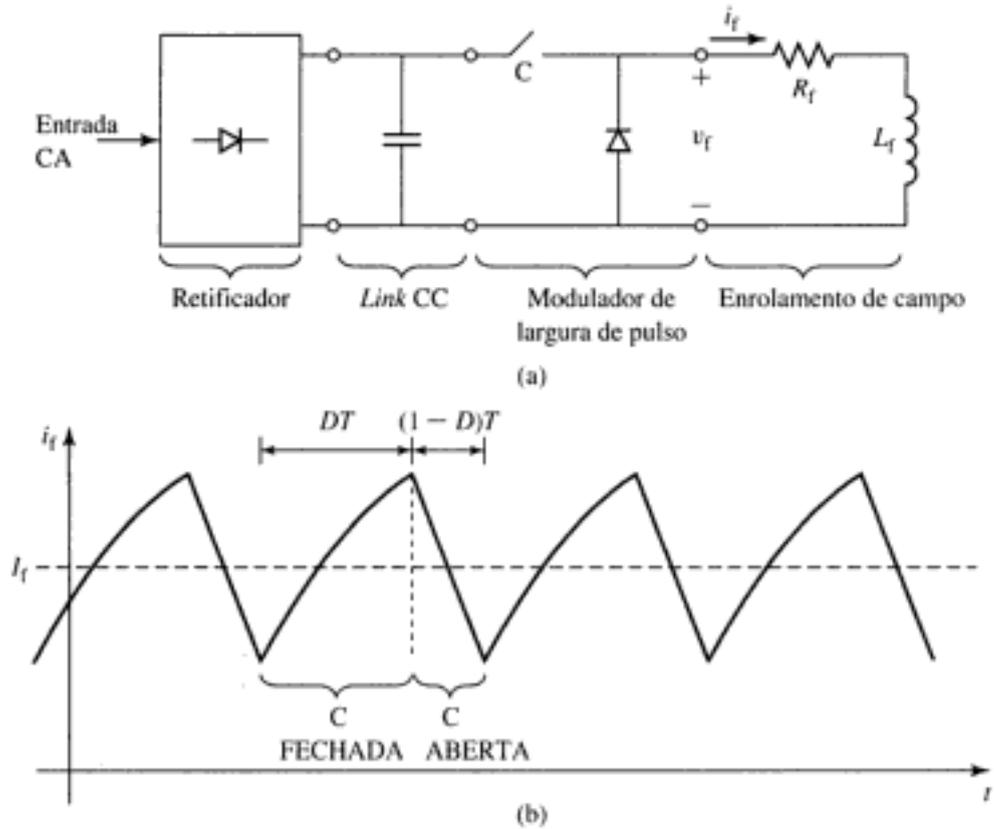
### EXEMPLO 11.1

Um motor CC de 25 kW, 3600 rpm e 240 V tem uma resistência de armadura de 47 mΩ, e um enrolamento de campo em derivação com uma resistência de 187 Ω e uma indutância de 4,2



**FIGURA 11.1** Circuito equivalente de um motor CC de excitação independente.

\* N. de T.: Lembrando, o subscrito  $f$  adotado para campo vem de *field* (campo, em inglês).



**FIGURA 11.2** (a) Sistema de modulação por largura de pulso para um enrolamento de campo de uma máquina CC. (b) Forma de onda da corrente de campo.

Calcule (a) a corrente de campo média  $I_f$  e (b) o valor do *ripple* de corrente  $\Delta i_f$  quando o enrolamento de campo é alimentado a partir de uma fonte CC de 240 V, modulada por largura de pulso, com um ciclo de trabalho  $D = 0,75$  e um período de chaveamento de 1 ms.

■ **Solução**

a. A corrente de campo média é facilmente obtida da Equação 10.2 como

$$I_f = D \left( \frac{V_{CC}}{R_f} \right) = 0,75 \left( \frac{240}{187} \right) = 0,96 \text{ A}$$

b. A constante de tempo  $\tau = L_f / R_f = 22,5$  ms é muito maior que o período de chaveamento de 1 ms. Assim, a corrente de *ripple* pode ser calculada usando a Equação 10.32 e obtendo-se

$$\begin{aligned} \Delta i_f &= \left( \frac{2V_{CC}}{R_f} \right) \left( \frac{T}{\tau} \right) D(1 - D) \\ &= \left( \frac{2 \times 240}{187} \right) \left( \frac{1}{22,5} \right) 0,75 \times (1 - 0,75) \\ &= 21,4 \text{ mA} \end{aligned}$$

**PROBLEMA PRÁTICO 11.1**

O ciclo de trabalho  $D$  do controlador do motor CC do Exemplo 11.1 é subitamente alterado de 0,75 para 1,0. Calcule (a) a corrente de campo de regime permanente e (b) a constante de tempo da variação desde o valor inicial de 1,08 A até o valor final.

### ■ Solução

- a. 1,28 A  
b. 22,5 ms

Para examinarmos o efeito do controle sobre a corrente de campo, vamos começar com o caso de um motor CC que está acionando uma carga de conjugado constante  $T_{carga}$ . Das Equações 7.9 e 7.14, a tensão gerada de um motor CC pode ser escrita como

$$E_a = K_f I_f \omega_m \quad (11.3)$$

em que  $I_f$  é a corrente de campo média,  $\omega_m$  é a velocidade angular em rad/s e  $K_f = K_a \mathcal{P}_d N_f$  é uma constante geométrica que depende das dimensões do motor, das propriedades do material magnético usado para construir o motor, assim como do número de espiras do enrolamento de campo. Observe que, estritamente falando,  $K_f$  não é constante porque é proporcional à permeância do eixo direto, que varia tipicamente à medida que o nível de fluxo no motor cresce até o ponto em que os efeitos da saturação magnética tornam-se significativos.

O conjugado eletromagnético é dado pela Equação 7.16 como

$$T_{mec} = \frac{E_a I_a}{\omega_m} = K_f I_f I_a \quad (11.4)$$

e pode-se ver no circuito equivalente da Fig. 11.1 que a corrente de armadura é dada por

$$I_a = \frac{(V_a - E_a)}{R_a} \quad (11.5)$$

Tornando o conjugado do motor igual a  $T_{carga}$ , as Equações 11.3 a 11.5 podem ser usadas para determinar  $\omega_m$ , obtendo-se

$$\omega_m = \frac{(V_a - I_a R_a)}{K_f I_f} = \frac{(V_a - \frac{T_{carga} R_a}{K_f I_f})}{K_f I_f} \quad (11.6)$$

Da Equação 11.6 e sabendo que a queda de tensão  $I_a R_a$  na resistência de armadura é geralmente bem pequena em relação à queda de tensão  $V_a$ , vemos que para um dado conjugado de carga, a velocidade do motor irá aumentar com a diminuição da corrente de campo e diminuir quando a corrente de campo crescer. A menor velocidade alcançável é a correspondente à máxima corrente de campo (a corrente de campo é limitada em razão do aquecimento). A máxima velocidade é limitada mecanicamente pela integridade mecânica do rotor e eletricamente pelos efeitos da reação de armadura diante de condições de campo fraco, dando origem a uma comutação pobre.

A corrente de armadura é limitada tipicamente pela capacidade de refrigeração do motor. Em muitos motores CC, a refrigeração é auxiliada por um ventilador acionado pelo eixo, cuja capacidade de refrigeração depende da velocidade do motor. Para examinar de modo aproximado as limitações de saída contínua do motor, que é permitida quando se varia a velocidade, iremos desprezar a influência das alterações devidas à ventilação e assumir que a corrente de armadura  $I_a$  não pode ultrapassar o seu valor nominal, de modo a assegurar que o motor não sobreaqueça. Em nossa aproximação, iremos desprezar os efeitos das perdas rotacionais (que naturalmente também se alteram com a velocidade do motor). Como a queda de tensão na resistência de armadura é relativamente pequena, a tensão de velocidade  $E_a$  permanecerá essencialmente constante com um valor ligeiramente inferior à tensão de armadura aplicada. Qualquer mudança na corrente de campo será compensada por uma mudança na velocidade do motor.

Assim, nessas condições de operação com tensão de terminal constante e corrente de campo variável, o produto  $E_a I_a$ , e desse modo a potência de saída permitida do motor, perma-

nece substancialmente constante quando a velocidade é variada. Um motor CC controlado dessa forma é referido como de *acionamento de potência constante*. O conjugado, entretanto, varia diretamente com o fluxo de campo e, portanto, o seu mais alto valor permitido é determinado pela corrente de campo mais elevada e, conseqüentemente, pela menor velocidade. O controle por corrente de campo é assim melhor adequado para acionamentos que requeiram conjugado elevado em baixas velocidades. Quando um motor assim controlado é usado com uma carga que requer conjugado constante dentro da faixa de velocidade, a potência e o tamanho da máquina são determinados pelo produto do conjugado pela maior velocidade. Tal acionamento é inerentemente superdimensionado nas baixas velocidades. Esse é o principal fator econômico que limita o intervalo prático de velocidade dos motores de grande porte.

### EXEMPLO 11.2

Com uma tensão de terminal de armadura de 240 V e com uma corrente de campo em derivação de 0,34 A, constata-se que a velocidade a vazio do motor CC do Exemplo 11.1 é de 3600 rpm. Neste exemplo, assume-se que o motor está acionando uma carga que varia com a velocidade segundo

$$P_{\text{carga}} = 22,4 \left( \frac{n}{3600} \right)^3 \text{ kW}$$

em que  $n$  é a velocidade do motor em rpm. Um reostato deve ser instalado em série com o campo em derivação para variar a velocidade. Assumindo que a tensão de terminal de armadura permanece constante em 240 V, calcule o intervalo de resistência requerido para que a velocidade seja variada entre 1800 e 3600 rpm. Os efeitos das perdas rotacionais podem ser ignorados.

#### ■ Solução

O conjugado de carga é igual à potência dividida pela velocidade do motor  $\omega_m$ , expressa em rad/s. Primeiro, a potência é expressa em termos de  $\omega_m$ , obtendo-se

$$P_{\text{carga}} = 22,4 \left( \frac{\omega_m}{120\pi} \right)^3 \text{ kW}$$

O conjugado total é dado então por

$$T_{\text{carga}} = \frac{P_{\text{carga}}}{\omega_m} = 22,4 \left( \frac{\omega_m^2}{(120\pi)^3} \right) = 4,18 \times 10^{-4} \omega_m^2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Assim, para 1800 rpm,  $\omega_m = 60\pi$  e  $T_{\text{carga}} = 14,9 \text{ N} \cdot \text{m}$ . Para 3600 rpm,  $\omega_m = 120\pi$  e  $T_{\text{carga}} = 59,4 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

Antes de obter  $I_f$ , devemos encontrar o valor de  $K_f$ , o qual pode ser obtido a partir dos dados a vazio. Especificamente, vemos que com uma tensão de terminal de 240 V e com uma velocidade a vazio de 3600 rpm ( $\omega_m = 120\pi$ ), a respectiva corrente de campo é 0,34 A. Como, em condições a vazio, temos  $E_a \approx V_a$ , podemos obter  $K_f$  da Equação 11.3 como

$$K_f = \frac{E_a}{I_f \omega_m} = \frac{240}{0,34 \times 120\pi} = 1,87 \text{ V}/(\text{A} \cdot \text{rad/s})$$

Para encontrar a corrente de campo requerida, podemos resolvê-la à Equação 11.6 para obter  $I_f$ , ou seja,

$$I_f = \frac{V_a}{2K_f \omega_m} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\omega_m T_{\text{carga}} R_a}{V_a^2}} \right)$$

Sabendo que  $R_a$  é pequena e, portanto,  $I_f \approx V_a / K_f \omega_m$ , vemos que o sinal positivo deverá ser usado e, assim, temos

$$I_f = \frac{V_a}{2K_f \omega_m} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4\omega_m T_{carga} R_a}{V_a^2}} \right)$$

Tendo obtido o valor da corrente de campo, a resistência de campo total pode ser encontrada por

$$(R_f)_{total} = \frac{V_a}{I_f} = \frac{240}{I_f}$$

e a resistência a ser acrescentada que é necessária pode ser encontrada subtraindo-se a resistência do enrolamento de campo em derivação (187  $\Omega$ ) de  $(R_f)_{total}$ .

Isso produz a seguinte tabela:

rpm	$T_{carga}$ [N · m]	$I_f$ [A]	$(R_f)_{total}$ [ $\Omega$ ]	$R_{reostato}$ [ $\Omega$ ]
1800	14,9	0,678	354	167
3600	59,4	0,334	719	532

Portanto, o reostato deve ser capaz de cobrir o intervalo de 166  $\Omega$  a 532  $\Omega$ .

### PROBLEMA PRÁTICO 11.2

O reostato do Exemplo 11.2 deve ser substituído por um controlador de ciclo de trabalho que opera a partir de uma fonte CC de 240 V. Calcule a faixa de valores para o ciclo de trabalho que é requerida para se conseguir operar dentro do intervalo de velocidade de 1800 a 3600 rpm, como foi especificado no Exemplo 11.2.

#### ■ Solução

$$0,26 \leq D \leq 0,53$$

**Controle por Resistência do Circuito de Armadura** O controle por resistência do circuito de armadura fornece um meio de se obter velocidades reduzidas pela inserção no circuito de armadura de uma resistência externa em série. Pode ser usado com motores em série, em derivação e compostos. Para estes dois últimos tipos, o resistor em série deve ser ligado entre o campo em derivação e a armadura, não entre a linha e o motor. É um método comum de controle de velocidade de motores série e em geral é análogo em funcionamento ao controle de um motor de indução com rotor bobinado, em que se acrescenta uma resistência em série com a resistência do rotor.

Dependendo do valor da resistência em série da armadura, a velocidade pode variar significativamente com a carga, porque a velocidade depende da queda de tensão nessa resistência e, portanto, da corrente de armadura demandada pela carga. Por exemplo, um motor em derivação de 1200 rpm, cuja velocidade com carga é reduzida a 750 rpm pela resistência de armadura em série, retornará para um funcionamento de quase 1200 rpm se a carga for removida, porque a corrente a vazio produz uma queda de tensão insignificante na resistência em série. A desvantagem desse controle pobre de velocidade pode não ser importante em um motor série, que é usado apenas onde um serviço com velocidade variável é requerido ou onde pode ser tolerado.

Uma desvantagem significativa desse método de controle de velocidade é que a perda de potência no resistor externo é elevada, especialmente quando a velocidade é grandemente reduzida. De fato, para uma carga de conjugado constante, a potência de entrada do motor mais

Assumindo que a tensão de campo é mantida constante em 300 V, use MATLAB\* para plotar a velocidade do motor em função da tensão de armadura, quando a tensão de armadura é variada de 250 V até 500 V, com o motor operando a vazio e também com um conjugado nominal de plena carga.

### ■ Solução

Da Equação 11.4,

$$I_a = \frac{T_{mec}}{K_f I_f}$$

e, da Equação 11.5,

$$I_a = \frac{V_a - E_a}{R_a} = \frac{V_a - K_f I_f \omega_m}{R_a}$$

Portando, resolvendo obtém-se  $\omega_m$  como

$$\omega_m = \frac{V_a - \left( \frac{T_{mec} R_a}{K_f I_f} \right)}{K_f I_f}$$

e a velocidade, em rpm, como

$$n = \left( \frac{30}{\pi} \right) \omega_m$$

Finalmente, a corrente de campo é

$$I_f = \frac{V_f}{R_f} = \frac{300}{109} = 2,75 \text{ A}$$

e o conjugado nominal de plena carga é dado por

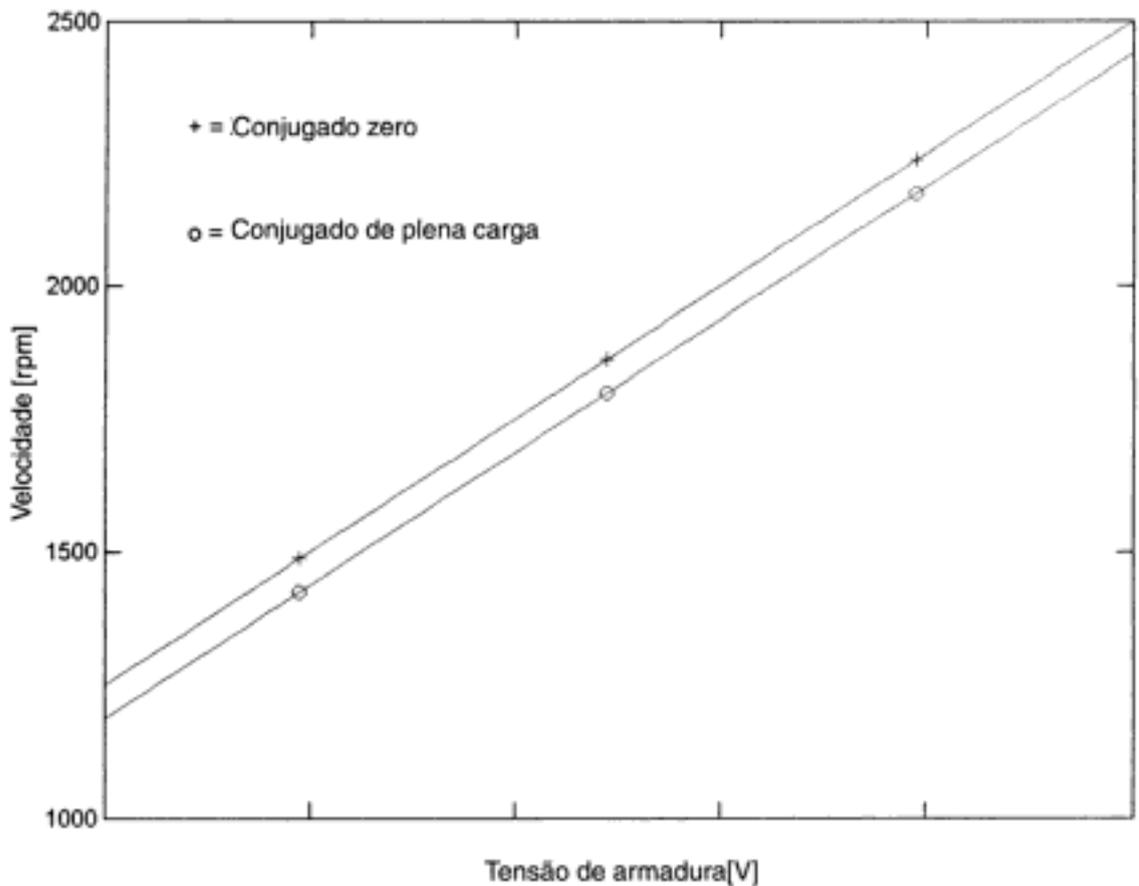
$$T_{nominal} = \frac{P_{nominal}}{(\omega_m)_{nominal}} = \frac{100 \times 746}{2500 \times \left( \frac{\pi}{30} \right)} = 285 \text{ N} \cdot \text{m}$$

A Fig. 11.5 é a plotagem desejada. Observe que a velocidade diminui em 63 rpm quando o conjugado aumenta de zero até a plena carga, independentemente da tensão de armadura e da velocidade da máquina.

Aqui está o *script* de MATLAB:

```
clc
clear
% Parâmetros do motor
Rf = 109;
Ra = 0.084;
Kf = 0.694;
% Tensão de campo constante
Vf = 300;
% Corrente de campo resultante
If = Vf/Rf;
% Velocidade nominal em rad/s
omegarated = 2500*(pi/30);
```

\* MATLAB é uma marca registrada da The MathWorks, Inc.



**FIGURA 11.5** Uma plotagem de velocidade *versus* tensão de armadura para o motor CC do Exemplo 11.3.

```

% Potência nominal em watts
Prated = 100*746;

% Conjugado nominal em N.m
Trated = Prated/omegarated;

% Varie a tensão de armadura de 250 a
% 500 V e calcule a velocidade.
for n=1:101
    Va(n) = 250 * (1 + (n-1)/100);
    % Conjugado zero
    T = 0;
    omega = (Va(n) - T*Ra/(Kf*If))/(Kf*If);
    NoLoadRPM(n) = omega*30/pi;

    % Conjugado de plena carga
    T = Trated;
    omega = (Va(n) - T*Ra/(Kf*If))/(Kf*If);
    FullLoadRPM(n) = omega*30/pi;
end

plot(Va, NoLoadRPM)
hold
plot(Va(20), NoLoadRPM(20), '+')
plot(Va(50), NoLoadRPM(50), '+')
plot(Va(80), NoLoadRPM(80), '+')
plot(Va, FullLoadRPM)
plot(Va(20), FullLoadRPM(20), 'o')

```

```

plot (Va(50), FullLoadRPM(50), 'o')
plot (Va(80), FullLoadRPM(80), 'o')
hold
xlabel('Tensão de armadura [V]')
ylabel('Velocidade [rpm]')
text(270,2300,'+ = Conjugado zero')
text(270,2100,'o = Conjugado de plena carga')

```

**PROBLEMA PRÁTICO 11.3**

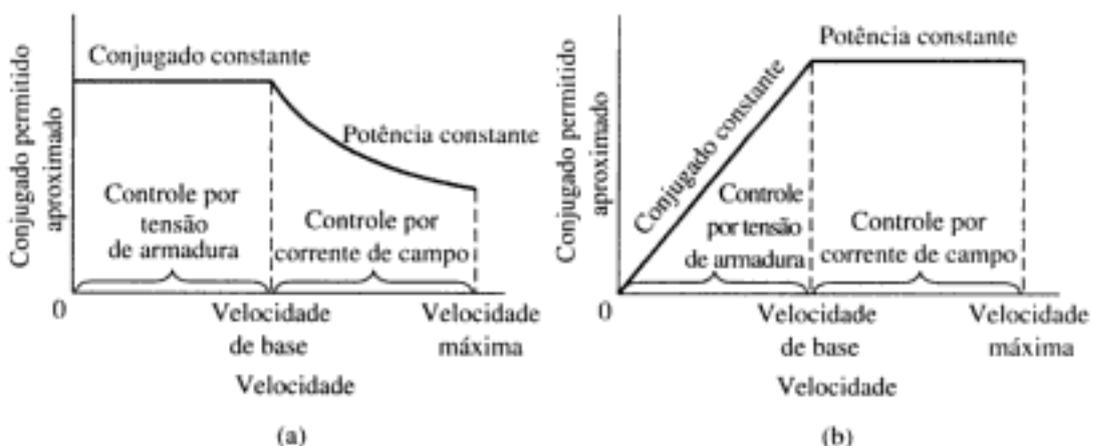
Calcule a variação de tensão de armadura necessária para manter o motor do Exemplo 11.3 em uma velocidade de 2000 rpm quando a carga é variada de zero até a plena carga.

**■ Solução**

12,5 V

Freqüentemente o controle da tensão do motor é combinado com o controle da corrente de campo de modo a se obter o intervalo de velocidade o mais amplo possível. Com esse controle duplo, a chamada velocidade de base pode ser definida como sendo a velocidade do motor que corresponde à tensão normal de armadura e ao pleno campo. Velocidades superiores à de base são obtidas reduzindo-se a corrente de campo; velocidades inferiores à de base são obtidas por controle da tensão de armadura. Como foi discutido em relação ao controle da corrente de campo, a faixa acima da velocidade de base é de acionamento de potência constante. A faixa abaixo da velocidade de base é de acionamento de conjugado constante porque, como no controle por resistência de armadura, o fluxo e a corrente de armadura permitidas permanecem aproximadamente constantes. As limitações globais de saída são portanto como as mostradas na Fig. 11.6a, para o conjugado permitido aproximado, e na Fig. 11.6b, para a potência permitida aproximada. A característica de conjugado constante é bem adequada a muitas aplicações na indústria de máquinas ferramentas, onde muitas das cargas consistem em sua parte em vencer o atrito de partes móveis e, portanto, as suas exigências são basicamente as de conjugado constante.

A regulação de velocidade e as limitações da faixa de velocidade acima da velocidade de base são as já apresentadas no controle por corrente de campo. Assim, a velocidade máxima não excede ordinariamente a quatro vezes e preferencialmente a duas vezes a velocidade



**FIGURA 11.6** (a) Limitações de conjugado e (b) potência dos métodos combinados de controle de velocidade por tensão de armadura e por corrente de campo.

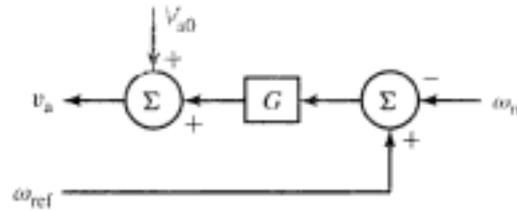


FIGURA 11.8 Controlador de velocidade simples para o motor CC do Exemplo 11.4.

Com a velocidade de referência ajustada para 2000 rpm ( $\omega_{ref} = 2000 \times \pi / 30$ ), calcule  $V_{d0}$  e  $G$  de modo que a velocidade do motor seja 2000 rpm a vazio e caia apenas de 25 rpm quando o conjugado é aumentado até seu valor nominal de plena carga.

### ■ Solução

Como foi calculado no Exemplo 11.3, a corrente de campo nessas condições será de 2,75 A. A vazio e 2000 rpm, tem-se

$$V_a \approx E_a = K_f I_f \omega_m = 0,694 \times 2,75 \times 2000 \left( \frac{\pi}{30} \right) = 400 \text{ V}$$

e, portanto,  $V_{d0} = 400 \text{ V}$ .

No Exemplo 11.3, obteve-se o conjugado de plena carga como sendo  $T_{nominal} = 285 \text{ N.m}$ . Assim, a corrente de armadura requerida para obter o conjugado nominal de plena carga pode ser obtido da Equação 11.4, ou seja,

$$I_a = \frac{T_{nominal}}{K_f I_f} = \frac{285}{0,694 \times 2,75} = 149 \text{ A}$$

Para uma velocidade de 1975 rpm,  $E_a$  será dada por

$$E_a = K_f I_f \omega_m = 0,694 \times 2,75 \times 1975 \left( \frac{\pi}{30} \right) = 395 \text{ V}$$

e, desse modo,

$$V_a = E_a + I_a R_a = 395 + 149 \times 0,084 = 408 \text{ V}$$

Isolando  $G$ , obtém-se

$$G = \frac{V_a - V_{d0}}{\omega_{ref} - \omega_m} = \frac{408 - 400}{(2000 - 1975) \left( \frac{\pi}{30} \right)} = 3,06 \text{ V} \cdot \text{s/rad}$$

### PROBLEMA PRÁTICO 11.4

Se o conjugado de carga do Exemplo 11.4 for igual à metade do conjugado nominal de plena carga, calcule (a) a velocidade do motor e (b) a respectiva potência de carga.

### ■ Solução

- 1988 rpm
- 29,6 kW

No caso de motores CC de imã permanente, naturalmente o campo de fluxo é fixado pelo imã permanente (excetuando-se possíveis efeitos sobre as propriedades magnéticas devi-

dos a mudanças de temperatura quando o motor é aquecido). Das Equações 11.3 e 11.4, vemos que a tensão gerada pode ser escrita na forma

$$E_a = K_m \omega_m \quad (11.8)$$

e que o conjugado eletromagnético pode ser escrito como

$$T_{mec} = K_m I_a \quad (11.9)$$

A comparação das Equações 11.8 e 11.9 com as Equações 11.3 e 11.4 mostra que a análise de um motor CC de ímã permanente é idêntica à de um motor CC em derivação ou de excitação independente com exceção de que o termo  $K_f I_f$  deve ser substituído pela constante de conjugado  $K_m$ .

### EXEMPLO 11.5

O motor CC de ímã permanente do Exemplo 7.9 tem uma resistência de armadura de  $1,03 \Omega$  e uma constante de conjugado  $K_m = 0,22 \text{ V}/(\text{rad/s})$ . Assuma que o motor está acionando uma carga de potência constante de  $800 \text{ W}$  (incluindo as perdas rotacionais), e calcule a velocidade do motor quando a tensão de armadura é variada entre  $40$  e  $50 \text{ V}$ .

#### ■ Solução

A saída de potência do motor (incluindo as perdas rotacionais) é dada pelo produto  $E_a I_a$  e, portanto, podemos escrever

$$P_{carga} = E_a I_a = K_m \omega_m I_a$$

Isolando  $\omega_m$ , obtém-se

$$\omega_m = \frac{P_{carga}}{K_m I_a}$$

A corrente de armadura pode ser escrita como

$$I_a = \frac{(V_a - E_a)}{R_a} = \frac{(V_a - K_m \omega_m)}{R_a}$$

Essas duas equações podem ser combinadas para dar uma equação em  $\omega_m$  da forma

$$\omega_m^2 - \left( \frac{V_a}{K_m} \right) \omega_m + \frac{P_{carga} R_a}{K_m^2} = 0$$

da qual podemos obter

$$\omega_m = \frac{V_a}{2K_m} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4P_{carga} R_a}{V_a^2}} \right]$$

Sabendo que, se a queda de tensão na resistência for pequena,  $V_a \approx E_a = K_m \omega_m$ , iremos escolher o sinal positivo e, portanto,

$$\omega_m = \frac{V_a}{2K_m} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{4P_{carga} R_a}{V_a^2}} \right]$$

Substituindo os valores, encontramos que, para  $V_a = 40 \text{ V}$ ,  $\omega_m = 169,2 \text{ rad/s}$  ( $1616 \text{ rpm}$ ) e, para  $V_a = 50 \text{ V}$ , temos  $\omega_m = 217,5 \text{ rad/s}$  ( $2077 \text{ rpm}$ ).

Observe que, em cada uma das configurações PWM da Fig. 11.9b e c, mudanças rápidas na corrente instantânea que circula pela armadura da máquina CC podem dar origem a grandes picos de tensão, os quais podem danificar o isolamento da máquina assim como dar origem a arcos e a rupturas por tensão no comutador. Para eliminar esses efeitos, um sistema prático deve incluir algum tipo de filtro nos terminais da armadura (como um capacitor de valor elevado) para limitar a elevação da tensão e para prover um caminho de baixa impedância para as componentes de alta frequência da corrente de acionamento.

A Fig. 11.10 mostra uma configuração típica na qual o controle de conjugado está cercado por uma malha de realimentação de velocidade. Isso assemelha-se ao controle de velocidade da Fig. 11.7. Neste caso, entretanto, ao invés de controlar a tensão de armadura, a saída do controlador de velocidade é um sinal de referência de conjugado  $T_{ref}$ , o qual por sua vez serve de entrada para o controlador de conjugado. Uma vantagem desse sistema é que a corrente de armadura do motor CC é limitada automaticamente a níveis aceitáveis sob todas as condições de operação, como está mostrado no Exemplo 11.6.

### EXEMPLO 11.6

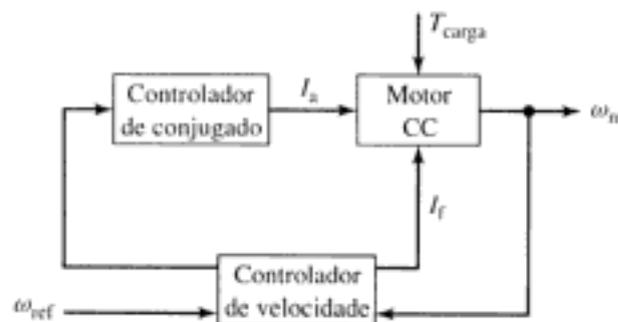
Considere que o motor CC de 100 HP dos Exemplos 11.3 e 11.4 esteja acionando uma carga cujo conjugado varia linearmente com a velocidade de modo que é igual ao conjugado nominal de plena carga (285 N.m) para uma velocidade de 2500 rpm. Vamos assumir que o momento de inércia combinado do motor e da carga é igual a  $0,92 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . A tensão de campo é mantida constante em 300 V.

- Calcule a tensão e a corrente de armadura requeridas para conseguir velocidades de 2000 e 2500 rpm.
- Assuma que o motor está operando com um controlador por tensão de armadura e que a tensão de armadura é subitamente chaveada de seu valor correspondente a 2000 rpm para o de 2500 rpm. Calcule a velocidade e a corrente de armadura resultantes do motor em função do tempo.
- Assuma que o motor está operando com um controlador por corrente de armadura e que a corrente de armadura é subitamente chaveada de seu valor correspondente a 2000 rpm para o de 2500 rpm. Calcule a velocidade resultante do motor em função do tempo.

### ■ Solução

- Desprezando as perdas rotacionais, a corrente de armadura pode ser obtida da Equação 11.4 fazendo  $T_{mec} = T_{carga}$ , ou seja,

$$I_a = \frac{T_{carga}}{K_t I_f}$$



**FIGURA 11.10** Diagrama de blocos de um sistema de controle de velocidade para motor CC usando controle direto do conjugado do motor.

Substituindo

$$T_{\text{carga}} = \left(\frac{n}{n_f}\right) T_{pc}$$

em que o subscrito pc indica plena carga,  $n$  é a velocidade em rpm,  $n_f = 2500$  rpm e  $T_{pc} = 285 \text{ N} \cdot \text{m}$ , obtém-se

$$I_a = \frac{n T_{pc}}{n_f K_t I_f}$$

Então, resolvendo  $V_a = E_a + I_a R_a$ , podemos completar a seguinte tabela:

rpm	$\omega_m$ [rad/s]	$V_a$ [V]	$I_a$ [A]	$T_{\text{carga}}$ [N·m]
2000	209	410	119	228
2500	262	513	149	285

b. A equação dinâmica que governa a velocidade do motor é

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = T_{\text{mec}} - T_{\text{carga}}$$

Substituindo  $\omega_m = (\pi/30)n$  e  $\omega_f = (\pi/30)n_f$ , podemos escrever

$$T_{\text{carga}} = \left(\frac{T_{pc}}{\omega_f}\right) \omega_m$$

Com controle por tensão de armadura, temos

$$\begin{aligned} T_{\text{mec}} &= K_t I_f I_a = K_t I_f \left(\frac{V_a - E_a}{R_a}\right) \\ &= K_t I_f \left(\frac{V_a - K_t I_f \omega_m}{R_a}\right) \end{aligned}$$

e, portanto, a equação diferencial é

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = K_t I_f \left(\frac{V_a - K_t I_f \omega_m}{R_a}\right) - \left(\frac{T_{pc}}{\omega_f}\right) \omega_m$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_m}{dt} + \frac{1}{J} \left(\frac{T_{pc}}{\omega_f} + \frac{(K_t I_f)^2}{R_a}\right) \omega_m - \frac{K_t I_f V_a}{J R_a} \\ = \frac{d\omega_m}{dt} + 48,4 \omega_m - 24,7 V_a = 0 \end{aligned}$$

Com essa equação diferencial, podemos ver que, com o motor inicialmente em  $\omega_m = \omega_i = 209$  rad/s, se a tensão de armadura  $V_a$  for bruscamente chaveada de  $V_i = 413$  V para  $V_f = 513$  V, a velocidade crescerá exponencialmente até  $\omega_m = \omega_f = 262$  rad/s conforme

$$\begin{aligned} \omega_m &= \omega_f + (\omega_i - \omega_f) e^{-t/\tau} \\ &= 262 - 53 e^{-t/\tau} \text{ rad/s} \end{aligned}$$

em que  $\tau = 1/48,4 = 20,7$  ms. Expressando em termos de rpm, temos

$$n = 2500 - 50 e^{-t/\tau} \text{ rpm}$$

A corrente de armadura decairá exponencialmente com a mesma constante de tempo de 20,7 ms desde um valor inicial de  $(V_f - V) / R_a = 1190$  A até seu valor final de 149 A.

Assim,

$$I_a = 149 + 1041e^{-t/\tau} \text{ A}$$

Observe que é improvável que a fonte do motor CC possa fornecer essa corrente inicial elevada (oito vezes a corrente de armadura nominal de plena carga) e, além disso, a corrente elevada e o respectivo conjugado elevado poderiam potencialmente causar danos ao comutador, às escovas e ao enrolamento de armadura do motor CC. Conseqüentemente, em termos práticos, um controlador real iria, sem dúvida, limitar a taxa de variação da tensão de armadura para evitar tais mudanças bruscas de tensão, com o resultado de que as mudanças de velocidade não ocorreriam tão rapidamente quanto foi calculado aqui.

- c. A equação dinâmica que determina a velocidade do motor permanece a mesma da parte (b) assim como a equação do conjugado de carga. Entretanto, neste caso, como o motor está sendo operado a partir de um controlador por corrente, o conjugado eletromagnético permanecerá constante em  $T_{mec} = T_f = 285$  N · m depois que a corrente for chaveada de seu valor inicial de 119 A para seu valor final de 149 A.

Assim,

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = T_{mec} - T_{carga} = T_f - \left( \frac{T_f}{\omega_f} \right) \omega_m$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_m}{dt} + \left( \frac{T_{pc}}{J\omega_f} \right) \omega_m - \frac{T_f}{J} \\ = \frac{d\omega_m}{dt} + 1,18\omega_m - 310 = 0 \end{aligned}$$

Nesse caso, a velocidade crescerá exponencialmente até  $\omega_m = \omega_f = 262$  rad/s conforme

$$\begin{aligned} \omega_m &= \omega_f + (\omega_i - \omega_f)e^{-t/\tau} \\ &= 262 - 53e^{-t/\tau} \text{ rad/s} \end{aligned}$$

em que agora a constante de tempo  $\tau$  é  $= 1/1,18 = 845$  msec.

Evidentemente, usando o controlador por corrente, a variação de velocidade do motor é muito mais lenta. No entanto, em nenhum momento esse transitório, seja de corrente do motor seja de conjugado do motor, excede o seu valor nominal. Além disso, se uma resposta mais rápida fosse desejada, a corrente de armadura (e conseqüentemente o conjugado do motor) poderia ser ajustada para um valor fixo mais elevado que o valor nominal (por exemplo, duas ou três vezes o nominal, comparado com o fator de oito encontrado na parte (b)). Desse modo, a possibilidade de causar danos ao motor fica limitada.

### PROBLEMA PRÁTICO 11.6

Considere que a combinação de motor CC e carga do Exemplo 11.6 esteja operando com controle por corrente (conjugado) em regime permanente a uma velocidade de 2000 rpm e uma corrente de armadura de 119 A. Se a corrente de armadura for subitamente chaveada para 250 A, calcule o tempo requerido para que o motor atinja a velocidade de 2500 rpm.

■ Solução

0,22 s

## 11.2 CONTROLE DE MOTORES SÍNCRONOS

### 11.2.1 Controle de Velocidade

Como foi discutido nos Capítulos 4 e 5, os motores síncronos são essencialmente máquinas de velocidade constante, em que a velocidade é determinada pela frequência das correntes de armadura como descrito pelas Equações 4.40 e 4.41. Especificamente, a Equação 4.40 mostra que a velocidade angular síncrona é proporcional à frequência elétrica da tensão de armadura aplicada e inversamente proporcional aos número de pólos da máquina, ou seja,

$$\omega_s = \left( \frac{2}{\text{pólos}} \right) \omega_e \quad (11.12)$$

em que

$\omega_s$  = velocidade angular espacial síncrona da onda de FMM no entreferro [rad/s]

$\omega_e = 2\pi f_e$  = frequência angular da excitação elétrica aplicada [rad/s]

$f_e$  = frequência elétrica aplicada [Hz]

Claramente, o meio mais simples de controlar um motor síncrono é variando a velocidade por meio do controle de frequência da tensão de armadura aplicada. Isto é obtido acionando o motor com um inversor polifásico de fonte de tensão, como o inversor trifásico mostrado na Fig. 11.11. Como foi discutido na Seção 10.3.3, esse inversor tanto pode ser usado para produzir formas de onda quase quadrada de tensão CA com amplitude  $V_{CC}$ , como as chaves podem ser comandadas para produzir uma forma de onda de tensão modulada por largura de pulso de amplitude variável. A tensão  $V_{CC}$  de link CC pode ela própria ser variada, por exemplo, usando um retificador de fase controlada.

A frequência das formas de onda do inversor pode naturalmente ser variada controlando a frequência de chaveamento das chaves do inversor. Em aplicações de máquinas CA, jun-

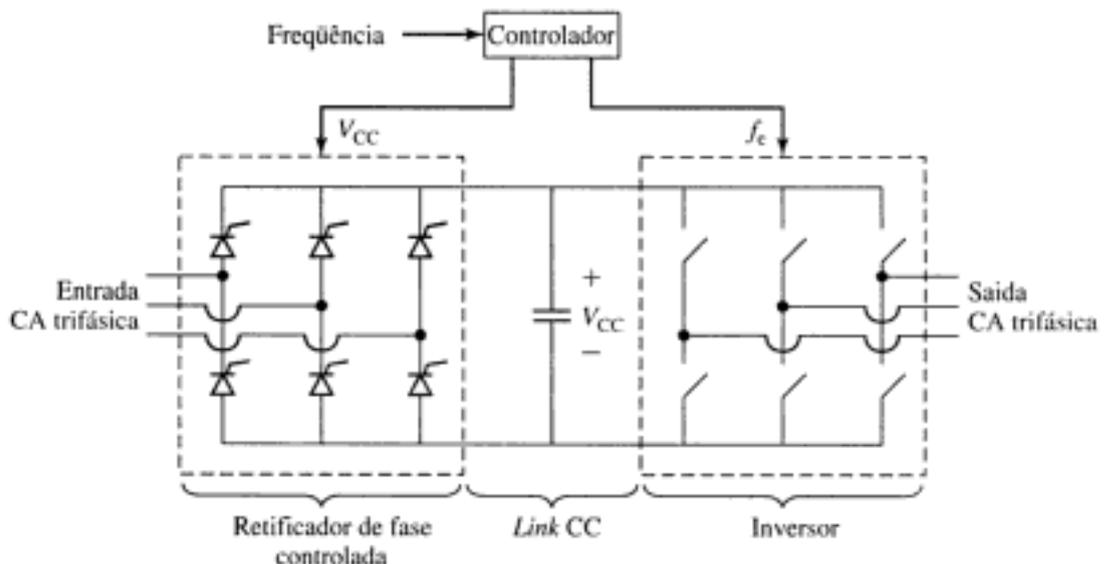


FIGURA 11.11 Inversor trifásico de fonte de tensão.

tamente com esse controle de frequência, deve haver controle da amplitude da tensão aplicada, como veremos a seguir.

Da lei de Faraday, sabemos que a componente de entreferro da tensão de armadura em uma máquina CA é proporcional à densidade de fluxo de pico da máquina e à frequência elétrica. Assim, se desprezarmos a queda de tensão na resistência de armadura e na reatância de dispersão, poderemos escrever

$$V_a = \left( \frac{f_e}{f_{\text{nominal}}} \right) \left( \frac{B_{\text{pico}}}{B_{\text{nominal}}} \right) V_{\text{nominal}} \quad (11.13)$$

em que  $V_a$  é a amplitude da tensão de armadura,  $f_e$  é a frequência de operação e  $B_{\text{pico}}$  é a densidade de fluxo de pico no entreferro.  $V_{\text{nominal}}$ ,  $f_{\text{nominal}}$  e  $B_{\text{nominal}}$  são os respectivos valores nominais de operação.

Considere uma situação em que a frequência da tensão de armadura é variada enquanto a sua amplitude é mantida em seu valor nominal ( $V_a = V_{\text{nominal}}$ ). Nessas condições, da Equação 11.13, podemos ver que

$$B_{\text{pico}} = \left( \frac{f_{\text{nominal}}}{f_e} \right) B_{\text{nominal}} \quad (11.14)$$

A Equação 11.14 demonstra claramente o problema do funcionamento com tensão constante e frequência variável. Especificamente, para uma dada tensão de armadura, a densidade de fluxo da máquina é inversamente proporcional à frequência e, desse modo, quando a frequência diminui, a densidade de fluxo aumenta. Portanto, em uma máquina típica que opera saturada na tensão e frequência nominais, qualquer redução de frequência aumentará ainda mais a densidade de fluxo da máquina. De fato, uma queda significativa de frequência aumentará a densidade de fluxo até o ponto em que a máquina pode ser danificada devido ao aumento das perdas no núcleo e das correntes de máquina necessárias para manter a densidade de fluxo mais elevado.

Como resultado, para frequências inferiores ou iguais à nominal, é típico operar a máquina com densidade de fluxo constante. Da Equação 11.13, com  $B_{\text{pico}} = B_{\text{nominal}}$ , tem-se

$$V_a = \left( \frac{f_e}{f_{\text{nominal}}} \right) V_{\text{nominal}} \quad (11.15)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{V_a}{f_e} = \frac{V_{\text{nominal}}}{f_{\text{nominal}}} \quad (11.16)$$

Da Equação 11.16, vemos que a operação com fluxo constante pode ser obtida mantendo uma relação constante entre a tensão de armadura e a frequência. Isso é conhecido como operação com *volts/hertz constante* (V/Hz constante). Tipicamente, essa relação é mantida a partir da frequência nominal baixando até a frequência em que a queda de tensão na resistência de armadura torna-se uma componente significativa da tensão aplicada.

De modo semelhante, vemos da Equação 11.13 que, se a máquina for operada na tensão nominal e com frequências superiores à nominal, a densidade de fluxo no entreferro cairá abaixo de seu valor nominal. Assim, para manter a densidade de fluxo em seu valor nominal, seria necessário aumentar a tensão de terminal para frequências acima da frequência nominal. Para evitar danos ao isolamento, é comum manter a tensão de terminal da máquina em seu valor nominal para frequências acima da nominal.

A corrente de terminal da máquina é limitada tipicamente por restrições térmicas. Assim, desde que a refrigeração da máquina não seja afetada pela velocidade do motor, a corrente de

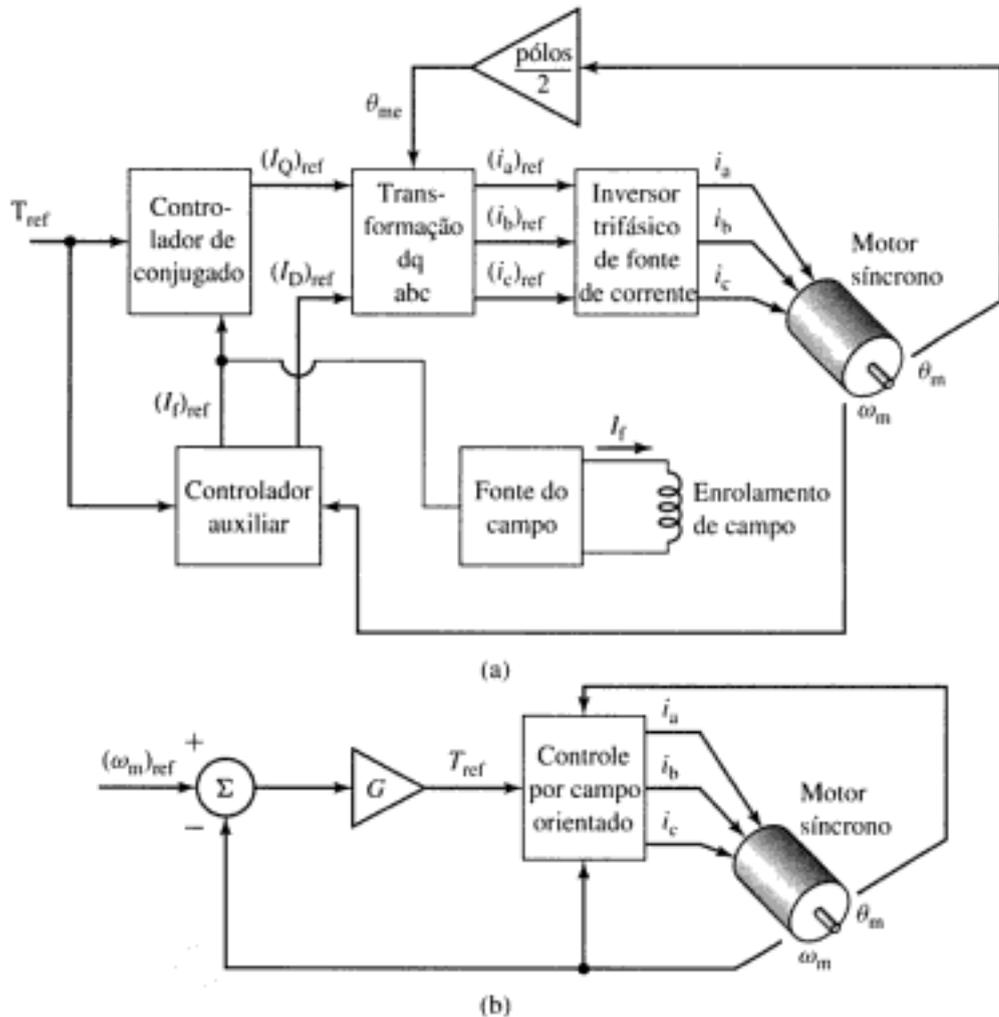
controlador típico implementará outras restrições relacionadas com o fluxo concatenado e com a corrente de terminal, usando as relações básicas encontradas nas Equações 11.38 e 11.39.

A Fig. 11.13a mostra um típico sistema de controle de conjugado por campo orientado na forma de diagrama de blocos. O bloco de controle de conjugado tem duas entradas,  $T_{ref}$ , o valor de referência ou *set point* do conjugado e  $(i_F)_{ref}$ , o valor de referência ou *set point* da corrente de campo, que também é enviado à fonte de alimentação que está fornecendo a corrente  $i_F$  para o enrolamento de campo. O valor de  $(i_F)_{ref}$  é determinado por um controlador auxiliar que determina também o valor de referência de  $(i_D)_{ref}$  da corrente de eixo direto, com base nos valores desejados de corrente e tensão de armadura. O controlador de conjugado calcula a corrente desejada de eixo em quadratura, usando a Equação 11.32 com base em  $T_{ref}$  e  $(i_F)_{ref}$ , obtendo

$$(i_Q)_{ref} = \frac{2}{3} \left( \frac{2}{\text{pólos}} \right) \frac{T_{ref}}{L_{af}(i_F)_{ref}} \quad (11.40)$$

Observe que um sensor de posição é necessário para determinar a posição angular do rotor de modo a implementar a transformação dq0-abc.

Em uma aplicação típica, o objetivo último do controle não é controlar o conjugado do motor, mas controlar a velocidade ou a posição. A Fig. 11.13b mostra como o sistema de con-



**FIGURA 11.13** (a) Diagrama de blocos de um sistema de controle de conjugado por campo orientado para um motor síncrono. (b) Diagrama de blocos de uma malha de controle de velocidade para motor síncrono, construída em torno de um sistema de controle de conjugado por campo orientado.

Portanto, a corrente de terminal da máquina é igual a  $I_a = 118/118 = 1,0$  por unidade.

- b. A tensão de terminal do motor pode ser encontrada muito facilmente a partir da relação fasorial eficaz

$$\hat{V}_a = jX_s \hat{I}_a + \hat{E}_{af}$$

Na parte (a), encontramos que  $i_a = -\sqrt{2} (118) \text{ sen}(\omega_e t)$  e, assim,

$$\hat{I}_a = j118 \text{ A}$$

Podemos obter  $E_{af}$  da Equação 11.34 como

$$E_{af} = \frac{\omega_e L_{af} i_F}{\sqrt{2}} = \frac{120\pi \times 0,168 \times 2,84}{\sqrt{2}} = 127 \text{ V, tensão de fase}$$

e, portanto, como  $(\hat{E}_{af})_{ef}$  localiza-se sobre o eixo em quadratura, assim como  $\hat{I}_a$ , tem-se

$$\hat{E}_{af} = j127 \text{ V}$$

A impedância de base da máquina é igual a

$$Z_{base} = \frac{V_{base}^2}{P_{base}} = \frac{220^2}{45 \times 10^3} = 1,076 \Omega$$

e a reatância síncrona de 0,836 por unidade é igual a  $X_s = 0,836 \times 1,076 = 0,899 \Omega$ .

Portanto, a tensão de fase eficaz de terminal é

$$\begin{aligned} \hat{V}_a &= jX_s \hat{I}_a + \hat{E}_{af} = j0,899(j118) + j127 \\ &= -106 + j127 = 165 \angle 129,9^\circ \text{ V, tensão de fase} \end{aligned}$$

ou  $V_a = 287 \text{ V}$  eficazes, tensão de linha, igual a 1,30 por unidade.

Observe que a tensão de terminal nessas condições de operação excede consideravelmente a tensão nominal da máquina, e conseqüentemente esse modo de operação não seria aceitável. Como discutiremos agora, um algoritmo de controle que tira vantagem da capacidade global de variar  $i_F$ ,  $i_Q$  e  $i_D$  pode produzir o conjugado nominal sem exceder a tensão nominal de terminal.

### PROBLEMA PRÁTICO 11.8

Calcule a tensão e a corrente de terminal por unidade do Exemplo 11.8, se o controlador por campo orientado mantiver  $i_D = 0$  enquanto reduz  $i_F$  a 2,6 A.

#### ■ Solução

$V_a = 1,29$  por unidade e  $I_a = 1,09$  por unidade.

Como discutimos, na prática, um controle por campo orientado deve determinar valores para todas as três correntes  $i_F$ ,  $i_D$  e  $i_Q$ . No Exemplo 11.8, dois desses valores foram escolhidos de forma relativamente arbitrária ( $i_F = 2,84$  e  $i_D = 0$ ) e o resultado foi um controle que obteve o conjugado desejado mas com uma tensão de terminal com 30 por cento acima da tensão nominal do motor. Em um sistema prático, restrições adicionais são necessárias para chegar a um algoritmo de controle aceitável.

Um desses algoritmos poderia exigir que o motor operasse com fluxo nominal e fator de potência unitário de terminal. Tal algoritmo pode ser desenvolvido com base no diagrama fasorial da Fig. 11.14 e pode ser implementado através dos seguintes passos:



**EXEMPLO 11.9**

O motor síncrono do Exemplo 11.8 de 45 kVA e 220 V deve operar novamente com conjugado e velocidade nominais e um sistema de controle por campo orientado. Calcule a corrente de campo do motor e a tensão e corrente de terminal por unidade, se o algoritmo de fator de potência unitário descrito acima for implementado.

**■ Solução**

Seguiremos os passos individuais esboçados anteriormente.

Passo 1. Como o motor está operando na velocidade nominal, a tensão de terminal desejada será a tensão de fase nominal da máquina, ou seja,

$$V_s = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127 \text{ V} = 1,0 \text{ por unidade}$$

Passo 2. Fazendo  $T_{ref} = 358 \text{ N} \cdot \text{m}$  e  $\omega_m = (2/\text{pólos})\omega_c = 40\pi$ , a corrente eficaz de armadura pode ser calculada da Equação 11.42 como

$$I_a = \frac{T_{ref} \omega_m}{3(V_s)} = \frac{358 \times (40\pi)}{3 \times 127} = 118 \text{ A}$$

Como foi calculado no Exemplo 11.8,  $I_{base} = 118 \text{ A}$  e portanto  $I_a = 1,0$  por unidade. Isso está de acordo com o esperado, porque desejamos que o motor opere com conjugado, velocidade e tensão de terminal nominais, e um fator de potência unitário.

Passo 3. A seguir calcule  $\delta$  da Equação 11.43. Esse cálculo requer que determinemos a indutância síncrona  $L_s$ , ou seja,

$$L_s = \frac{X_s}{(\omega_c)_{nominal}} = \frac{0,899}{120\pi} = 2,38 \text{ mH}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \delta &= -\arctg\left(\frac{\omega_c L_s I_a}{V_s}\right) \\ &= -\arctg\left(\frac{120\pi \cdot 2,38 \times 10^{-3} \times 118}{127}\right) = -0,695 \text{ rad} = -39,8^\circ \end{aligned}$$

Passo 4. Agora, calculamos os valores desejados de  $i_Q$  e  $i_D$  usando as Equações 11.44 e 11.45

$$(i_Q)_{ref} = \sqrt{2} I_a \cos \delta = 128 \text{ A}$$

e

$$(i_D)_{ref} = \sqrt{2} I_a \sin \delta = -107 \text{ A}$$

Passo 5. O valor de  $(i_F)_{ref}$  é obtido da Equação 11.46,

$$(i_F)_{ref} = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{\text{pólos}}\right) \frac{T_{ref}}{L_{st}(i_Q)_{ref}} = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{6}\right) \frac{358}{0,168 \times 128} = 3,70 \text{ A}$$

**PROBLEMA PRÁTICO 11.9**

Repita o Exemplo 11.9 para quando o motor estiver operando com metade do conjugado nominal e metade da velocidade nominal. Calcule (a) a corrente de campo desejada do motor, (b) a tensão de fase de terminal (em volts), e (c) a corrente de armadura (em ampères).

### ■ Solução

- $(i_F)_{ref} = 3,70 \text{ A}$
- $V_a = 63,5 \text{ V}$ , tensão de fase
- $I_a = 118 \text{ A}$

A discussão desta seção centrou-se nas máquinas síncronas com enrolamento de campo e a respectiva capacidade para controlar a excitação do campo. O conceito básico, naturalmente, também se aplica às máquinas síncronas com imãs permanentes no rotor. No entanto, no caso de máquinas síncronas de imã permanente, a excitação efetiva de campo é fixa e, como resultado, há um grau a menos de liberdade para o algoritmo de controle por campo orientado.

Em uma máquina síncrona de imã permanente, como a corrente de campo efetiva equivalente é fixada pelo imã permanente, a corrente de eixo em quadratura é determinada diretamente pelo conjugado desejado. Considere um motor trifásico de imã permanente cuja tensão de fase eficaz nominal de circuito aberto é  $(E_{af})_{nominal}$ , na frequência elétrica  $(\omega_e)_{nominal}$ . Da Equação 11.34, vemos que o produto equivalente  $L_d I_f$  desse motor, que será referido pelo símbolo  $\Lambda_{IP}$ , é

$$\Lambda_{IP} = \frac{\sqrt{2}(E_{af})_{nominal}}{(\omega_e)_{nominal}} \quad (11.47)$$

Assim, a relação fluxo  $\times$  corrente de eixo direto para esse motor, correspondente à Equação 11.24, torna-se

$$\lambda_D = L_d i_D + \Lambda_{IP} \quad (11.48)$$

e a expressão do conjugado da Equação 11.32 torna-se

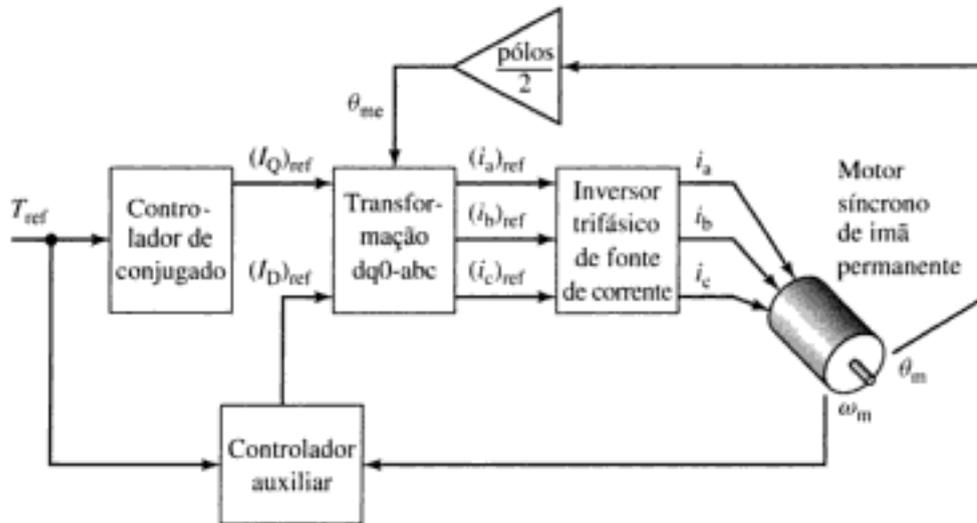
$$T_{mec} = \frac{3}{2} \left( \frac{\text{pólos}}{2} \right) \Lambda_{IP} i_Q \quad (11.49)$$

Da Equação 11.49, vemos que, para uma máquina síncrona de imã permanente submetida ao controle por campo orientado, a corrente de eixo em quadratura é determinada de forma única pelo conjugado desejado. A Equação 11.40 torna-se então

$$(i_Q)_{ref} = \frac{2}{3} \left( \frac{2}{\text{pólos}} \right) \frac{T_{ref}}{\Lambda_{IP}} \quad (11.50)$$

Uma vez que  $(i_Q)_{ref}$  tenha sido especificado, a única opção de controle que ainda resta é determinar o valor desejado da corrente de eixo direto,  $(i_D)_{ref}$ . Uma possibilidade é simplesmente tornar  $(i_D)_{ref} = 0$ . Isso resultará claramente na menor corrente de armadura possível para um dado conjugado. No entanto, como vimos no Exemplo 11.8, é muito provável que isso resulte em tensões de terminal com valores acima da tensão nominal da máquina. Como resultado, é comum fornecer corrente de eixo direto de modo a reduzir o fluxo concatenado de eixo direto da Equação 11.48. Isso, por sua vez, resultará em uma tensão de terminal reduzida. Essa técnica é comumente referida como *enfraquecimento de fluxo* e é obtida às custas de um aumento de corrente de armadura.<sup>4</sup> Na prática, o ponto de operação escolhido é determinado por um compromisso entre uma redução de tensão de armadura e um aumento de corrente de armadura. A Fig. 11.15 mostra o diagrama de blocos de um sistema de controle por campo orientado para ser usado com um motor de imã permanente.

<sup>4</sup>Veja T. M. Jahns, "Flux-Weakening Regime Operation of an Interior Permanent Magnet Synchronous Motor Drive," *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol. 23, pp. 681-689.



**FIGURA 11.15** Diagrama de blocos de um sistema de controle de conjugado por campo orientado para um motor síncrono de ímã permanente.

### EXEMPLO 11.10

Um motor síncrono trifásico de 25 kW, 4000 rpm, 220 V, dois pólos e de ímã permanente produz a tensão nominal em circuito aberto com uma velocidade de rotação de 3200 rpm e tem uma indutância síncrona de 1,75 mH. Assuma que o motor deve operar com controle por campo orientado a 2800 rpm e 65 por cento do conjugado nominal.

- Calcule a corrente de eixo em quadratura requerida.
- Se o controlador for projetado para minimizar a corrente de armadura tornando  $i_D = 0$ , calcule o fluxo concatenado de armadura resultante por unidade.
- Se o controlador for projetado para manter o fluxo concatenado de armadura em seu valor nominal, calcule o valor correspondente de  $i_D$  e os respectivos valores por unidade e eficaz da corrente de armadura.

#### ■ Solução

- A velocidade nominal desta máquina é

$$(\omega_m)_{\text{nominal}} = 4000 \left( \frac{\pi}{30} \right) = 419 \text{ rad/s}$$

e o conjugado nominal é

$$T_{\text{nominal}} = \frac{P_{\text{nominal}}}{(\omega_m)_{\text{nominal}}} = \frac{25 \times 10^3}{419} = 59,7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Este motor atinge sua tensão eficaz nominal em circuito aberto de  $220/\sqrt{3} = 127$  V a uma velocidade de  $n = 3200$  rpm. A respectiva frequência elétrica é

$$\omega_e = \left( \frac{\text{pólos}}{2} \right) \left( \frac{\pi}{30} \right) n = \left( \frac{\pi}{30} \right) 3200 = 335 \text{ rad/s}$$

Da Equação 11.47,

$$\Lambda_{\text{IP}} = \frac{\sqrt{2}(E_{af})_{\text{nominal}}}{\omega_e} = \frac{\sqrt{2} 127}{335} = 0,536 \text{ Wb}$$

Assim, fazendo  $T_{ref} = 0,65 T_{nominal} = 38,8 \text{ N} \cdot \text{m}$ , da Equação 11.50, encontramos que

$$(i_Q)_{ref} = \frac{2}{3} \left( \frac{2}{\text{pólos}} \right) \frac{T_{ref}}{\Lambda_{IP}} = \frac{2}{3} \left( \frac{38,8}{0,536} \right) = 48,3 \text{ A}$$

b. Com  $(i_D)_{ref} = 0$ ,

$$\lambda_D = \Lambda_{IP} = 0,536 \text{ Wb}$$

c

$$\lambda_Q = L_s i_Q = (1,75 \times 10^{-3}) 48,3 = 0,0845 \text{ Wb}$$

Portanto, o fluxo de fase eficaz da armadura é igual a

$$\lambda_a = \sqrt{\frac{\lambda_D^2 + \lambda_Q^2}{2}} = \sqrt{\frac{0,536^2 + 0,0845^2}{2}} = 0,384 \text{ Wb}$$

O fluxo de fase eficaz de base da armadura pode ser determinado da tensão de fase de base  $(V_a)_{base} = 127 \text{ V}$  e da frequência de base  $(\omega_c)_{base} = 419 \text{ rad/s}$  como

$$(\lambda_a)_{base} = \frac{(V_a)_{base}}{(\omega_c)_{base}} = 0,303 \text{ Wb}$$

Assim, o fluxo de armadura por unidade é igual a  $0,384/0,303 = 1,27$  por unidade. Desse cálculo, vemos que o motor está significativamente saturado nessa condição de funcionamento. De fato, dificilmente o cálculo será exato porque esse grau de saturação muito provavelmente dará origem a uma redução na indutância síncrona assim como no acoplamento magnético entre o rotor e o estator.

c. Para manter o fluxo concatenado nominal de armadura, o controle terá de produzir uma componente de eixo direto da corrente de armadura para reduzir o fluxo concatenado de eixo direto de tal modo que o fluxo concatenado total de armadura seja igual ao valor nominal  $(\lambda_a)_{base}$ . Especificamente, devemos ter

$$\lambda_D = \sqrt{2(\lambda_a)_{base}^2 - \lambda_Q^2} = \sqrt{2 \times 0,303^2 - 0,0844^2} = 0,420 \text{ Wb}$$

Agora podemos encontrar  $(i_D)_{ref}$  usando a Equação 11.48 (tornando  $L_d = L_s$ ),

$$(i_D)_{ref} = \frac{\lambda_D - \Lambda_{IP}}{L_s} = \frac{0,420 - 0,536}{1,75 \times 10^{-3}} = -66,3 \text{ A}$$

A respectiva corrente eficaz de armadura é

$$I_a = \sqrt{\frac{(i_D)_{ref}^2 + (i_Q)_{ref}^2}{2}} = \sqrt{\frac{66,3^2 + 48,3^2}{2}} = 58,0 \text{ A}$$

A corrente eficaz de armadura de base para essa máquina é igual a

$$I_{base} = \frac{P_{base}}{\sqrt{3} V_{base}} = \frac{25 \times 10^3}{\sqrt{3} 220} = 65,6 \text{ A}$$

e conseqüentemente a corrente de armadura por unidade é igual a  $58,0/65,6 = 0,88$  por unidade.

Comparando os resultados das partes (b) e (c), vemos como o enfraquecimento de fluxo, devido à introdução de corrente de eixo direto, pode ser usado para controlar a tensão de terminal de um motor síncrono de imã permanente que está submetido ao controle por campo orientado.

**PROBLEMA PRÁTICO 11.10**

Considere novamente o motor do Exemplo 11.10. Repita os cálculos das partes (b) e (c) do Exemplo 11.10 para o caso em que o motor está operando com 80 por cento do conjugado nominal a uma velocidade de 2500 rpm.

**■ Solução**

Para a parte (b),  $\lambda_a = 1,27$  por unidade.

Para a parte (c),  $I_a = 0,98$  por unidade.

**11.3 CONTROLE DE MOTORES DE INDUÇÃO****11.3.1 Controle de Velocidade**

Os motores de indução alimentados por fontes de frequência constante atendem admiravelmente às exigências de acionamento de velocidade altamente constante. Muitas aplicações de motores, entretanto, exigem velocidades diversas ou mesmo uma faixa continuamente ajustável de velocidades. Desde os primeiros tempos dos sistemas de potência CA, os engenheiros têm estado interessados no desenvolvimento de motores CA de velocidade ajustável.

A velocidade síncrona de um motor de indução pode ser alterada (a) mudando o número de pólos ou (b) variando a frequência de linha. Pode-se mudar o escorregamento de funcionamento (c) variando a tensão de linha, (d) variando a resistência do rotor, ou (e) aplicando tensões de frequência adequada aos circuitos do rotor. As características notáveis dos métodos de controle de velocidade baseados nessas cinco possibilidades serão discutidas nas cinco seções seguintes.

**Motores de Pólos Variáveis** Nos motores de pólos variáveis, o enrolamento de estator é projetado de modo que, por alterações simples nas ligações das bobinas, o número de pólos pode ser mudado na razão de 2 para 1. Pode-se selecionar uma entre duas velocidades síncronas. O rotor é sempre do tipo gaiola de esquilo que reage produzindo um campo de rotor com o mesmo número de pólos do campo indutor do estator. Com dois conjuntos independentes de enrolamentos de estator, cada um permitindo alterações de pólos, quatro velocidades síncronas podem ser obtidas em um motor gaiola de esquilo, por exemplo, 600, 900, 1200 e 1800 rpm para um funcionamento em 60 Hz.

Os princípios básicos dos enrolamentos de pólos variáveis estão mostrados na Fig. 11.16, na qual  $aa$  e  $a'a'$  são duas bobinas que correspondem a uma parte do enrolamento de estator da fase  $a$ . Um enrolamento real consistiria, naturalmente, em diversas bobinas em cada grupo. Os enrolamentos para as outras fases de estator (não mostrados na figura) seriam dispostos de maneira similar. Na Fig. 11.16a, as bobinas são ligadas de modo que produzam um campo de quatro pólos; na Fig. 11.16b, a corrente na bobina  $a'a'$  foi invertida por meio de um controlador. O resultado é um campo de dois pólos.

A Fig. 11.17 mostra as quatro configurações possíveis dessas bobinas: elas podem ser conectadas em série ou em paralelo, com suas correntes tanto no mesmo sentido (operação a quatro pólos) como em sentidos opostos (operação a dois pólos). Além disso, as fases da máquina podem ser ligadas em Y ou em  $\Delta$ , resultando oito combinações possíveis.

Observe que, para uma dada tensão de fase, as diferentes conexões resultarão em diversos níveis de densidade de fluxo no entreferro. Por exemplo, para uma dada configuração de bobinas, uma mudança de conexão de  $\Delta$  para Y reduz a tensão de bobina (e conseqüentemente a densidade de fluxo de entreferro), dividindo-a por  $\sqrt{3}$ . De modo similar, mudando uma

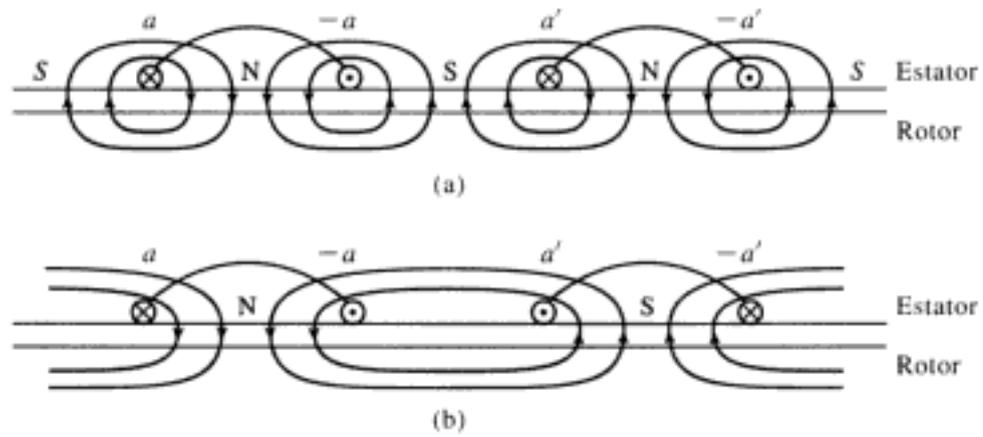


FIGURA 11.16 Princípios do enrolamento de pólos variáveis.

conexão de duas bobinas em série para duas em paralelo irá duplicar a tensão em cada bobina e, portanto, irá duplicar a magnitude da densidade de fluxo no entreferro. Naturalmente, essas mudanças de densidade de fluxo podem ser compensadas mudando a tensão de enrolamento aplicada. De qualquer forma, elas devem ser levadas em consideração, juntamente com as respectivas mudanças de conjugado do motor, quando as configurações a serem usadas em uma aplicação específica são analisadas.

**Controle da Frequência de Armadura** A velocidade síncrona de um motor de indução pode ser controlada variando a frequência da tensão de armadura aplicada. Esse método de controle de velocidade é idêntico ao discutido na Seção 11.2.1 para máquinas síncronas. De fato, as mesmas configurações de inversor usadas com máquinas síncronas, como o inversor trifásico de fonte de tensão da Fig. 11.11, podem ser usadas para acionar motores de indução. Como ocorre com qualquer motor CA, para se manter a densidade de fluxo aproximadamente constante, a tensão de armadura também deveria ser variada diretamente com a frequência (volts por hertz constante).

A curva de conjugado  $\times$  velocidade de um motor de indução em uma dada frequência pode ser calculada usando os métodos do Capítulo 6, dentro da exatidão dos parâmetros do motor naquela frequência. Considere a expressão do conjugado da Equação 6.33 que está repetida aqui.

$$T_{mec} = \frac{1}{\omega_s} \left[ \frac{n_{fase} V_{1,eq}^2 (R_2/s)}{(R_{1,eq} + (R_2/s))^2 + (X_{1,eq} + X_2)^2} \right] \tag{11.51}$$

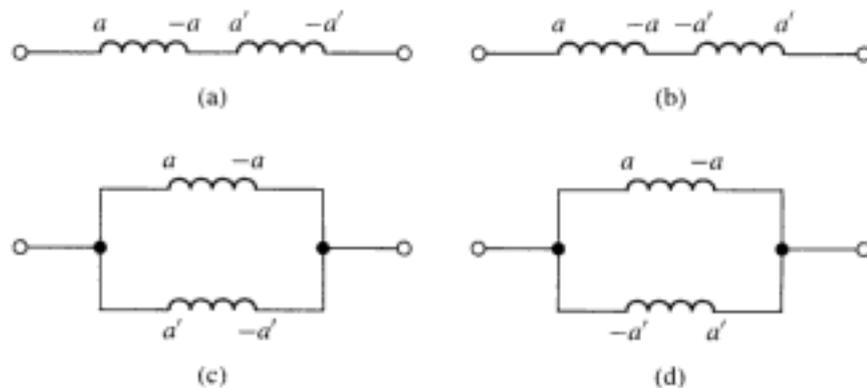


FIGURA 11.17 Quatro arranjos possíveis de bobinas da fase a de um motor de indução de pólos variáveis: (a) conexão em série, quatro pólos; (b) conexão em série, dois pólos; (c) conexão em paralelo, quatro pólos; (d) conexão em paralelo, dois pólos.

em que  $\omega_s = (2/\text{pólos})\omega_e$  e  $\omega_e$  é a frequência de excitação elétrica do motor em rad/s,

$$\hat{V}_{1,\text{eq}} = \hat{V}_1 \left( \frac{jX_m}{R_1 + j(X_1 + X_m)} \right) \quad (11.52)$$

e

$$R_{1,\text{eq}} + jX_{1,\text{eq}} = \frac{jX_m(R_1 + jX_1)}{R_1 + j(X_1 + X_m)} \quad (11.53)$$

Para investigar o efeito da mudança de frequência, vamos assumir que  $R_1$  é desprezível. Nesse caso,

$$\hat{V}_{1,\text{eq}} = \hat{V}_1 \left( \frac{X_m}{X_1 + X_m} \right) \quad (11.54)$$

$$R_{1,\text{eq}} = 0 \quad (11.55)$$

e

$$X_{1,\text{eq}} = \frac{X_m X_1}{X_1 + X_m} \quad (11.56)$$

Façamos com que o subscrito 0 indique valores de frequência nominal para cada um dos parâmetros do motor de indução. Quando a frequência de excitação elétrica é variada, podemos escrever

$$(X_{1,\text{eq}} + X_2) = \left( \frac{\omega_e}{\omega_{e0}} \right) (X_{1,\text{eq}} + X_2)_0 \quad (11.57)$$

Se for usado o controle por volts/hertz constante, também podemos escrever a tensão da fonte equivalente como

$$\hat{V}_1 = \left( \frac{\omega_e}{\omega_{e0}} \right) (\hat{V}_1)_0 \quad (11.58)$$

e portanto, como  $\hat{V}_{1,\text{eq}}$  é igual a  $\hat{V}_1$  multiplicada por uma razão de reatâncias, que permanece constante quando a frequência é variada, temos

$$\hat{V}_{1,\text{eq}} = \left( \frac{\omega_e}{\omega_{e0}} \right) (\hat{V}_{1,\text{eq}})_0 \quad (11.59)$$

Finalmente, podemos escrever o escorregamento do motor como

$$s = \frac{\omega_s - \omega_m}{\omega_s} = \frac{\text{pólos}}{2} \left( \frac{\Delta\omega_m}{\omega_e} \right) \quad (11.60)$$

em que  $\Delta\omega_m = \omega_s - \omega_m$  é a diferença entre as velocidades angulares síncrona e mecânica do motor.

A substituição das Equações 11.57 a 11.60 na Equação 11.51 dá

$$T_{\text{mec}} = \frac{n_{\text{fase}}[(V_{1,\text{eq}})_0]^2 (R_2 / \Delta\omega)}{\left[ \left( \frac{2\omega_{e0}}{\text{pólos}} \right) (R_2 / \Delta\omega) \right]^2 + [(X_{1,\text{eq}} + X_2)_0]^2} \quad (11.61)$$

A Equação 11.61 mostra a tendência geral com a qual vemos que a dependência de frequência da característica de conjugado  $\times$  velocidade de um motor de indução aparece apenas no termo  $R_2 / \Delta\omega$ . Assim, supondo que  $R_1$  seja desprezível, quando a frequência elétrica de alimentação de um motor de indução é variada, a forma da curva de velocidade  $\times$  conjugado em função de  $\Delta\omega$  (a diferença entre a velocidade síncrona e a do motor) permanecerá invariável.

Como resultado, a característica de conjugado  $\times$  velocidade irá simplesmente se deslocar sobre o eixo de velocidade quando  $\omega_c(f_c)$  é variada.

Um conjunto dessas curvas está mostrado na Fig. 11.18a. Observe que, quando a frequência elétrica (e portanto a velocidade síncrona) diminui, um dado valor de  $\Delta\omega$  corresponde a um escorregamento maior. Assim, por exemplo, se o conjugado de pico de um motor de quatro pólos acionado a 60 Hz ocorrer em 1638 rpm, correspondendo a um escorregamento de 9 por cento, então quando acionado a 30 Hz o conjugado de pico ocorrerá a 738 rpm, correspondendo a um escorregamento de 18 por cento.

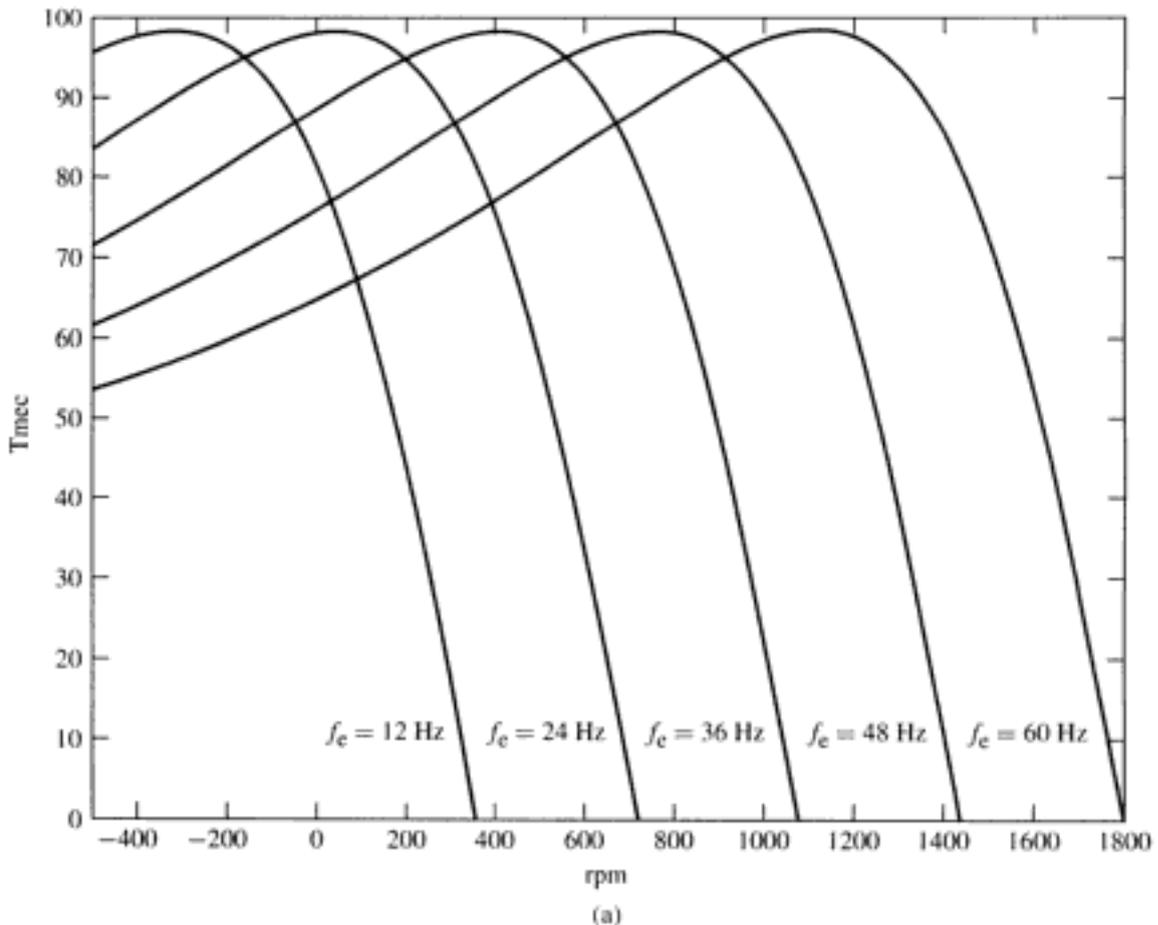
Na prática, os efeitos de  $R_1$  podem não ser inteiramente desprezíveis, especialmente com valores elevados de escorregamento. Se esse for o caso, a forma das curvas de velocidade  $\times$  conjugado irá variar um pouco com a frequência elétrica aplicada. A Fig. 11.8b mostra uma família de curvas típica para esse caso.

### EXEMPLO 11.11



O motor de indução trifásico de 230 V, 60 Hz, 12 kW e quatro pólos do Exemplo 6.4 (com  $R_2 = 0,2 \Omega$ ) deve ser operado a partir de um sistema de acionamento de frequência variável e volts/hertz constante cuja tensão de terminal é 230 V a 60 Hz. Pode-se assumir que o motor está acionando uma carga cuja potência varia conforme

$$P_{\text{carga}} = 10,5 \left( \frac{n}{1800} \right)^3 \text{ kW}$$



**FIGURA 11.18** Uma família de curvas de velocidade  $\times$  conjugado de um motor de indução típico, para um motor de quatro pólos e diversos valores de frequência elétrica de alimentação. (a)  $R_1$  suficientemente pequena de modo que seus efeitos são desprezíveis. (b)  $R_1$  não desprezível.

em que  $n$  é velocidade de carga em rpm. Pode-se assumir que as perdas rotacionais do motor são desprezíveis.

Escreva um *script* de MATLAB para encontrar a tensão de linha de terminal, a velocidade do motor em rpm, o escorregamento e a carga do motor em kW para (a) uma frequência de fonte de 60 Hz e (b) uma frequência de fonte de 40 Hz.

### ■ Solução

Quando a frequência elétrica  $f_e$  é variada, as reatâncias do motor dadas no Exemplo 6.4 devem variar conforme

$$X = X_0 \left( \frac{f_e}{60} \right)$$

em que  $X_0$  é o valor da reatância a 60 Hz. De modo semelhante, a tensão de fase de armadura deve variar conforme

$$V_i = \frac{220}{\sqrt{3}} \left( \frac{f_e}{60} \right) = 127 \left( \frac{f_e}{60} \right) \text{ V}$$

Da Equação 4.40, a velocidade angular síncrona do motor é igual a

$$\omega_s = \left( \frac{4\pi}{\text{pólos}} \right) f_e = \pi f_e \text{ rad/s}$$

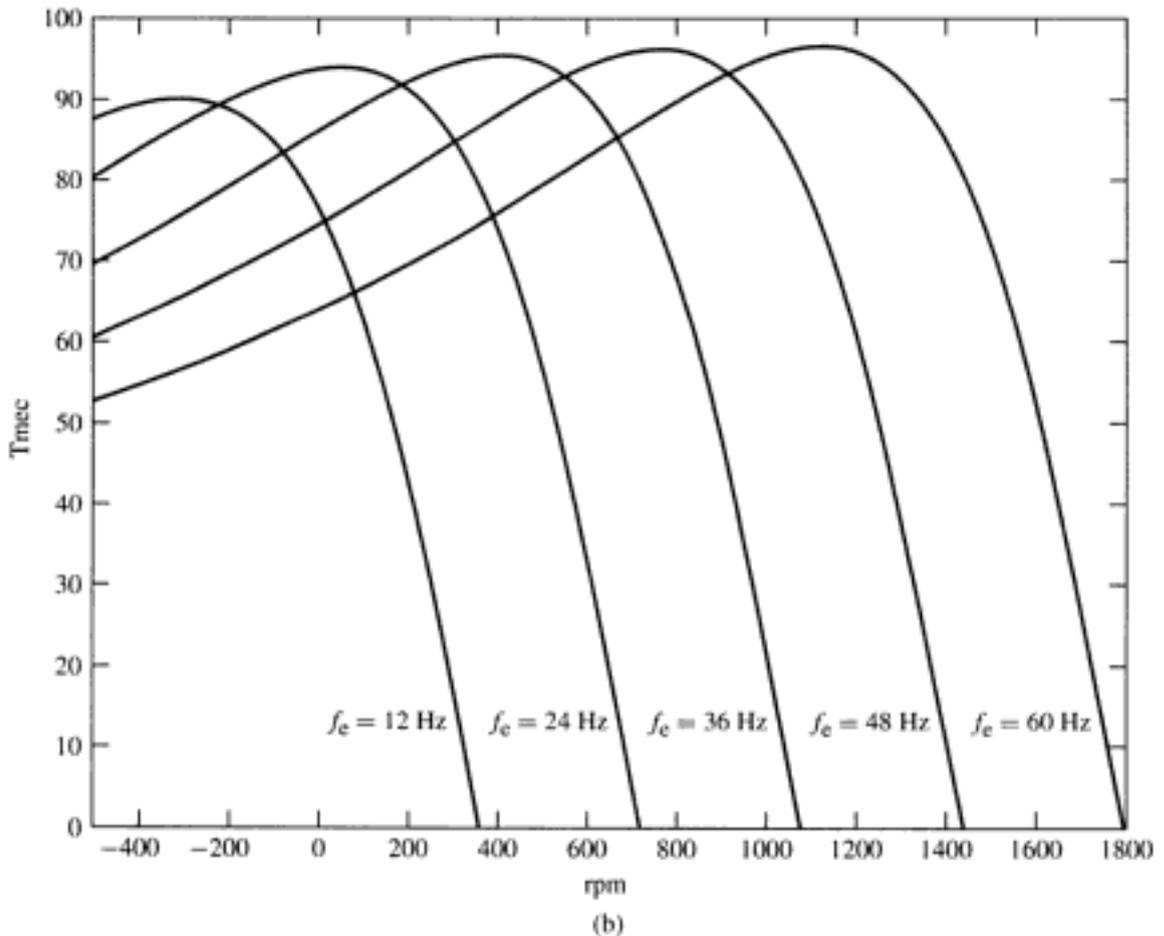


FIGURA 11.18 (Continuação)

e, para qualquer velocidade dada do motor  $\omega_m$ , o respectivo escorregamento é dado por

$$s = \frac{\omega_s - \omega_m}{\omega_s}$$

Usando as Equações 11.51 a 11.53, pode-se obter a velocidade do motor pesquisando  $\omega_m$  para encontrar a velocidade na qual  $P_{\text{carga}} = \omega_m T_{\text{mec}}$ . Se isso for feito, o resultado será:

a. Para  $f_c = 60$  Hz:

Tensão de terminal = 230 V, tensão de linha

Velocidade = 1720 rpm

Escorregamento = 4,4 %

$P_{\text{carga}} = 9,17$  kW

b. Para  $f_c = 40$  Hz:

Tensão de terminal = 153 V, tensão de linha

Velocidade = 1166 rpm

Escorregamento = 2,8 %

$P_{\text{carga}} = 2,86$  kW

Aqui está o *script* de MATLAB:

```
clc
clear
% Aqui estão os parâmetros do motor para 60 Hz
V10 = 230/sqrt(3);
Nph = 3;
poles = 4;
fe0 = 60;
R1 = 0.095;
R2 = 0.2;
X10 = 0.680;
X20 = 0.672;
Xm0 = 18.7;
% Dois valores de frequência
fe1 = 60;
fe2 = 40;
for m = 1:2,
    if m == 1
        fe = fe1;
    else
        fe = fe2;
    end
% Calcule as reatâncias e a tensão
X1 = X10*(fe/fe0);
X2 = X20*(fe/fe0);
Xm = Xm0*(fe/fe0);
V1 = V10*(fe/fe0);
% Calcule a velocidade síncrona
omegas = 4*pi*fe/poles;
ns = 120*fe/poles;
% Calcule o equivalente Thévenin do estator
V1eq = abs(V1*j*Xm/(R1 + j*(X1+Xm)));
Z1eq = j*Xm*(R1+j*X1)/(R1 + j*(X1+Xm));
```

necidas diretamente mas, em vez disso, são induzidas quando o rotor do motor de indução desloca-se (escorrega) em relação à onda de fluxo girante produzida pelas correntes do estator.

Para examinar a aplicação do controle por campo orientado às máquinas de indução, começaremos com a transformação dq0 da Seção C.3 do Apêndice C. Essa transformação converte as grandezas de ambos o estator e o rotor em um sistema de referência que gira sincronicamente. Em condições trifásicas equilibradas e em regime permanente, as grandezas de seqüência zero serão nulas e as demais grandezas de eixo direto e em quadratura serão constantes. Dessa forma, as relações entre fluxo concatenado e corrente das Equações C.52 a C.58 tornam-se

$$\lambda_D = L_S i_D + L_m i_{DR} \quad (11.62)$$

$$\lambda_Q = L_S i_Q + L_m i_{QR} \quad (11.63)$$

$$\lambda_{DR} = L_m i_D + L_R i_{DR} \quad (11.64)$$

$$\lambda_{QR} = L_m i_Q + L_R i_{QR} \quad (11.65)$$

Nessas equações, os subscritos D, Q, DR e QR indicam os valores constantes das componentes diretas e em quadratura das grandezas do estator e do rotor, respectivamente. É uma questão simples mostrar que os parâmetros de indutância podem ser determinados a partir dos parâmetros de circuito equivalente como

$$L_m = \frac{X_{m0}}{\omega_{e0}} \quad (11.66)$$

$$L_S = L_m + \frac{X_{10}}{\omega_{e0}} \quad (11.67)$$

$$L_R = L_m + \frac{X_{20}}{\omega_{e0}} \quad (11.68)$$

em que o subscrito 0 indica valor na frequência nominal.

As equações transformadas de tensão, Equações C.63 a C.68, tornam-se

$$v_D = R_a i_D - \omega_e \lambda_Q \quad (11.69)$$

$$v_Q = R_a i_Q + \omega_e \lambda_D \quad (11.70)$$

$$0 = R_{aR} i_{DR} - (\omega_e - \omega_{me}) \lambda_{QR} \quad (11.71)$$

$$0 = R_{aR} i_{QR} + (\omega_e - \omega_{me}) \lambda_{DR} \quad (11.72)$$

em que é possível mostrar que as resistências estão relacionadas com as do circuito equivalente segundo

$$R_a = R_1 \quad (11.73)$$

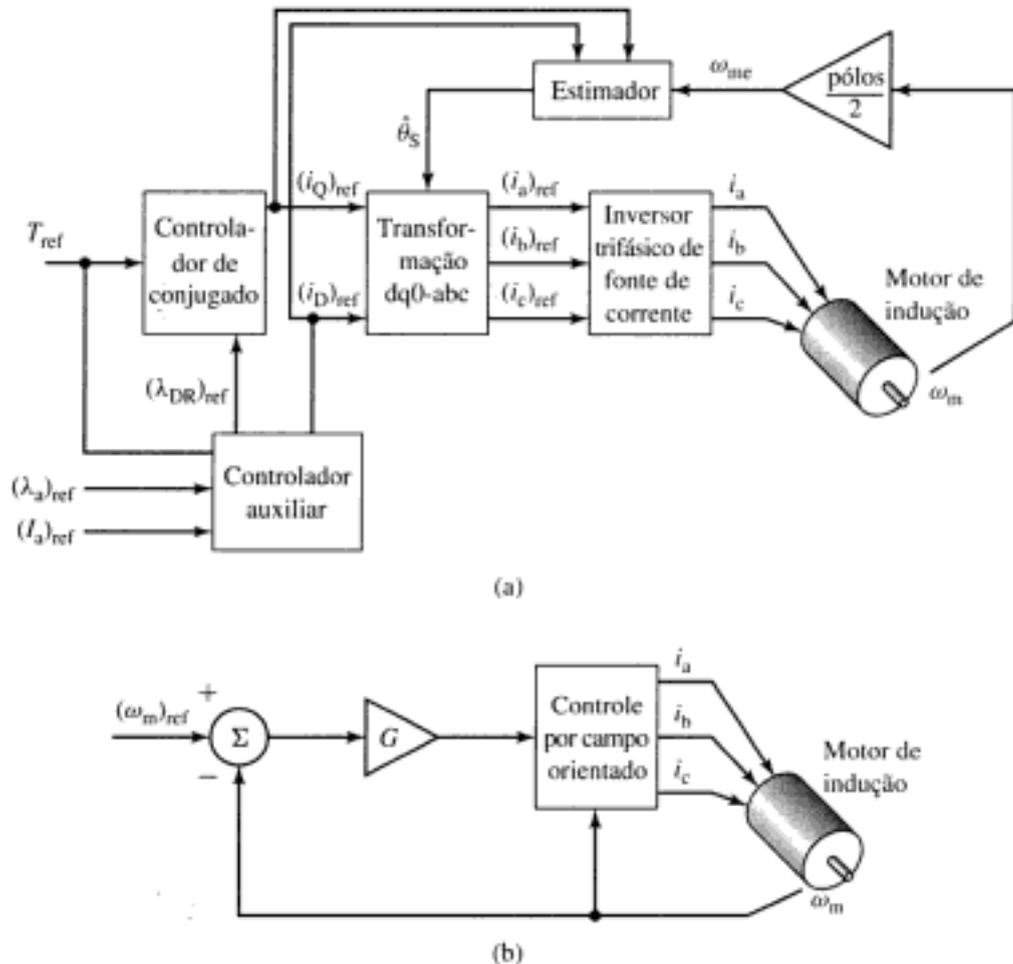
e

$$R_{aR} = R_2 \quad (11.74)$$

Para os propósitos de desenvolvimento de um esquema de controle por campo orientado, começaremos com a expressão de conjugado da Equação C.70

$$T_{mec} = \frac{3}{2} \left( \frac{\text{pólos}}{2} \right) \left( \frac{L_m}{L_R} \right) (\lambda_{DR} i_q - \lambda_{QR} i_d) \quad (11.75)$$

Para a dedução da transformação dq0 da Seção C.3, a velocidade angular do sistema de referência foi escolhida como sendo a velocidade síncrona, tal como é determinada pela frequência elétrica  $\omega_e$  do estator. Para os propósitos da dedução, não foi necessário especificar a



**FIGURA 11.21** (a) Diagrama de blocos de um sistema de controle de conjugado por campo orientado para um motor de indução. (b) Diagrama de blocos de uma malha de controle de velocidade para motor de indução, construída em torno de um sistema de controle de conjugado por campo orientado.

Finalmente, como foi discutido na nota de rodapé da Equação 11.37, a tensão de fase eficaz da armadura pode ser obtida como

$$\begin{aligned}
 V_a &= \sqrt{\frac{v_D^2 + v_Q^2}{2}} = \sqrt{\frac{(R_a i_D - \omega_e \lambda_Q)^2 + (R_a i_Q + \omega_e \lambda_D)^2}{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{\left( R_a i_D - \omega_e \left( L_S - \frac{L_m^2}{L_R} \right) i_Q \right)^2 + (R_a i_Q + \omega_e L_S i_D)^2}{2}} \quad (11.89)
 \end{aligned}$$

Essas equações mostram que o fluxo concatenado e a tensão de terminal da armadura são determinados por ambas as componentes de eixo direto e em quadratura da corrente de armadura. Assim, o bloco marcado "Controlador auxiliar" na Fig. 11.21a, que calcula os valores de referência das correntes dos eixos direto e em quadratura, deve calcular as correntes de referência  $(i_D)_{ref}$  e  $(i_Q)_{ref}$  para produzir o conjugado desejado, estando sujeito a restrições no fluxo concatenado de armadura (para evitar saturação no motor), na corrente de armadura  $(I_a)_{ref} = \sqrt{(i_D^2 + i_Q^2)}/2$  (para evitar aquecimento excessivo de armadura) e na tensão de armadura (para evitar dano potencial no isolamento).

Observe que, como foi discutido em relação às máquinas síncronas na Seção 11.2.2, o sistema de controle de conjugado da Fig. 11.21a é inserido tipicamente dentro de uma malha de controle maior. Um exemplo desse tipo é a malha de controle de velocidade da Fig. 11.21b.

### EXEMPLO 11.12

O motor de indução trifásico de 230 V, 60 Hz, 12 kW e quatro pólos do Exemplo 6.7 e do Exemplo 11.11 deve ser acionado por um sistema de controle de velocidade por campo orientado (similar ao da Fig. 11.21b) a uma velocidade de 1740 rpm. Assumindo que o controlador está programado para ajustar o fluxo concatenado  $\lambda_{DR}$  do rotor com o valor nominal de pico da máquina, encontre a amplitude eficaz da corrente de armadura, a frequência elétrica e a tensão eficaz de terminal, se a potência eletromagnética for 9,7 kW e o motor estiver operando a uma velocidade de 1680 rpm.

#### ■ Solução

Devemos determinar primeiro os parâmetros dessa máquina. Das Equações 11.66 a 11.74, têm-se

$$\begin{aligned}L_m &= \frac{X_{m0}}{\omega_{c0}} = \frac{18,7}{120\pi} = 49,6 \text{ mH} \\L_S &= L_m + \frac{X_{10}}{\omega_{c0}} = 49,6 \text{ mH} + \frac{0,680}{120\pi} = 51,41 \text{ mH} \\L_R &= L_m + \frac{X_{20}}{\omega_{c0}} = 49,6 \text{ mH} + \frac{0,672}{120\pi} = 51,39 \text{ mH} \\R_s &= R_1 = 0,095 \ \Omega \\R_{aR} &= R_2 = 0,2 \ \Omega\end{aligned}$$

A tensão de fase eficaz de terminal dessa máquina é  $230 / \sqrt{3} = 132,8 \text{ V}$  e, portanto, o seu fluxo de pico nominal é

$$(\lambda_{\text{nominal}})_{\text{pico}} = \frac{\sqrt{2}(V_a)_{\text{nominal}}}{\omega_c} = \frac{\sqrt{2} \times 132,8}{120\pi} = 0,498 \text{ Wb}$$

Para a condição especificada de operação,

$$\omega_m = n \left( \frac{\pi}{30} \right) = 1680 \left( \frac{\pi}{30} \right) = 176 \text{ rad/s}$$

e o conjugado mecânico é

$$T_{\text{mec}} = \frac{P_{\text{mec}}}{\omega_m} = \frac{9,7 \times 10^3}{176} = 55,1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Da Equação 11.77, com  $\lambda_{DR} = \lambda_{\text{nominal}} = 0,498 \text{ Wb}$ ,

$$\begin{aligned}i_Q &= \frac{2}{3} \left( \frac{2}{\text{pólos}} \right) \left( \frac{L_R}{L_m} \right) \left( \frac{T_{\text{mec}}}{\lambda_{DR}} \right) \\&= \frac{2}{3} \left( \frac{2}{4} \right) \left( \frac{51,39 \times 10^{-3}}{49,6 \times 10^{-3}} \right) \left( \frac{55,1}{0,498} \right) = 38,2 \text{ A}\end{aligned}$$

Da Equação 11.79,

$$i_D = \frac{\lambda_{DR}}{L_m} = \frac{0,498}{49,6 \times 10^{-3}} = 10,0 \text{ A}$$

Da Equação 11.92, vemos que a resposta do fluxo do rotor a uma mudança em degrau na corrente de eixo direto  $i_d$  é relativamente lenta;  $\lambda_{DR}$  irá variar exponencialmente segundo a constante de tempo do rotor dada por  $\tau_R = L_R / R_{aR}$ . Como o conjugado é proporcional ao produto  $\lambda_{DR} i_q$ , vemos que uma resposta rápida de conjugado será obtida com variações em  $i_q$ . Assim, por exemplo, para implementar uma variação em degrau no conjugado, um algoritmo prático de controle poderia começar com uma variação em degrau em  $(i_q)_{ref}$  para obter a variação desejada de conjugado, seguida de um ajuste em  $(i_D)_{ref}$  (e portanto em  $\lambda_{DR}$ ) para reajustar a corrente de armadura e a tensão de terminal conforme desejado. Esse ajuste em  $(i_D)_{ref}$  seria associado a um ajuste de compensação em  $(i_Q)_{ref}$  para manter o conjugado no nível desejado.

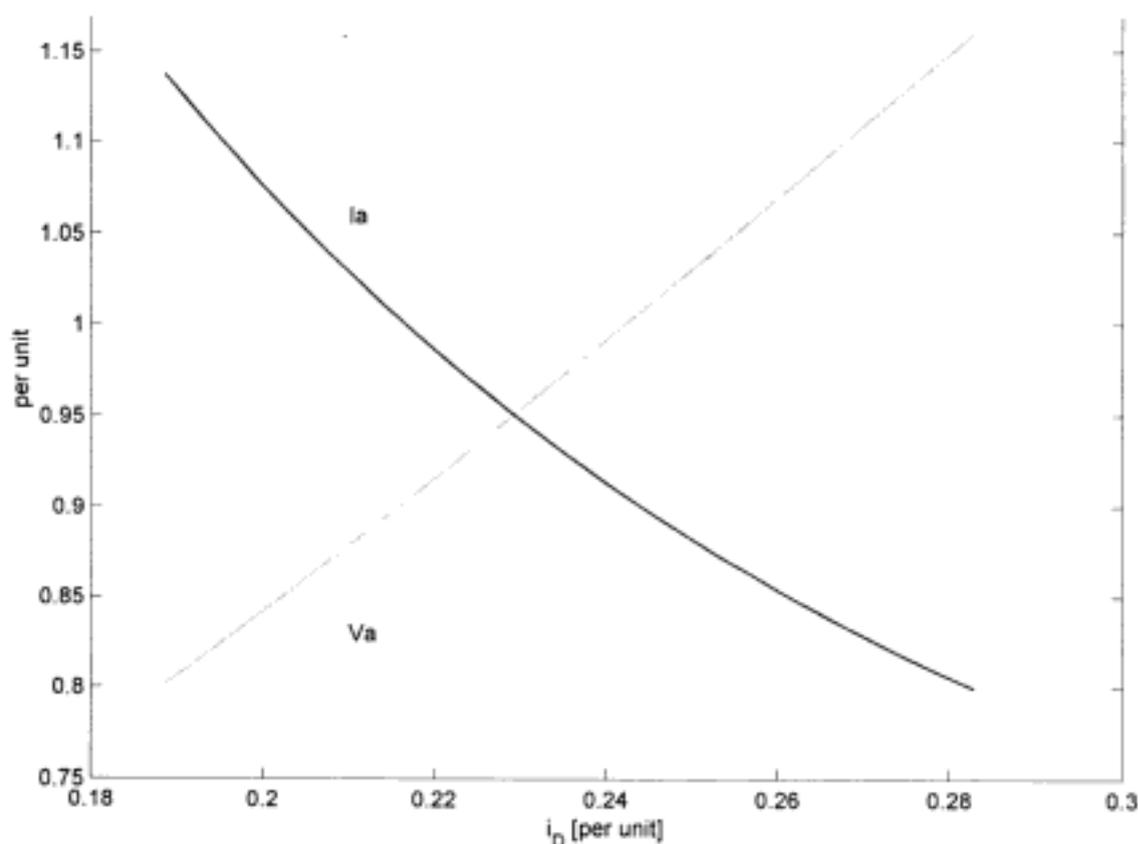
### EXEMPLO 11.13



Considere novamente o motor de indução do Exemplo 11.12. Assumindo que a velocidade do motor e a potência eletromagnética permanecem constantes (em 1680 rpm e 9,7 kW), use o MATLAB para plotar a corrente de armadura  $I_a$  e a tensão de terminal  $V_a$ , ambas por unidade, em função de  $i_D$  quando  $(\lambda_{DR})_{ref}$  varia de 0,8 a 1,2, por unidade, em que 1,0 por unidade corresponde ao valor de pico nominal.

#### ■ Solução

A plotagem desejada está dada na Fig. 11.22. Observe que a corrente de armadura decresce e a tensão de terminal cresce quando  $\lambda_{DR}$  é aumentado. Isso mostra claramente como  $i_D$ , que controla  $\lambda_{DR}$ , pode ser escolhido para otimizar o compromisso entre grandezas tais como corrente de armadura, fluxo de armadura e tensão de terminal.



**FIGURA 11.22** Plotagem de MATLAB para o Exemplo 11.13 mostrando o efeito da corrente de eixo direto  $i_D$  sobre a tensão e a corrente de armadura de um motor de indução com velocidade e carga constantes.

Aqui está o *script* de MATLAB:

```

clc
clear
%Neste script, a expressão rated indica valor nominal e
%peak indica valor de pico.
%Especificações nominais e características do motor
Pvalor nominal = 12e3;
Vvalor nominal = 230;
Vavalor nominal = 230/sqrt(3);
fevalor nominal = 60;
omegaevalor nominal = 2*pi*fevalor nominal;
Lambdavalor nominal = sqrt(2)*Vavalor nominal/omegaevalor nominal;
Ivalor nominal = Pvalor nominal/(sqrt(3)*Vvalor nominal);
Ivalor de picobase = sqrt(2)*Ivalor nominal;
poles = 4;

%Aqui estão os parâmetros do motor para 60 Hz
V10 = Vvalor nominal/sqrt(3);
X10 = 0.680;
X20 = 0.672;
Xm0 = 18.7;
R1 = 0.095;
R2 = 0.2;

%Calcule os parâmetros dq0 necessários
Lm = Xm0/omegaevalor nominal;
LS = Lm + X10/omegaevalor nominal;
LR = Lm + X20/omegaevalor nominal;
Ra = R1;
RaR = R2;

% Ponto de operação
n = 1680;
omegam = n*pi/30;
omegame = (poles/2)*omegam;
Pmech = 9.7e3;
Tmech = Pmech/omegam;

% Laço para plotar em termos de lambdaDR
for n = 1:41
    lambdaDR = (0.8 + (n-1)*0.4/40)*Lambdavalor nominal;
    lambdaDRpu(n) = lambdaDR/Lambdavalor nominal;
    iQ = (2/3)*(2/pólos)*(LR/Lm)*(Tmech/lambdaDR);
    iD = (lambdaDR/Lm);
    iDpu(n) = iD/Ivalor de picobase;
    iQR = - (Lm/LR)*iQ;
    Ia = sqrt((iD^2 + iQ^2)/2);
    Iapu(n) = Ia/Ivalor de pico;
    omegae = omegame - (RaR/LR)*(iQ/iD);
    fe(n) = omegae/(2*pi);
    Varms = sqrt(((Ra*iD-omegae*(LS-Lm^2/LR)*iQ)^2 + ...
        (Ra*iQ+ omegae*LS*iD)^2)/2);
    Vapu(n) = Varms/Vavalor nominal;
end

%Agora plote
plot(iDpu,Iapu)
hold
plot(iDpu,Vapu, ':')
hold
xlabel('i_D [por unidade]')
ylabel('por unidade')
text(.21,1.06,'Ia')
text(.21,.83,'Va')

```

## 11.4 CONTROLE DE MOTORES DE RELUTÂNCIA VARIÁVEL

Diferentemente das máquinas CC e CA (síncronas e de indução), as MRVs não podem ser simplesmente “ligadas na tomada” e então esperar que funcionem. Como foi discutido no Capítulo 8, as fases devem ser excitadas com correntes (tipicamente unipolares) e a seqüência dessas correntes no tempo deve estar cuidadosamente correlacionada com a posição dos pólos do rotor para que um conjugado útil médio no tempo seja produzido. O resultado é que um sistema de acionamento MRV é relativamente complexo, embora a MRV em si talvez seja a mais simples das máquinas rotativas.

Os sistemas de acionamento MRV são competitivos apenas porque essa complexidade pode ser facilmente concretizada a baixo custo, usando circuitos de potência e de microeletrônica. Esses sistemas de acionamento exigem um nível bastante sofisticado de controlabilidade, mesmo nos casos mais simples de operação MRV. Logo que a capacidade de implementação desse controle torna-se disponível, características bem sofisticadas de controle (tipicamente na forma de *software* adicional) podem ser acrescentadas a baixo custo, o que vem melhorar ainda mais a posição competitiva dos acionamentos MRV.

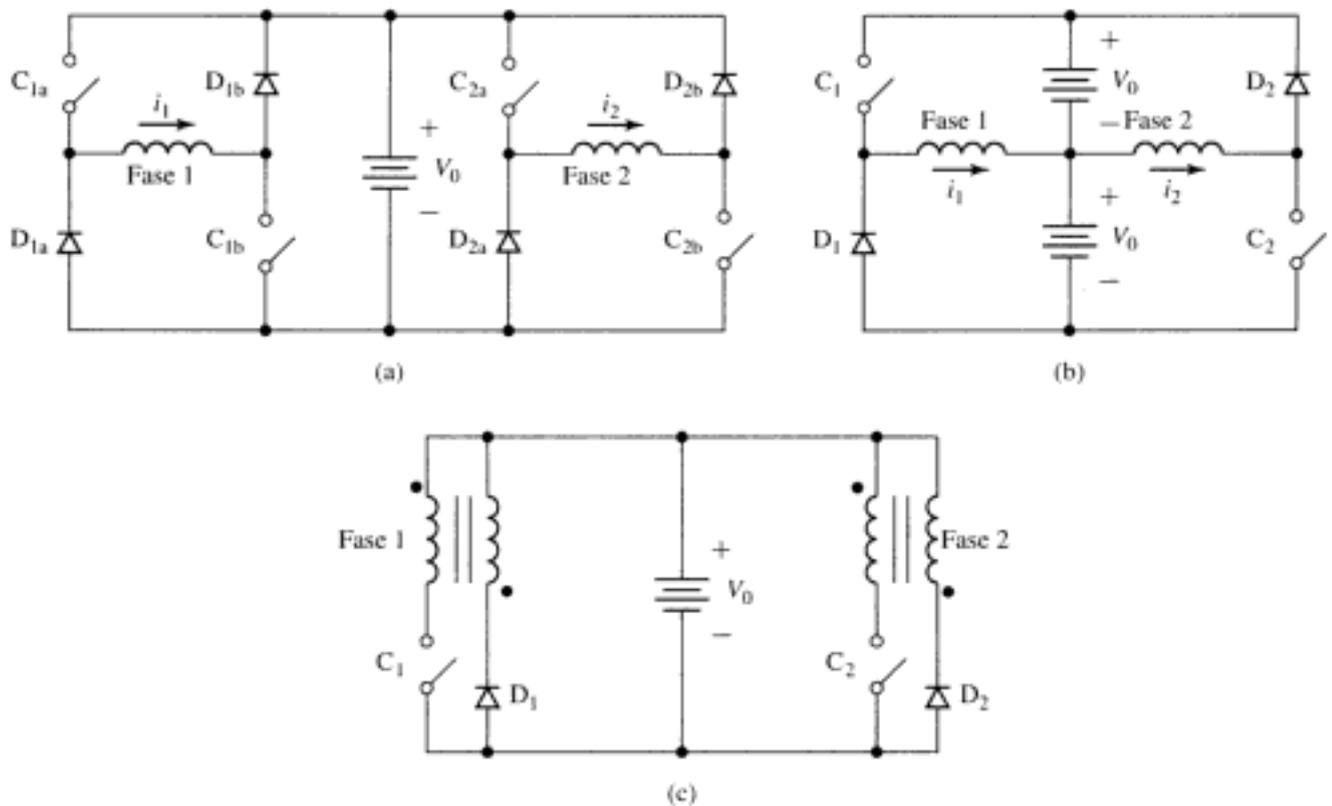
Além da própria MRV, o sistema básico de acionamento MRV consiste nos seguintes componentes: um sensor da posição do rotor, um controlador e um inversor. A função do sensor da posição do rotor é propiciar uma indicação da posição do eixo, podendo ser usada para controlar o seqüenciamento no tempo e a forma de onda das excitações de fase. Isso está em analogia direta com o sinal de tempo que é usado para controlar as explosões nos cilindros de um motor de automóvel.

Tipicamente, o controlador é implementado em *software* por meio de circuitos microeletrônicos (em microprocessador). Sua função é determinar a seqüência e as forma de onda das excitações de fase necessárias para obter a característica de velocidade  $\times$  conjugado desejada. Além de determinar os pontos desejados de velocidade e/ou conjugado, e de posição do eixo (a partir do sensor de posição do eixo), os controladores sofisticados empregam freqüentemente entradas adicionais para os valores da velocidade do eixo e da corrente de fase. Além da função básica de controle, que é a determinação do conjugado para uma dada velocidade, os controladores mais sofisticados procuram fornecer excitações que de alguma forma sejam otimizadas (para rendimento máximo, comportamento transitório estável, etc.).

Os circuitos de controle consistem tipicamente em eletrônica de baixo nível que não pode ser usada para fornecer diretamente as correntes necessárias para excitar as fases do motor. Ao invés disso, sua saída consiste em sinais que controlam um inversor que, por sua vez, fornece as correntes de fase. O controle da MRV é conseguido aplicando um conjunto apropriado de correntes aos enrolamentos de fase da MRV.

As Figs. 11.23a até c mostram três configurações comuns encontradas em sistemas inversores para o acionamento de MRVs. Observe que se trata simplesmente de inversores em ponte H do tipo discutido na Seção 10.3. Cada inversor está mostrado em uma configuração bifásica. Como está claro nas figuras, pode-se facilmente conseguir que cada configuração seja estendida para acionar fases adicionais.

A configuração da Fig. 11.23a é talvez a mais simples. Ao fechar as chaves  $C_{1a}$  e  $C_{1b}$ , o enrolamento de fase 1 é ligado à fonte ( $v_1 = V_0$ ) e a corrente de enrolamento cresce. Abrindo apenas uma das chaves, um curto-circuito é estabelecido sobre o enrolamento e a corrente irá decair, ao passo que, abrindo ambas as chaves, o enrolamento é ligado à fonte com polaridade negativa por meio dos diodos ( $v_1 = -V_0$ ) e a corrente do enrolamento irá decair mais rapidamente. Observe que essa configuração é capaz de regeneração (devolver energia à fonte), mas não de fornecer corrente negativa ao enrolamento de fase. No entanto, como o conjugado em uma MRV é proporcional ao quadrado da corrente de fase, não há necessidade de corrente de enrolamento negativa.



**FIGURA 11.23** Configurações de inversor. (a) Inversor bifásico que usa duas chaves por fase. (b) Inversor bifásico que usa uma fonte com derivação central e uma chave por fase. (c) Inversor bifásico com enrolamentos bifilares de fase e uma chave por fase.

Como foi discutido na Seção 10.3.2, o processo de modulação por largura de pulso, no qual uma série de configurações de chaves carregam e descarregam alternadamente um enrolamento de fase, pode ser usado para controlar a corrente média do enrolamento. Usando essa técnica, pode-se facilmente fazer com que um inversor, como o da Fig. 11.23a, forneça todas as formas de onda necessárias para acionar uma MRV.

A configuração de inversor da Fig. 11.23a é talvez a mais simples das configurações em ponte H que propicia a capacidade de regeneração. Sua principal desvantagem é que requer duas chaves por fase. Em muitas aplicações, o custo das chaves (e seus circuitos de acionamento associados) prepondera no custo do inversor e o resultado é que essa configuração é menos atrativa em termos de custo, quando comparada com outras configurações que requerem uma chave por fase.

A Fig. 11.23b mostra uma dessas configurações. Ela requer uma fonte com derivação central (isto é, duas fontes de tensão  $V_0$ ) mas apenas uma única chave e um único diodo por fase. Ao fechar a chave  $C_1$ , o enrolamento de fase 1 é ligado à fonte CC superior. Abrindo a chave, a corrente de fase é transferida ao diodo  $D_1$  e o enrolamento é conectado à fonte CC inferior. Assim, a fase 1 é abastecida pela fonte CC superior e regenera a energia para a fonte inferior. Observe que, para manter a simetria e para equilibrar igualmente a energia fornecida de cada fonte, a fase 2 é conectada de forma oposta. Assim, a fase 2 é abastecida pela fonte inferior e regenera a energia para a fonte superior.

As principais desvantagens da configuração da Fig. 11.23b são que ela requer uma fonte com derivação central e que, quando a chave é aberta, ela deve suportar uma tensão dupla de  $2V_0$ . Isso pode ser visto facilmente, verificando que quando o diodo  $D_1$  está diretamente polarizado, a chave está conectada às duas fontes. Provavelmente, essas chaves serão mais caras do que as chaves requeridas pela configuração da Fig. 11.23a. Essas duas questões tende-

cida das correntes nos enrolamentos de fase do motor limitarão os valores máximos de velocidade e conjugado do rotor que podem ser alcançados.

O desempenho de um sistema completo de acionamento MRV está intrinsecamente ligado ao desempenho de todos os seus componentes, incluindo a MRV, o seu controlador e o seu inversor. Nesse sentido, a MRV é bem diferente das máquinas CC, síncronas e de indução que foram discutidas anteriormente neste capítulo. Como resultado, é útil projetar por inteiro o sistema de acionamento, como um pacote integrado, e não projetando individualmente os componentes (MRV, inversor, controlador, etc.) em separado. As configurações de inversor da Fig. 11.23 são representativas de uma série de configurações possíveis de inversor que podem ser usadas em sistemas de acionamento MRV. A escolha de um inversor para uma aplicação específica deve ser feita com base em considerações econômicas e de engenharia como parte de um projeto integrado de um sistema de acionamento MRV.

## 11.5 RESUMO

Este capítulo introduz diversas técnicas para o controle de máquinas elétricas. O extenso tema do controle das máquinas elétricas requer uma discussão muito mais ampla do que é possível aqui, de modo que os nossos objetivos foram um tanto limitados. O ponto mais saliente é que a discussão deste capítulo enfoca quase que exclusivamente o comportamento em regime permanente. As questões de comportamento transitório e dinâmico não foram consideradas.

Atualmente muito da flexibilidade de controle que é associada comumente às máquinas elétricas vem da capacidade da eletrônica de potência usada no acionamento dessas máquinas. Portanto, este capítulo desenvolve-se baseado na discussão sobre eletrônica de potência do Capítulo 10.

O ponto de partida é uma discussão sobre motores CC em que as técnicas de controle são convenientemente subdivididas em duas categorias: controle de velocidade e de conjugado. O algoritmo de controle da velocidade em um motor CC é relativamente simples. Com exceção de uma correção relativa à queda de tensão na resistência de armadura, a velocidade em regime permanente é determinada pela condição de que a tensão gerada deve ser igual à tensão de armadura aplicada. Como a tensão gerada é proporcional ao fluxo de campo e à velocidade do motor, vemos que a velocidade de regime permanente do motor é proporcional à tensão de armadura e inversamente proporcional ao fluxo de campo.

Um ponto de vista alternativo é o controle de conjugado. Como o sistema de comutador e escovas mantém uma relação angular constante entre o campo e o fluxo de armadura, o conjugado de um motor CC é simplesmente proporcional ao produto da corrente de armadura pelo fluxo de campo. Como resultado, o conjugado de um motor CC pode ser controlado diretamente, controlando-se a corrente de armadura e o fluxo de campo.

Como os motores síncronos desenvolvem conjugado apenas na velocidade síncrona, a velocidade de um motor síncrono é determinada simplesmente pela frequência elétrica da excitação aplicada à armadura. Assim, em regime permanente, o controle de velocidade é simplesmente uma questão de controlar a frequência da armadura. O controle de conjugado também é possível. Pela transformação das grandezas do estator em um sistema de referência que gira em sincronismo com o rotor (usando a transformação  $dq0$  do Apêndice C), encontramos que o conjugado é proporcional ao fluxo de campo e à componente da corrente de armadura que está em quadratura espacial com o fluxo de campo. Isto é diretamente análogo à produção de conjugado em um motor CC. Esquemas de controle que adotam esse ponto de vista são referidos como controle *vetorial* ou *por campo orientado*.

As máquinas de indução operam de forma assíncrona; as correntes do rotor são induzidas pelo movimento do rotor em relação à onda de fluxo que gira sincronicamente e que é produzida pelo estator. Quando alimentado por uma fonte de tensão aplicada à armadura com frequência constante, o motor irá funcionar com uma velocidade um pouco inferior à velocidade

Quando está operando a vazio na tensão nominal, a corrente do motor é 1,56 A.

- Calcule a velocidade e as perdas rotacionais a vazio.
- Assumindo que as perdas rotacionais são constantes, use o MATLAB para plotar a potência de saída do motor em função da velocidade. Limite a sua plotagem a uma saída de potência máxima de 15 kW.
- O controle por tensão de armadura deve ser usado para manter constante a velocidade do motor quando ele é carregado. Nessa condição de funcionamento, a tensão do campo em derivação será mantida constante em 240 V. Plote a tensão de armadura em função da potência de saída necessária para manter o motor em uma velocidade constante de 2950 rpm.
- Considere a situação em que o controle por tensão de armadura é aplicado a esse motor enquanto o enrolamento de campo permanece conectado em derivação aos terminais de armadura. Repita a parte (c) para essa condição de operação. Essa operação é possível de ser feita? Por que o comportamento do motor é significativamente diferente do da parte (c)?



**11.5** A folha de especificações de um pequeno motor CC de ímã permanente fornece os seguintes parâmetros:

Tensão nominal:	$V_{\text{nominal}} = 3 \text{ V}$
Potência de saída nominal:	$P_{\text{nominal}} = 0,28 \text{ W}$
Velocidade a vazio:	$n_{\text{vz}} = 12.400 \text{ rpm}$
Constante de conjugado:	$K_m = 0,218 \text{ mV/rpm}$
Conjugado de estol*:	$T_{\text{estol}} = 6,64 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}$

- Calcule a resistência de armadura do motor.
- Calcule as perdas rotacionais a vazio.
- Assuma que o motor seja conectado a uma carga tal que a potência total no eixo (carga real mais perdas rotacionais) é igual a 0,25 W, a uma velocidade de 12.000 rpm. Assumindo que essa carga varia proporcionalmente ao quadrado da velocidade do motor, escreva um *script* de MATLAB para plotar a velocidade do motor em função da tensão de terminal para  $1,0 \text{ V} \leq V_a \leq 3,0 \text{ V}$ .

**11.6** A folha de especificações de um pequeno motor CC de ímã permanente e 350 W fornece os seguintes parâmetros:

Tensão nominal:	$V_{\text{nominal}} = 24 \text{ V}$
Resistência de armadura:	$R_a = 97 \text{ m}\Omega$
Velocidade a vazio:	$n_{\text{vz}} = 3580 \text{ rpm}$
Corrente a vazio:	$I_{\text{a,vz}} = 0,47 \text{ A}$

- Calcule a constante de conjugado  $K_m$  do motor em V/(rad/s).
- Calcule as perdas rotacionais a vazio.
- O motor é alimentado a partir de uma fonte CC de 30 V por um inversor PWM. A Tabela 11.1 dá as correntes medidas do motor em função do valor  $D$  do ciclo de trabalho PWM.

Complete a tabela calculando a velocidade do motor e a potência de carga para cada valor de  $D$ . Assuma que as perdas rotacionais variam proporcionalmente ao quadrado da velocidade do motor.

\* N. de T.: *Stall*, em inglês. Conjugado que bloqueia o motor, reduzindo sua velocidade até a parada.



**11.11** Considere um motor síncrono trifásico para o qual são fornecidos os seguintes dados:

- Tensão de linha nominal (V)
- Potência aparente nominal (VA)
- Frequência (Hz) e velocidade (rpm) nominais
- Reatância síncrona por unidade
- Corrente de campo para a tensão nominal a vazio (CCAV) (A)

O motor deve operar com um inversor de frequência variável e V/Hz constante com velocidades de até 120 por cento da velocidade nominal do motor.

- a. Supondo que a tensão e a corrente de terminal do motor não possam exceder seus valores nominais, escreva um *script* de MATLAB que calcule, para uma dada velocidade de operação, a tensão de terminal do motor, a máxima potência de entrada possível do motor e a respectiva corrente de campo requerida para obter essa condição de funcionamento. Você pode considerar os efeitos da saturação e da resistência de armadura como sendo desprezíveis.
- b. Aplique o seu programa ao motor síncrono do Problema 11.10, para velocidades de motor de 1500 rpm e 2000 rpm.



**11.12** Com a finalidade de realizar cálculos relativos ao controle por campo orientado em motores síncronos não salientes, escreva um *script* de MATLAB que irá calcular a indutância síncrona  $L_s$  e a indutância mútua entre armadura e campo  $L_{af}$ , ambas em henrys, e o conjugado nominal em N.m, a partir dos seguintes dados:

- Tensão de linha nominal (V)
- Potência aparente (VA)
- Frequência nominal (Hz)
- Número de pólos
- Reatância síncrona por unidade
- Corrente de campo para a tensão nominal a vazio (CCAV) (A)

**11.13** Uma máquina síncrona trifásica de quatro pólos, 100 kW, 460 V e 60 Hz deve funcionar como motor síncrono, submetida a controle de conjugado por campo orientado, usando um sistema como o mostrado na Fig. 11.13a. A máquina tem uma reatância síncrona de 0,932 por unidade e uma CCAV igual a 15,8 A. O motor está operando na velocidade nominal, carregado com 50 por cento de seu conjugado nominal com uma corrente de campo de 14,0 A. O controlador por campo orientado está ajustado para manter  $i_D = 0$ .

- a. Calcule a indutância síncrona  $L_s$  e a indutância mútua entre armadura e campo  $L_{af}$ , ambas em henrys.
- b. Encontre a corrente de eixo em quadratura  $i_Q$  e o respectivo valor eficaz da corrente de armadura  $i_a$ .
- c. Encontre a tensão de linha de terminal do motor.

**11.14** O motor síncrono do Problema 11.13 está operando sob controle de conjugado por campo orientado de modo tal que  $i_D = 0$ . Com a corrente de campo ajustada para 14,5 A e com a referência de conjugado ajustada para 0,75 de conjugado nominal do motor, observa-se que a velocidade do motor é de 1475 rpm.

- a. Calcule a potência de saída do motor.
- b. Encontre a corrente de eixo em quadratura  $i_Q$  e o respectivo valor eficaz da corrente de armadura  $i_a$ .

- c. Calcule a frequência elétrica do estator.
- d. Encontre a tensão de linha de terminal do motor.

**11.15** Considere o caso em que a carga do motor síncrono, do sistema de controle de conjugado por campo orientado do Problema 11.13, é aumentada e o motor começa a baixar de velocidade. Com base em algum conhecimento da característica de carga, determina-se que será necessário aumentar o valor de referência  $T_{ref}$  de 50 para 80 por cento do conjugado nominal do motor para que o motor retorne à sua velocidade nominal.

- a. Se a corrente de campo fosse deixada constante em 14,0 A, calcule os valores da corrente de eixo em quadratura, a corrente eficaz de armadura e a tensão de linha de terminal (em volts e por unidade) que resultariam como resposta a essa alteração no conjugado de referência.
- b. Para conseguir essa condição de operação com uma tensão de terminal de armadura razoável, o algoritmo de controle por campo orientado é substituído pelo algoritmo de fator de potência unitário, descrito no texto anterior ao Exemplo 11.9. Com base naquele algoritmo, calcule
  - (i) a tensão de linha de terminal nos terminais do motor (em volts e por unidade).
  - (ii) a corrente eficaz de armadura.
  - (iii) as correntes de eixo direto e em quadratura,  $i_D$  e  $i_Q$ .
  - (iv) a corrente de campo do motor.



**11.16** Considere um motor síncrono de oito pólos, 500 kW, 2300 V e 50 Hz com uma reatância síncrona de 1,18 por unidade e uma  $CCAV = 94$  A. Deve operar sob controle de conjugado por campo orientado usando o algoritmo de fator de potência unitário descrito no texto após o Exemplo 11.8. Será usado para acionar uma carga cujo conjugado varia segundo a velocidade ao quadrado e cujo conjugado na velocidade de 750 rpm é de 5900 N.m. O sistema completo de acionamento incluirá uma malha de controle de velocidade, como a mostrada na Fig. 11.13b.

Escreva um *script* de MATLAB cuja entrada é a velocidade desejada do motor (até 750 rpm) e cuja saída é o conjugado do motor, a corrente de campo, as correntes de eixo direto e em quadratura, a corrente de armadura e a tensão de linha de terminal. Aplique seu *script* a uma velocidade de motor de 650 rpm.

**11.17** Um motor síncrono trifásico de ímã permanente, dois pólos, 2 kVA e 230 V atinge a tensão nominal em circuito aberto com uma velocidade de 3500 rpm. Sua indutância síncrona é de 17,2 mH.

- a. Calcule  $\Lambda_{ip}$  para esse motor.
- b. Se o motor estiver funcionando na tensão e corrente nominais com uma velocidade de 3600 rpm, calcule a potência do motor em kW e as componentes de pico de eixo direto e em quadratura da corrente de armadura,  $i_D$  e  $i_Q$  respectivamente.

**11.18** O controle de conjugado por campo orientado deve ser aplicado ao motor síncrono de ímã permanente do Problema 11.17. Se o motor tiver de funcionar a 4000 rpm com a tensão nominal de terminal, calcule os valores máximos de conjugado e potência que o motor pode fornecer e os respectivos valores de  $i_D$  e  $i_Q$ .

**11.19** Um motor síncrono trifásico de ímã permanente, dois pólos, 15 kVA e 230 V tem uma velocidade máxima de 10.000 rpm e produz a tensão nominal em circuito aberto a uma velocidade de 7620 rpm. Ele tem uma indutância síncrona de 1,92 mH. O motor deverá operar com controle de conjugado por campo orientado.

- a. Calcule o conjugado máximo que o motor pode produzir sem exceder a corrente nominal de armadura.

- b. Assumindo que o motor deve operar com o controlador de conjugado ajustado para produzir conjugado máximo (como na parte (a)) e  $i_D = 0$ , calcule a velocidade máxima com a qual ele pode funcionar sem ultrapassar a tensão nominal de armadura.
- c. Para operar com velocidades superiores à encontrada na parte (b), a técnica de enfraquecimento de fluxo será empregada para manter a tensão de armadura em seu valor nominal.

Assumindo que o motor está operando a 10.000 rpm com tensão e corrente nominais de armadura, calcule

- (i) a corrente de eixo direto  $i_D$ .
- (ii) a corrente de eixo em quadratura  $i_Q$ .
- (iii) o conjugado do motor.
- (iv) a potência do motor e o fator de potência.



- 11.20** O motor de ímã permanente do Problema 11.17 deve operar com controle vetorial usando o seguinte algoritmo.

Tensão de terminal não deve exceder o valor nominal

Corrente de terminal não deve exceder o valor nominal

$i_D = 0$  a menos que a técnica de enfraquecimento de fluxo seja necessária para evitar tensão de armadura excessiva

Escreva um *script* de MATLAB para produzir plotagens de potência e conjugado máximos que esse sistema pode produzir, em função da velocidade do motor, para velocidades de até 10.000 rpm.

- 11.21** Considere um motor de indução de quatro pólos, 460 V, 25 kW e 60 Hz que tem os seguintes parâmetros de circuito equivalente em ohms por fase referidos ao estator:

$$R_1 = 0,103 \quad R_2 = 0,225 \quad X_1 = 1,10 \quad X_2 = 1,13 \quad X_m = 59,4$$

O motor deve operar com um acionamento de frequência variável e V/Hz constante cuja saída é de 460 V em 60 Hz. Despreze os efeitos das perdas rotacionais. Inicialmente, o acionamento do motor está ajustado para uma frequência de 60 Hz.

- a. Calcule o conjugado de pico e os respectivos valores de escorregamento e velocidade do motor em rpm.
- b. Calcule o conjugado do motor para um escorregamento de 2,9 por cento e a respectiva potência de saída.
- c. A frequência do acionamento é reduzida agora para 35 Hz. Se o conjugado de carga permanecer constante, estime a velocidade resultante do motor em rpm. Encontre o escorregamento do motor, a velocidade em rpm e a potência de saída resultantes.
- 11.22** Considere o motor de indução de quatro pólos, 460 V e 250 kW juntamente com o sistema de acionamento do Problema 11.21.
- a. Escreva um *script* de MATLAB para plotar a característica de velocidade X conjugado do motor para as frequências de acionamento de 20, 40 e 60 Hz e velocidades que variam de -200 rpm até a velocidade síncrona para cada uma das frequências.
- b. Determine a frequência de acionamento necessária para maximizar o conjugado de partida e calcule o respectivo conjugado em N.m.



- 11.23** Um motor de indução trifásico de seis pólos, 550 kW, 2400 V e 60 Hz tem os seguintes parâmetros de circuito equivalente em ohms por fase Y, referidos ao estator:

$$R_1 = 0,108 \quad R_2 = 0,296 \quad X_1 = 1,18 \quad X_2 = 1,32 \quad X_m = 48,4$$

O motor será operado com um acionamento de V/Hz constante cuja tensão é de 2400 V a uma frequência de 60 Hz.

O motor é usado para acionar uma carga cuja potência é de 525 kW a uma velocidade de 1138 rpm e que varia proporcionalmente ao cubo da velocidade. Usando MATLAB, plote a velocidade do motor em função da frequência quando a frequência de acionamento é variada entre 20 e 60 Hz.

- 11.24** Um motor de indução trifásico de rotor bobinado, seis pólos, 150 kW, 60 Hz e 460 V desenvolve o conjugado de plena carga na velocidade de 1157 rpm com o rotor curto-circuitado. Um resistência externa não indutiva de  $870 \text{ m}\Omega$  é colocada em série com cada fase do rotor, e observa-se que o motor desenvolve seu conjugado nominal a uma velocidade de 1072 rpm. Calcule a resistência por fase do motor original.
- 11.25** O rotor bobinado do Problema 11.24 será usado para acionar uma carga de conjugado constante igual ao conjugado nominal de plena carga do motor. Usando os resultados do Problema 11.24, calcule a resistência de rotor externa necessária para que a velocidade do motor fique ajustada em 850 rpm.
- 11.26** Um motor de indução trifásico de rotor bobinado, quatro pólos, 75 kW, 460 V e 60 Hz desenvolve um conjugado interno máximo de 212 por cento para um escorregamento de 16,5 por cento, quando está funcionando na tensão e frequência nominais, com o rotor curto-circuitado diretamente em seus anéis deslizantes. A resistência do estator e as perdas rotacionais podem ser desprezadas e pode-se assumir que a resistência do rotor é constante, independentemente da frequência do rotor. Determine
- o escorregamento a plena carga, em por cento.
  - as perdas  $I^2R$  do rotor a plena carga, em watts.
  - o conjugado de partida na tensão e frequência nominais, em N.m.
- Se agora a resistência do rotor for dobrada (inserindo resistência externa em série nos anéis deslizantes), determine
- o conjugado, em N.m, quando a corrente do estator está em seu valor de plena carga.
  - o respectivo escorregamento.
- 11.27** Um motor de indução trifásico de rotor bobinado, seis pólos, 35 kW, 60 Hz e 440 V desenvolve sua saída nominal de plena carga a uma velocidade de 1169 rpm, quando está funcionando na tensão e frequência nominais com seus anéis deslizantes curto-circuitados. O conjugado máximo que ele pode desenvolver na tensão e frequência nominais é 245 por cento do conjugado de plena carga. A resistência do enrolamento do rotor é de  $0,23 \Omega/\text{fase Y}$ . Despreze as perdas rotacionais e suplementares, e a resistência do estator.
- Calcule as perdas  $I^2R$  do rotor a plena carga.
  - Calcule a velocidade para o conjugado máximo.
  - Quanta resistência deve ser colocada em série com o rotor para produzir o conjugado máximo de partida?

Agora, o motor está funcionando a partir de uma fonte de 50 Hz e a tensão aplicada é ajustada de tal forma que, para qualquer conjugado, a onda de fluxo de entreferro tem a mesma amplitude que tinha quando operada a 60 Hz para o mesmo nível de conjugado.

- Calcule a tensão aplicada a 50 Hz.
- Calcule a velocidade na qual o motor irá desenvolver um conjugado igual ao seu valor nominal em 60 Hz, com seus anéis deslizantes curto-circuitados.

## Circuitos Trifásicos

A geração, transmissão e utilização de potências elevadas de energia elétrica CA envolve quase que invariavelmente um tipo de sistema ou circuito chamado *sistema ou circuito polifásico*. Nesse sistema, cada fonte de tensão consiste em um grupo de tensões que têm magnitudes e ângulos de fase relacionados entre si. Assim, um sistema de  $n$  fases emprega fontes de tensão que consistem tipicamente em  $n$  tensões substancialmente iguais em módulo e deslocadas entre si por um ângulo de fase de  $360^\circ / n$ . Um *sistema trifásico* emprega fontes de tensão que consistem tipicamente em três tensões substancialmente iguais em módulo e deslocadas entre si por ângulos de fase de  $120^\circ$ . Como possui importantes vantagens econômicas e operacionais, o sistema trifásico é de longe o mais comum e, conseqüentemente, neste apêndice, a ênfase será dada aos circuitos trifásicos.

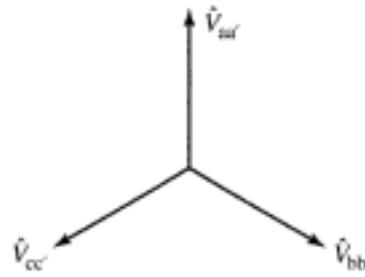
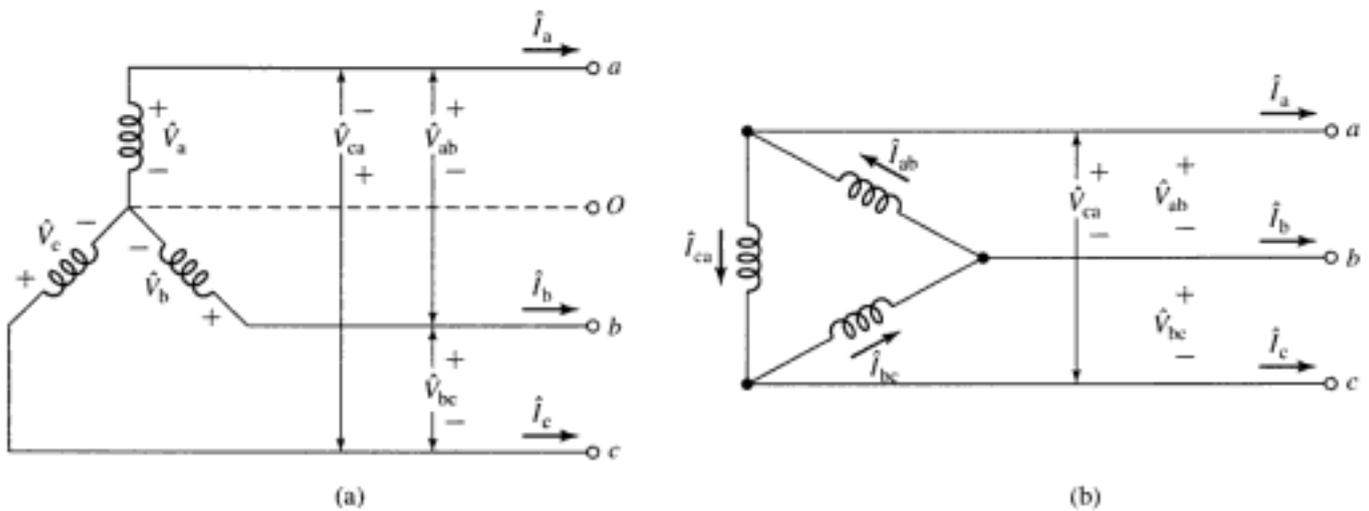
As três tensões individuais de uma fonte trifásica podem ser ligadas cada uma ao seu próprio circuito independente. Teríamos, então, três *sistemas monofásicos* separados. Alternativamente, como será mostrado na Seção A.1, ligações elétricas simétricas podem ser feitas entre as três tensões e circuitos associados para formar um sistema trifásico. É com essa última alternativa que estaremos preocupados aqui neste apêndice. Observe que a palavra *fase* agora tem dois significados distintos. Pode se referir a uma porção de um sistema ou circuito polifásico, ou, como na teoria familiar de circuitos de regime permanente, pode ser usada em relação ao deslocamento angular entre fasores de tensão ou corrente. Há pouca possibilidade de se confundir os dois significados.

### A.1 GERAÇÃO DE TENSÕES TRIFÁSICAS

Considere o gerador trifásico elementar de dois pólos da Fig. A.1. Na armadura há três bobinas  $aa'$ ,  $bb'$  e  $cc'$  cujos eixos estão deslocados no espaço de  $120^\circ$  entre si. Esse enrolamento pode ser representado esquematicamente como está mostrado na Fig. A.2. Quando o campo é excitado e posto a girar, tensões serão geradas nas três fases de acordo com a lei de Faraday. Se a estrutura do campo for projetada de modo que o fluxo esteja distribuído de forma senoidal em relação aos pólos, o fluxo que concatena qualquer uma das fases irá variar senoidalmente no tempo, e tensões senoidais serão induzidas nas três fases. Como está mostrado na Fig. A.3, essas três fases estarão deslocadas entre si de  $120^\circ$  elétricos no tempo em conseqüência das fases estarem deslocadas de  $120^\circ$  no espaço. O diagrama fasorial correspondente está mostrado na Fig. A.4. Em geral, a origem do tempo e o eixo de referência em diagramas como os das Figs. A.3 e A.4 são escolhidos com base na conveniência da análise.

Há duas possibilidades de utilizar as tensões geradas dessa forma. Os seis terminais  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$ ,  $c$  e  $c'$  do enrolamento trifásico podem ser ligados a três sistemas monofásicos independentes, ou as três fases do enrolamento podem ser interligadas e usadas para alimentar um

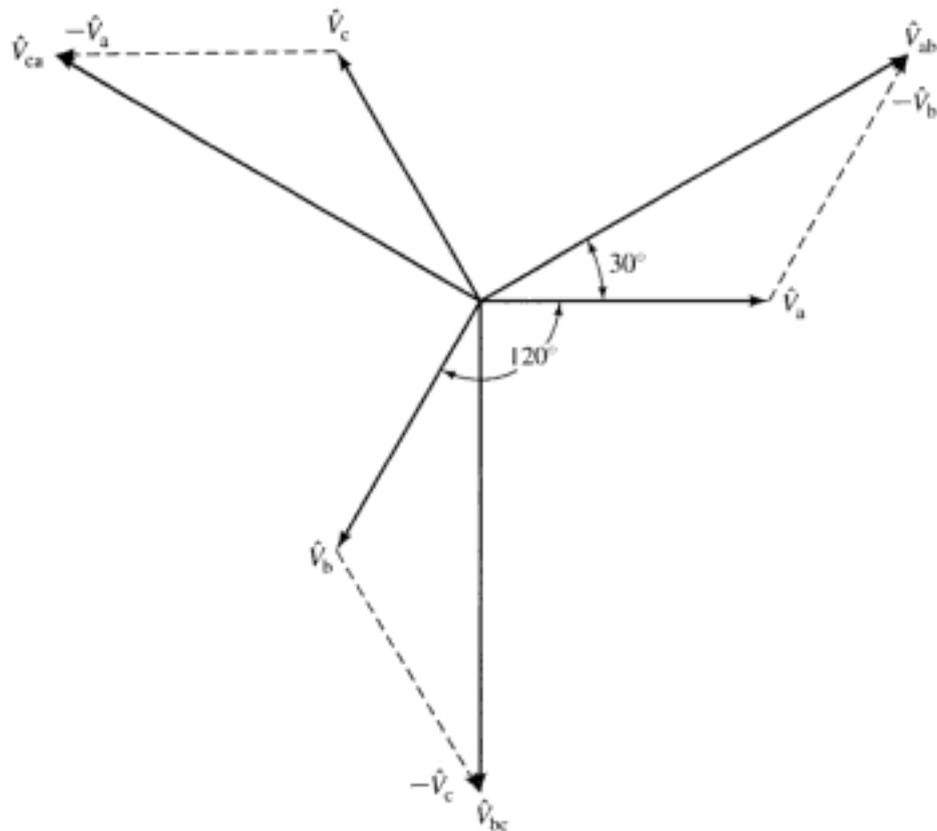



**FIGURA A.4** Diagrama fasorial das tensões geradas.

**FIGURA A.5** Conexões trifásicas: (a) conexão em Y e (b) conexão em  $\Delta$ .

As três tensões de fase das Figs. A.3 e A.4 são iguais e defasadas de 120 graus, o que é uma característica geral de um *sistema trifásico equilibrado*. Além disso, em um sistema trifásico equilibrado, a impedância de qualquer uma das fases é igual a de qualquer outra das duas outras fases, de modo que as correntes de fase resultantes são iguais e defasadas entre si de 120 graus. Do mesmo modo, potências ativas iguais e potências reativas iguais circulam em cada fase. Um *sistema trifásico desequilibrado*, no entanto, pode estar desequilibrado de uma ou mais formas. As tensões de fonte podem estar desequilibradas em magnitude ou em fase ou as impedâncias de fase podem não ser iguais. Observe que *apenas sistemas equilibrados são tratados neste apêndice, e nenhum dos métodos desenvolvidos ou as conclusões obtidas aplicam-se a sistemas desequilibrados*. A maioria das análises são conduzidas supondo que o sistema esteja equilibrado. Muitas cargas industriais são trifásicas e, portanto, inerentemente equilibradas. Quando cargas monofásicas são alimentadas a partir de uma fonte trifásica, esforços bem definidos são realizados para manter o sistema trifásico em equilíbrio, atribuindo cargas monofásicas aproximadamente iguais a cada uma das três fases.

## A.2 TENSÕES, CORRENTES E POTÊNCIAS TRIFÁSICAS

Quando as três fases do enrolamento da Fig. A.1 são ligadas em Y, como na Fig. A.5a, o diagrama fasorial das tensões é o da Fig. A.6. A *ordem das fases* ou a *seqüência das fases* na Fig. A.6 é *abc*; isto é, a tensão da fase *a* atinge o seu máximo  $120^\circ$  antes que a tensão da fase *b*.



**FIGURA A.6** Diagrama fasorial de tensões para um sistema ligado em Y.

As tensões trifásicas  $\hat{V}_a$ ,  $\hat{V}_b$  e  $\hat{V}_c$  são chamadas *tensões de fase*. As três tensões  $\hat{V}_{ab}$ ,  $\hat{V}_{bc}$  e  $\hat{V}_{ca}$  são chamadas *tensões de linha\**. O uso da notação de duplo índice na Fig. A.6 simplifica grandemente a tarefa de se desenhar o diagrama completo. Os índices indicam os pontos entre os quais a tensão é determinada. Por exemplo, a tensão  $\hat{V}_{ab}$  é calculada como  $\hat{V}_{ab} = \hat{V}_a - \hat{V}_b$ .

Pela lei das tensões de Kirchhoff, a tensão de linha  $\hat{V}_{ab}$  é

$$\hat{V}_{ab} = \hat{V}_a - \hat{V}_b = \sqrt{3} \hat{V}_a \angle 30^\circ \quad (\text{A.1})$$

como está mostrado na Fig. A.6. De modo similar,

$$\hat{V}_{bc} = \sqrt{3} \hat{V}_b \angle 30^\circ \quad (\text{A.2})$$

e

$$\hat{V}_{ca} = \sqrt{3} \hat{V}_c \angle 30^\circ \quad (\text{A.3})$$

Essas equações mostram que *o módulo da tensão de linha é  $\sqrt{3}$  vezes a tensão de fase*.

Quando as três fases são ligadas em  $\Delta$ , o respectivo diagrama fasorial de correntes está mostrado na Fig. A.7. As correntes  $\Delta$  são  $\hat{I}_{ab}$ ,  $\hat{I}_{bc}$  e  $\hat{I}_{ca}$ . Pela lei das correntes de Kirchhoff, a corrente de linha  $\hat{I}_a$  é

$$\hat{I}_a = \hat{I}_{ab} - \hat{I}_{ca} = \sqrt{3} \hat{I}_{ab} \angle -30^\circ \quad (\text{A.4})$$

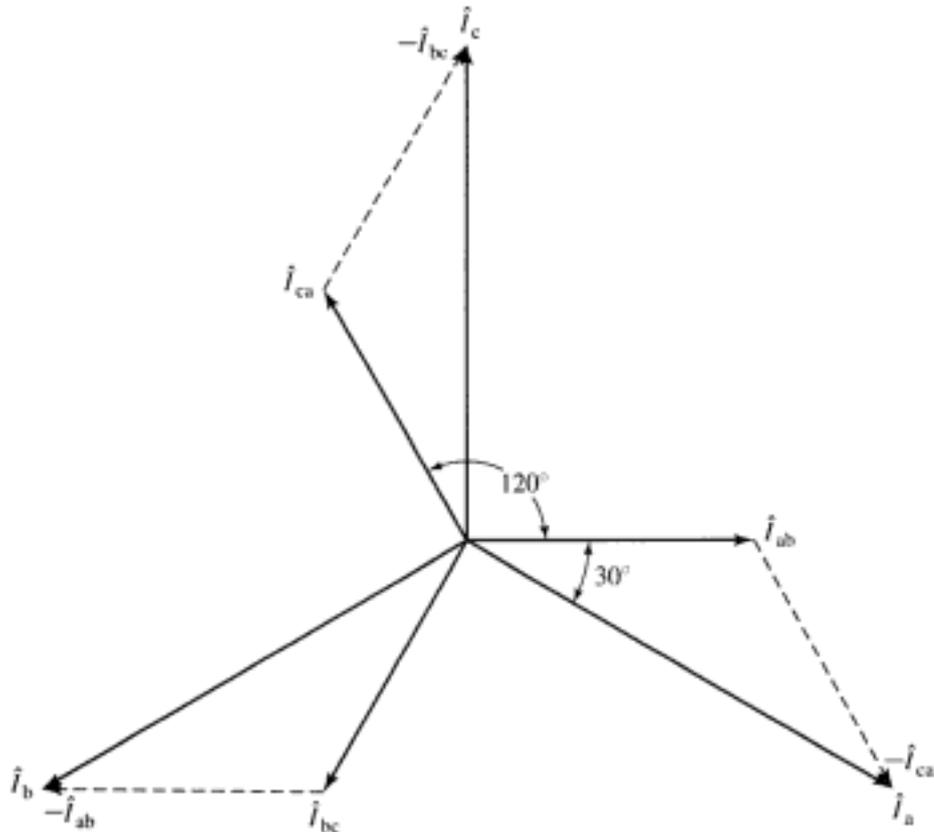
como se pode ver no diagrama fasorial da Fig. A.7. De modo semelhante,

$$\hat{I}_b = \sqrt{3} \hat{I}_{bc} \angle -30^\circ \quad (\text{A.5})$$

e

$$\hat{I}_c = \sqrt{3} \hat{I}_{ca} \angle -30^\circ \quad (\text{A.6})$$

\* N. de T.: Na literatura, ocorrem também as expressões tensão linha-neutro e tensão linha-linha para tensões de fase e de linha, respectivamente.



**FIGURA A.7** Diagrama fasorial de correntes para a conexão em  $\Delta$ .

Expressando em palavras, as Equações A.4 a A.6 mostram que, em uma conexão em  $\Delta$ , o módulo da corrente de linha é  $\sqrt{3}$  a da corrente  $\Delta$ . Evidentemente, as relações entre as correntes  $\Delta$  e as correntes de linha de uma conexão em  $\Delta$  são similares àquelas entre as tensões de fase e de linha de uma conexão em Y.

Tomando para origem do tempo o ponto positivo máximo da onda de tensão da fase  $a$ , as tensões de fase instantâneas das três fases são

$$v_a(t) = \sqrt{2} V_{ef} \cos \omega t \quad (\text{A.7})$$

$$v_b(t) = \sqrt{2} V_{ef} \cos (\omega t - 120^\circ) \quad (\text{A.8})$$

$$v_c(t) = \sqrt{2} V_{ef} \cos (\omega t + 120^\circ) \quad (\text{A.9})$$

em que  $V_{ef}$  é o valor eficaz da tensão de fase. Quando as correntes de fase estão deslocadas de um ângulo  $\theta$  das respectivas tensões de fase, as correntes de fase instantâneas são

$$i_a(t) = \sqrt{2} I_{ef} \cos (\omega t + \theta) \quad (\text{A.10})$$

$$i_b(t) = \sqrt{2} I_{ef} \cos (\omega t + \theta - 120^\circ) \quad (\text{A.11})$$

$$i_c(t) = \sqrt{2} I_{ef} \cos (\omega t + \theta + 120^\circ) \quad (\text{A.12})$$

em que  $I_{ef}$  é o valor eficaz da corrente de fase.

A potência instantânea de cada fase torna-se então

$$p_a(t) = v_a(t)i_a(t) = V_{ef} I_{ef} [\cos (2\omega t + \theta) + \cos \theta] \quad (\text{A.13})$$

Aqui,  $R_p$  é a resistência por fase. A potência total trifásica  $P$  é

$$P = 3P_p \quad (\text{A.19})$$

De modo similar, para uma potência reativa  $Q_p$  por fase e uma potência reativa trifásica  $Q$ , tem-se

$$Q_p = V_{ef} I_{ef} \operatorname{sen} \theta = I_p^2 X_p \quad (\text{A.20})$$

e

$$Q = 3Q_p \quad (\text{A.21})$$

em que  $X_p$  é a reatância por fase.

Os volts-ampères (potência aparente) por fase  $(VA)_p$  e os volts-ampères trifásicos totais VA são

$$(VA)_p = V_{ef} I_{ef} = I_{ef}^2 Z_p \quad (\text{A.22})$$

$$VA = 3(VA)_p \quad (\text{A.23})$$

Nas Equações A.18 e A.20,  $\theta$  é o ângulo entre a tensão de fase e a corrente de fase. Como no caso monofásico, é dado por

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{X_p}{R_p} = \operatorname{arccos} \frac{R_p}{Z_p} = \operatorname{arcsen} \frac{X_p}{Z_p} \quad (\text{A.24})$$

O fator de potência de um sistema trifásico equilibrado é, portanto, igual ao de qualquer sistema monofásico.

### A.3 CIRCUITOS COM LIGAÇÕES EM Y E $\Delta$

Três exemplos específicos são dados para ilustrar os detalhes de cálculo de circuitos ligados em Y e em  $\Delta$ . Comentários explicativos de aplicação genérica foram acrescentados às soluções.

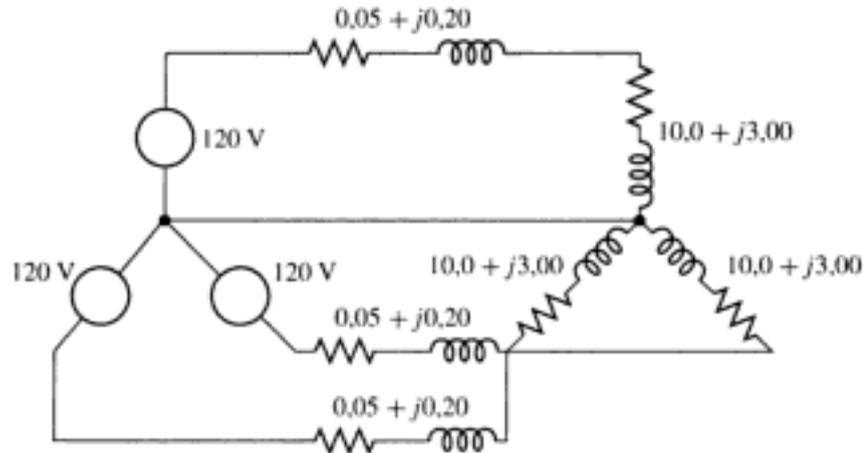
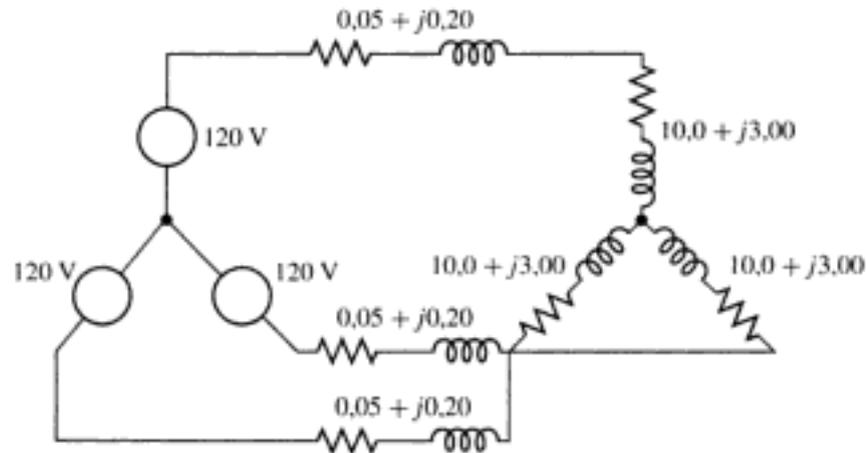
#### EXEMPLO A.1

A Fig. A.9 mostra um sistema de transmissão de 60 Hz que consiste em uma linha de impedância  $Z_l = 0,05 + j0,20 \Omega$  e, no lado de recepção da mesma, a impedância equivalente é  $Z_L = 10,0 + j3,00 \Omega$ . A impedância do condutor de retorno deve ser considerada zero.

- a. Calcule a corrente de linha  $I$ ; a tensão de carga  $V_L$ ; as potências ativa, reativa e aparente da carga; e as perdas de potência ativa e reativa na linha.

Suponha agora que três sistemas idênticos a esse devam ser construídos para abastecer três cargas idênticas a essa. Em vez de desenhar os diagramas, um debaixo do outro, desenhe-os na forma mostrada na Fig. A.10, que é naturalmente a mesma do ponto de vista elétrico.

- b. Para a Fig. A.10, forneça a corrente em cada linha; a tensão em cada carga; as potências ativa, reativa e aparente fornecidas a cada carga; as perdas de potência ativa e reativa em cada um dos três sistemas de transmissão; as potências totais ativa, reativa e aparente fornecidas às cargas; e as perdas de potências ativa e aparente nos três sistemas de transmissão.


**FIGURA A.11** Circuito para o Exemplo A. 1, partes (c) a (e).

**FIGURA A.12** Circuito para o Exemplo A. 1, parte (f).

$$Q_L = I^2 X_L = (11,4)^2 (3,00) = 390 \text{ var}$$

$$(\text{VA})_L = I^2 |Z_L| = (11,4)^2 \sqrt{(10,0)^2 + (3,00)^2} = 1360 \text{ VA}$$

$$P_1 = I^2 R_1 = (11,4)^2 (0,05) = 6,5 \text{ W}$$

$$Q_1 = I^2 X_1 = (11,4)^2 (0,20) = 26 \text{ var}$$

b. Obviamente, os quatro primeiros têm os mesmos valores da parte (a).

$$\text{Potência total} = 3P_L = 3(1300) = 3900 \text{ W}$$

$$\text{Potência reativa total} = 3Q_L = 3(390) = 1170 \text{ var}$$

$$\text{Potência aparente total} = 3(\text{VA})_L = 3(1360) = 4080 \text{ VA}$$

$$\text{Perdas de potência total} = 3P_1 = 3(6,5) = 19,5 \text{ W}$$

$$\text{Perdas de potência reativa} = 3Q_1 = 3(26) = 78 \text{ var}$$

c. Os resultados obtidos na parte (b) não se alteram com essa modificação. A tensão das partes (a) e (b) é agora a tensão de fase. A tensão de linha é

$$\sqrt{3}(119) = 206 \text{ V}$$

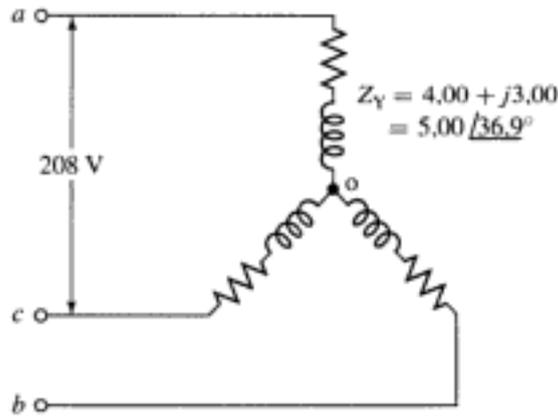


FIGURA A.13 Circuito para o Exemplo A.2.

**EXEMPLO A.3**

Três impedâncias de valor  $Z_{\Delta} = 12,00 + j9,00 = 15,00 \angle 36,9^{\circ} \Omega$  são ligadas em  $\Delta$ , como está mostrado na Fig. A.14. Para tensões equilibradas de linha de 208 V, encontre a corrente de linha, o fator de potência e as potências ativa, reativa e aparente.

**■ Solução**

A tensão em qualquer um dos ramos do  $\Delta$ ,  $V_{\Delta}$ , é igual à tensão de linha  $V_{\text{linha}}$ , que é igual a  $\sqrt{3}$  vezes a tensão de fase  $V$ . Conseqüentemente,

$$V = \frac{V_{\text{linha}}}{\sqrt{3}} = \frac{208}{\sqrt{3}} = 120 \text{ V}$$

e a corrente no  $\Delta$  é dada pela tensão de linha dividida pela impedância  $\Delta$ , ou seja,

$$\hat{I}_{\Delta} = \frac{V_{\text{linha}}}{Z_{\Delta}} = \frac{208}{15,00 \angle 36,9^{\circ}} = 13,87 \angle -36,9^{\circ} \text{ A}$$

O fator de potência é igual a  $\cos \theta = \cos (-36,9^{\circ}) = 0,80$  indutivo

Da Equação A.4, a corrente de fase é igual a

$$I = \sqrt{3} I_{\Delta} = \sqrt{3}(13,87) = 24,0 \text{ A}$$

Também

$$P = 3P_{\Delta} = 3I_{\Delta}^2 R_{\Delta} = 3(13,87)^2(12,00) = 6910 \text{ W}$$

$$Q = 3Q_{\Delta} = 3I_{\Delta}^2 X_{\Delta} = 3(13,87)^2(9,00) = 5180 \text{ var}$$

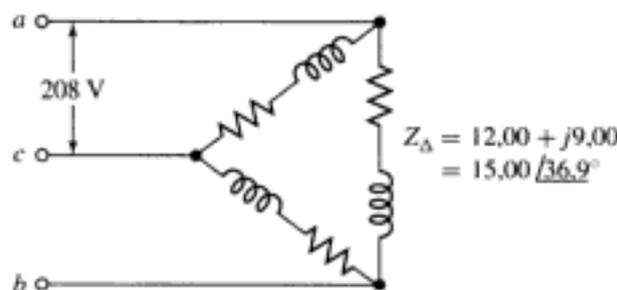


FIGURA A.14 Circuito para o Exemplo A.3.

# MÁQUINAS ELÉTRICAS

A. E. Fitzgerald  
Charles Kingsley, Jr.  
Stephen D. Umans

6ª Edição

Totalmente atualizada, a 6ª edição de **Máquinas Elétricas** mantém a ênfase em princípios fundamentais e raciocínio físico, a marca registrada deste texto clássico. Este livro serve de introdução às máquinas elétricas, à eletrônica de potência e ao controle de máquinas. Cada capítulo contém exemplos numéricos para ilustrar conceitos importantes. Problemas práticos são, em muitos casos, acompanhados das soluções, oferecendo um reforço adicional.

Destques desta edição:

- Um capítulo sobre eletrônica de potência introduz os componentes básicos dos circuitos de potência assim como configurações típicas de circuitos de retificação e inversão, encontrados em acionamentos de motor modernos.
- Um novo capítulo sobre o controle de velocidade e conjugado em motores CC e CA apresenta os conceitos básicos do acionamento de motores em máquinas CC e CA. Inclui uma discussão sobre a técnica de controle por campo orientado, amplamente utilizada em sistemas de acionamento modernos.
- Capítulo sobre motores mono e bifásicos inclui uma formulação analítica generalizada para as máquinas bifásicas de indução não simétricas. Essa formulação é aplicada então ao caso genérico de um motor de indução monofásico com os enrolamentos principal e auxiliar operando.
- O popular software interativo MATLAB® foi introduzido em exemplos e problemas práticos.

**Máquinas Elétricas** é adequado para ser utilizado por alunos de graduação e de disciplinas introdutórias de pós-graduação.



artmed  
EDITORA  
RESPEITO PELO CONHECIMENTO

